
LE REPÉRAGE AU COLLÈGE ET AU LYCÉE : DES ENJEUX D'APPRENTISSAGE AU CROISEMENT DES CADRES NUMÉRIQUE, GÉOMÉTRIQUE, ALGÈBRE ET FONCTIONNEL (PREMIÈRE PARTIE)

Véronique CERCLÉ¹

Lycée de Pézenas, IREM de Montpellier

Aurélie CHESNAIS²

Université de Montpellier, Laboratoire LIRDEF (EA 3749), IREM de Montpellier

Louise NYSSSEN³

Université de Montpellier, laboratoire IMAG, IREM De Montpellier

Résumé. Cet article en deux parties vise à rendre compte du travail mené au sein du groupe « Didactique » de l'IREM de Montpellier depuis cinq ans⁴. Les difficultés d'apprentissage et d'enseignement autour du thème de la notion d'équation de droite au lycée ont conduit le groupe à une réflexion sur la notion de repérage et de plan cartésien. Cette première partie propose tout d'abord de revenir sur la construction mathématique « usuelle » des objets droite graduée, repère et plan cartésien pour mettre en évidence les choix d'axiomatics auxquels ils correspondent. Ensuite, sur la base d'éléments historiques et épistémologiques sont dégagés des enjeux didactiques, liés à l'apprentissage et l'enseignement de ces objets. Il s'agit ainsi d'éclairer certains choix faits par l'institution scolaire, les manuels ou des choix qui peuvent être faits par les enseignants dans les classes ainsi que leurs conséquences potentielles pour les élèves. Cette réflexion nous mène notamment à mettre en évidence que les questions didactiques associées à ces objets ne se limitent pas à des questions de « représentation », même si celles-ci sont cruciales. La deuxième partie de l'article prolongera la réflexion en proposant une analyse des programmes scolaires à la lumière des enjeux didactiques précités, ainsi qu'une présentation de situations d'enseignement pour le collège et le lycée permettant, selon nous, de prendre en charge en partie ces enjeux dans les classes.

Mots-clés. Droite graduée, repérage, plan cartésien, cadres et registres de représentation.

Abstract. This paper in two parts aims to reflect the work conducted by the group "Didactique" of the IREM of Montpellier for five years. Learning and teaching difficulties about linear equations in high school led the group to reflect on the Cartesian plane and coordinates systems. This first part intends to first examine the mathematical usual construction of graduated lines, coordinate systems and cartesian plane in order to highlight the underlying axiomatic choices. Then, on the basis of historical and epistemological elements, are presented didactical issues. This reflection should provide deeper inside into choices made by the institution, textbooks' authors, or teachers in their classrooms, as well as their potential impact on students' learning. It leads to highlight that didactical issues related to these objects cannot be reduced to issues of visually representing objects, even if these last ones are crucial. The second part of the article extends the reflection by providing an analysis of official instructions in the light of the above-mentioned didactical issues, as well as a presentation of some learning situations for middle school and high school students which may allow to handle (partly) these issues in classrooms in a profitable

¹ veronique.cercle@ac-montpellier.fr

² aurelie.chesnais@umontpellier.fr

³ louise.nyssen@umontpellier.fr

⁴ Outre les auteurs de cet article, ont participé au groupe : Aurélien Destribats, professeur au collège Les Garrigues de Montpellier, Emeric Gosselin et Jérôme Leberre, tous deux professeur au Lycée Dhuodat de Nîmes.

manner.

Keywords. Systems of coordinates, graduate lines and scales, Cartesian plan, settings and registers of representation.

Introduction

Cet article en deux parties⁵ vise à rendre compte du travail mené au sein du groupe « Didactique » de l'IREM de Montpellier depuis cinq ans⁶. Le sujet initial de notre travail était l'enseignement du thème des *équations de droites* en seconde, particulièrement problématique pour les élèves comme pour les enseignants. Cette notion apparaît comme un « nœud » des programmes de seconde, au croisement d'enjeux d'apprentissage liés à l'entrée dans la géométrie repérée, au travail sur les fonctions, sur les nombres et sur l'algèbre. L'élaboration d'un questionnaire soumis à deux cents élèves de seconde (Cerclé et al., 2016) a permis de mieux identifier certains obstacles à son apprentissage : ces obstacles se sont avérés liés aux conceptions de la notion d'*équation* qu'ont les élèves en entrant en seconde, mais aussi à leurs conceptions des *objets géométriques* en jeu (notamment les points et droites), des *fonctions* (en particulier les fonctions affines), ou encore à leur maîtrise du *repère cartésien* et, au-delà, du *plan cartésien*.

Les équations de droites apparaissent alors comme un objet emblématique au croisement de plusieurs « cadres »⁷ (numérique, géométrique, algébrique et analytique). Ces croisements se réalisent notamment via le travail dans le « registre de représentation sémiotique »⁸ du *graphique* (représentant le plan muni d'un repère cartésien). Ces premiers résultats nous ont ainsi amenés à nous intéresser plus spécifiquement au repère cartésien, devenu incontournable dans presque tous les domaines mathématiques travaillés au lycée, notamment depuis qu'avec les programmes de 2009 la géométrie est devenue essentiellement de la « géométrie repérée » dès la seconde. Ainsi, au lycée, le repère cartésien intervient en géométrie, mais aussi en analyse pour la représentation graphique des fonctions, et même en statistiques et probabilités, pour représenter des données ; le thème de l'algorithmique lui-même peut être abordé en lien avec des questions de coordonnées cartésiennes (algorithme de calcul de distance, algorithme de tracé d'une courbe point par point, ...). Par ailleurs, le repère cartésien — et, en amont, la (demi-)droite graduée —, apparaissent dans les programmes scolaires comme un « registre de représentation » d'objets issus de différents cadres. Or les constats précédents nous inclinent à penser que, plutôt que de considérer le repère cartésien comme un « simple » registre de représentation — le repère étant seulement « posé » sur le plan en quelque sorte —, il s'agit d'envisager le plan cartésien comme un objet mathématique complexe, incluant lui-même des objets nouveaux (comme par exemple le *point repéré* ou encore la *droite réelle*) créés par le croisement de plusieurs cadres. Le plan cartésien est associé à un registre de représentation privilégié, le registre graphique, mais,

⁵ La seconde partie sera publiée dans un numéro ultérieur.

⁶ Des travaux intermédiaires du groupe ont fait l'objet d'ateliers au colloque de la CORFEM en 2015 (Cerclé et al., 2016), en 2016 (Chesnais et al., 2018) et en 2018 (Cerclé & Nyssen, à paraître ; Chesnais & Destribats, à paraître).

⁷ Au sens de Douady, « un cadre est constitué des objets d'une branche des mathématiques, des relations entre les objets, de leurs formulations éventuellement diverses et des images mentales associées à ces objets et ces relations » (Douady, 1987).

⁸ Duval (1995) définit un registre de représentation sémiotique comme un système de signes permettant de manipuler des objets mathématiques. Par exemple, la représentation d'une fonction par sa courbe mobilise le registre graphique, tandis que sa représentation par une expression littérale mobilise le registre algébrique.

comme le pointe Duval, assimiler l'objet à sa représentation constitue un risque pour l'apprentissage, notamment pour appréhender la nature essentiellement conceptuelle des objets mathématiques. En effet, toute confusion entre objet et représentation « entraîne à plus ou moins long terme, une perte de compréhension » (Duval, 1993, p. 37). Notre hypothèse, étayée par les résultats au questionnaire cité précédemment (*ibid.*), est alors que certaines difficultés rencontrées par les élèves pourraient être liées à cette complexité du plan cartésien et au fait qu'elle serait, dans une certaine mesure, sous-estimée dans l'enseignement : par exemple la difficulté à comprendre la notion d'équation de droite ou encore à manipuler la notion de courbe représentative d'une fonction en lien avec l'expression algébrique de celle-ci, voire, plus largement, les difficultés à mobiliser, dans le cadre repéré, les connaissances géométriques qu'ils ont construites au collège dans le cadre de la géométrie « à la Euclide »⁹.

Élargissant nos réflexions pour prendre en considération ces croisements de cadres et de registres, nous nous sommes alors intéressés à la construction du repère cartésien en tant qu'objet mathématique, ainsi qu'aux liens que ces nouveaux objets (notamment le point repéré et la droite réelle) entretiennent et favorisent, entre nombres et objets géométriques, de la sixième au début du supérieur. Notre travail a essentiellement porté sur la question des apprentissages des élèves, en tentant d'identifier des difficultés et des leviers. Notre article vise ainsi à fournir des pistes aux enseignants pour enrichir le travail fait en classe autour du repérage et pour travailler la construction conceptuelle de ces objets avec les élèves, de façon à leur permettre d'en comprendre la nature et prendre en charge certaines difficultés. Nous considérons également que notre travail peut alimenter la formation des enseignants concernant les enjeux d'enseignement et d'apprentissage liés au plan cartésien et aux objets associés.

Nous proposons d'organiser cette première partie de l'article en trois sections. Tout d'abord, dans la section 1., nous revenons sur la construction mathématique du repère cartésien en proposant quelques éléments d'axiomatique qui permettent de le définir. Il s'agit ensuite (section 2.) de montrer que plusieurs axiomatiques sont possibles, du point de vue mathématique, et d'identifier des éléments d'analyse épistémologique concernant les potentialités et les nécessités auxquelles répond le repérage cartésien afin d'identifier (en section 3.) les enjeux didactiques qui en découlent. Cela vise ainsi à éclairer certains choix faits par l'institution¹⁰, par les manuels ou des choix qui peuvent être faits par les enseignants dans les classes ainsi que leurs conséquences potentielles pour les élèves.

La deuxième partie de cet article (à paraître dans un prochain numéro) proposera, en prolongement, une analyse des programmes scolaires à la lumière des enjeux didactiques présentés dans la présente première partie, ainsi qu'une présentation de situations d'enseignement pour le collège et le lycée permettant, selon nous, de prendre en charge en partie ces enjeux dans les classes. Ces situations peuvent aussi présenter un intérêt en formation d'enseignants, comme nous l'illustrerons.

Cet article s'adresse donc à un public large et on peut de ce fait en envisager plusieurs « niveaux de lecture ». Notamment, le lecteur y trouvera un nombre important de notes qui indiquent soit des précisions pour un lecteur non familier de certaines notions didactiques, soit des pistes de prolongements de la réflexion. La plupart de ces notes peuvent tout à fait être éludées dans une première lecture.

⁹ Bourguet (2016) montre par exemple la difficulté d'élèves de Première scientifique à mobiliser la définition du cercle en termes de distance pour trouver l'équation d'un cercle.

¹⁰ Pour autant que l'on peut les reconstituer à partir des préconisations officielles.

1. Construire mathématiquement la droite graduée, le repère et le plan cartésiens

Il s'agit dans cette section de revenir sur la définition et la construction mathématiques du plan cartésien, en s'intéressant aux objets « droite graduée » et « repère cartésien du plan ». L'objectif est de tenter de « dénaturiser » ces objets si familiers aux mathématiciens (enseignants de mathématiques compris) pour mieux en questionner ensuite les enjeux d'enseignement et d'apprentissage. Cette démarche s'appuie sur une réflexion outillée par les mathématiques et un point de vue épistémologique concernant les « nécessités » auxquelles répondent ces objets et ce qu'ils permettent de faire. Ces nécessités peuvent outiller l'élaboration de situations didactiquement cohérentes pour travailler ces objets dans les classes, c'est-à-dire des situations permettant de montrer les limites de certaines conceptions pour résoudre certains problèmes mathématiques et, de fait, les « raisons d'être » des notions mathématiques, contribuant ainsi à leur donner du sens.

Commençons par rappeler comment sont usuellement définis aujourd'hui mathématiquement la (demi-)droite graduée et le repère cartésien du plan, ainsi que certaines pratiques qui leurs sont associées. Nous pointerons ensuite quelques questions mathématiques que ces pratiques usuelles soulèvent, avant d'y apporter des éléments de réponses dans la partie suivante, en nous appuyant d'une part sur les nécessités auxquelles répond le repérage et, d'autre part, sur des éléments de construction de ces objets d'un point de vue mathématique.

1.1. Repérage usuel sur la droite et dans le plan

Nous nous plaçons pour le moment dans ce que Robert (1999) appelle la « géométrie à la Euclide », caractérisant par cette expression la géométrie visée au collège en France depuis les programmes de 1996 : il s'agit essentiellement de la géométrie d'Euclide¹¹ à laquelle on adjoint les transformations géométriques (dont on déduit les cas d'égalité des triangles) ainsi que la notion de mesure et, plus ou moins implicitement, les nombres réels. Ces écarts par rapport à la géométrie d'Euclide, qui peuvent paraître peu importants, ont toutefois des conséquences fondamentales sur la façon de considérer les nombres, les grandeurs et, de fait, les objets géométriques, comme la suite le montrera.

S'intéresser à la droite graduée et au plan cartésien suppose le choix d'un espace de dimensions respectives 1 (une droite) et 2 (un plan)¹² et d'un *repère*.

Droite graduée

La droite graduée en mathématiques est aujourd'hui « usuellement » définie comme une droite sur laquelle on fixe un *repère*, en choisissant arbitrairement deux points distincts de cette droite, souvent appelés O et I ; Le point O correspond à l'*origine* et le point I oriente la droite et fixe une *unité de longueur* OI . Notons que cela est équivalent à choisir une origine et un vecteur unitaire, mais sans faire appel à la notion de vecteur.

L'abscisse d'un point M de la droite correspond alors, pour les points situés sur la demi-droite

¹¹ La géométrie d'Euclide consiste à définir (implicitement) le plan comme un ensemble de points et des sous-ensembles remarquables appelés droites, dont quelques propriétés sont données par des axiomes.

¹² Le contenu de cette section s'étend facilement aux dimensions supérieures, mais les enjeux principaux que nous souhaitons mettre en évidence dans cet article étant déjà visibles aux dimensions 1 et 2, nous avons choisi de ne pas compliquer inutilement le texte.

$[OI)$, à la mesure, dans l'unité OI , de la longueur OM , et à l'opposé de cette mesure pour les points de l'autre demi-droite (figure 1). L'abscisse de I est alors 1. La longueur OM (voire parfois sa mesure, en amalgamant les grandeurs et leurs mesures, cf. ci-dessous) est aussi appelée *distance du point M à l'origine*.

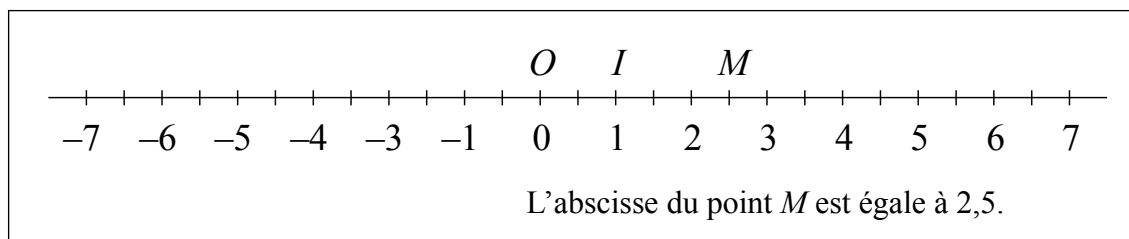


Figure 1 : Droite graduée usuelle.

Remarque : le mot « graduation » renvoie alors potentiellement à plusieurs choses : d'une part, au processus mathématique même de mise en bijection des points de la droite avec des nombres — on parle de « graduer la droite ». D'autre part, à l'action « matérielle » de tracer le ou les dessin(s) correspondant(s) : la mise en évidence (par des « petits traits ») d'un certain nombre de points « remarquables » de la droite (en général, ceux qui correspondent aux abscisses entières, voire à certaines fractions ou encore aux dixièmes, etc.) et qui implique principalement de « reporter » l'unité le long de la droite (par exemple avec un compas). Enfin, il peut désigner l'une des marques servant à mettre un de ces points en évidence — on parle par exemple de « la graduation 5 ».

Le procédé permet donc d'associer un nombre à un point de la droite. Dans le secondaire, il est implicite qu'il s'agit d'une mise en bijection de la droite avec \mathbb{R} , nous y reviendrons. Si l'on note R le repère et φ_R la bijection qui s'en déduit, M un point de la droite et x un réel, dire que x est l'abscisse du point M dans le repère R signifie que $\varphi_R(M) = x$, le point ainsi repéré étant noté $M(x)$.

Plan repéré

Il existe plusieurs façons de repérer des points dans le plan, notamment le repérage cartésien et le repérage polaire. Nous nous limitons ici à considérer le repérage cartésien, les points étant alors repérés par des couples de nombres réels, à l'aide de deux axes.

Le repère cartésien du plan « usuel » correspond au choix de deux droites sécantes, sur lesquelles on fixe un repère (au sens « usuel »), c'est-à-dire que l'on choisit le point d'intersection des deux droites comme origine commune de la graduation sur chacune d'elles et qu'on les *gradue* chacune de la manière « usuelle » décrite au paragraphe précédent. Ce choix est alors équivalent au choix de trois points (souvent notés O , I et J), ou encore, au choix d'un point (l'origine, souvent notée O) et de deux vecteurs (souvent notés \vec{i} et \vec{j}). Chaque point M du plan peut être repéré par un couple de nombres en projetant en un point M' le point M sur (OI) (resp. en M'' sur (OJ)), parallèlement à la direction (OJ) (resp. (OI)) (figure 2) : la première coordonnée de M est alors l'abscisse de M' sur la droite graduée (OI) , soit la mesure de la longueur OM' dans l'unité OI ; la deuxième coordonnée de M est l'abscisse de M'' sur la droite graduée (OJ) , soit la mesure de la longueur OM'' dans l'unité OJ . Ces deux nombres sont respectivement appelés *abscisse* et *ordonnée* de M dans le repère (O, I, J) , souvent notées x_M et y_M .

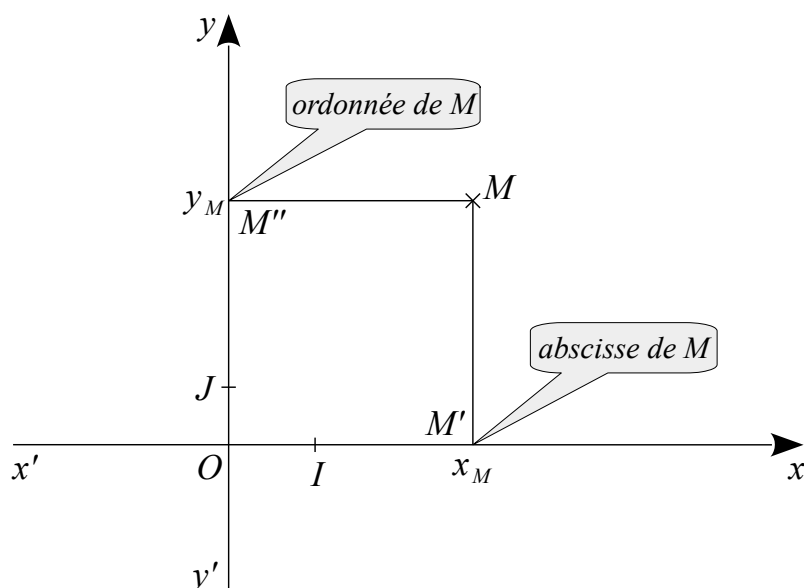


Figure 2 : Coordonnées d'un point dans un repère cartésien « classique ».

Comme pour la droite, le procédé lié au repère R permet d'établir une bijection φ_R entre le plan et \mathbb{R}^2 . Etant donné M un point du plan et $(x; y)$ un élément φ_R de \mathbb{R}^2 , dire que $(x; y)$ est le couple de coordonnées du point M dans le repère R signifie que $\varphi_R(M) = (x; y)$ et on note l'objet composite ainsi obtenu — le point repéré — $M(x; y)$.

Le repérage ou la mise en bijection d'objets géométriques et numériques

Le repérage établit une bijection entre des objets géométriques (droite ou plan, qui sont des ensembles de points) et des objets numériques (\mathbb{R} et \mathbb{R}^2 , qui sont des ensembles de nombres ou de couples de nombres). Nous allons maintenant explorer le rôle des grandeurs et des mesures dans la construction des bijections présentées aux paragraphes précédents.

Pour la droite graduée « usuelle » telle que définie ci-dessus, la bijection entre une demi-droite $[OI]$ et \mathbb{R}_+ s'obtient en associant à tout point M de $[OI]$ la mesure, dans l'unité OI , de la longueur OM . La notation OM (ou OI) renvoie ici à la *longueur* et non à sa *mesure*, qui est un nombre : deux segments ont même longueur lorsqu'ils sont superposables¹³. Cette grandeur OM est aussi la distance de O à M que l'on note parfois $d(O, M)$.

En considérant une demi-droite $[OI]$ comme un ensemble de points M , puis en notant $S_{[OI]}$

¹³ Rappelons ici que des grandeurs (ici des longueurs) peuvent être considérées indépendamment de leur mesure (et donc des nombres). Par exemple, il est possible de comparer deux longueurs par « comparaison directe » par une juxtaposition des objets considérés faisant coïncider l'une des extrémités de chacun d'entre eux ; si la juxtaposition n'est pas réalisable (notamment pour cause d'éloignement et d'impossibilité de déplacer les objets), l'utilisation d'un intermédiaire permet une comparaison dite « indirecte » (on peut penser à l'utilisation d'une ficelle pour prendre le gabarit de la longueur d'un premier objet, que l'on va ensuite superposer sur l'autre, ou encore au principe de comparaison de longueurs avec un compas). Ce n'est qu'à partir du moment où l'on dénombre une quantité d'unités (en utilisant une unité arbitraire, comme une allumette ou un pas, ou bien une unité conventionnelle) que l'on peut parler de mesure : celle-ci correspond alors au nombre d'unités que l'objet « contient » (Chevallard et Chambris (2015) parlent de « nombrement » des unités). On pourra consulter Chevallard et Bosch (2001, 2002) ou encore Brousseau (2002) pour davantage de détails sur la définition mathématique des concepts de grandeur et mesure.

l'ensemble des segments $[OM]$ pour M appartenant à $[OI]$, et L l'ensemble des longueurs¹⁴, on obtient ainsi :

$$\begin{array}{ccccccc} [OI] & \rightarrow & S_{[OI]} & \rightarrow & L & \rightarrow & \mathbb{R}_+ \\ M & \mapsto & [OM] & \mapsto & OM & \mapsto & Mes_{OI}(OM) \end{array}$$

Cette application établit une bijection entre $[OI]$ et \mathbb{R}_+ . On l'étend facilement en une bijection entre la droite (OI) et \mathbb{R} tout entier.

Le schéma de la figure 3 résume les rapports qui peuvent être ainsi établis entre des objets de différentes natures.

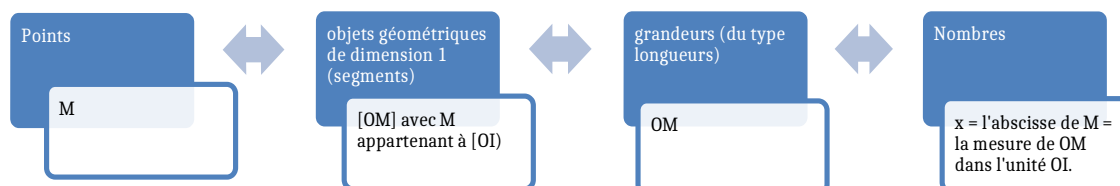


Figure 3 : Schéma résumant la mise en relation des objets de différentes natures par le repérage.

Pour graduer une droite, il y a trois objets en jeu : la droite, \mathbb{R} et la bijection qui les relie. Pour une construction rigoureuse d'un point de vue mathématique, il faut les définir tous les trois dans un ordre cohérent. Dans les paragraphes précédents, nous avons supposé connus la droite (ensemble de points « continu¹⁵ ») et \mathbb{R} (ensemble de nombres), et nous avons construit la bijection en utilisant la mesure ; \mathbb{R} étant supposé déjà construit permet d'utiliser la mesure, et de contourner la difficulté liée à l'incommensurabilité de certains segments entre eux, difficulté sur laquelle nous reviendrons plus loin en montrant qu'il est possible de définir une bijection de différentes façons.

On peut construire, de même, une bijection entre les points du plan P et des couples de réels dans un repère cartésien (O, I, J) , via des couples de longueurs, ce que l'on peut schématiser comme suit, en notant M un point, M' (resp. M'') son projeté sur (OI) (resp. (OJ)) suivant la direction de (OJ) (resp. (OI)).

$$\begin{array}{ccccccc} P & \rightarrow & L \times L & \rightarrow & \mathbb{R} \times \mathbb{R} \\ M & \mapsto & (OM'; OM'') & \mapsto & (Mes_{OI}(OM'); Mes_{OJ}(OM'')) \end{array}$$

Pour la droite, comme pour le plan, ces bijections sont ainsi construites en faisant intervenir des grandeurs (ici, des longueurs) d'objets géométriques. Les coordonnées sont obtenues comme des mesures de ces grandeurs. Ces bijections supposent et permettent alors des changements de cadre (au sens de Douady), entre cadre numérique et cadre géométrique, via les grandeurs et leurs mesures. Ce passage des grandeurs à leurs mesures, qui peut sembler aller de soi, demande en fait, comme nous le verrons plus loin, de questionner la nature des nombres réels et plus particulièrement des nombres irrationnels.

¹⁴ Cet ensemble est ainsi le quotient de l'ensemble des segments par la relation d'équivalence « être superposable à ».

¹⁵ Continuité qui se définit rigoureusement par la complétude de \mathbb{R} , comme nous le détaillons plus loin.

La question des représentations graphiques

La droite graduée et le plan cartésien sont associés de manière privilégiée, via la géométrie, au choix d'un registre de représentation, le registre « graphique ». Celui-ci associe lui-même deux registres de représentation sémiotique au sens de Duval : le registre de la visualisation (du dessin) et le registre discursif (les lettres, nombres et codages qu'on ajoute sur le dessin) (Duval, 2005). Toutefois, si la question de la représentation graphique joue un rôle prépondérant dans le travail dans le repère cartésien, elle ne nous semble être que l'arbre qui cache la forêt de la complexité et des potentialités du plan cartésien, ainsi que de cette articulation des cadres géométrique et numérique. Notons, comme le faisait déjà remarquer Perrin-Glorian (2004)¹⁶, qu'il est parfois difficile de dissocier, à propos du travail dans un repère cartésien, les questions didactiques liées respectivement aux changements de cadre de celles liées aux changements de registre, notamment du fait de la confusion possible entre les figures géométriques et leur dessin souvent fait à propos des objets géométriques (cf. Parzys, 1988 ; Laborde & Capponi, 1994), cas particulier de l'amalgame entre un objet et sa représentation dont le risque est pointé par Duval (1993) et évoqué dans l'introduction. les figures.

Les représentations graphiques associées à la droite graduée et au repère cartésien usuels sont fortement codifiées, de façon arbitraire mais conventionnelle et largement partagée : une droite graduée est en général représentée graphiquement par un trait rectiligne horizontal, I étant placé à droite de O (la droite est alors orientée « vers la droite »), les noms des points et les abscisses correspondantes étant respectivement écrits de part et d'autre de la droite¹⁷ ; un repère cartésien du plan est en général représenté de telle façon que la droite (OI) soit horizontale et orientée « vers la droite ». (OJ) est généralement orientée « vers le haut » (comme dans les figures 1 et 2 ci-dessus).

1.2. Questionner ces définitions usuelles

Ces définitions amènent à identifier trois enjeux didactiques principaux, que nous développons dans la suite de cet article :

Enjeu 1 : la géométrie repérée, une articulation de cadres

Le fait d'associer un repère à un objet géométrique (droite ou plan) a pour conséquence que de nouveaux objets apparaissent, constitutifs du *plan cartésien* : le « point repéré » ou encore la « droite réelle », objets qui se définissent au croisement des cadres numérique et géométrique. Par exemple, si le plan est muni d'un repère et que M est un point de coordonnées $(x ; y)$, le point repéré est noté $M(x ; y)$. L'ensemble des points repérés est le plan cartésien. Sur la droite graduée, le point d'abscisse x peut être noté $M(x)$. Cette notation fait apparaître les deux cadres

¹⁶ Perrin-Glorian (2004) propose d'illustrer que « dans l'analyse didactique, il n'est pas toujours aisé de savoir si on a affaire à un changement de cadres ou de registres » en considérant un problème de maximisation d'aires à l'aide d'un graphique cartésien. Elle montre alors que « le graphique peut jouer le rôle d'intermédiaire entre le cadre géométrique et le cadre numérique parce que les deux s'y retrouvent et qu'il porte des connaissances qui ne sont pas disponibles dans les autres cadres », ajoutant que « le passage au graphique [entendu ici comme représentation graphique] relève davantage d'un changement de cadres que d'un changement de registre ». Nous considérons que, dans la réflexion didactique, il faut séparer en réalité les deux étapes, en dissociant le changement de cadre (de la géométrie euclidienne classique à la géométrie analytique) du choix du registre de représentation graphique, les deux jouant un rôle distinct (même s'ils sont difficilement dissociables dans la résolution effective d'un problème).

¹⁷ Le fait d'inscrire les noms des points d'un côté donné — au-dessus de la droite par exemple — semble relever d'un choix arbitraire qui ne fait pas consensus (par exemple si on regarde des manuels scolaires).

(géométrique et numérique), et rend nécessaire, pour manipuler de tels objets, l'articulation du travail dans les deux cadres.

Ces notations réfèrent implicitement à la bijection φ_R évoquée précédemment entre les points et les nombres ou couples de nombres, qui elle-même dépend du repère R choisi. Cette bijection permet d'établir des équivalences entre des propriétés géométriques et des propriétés numériques. Par exemple, à partir des points repérés $A(1; -1)$, $B(3; 2)$ et $M(x; y)$, on peut établir l'équivalence « A, B et M sont alignés si et seulement si $3x - 2y = 5$ ».

Ces considérations plaident pour que le travail sur le repère cartésien soit considéré comme relevant du travail dans un cadre spécifique, celui de la *géométrie analytique*, ou encore *géométrie repérée*, pour lequel le registre graphique joue un rôle privilégié mais dans lequel les problématiques ne se limitent pas à une question de représentation (ou, pour reprendre les termes de Duval, à une question de *conversion* entre registres de représentation). Ces croisements de cadres sont porteurs de potentialités importantes, qu'il s'agisse dans un sens d'envisager une *représentation « spatiale » des nombres* ou, à l'inverse, de faire des *calculs sur des objets géométriques*. Faire de ces potentialités non seulement un enjeu d'apprentissage (pour que les élèves comprennent la fonction de ces objets) mais aussi un moyen d'appréhender la nature de ces objets constitue des enjeux didactiques importants.

Enjeu 2 : questionner les notions de longueur, de mesure et de distance

Les éléments présentés ci-dessus reposent sur les notions de longueur, de *mesure*, et de distance, que nous invitons à questionner. Elles sont jusque-là prises dans une acception élémentaire, considérée comme relativement « intuitive », associée à la géométrie « à la Euclide » et à la superposabilité, mais questionner les enjeux didactiques associés au repérage cartésien nécessite d'aller plus loin.

Par exemple, définir, comme on le fait dans le secondaire, le produit scalaire à partir de la longueur (considérée comme existant *a priori*) est contradictoire avec la logique d'une géométrie axiomatisée à partir de l'algèbre dans laquelle la notion de distance (et donc, de longueur), découle de la définition d'un produit scalaire (ce qui implique également qu'il existe plusieurs façons de définir des distances). La présentation de cette axiomatique relève du supérieur, mais il nous semble que les choix didactiques faits dans le secondaire peuvent plus ou moins concourir à favoriser la compréhension de cette construction axiomatique ou, au contraire, à lui faire obstacle. Par ailleurs, ne pas clarifier les choix qui sont faits peut mener à des difficultés dans certaines situations dès le secondaire, comme dans le cas du cercle représenté à la calculatrice que nous présentons dans la section 2.5.

Enjeu 3 : la continuité et l'existence de la bijection

Historiquement, l'aboutissement d'une construction mathématiquement rigoureuse des notions de nombre réel, de continuité, de complétude de l'ensemble des réels, etc. est lié à la mise en bijection de \mathbb{R} et des points d'une droite.

Comme nous le montrerons dans la suite de cet article, la réflexion sur la mise en bijection de \mathbb{R} (ensemble de nombres) avec une droite (ensemble de points) constitue également une des clés, du point de vue didactique, de la compréhension de notions complexes comme la continuité, la densité, l'irrationalité, etc. par la mise en correspondance de propriétés des nombres et des objets géométriques.

Le travail sur l'articulation de cadres, sur les notions de longueur et mesure et sur la bijection

entre les ensembles de points et les ensembles de nombres constituent donc à nos yeux des enjeux didactiques cruciaux pour l'enseignement des mathématiques dans le secondaire de plusieurs points de vue : pour questionner la construction des objets élémentaires des mathématiques, pour donner du sens à des notions telles que l'équation d'une courbe et le nombre réel, enfin pour exploiter le repérage pour résoudre des problèmes de géométrie.

Considérons maintenant des éléments mathématiques, en appui sur un questionnement épistémologique, susceptibles d'éclairer ces enjeux didactiques.

2. Point de vue épistémologique : quelles nécessités et quelles potentialités associées au repérage ?

Nous nous intéressons dans cette section aux nécessités et potentialités associées au repérage. Nous entendons par nécessités les problèmes dans lesquels le repérage apparaît comme la seule réponse possible ou, du moins, nettement la meilleure. Une partie des nécessités d'une notion mathématique peut être reconstruite à l'aide d'une étude épistémologique des conditions de son émergence historique (*i.e.* en étudiant les problèmes qui ont conduit, historiquement, à l'émergence de cette notion). Les potentialités désignent ce que le repérage *permet* de faire (ce qui englobe les nécessités, mais ne s'y réduit pas). Les nécessités et les potentialités peuvent servir de sources pour l'élaboration de situations d'apprentissages qui permettent de donner du sens à la notion, à condition de tenir compte du contexte de l'apprentissage (notamment de la manière dont la notion s'insère dans les programmes).

Comme nous l'avons indiqué précédemment, ces nécessités et potentialités peuvent alimenter le questionnement concernant les problèmes et les situations d'apprentissage susceptibles de permettre de donner du sens aux notions mathématiques concernées.

Le croisement du numérique et du géométrique, tel qu'il apparaît dans la construction de la droite numérique d'une part et du repère cartésien d'autre part, porte plusieurs types de potentialités et de nécessités, comme en atteste l'histoire de leurs constructions respectives. Cette diversité est liée au fait de considérer le mouvement du numérique vers le géométrique ou l'inverse, l'articulation des cadres ou des registres, et enfin la droite ou le plan.

La construction de la droite numérique et du plan cartésien tels qu'on les connaît et qu'on les manipule aujourd'hui est en effet le fruit d'une histoire complexe. Nous abordons ainsi successivement dans cette partie deux types de nécessités qui ont contribué historiquement à la construction de la notion de repérage, à savoir la question de l'algébrisation de la géométrie par Descartes et celle de la représentation graphique des nombres. Nous abordons ensuite les différentes façons de graduer une droite ou de repérer un plan et leurs intérêts respectifs par rapport aux différents types de nécessités et de potentialités du repérage.

2.1. De la géométrie aux grandeurs : l'algébrisation de la géométrie

Rappelons que Descartes est considéré comme le précurseur de la géométrie analytique, d'où le qualificatif « cartésien(ne)(s) » ajouté aujourd'hui usuellement à « coordonnées », « repère » ou « graphique ». Il est en effet le premier à identifier et à ériger en « méthode » le fait de transformer des problèmes de géométrie en problèmes de « calcul » sur des grandeurs.

Toutefois, une précision nous semble importante : chez Descartes, il s'agit de calculs purement algébriques sur des *grandeurs* (et non sur des mesures) et leurs rapports, dans la tradition

géométrique de l'époque, encore largement liée à la géométrie d'Euclide (Gardies, 2004). Ces grandeurs (longueurs, ou distances) sont même, dans les écrits de Descartes lui-même, assimilées aux objets géométriques (les segments) ; il évoque ainsi la « multiplication » de « lignes », les lettres qu'il emploie servant à désigner de manière indifférenciée les segments ou leur longueur : « que le segment de la ligne AB , qui est entre les points A et B , soit nommé x ; et que BC soit nommé y », puis plus loin « la distance qui est entre les points A et E est aussi donnée, et si on la nomme k [...] » (Descartes, cité par Deledicq, 2009).

Descartes est ainsi considéré comme l'« inventeur » de l'idée de coordonnées cartésiennes : l'idée selon laquelle tout point du plan (en réalité, il considère surtout les points d'une courbe donnée) est « repérable » par des grandeurs, elles-mêmes identifiées par des lettres. Ces grandeurs correspondent à la distance entre ce point et ses projetés (parallèlement à des directions arbitraires) sur deux droites sécantes. Les objets géométriques auxquels appartiennent ces points (des courbes, caractérisées par des propriétés géométriques) se trouvent ainsi caractérisés par les relations algébriques qui lient ces grandeurs. L'idée puissante et novatrice de Descartes est celle de caractériser algébriquement des objets géométriques par des grandeurs (mais pas encore par des nombres), ramenant ainsi des problèmes de géométrie à du calcul algébrique, grâce à la notion fondatrice d'équation d'un objet géométrique. Ce mouvement débouche sur une « algébrisation » de la géométrie qui initie le mouvement selon lequel, plus tard, certains considéreront que la géométrie n'est finalement qu'un pan de l'algèbre.

Il faut identifier aussi que, dans le travail de Descartes, ce qui prime est l'idée de co-variation de deux grandeurs, qui préfigure la notion de fonction¹⁸, même si, là encore, il ne s'agit que des prémises de la notion de fonction réelle telle qu'on l'entend aujourd'hui. La question des valeurs numériques prises par les grandeurs (via leur mesure) n'y est pas en jeu. Enfin, dans les travaux de Descartes, la notion de longueur est prise comme « préexistante », non questionnée, dans la tradition géométrique de l'époque. Le plan est ainsi considéré implicitement comme porteur d'une structure euclidienne, avec une distance « naturelle », comme chez Euclide. Cette idée « naturelle » de longueur est alors définie par la superposabilité des segments : la longueur apparaît comme classe d'équivalence des segments exactement superposables. Cette longueur est considérée comme « naturelle » car elle correspond à la longueur au sens « physique », usuel et quotidien du terme.

Les travaux de Descartes correspondent donc, dans notre schéma précédent, au fait de relier des objets géométriques (vus comme ensembles de points) à des grandeurs.

Toutefois, chez Descartes, l'association de ces grandeurs à des mesures (au sens de nombres) n'est pas en jeu : à l'instar des grecs, les rapports de grandeurs ne sont pas encore considérés comme des nombres, ceci n'advenant que plus tard, avec la construction rigoureuse des réels et la notion de mesure. Considérer que les lettres chez Descartes correspondent à des mesures (c'est-à-dire à des nombres réels) constitue un anachronisme¹⁹.

Les coordonnées cartésiennes telles qu'on les manipule aujourd'hui apparaissent alors comme le fruit d'un processus qui, s'il est initié par l'idée fondamentale et fondatrice de Descartes de caractériser un point par des distances à ses projetés sur deux droites sécantes, n'aboutit qu'avec

¹⁸ Gardies (2004) considère même que c'est là la véritable innovation du travail de Descartes sur la géométrie, car il considère alors des objets relevant de la logique du second ordre, préfigurant ainsi la notion de fonction.

¹⁹ Il s'agit cependant d'une « relecture » des travaux de Descartes très pratique pour être plus conforme à une vision moderne de ces objets — ce pas est franchi par de nombreux lecteurs de Descartes, dont Deledicq (2009).

la construction rigoureuse de l'ensemble des réels et la « numéricalisation » (Dhombres, 1978) de la géométrie grâce à la notion de mesure qui permet de « dépasser » la problématique de l'incommensurabilité.

Cela nous amène à nous intéresser à la construction de la droite numérique, en lien avec les notions de nombre réel, de continuité et de mesure.

2.2. Des nombres à leur représentation graphique, via la géométrie et la mesure : bijection entre \mathbb{R} et la droite

Si l'on s'intéresse à un autre aspect de la construction de la notion de repérage et des objets associés, et plus particulièrement à la droite graduée, la bijection entre \mathbb{R} et la droite vise non seulement à caractériser algébriquement des objets géométriques, mais également à fournir une *représentation* (au sens des registres de représentations sémiotiques) des nombres réels par des dessins d'objets géométriques, via la mesure de grandeurs associées. D'où l'idée de « droite numérique ». Le passage au registre graphique permet alors d'illustrer spatialement — par le dessin, en s'appuyant sur le rapport entre les objets géométriques et l'espace²⁰ — certaines propriétés des nombres, via les grandeurs et leurs mesures.

Ce processus correspond ainsi à l'ensemble de notre schéma (*cf.* figure 3), dans un mouvement plutôt de gauche à droite, et répond à la question : comment rendre visuels un nombre et des relations entre des nombres ?

Dans ses utilisations, les deux sens seront ensuite exploités. Par exemple, représenter graphiquement une fonction permet de rendre visuelles certaines de ses propriétés comme les variations ou les extrema ; à l'inverse, disposer de l'expression algébrique d'une fonction dont on observe une représentation graphique (*i.e.* le dessin d'une partie de sa courbe représentative, *cf.* plus loin) permet prédire par exemple son comportement à l'infini.

Cette mise en correspondance des nombres réels et des points d'une droite a contribué à la construction rigoureuse de la notion de nombre réel, qu'il s'agisse de celle de Dedekind ou de celle de Cantor (Vergnac & Durand-Guerrier, 2014). Ces constructions s'appuient sur une idée géométrique (spatiale), plus ou moins considérée comme « intuitive » de continuité d'un trait (on y retrouve bien le rôle de la représentation graphique des objets géométriques), tout en montrant les limites (Jadin *et al.*, 1994 ; Gardiès, 2004 ; Vergnac & Durand-Guerrier, *ibid.*): elle ne permet pas de différencier un ensemble de points denses dans la droite (notamment, l'ensemble des points correspondant à des segments commensurables²¹ entre eux) d'un ensemble *complet* ; donc elle ne permet pas de différencier la droite réelle et la droite rationnelle et ainsi l'ensemble des rationnels de l'ensemble des réels (notons que l'on peut même poser la question de la distinction avec l'ensemble des décimaux, comme le fait également Durand-Guerrier (2018) en appui sur Bronner (1997)). C'est ainsi qu'historiquement, la formalisation de la notion de nombre réel est associée à celle de l'idée de continuité (Jadin *et al.*, *ibid.*). C'est donc la mise en bijection de la droite avec l'ensemble des réels qui permet de considérer la droite comme un

²⁰ Ce que les programmes appellent parfois « représenter », mais il s'agit d'une restriction du sens que le verbe peut prendre dans la notion de « registre de représentation sémiotique » (Duval, 1995). Cet usage est à rapprocher de celui qui en est fait dans l'expression « représentation graphique d'une fonction », sur laquelle nous reviendrons plus loin.

²¹ Considérons en effet une droite repérée par deux points O et I . Représenter tous les points M de la demi-droite $[OI]$ tels que les segments $[OM]$ sont commensurables avec $[OI]$ revient à tracer les points « rationnels » de la droite.

ensemble de points « *continu* »²² (donc non dénombrable), approfondissant la notion de droite et la notion de nombre au sens de la géométrie d'Euclide et « résolvant » la question de l'incommensurabilité en associant un nombre à toute grandeur. En effet, il est tout d'abord facile d'identifier un ensemble de points de la droite que l'on peut mettre en bijection avec \mathbb{Q} en graduant la droite à l'aide des segments qui sont commensurables. Ensuite, on étend la graduation à l'ensemble des points de la droite, soit pour la mettre en bijection avec \mathbb{R} si on le suppose connu, soit pour définir \mathbb{R} . Dans ce cas, on utilise des propriétés topologiques de la droite. La construction de l'ensemble des réels et sa mise en bijection avec les points de la droite par la mesure permet alors en quelque sorte de « contourner la question de l'incommensurabilité » en associant un nombre à toute grandeur via l'idée de mesure²³.

Considérer la droite munie d'un repère met ainsi en correspondance des propriétés des nombres et des propriétés des objets géométriques : cela permet alors de ramener à un *calcul* sur des *nombres* (les abscisses) des questions liées à certaines propriétés des objets géométriques, ce qui représente un procédé très « économique ».

Toutefois, mettre en correspondance les points de la droite avec des nombres ne rend pas forcément nécessaire le recours à la mesure, comme nous le verrons au point suivant.

2.3. Utilité, nécessité et limites de la graduation de la droite à l'aide de la « mesure (usuelle) » des longueurs

L'un des intérêts majeurs du choix de la graduation usuelle de la droite est d'établir une correspondance entre des opérations sur les nombres et une représentation graphique, via leur interprétation géométrique : le premier exemple est que, sur la droite graduée, la différence entre deux abscisses rend compte de la distance entre les deux points correspondants, donc de la longueur d'un segment ; d'autres propriétés s'en déduisent facilement : par exemple, sur la droite graduée usuelle, l'abscisse du milieu d'un segment correspond à la moyenne arithmétique des abscisses de ses extrémités²⁴. A l'inverse, cela permet de penser la notion de « distance *entre deux nombres* » à partir de l'idée de distance (vue comme longueur) entre deux points.

Poussée à l'extrême, l'idée d'associer la droite graduée à la mesure des longueurs est ce qui peut faire assimiler la droite graduée à « *une abstraction d'une règle (instrument de géométrie)*²⁵, *de longueur infinie [qui] permet de visualiser et comprendre, en combinant réflexion et intuition, les propriétés des nombres réels, en particulier les nombres entiers ou rationnels.* » (Wikipédia). Notons que le fait d'envisager la droite graduée comme une règle graduée permet facilement d'envisager la correspondance des points avec des nombres décimaux²⁶, mais l'association à des

²² On entend ici continu comme « complet » au sens de la topologie.

²³ Et éviter ainsi la question de l'identification d'une mesure commune pour tout couple de grandeur : cela correspond au fait de considérer la mesure comme rapport entre deux grandeurs, et donc de considérer que deux grandeurs sont commensurables seulement si le rapport de l'une avec l'autre est rationnel.

²⁴ Notons que cette formule reste valable dans un espace de dimension quelconque, avec un repère cartésien « usuel ». Par ailleurs cette mise en correspondance peut s'étendre aux notions d'isobarycentre dans le cas de plusieurs points et même de barycentre si l'on considère la moyenne pondérée des abscisses.

²⁵ La « règle » à laquelle il est fait référence est manifestement la *règle graduée* (appelée aussi « double-décimètre » ou « triple-décimètre ») que l'on manipule à l'école et qui, en France est usuellement graduée de manière décimale, qui est alors davantage un instrument de mesure ; la règle en tant qu'un instrument de géométrie renverrait plutôt à la « règle » de la géométrie d'Euclide, outil théorique, non gradué, et associé à la notion d'alignement.

²⁶ Si l'on s'en tient à la règle graduée usuelle en France, le risque est même de se limiter aux décimaux à

nombres rationnels est plus difficile et encore davantage si l'on considère les réels. En effet, la règle graduée renvoie à une action matérielle de mesurage avec un instrument qui ne peut fournir, par principe, que des mesures décimales, avec une précision donnée, tandis qu'une mesure réelle ne peut être que « théorique »²⁷, obtenue *via* un raisonnement soutenu par des propriétés mathématiques. D'où probablement l'idée d'« abstraction » dans la définition proposée par Wikipédia. Toutefois, rappelons que le « saut » important²⁸ entre décimaux et réels a pour origine le passage à la limite sous-jacent et soulève donc d'importantes problématiques, notamment liées à l'idée d'infini.

Intéressons-nous maintenant à la question des autres possibilités de mise en bijection d'une droite avec l'ensemble des nombres réels que la droite graduée « usuelle ».

2.4 De l'utilité d'autres bijections entre une droite et l'ensemble des réels

Si l'on considère l'utilité de la droite graduée comme permettant de repérer les points d'une droite ou de représenter les nombres réels, la droite graduée usuelle apparaît comme un moyen relativement « naturel » et efficace. Toutefois, il ne s'agit pas d'une nécessité absolue, dans le sens où il existe beaucoup d'autres façons de mettre en bijection une droite avec les nombres réels (Cerclé et *al.*, 2019). En effet, n'importe quelle bijection entre \mathbb{R} et les points d'une droite permet de repérer ces points. On peut ainsi imaginer un positionnement quelconque des nombres réels sur la droite.

L'intérêt respectif des différentes bijections possibles repose dans la correspondance qu'elles établissent entre certaines propriétés des nombres et certaines propriétés des objets géométriques. Si une répartition « aléatoire » des réels ne présente que très peu d'intérêt, il est possible d'envisager d'autres moyens de repérage que la graduation « usuelle », permettant de mettre en correspondance d'autres propriétés des nombres avec d'autres propriétés des objets géométriques que celles prises en charge par la droite graduée usuelle.

A minima, s'il s'agit de représenter les nombres, on peut penser qu'une bijection respectant la relation d'ordre « est inférieur ou égal à » est intéressante. Mais l'intérêt de conserver (donc « représenter ») d'autres propriétés, comme celles liées à l'aspect cardinal et non seulement ordinal des nombres peut s'avérer utile. Ainsi, la graduation « usuelle » apparaît comme un moyen très efficace et très « naturel » : le nombre (l'abscisse) y correspond à un *nombre* (une quantité) d'unités, exploitant ainsi l'aspect cardinal du nombre, au-delà de son aspect ordinal : la représentation des propriétés cardinales des nombres est alors assurée par une grandeur, la

1 décimale, mais on peut supposer que l'étendre à des nombres décimaux avec un grand nombre de décimales est faisable moyennant un peu d'imagination, outillée souvent — dans les manuels notamment — par l'idée de loupe et l'itération du découpage en dixièmes. Notons qu'avec la règle graduée en pouces, l'association avec les rationnels serait plus facile.

²⁷ En reprenant la distinction entre « mesure empirique » et « mesure théorique » introduite par Chesnais et Munier (2016). La mesure théorique est celle que l'on obtient comme donnée ou par calcul et démonstration à partir de données. Par exemple, la longueur de la diagonale d'un carré de côté 1 a pour mesure théorique $\sqrt{2}$, mais cette valeur n'est pas accessible par le mesurage, qui donnerait 1,4. Par définition, la mesure théorique est réelle et exacte, tandis que la mesure empirique est nécessairement au mieux rationnelle et soumise à incertitude. Cette distinction est à rapprocher de la distinction entre dessin et figure en géométrie et plus globalement entre modèle (théorique) et réalité (matérielle).

²⁸ Il s'agit d'un saut à la fois du point de vue mathématique et dans la compréhension par un élève de la nature de ces nombres.

« longueur », via sa mesure. On a une correspondance entre la valeur absolue²⁹ et la mesure des distances : la valeur absolue définit une distance sur \mathbb{R} .

Toutefois, d'autres bijections, associées à d'autres fonctions mesure, peuvent présenter un intérêt pour la représentation graphique des nombres : si l'on pense par exemple à une échelle logarithmique ou semi-logarithmique³⁰ (figure 4), l'intérêt de ce type d'échelle repose essentiellement sur ce qu'il permet en termes de représentation graphique avantageuse de certaines données — en l'occurrence, un intérêt essentiel pour la représentation de nombres en croissance exponentielle. Cette bijection permet en outre d'associer le milieu d'un segment (au sens géométrique habituel) à la moyenne *géométrique* des abscisses de ses extrémités (et non plus la moyenne arithmétique comme pour la droite graduée usuelle).

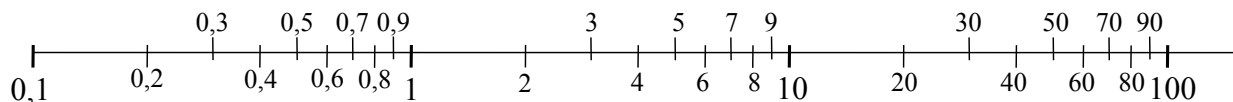


Figure 4 : Droite avec une échelle logarithmique à trois modules décimaux.

Mais l'écart entre les points ne correspond plus à la *différence* entre les nombres : l'aspect cardinal des nombres n'est plus mis de manière « directe » en correspondance avec la grandeur longueur des segments : la conservation des écarts entre les points correspond alors à une conservation des *rappports* entre leurs abscisses. Cela rend plus difficile (moins « naturel ») l'interprétation de ces écarts, mais présente d'autres avantages. On parle alors d'échelle, plutôt que de graduation, réservant ce dernier terme à une graduation « régulière » au sens de la graduation usuelle.

En réalité, n'importe quelle fonction strictement croissante sur \mathbb{R} fournit une bijection conservant l'ordre, mais aussi des propriétés liées à l'aspect cardinal du nombre : en effet, une telle bijection permet de définir une *distance* (au sens mathématique du terme³¹) entre les nombres (et, de fait, les points). Toutefois, cette distance n'est pas nécessairement en correspondance avec la distance usuelle, c'est-à-dire que la graduation, une fois représentée graphiquement, n'apparaît pas comme « régulière » au sens où deux segments superposables ne correspondent pas à la même distance entre nombres. Par exemple, si l'on considère la fonction cube, on peut obtenir une graduation en fixant une origine et en graduant la droite avec un pas fixe ; une distance de x pas par rapport à l'origine correspond alors à l'abscisse x^3 (ou $-x^3$ selon le sens du déplacement). La figure 5 présente un autre exemple d'une telle droite graduée.

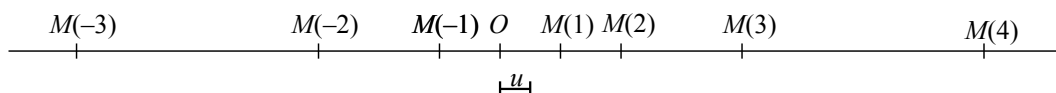


Figure 5 : Droite graduée de telle façon que le point d'abscisse x est à la distance $2^{|x|}u$ de l'origine O (à droite ou à gauche de l'origine selon le signe de x).

Remarque : pour la droite graduée usuelle, la distance — au sens mathématique — entre les

²⁹ Qui est le cas particulier en dimension 1 de la formule généralisée de la distance euclidienne (racine carrée de la somme des carrés des différences).

³⁰ Éventuellement étendue pour ne pas repérer qu'une demi-droite.

³¹ C'est-à-dire une fonction de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}_+ qui vérifie les propriétés de symétrie, de séparation et l'inégalité triangulaire.

nombre (les abscisses des points) correspond à la distance au sens physique, c'est-à-dire la distance intuitive (« naturelle ») de la géométrie euclidienne classique³² et qui correspond à une appréhension « intuitive » de la grandeur *longueur* dans l'espace « physique » qui nous entoure. La perception de régularité ou de non-régularité d'une graduation est alors liée à sa représentation graphique sur une feuille, dans l'espace de laquelle la distance intuitive est toujours sous-jacente.

Lire des échelles non usuelles oblige ainsi à mettre en relation de façon beaucoup plus complexe la distance « physique » (sur la représentation) et la distance mathématique définie par cette échelle. Par exemple, il peut être difficile, sur la droite graduée ci-dessus d'estimer la position du point d'abscisse 1,5. Mais cela permet ainsi, de fait, de distinguer les deux et pouvoir envisager la notion de mesure au sens mathématique, indépendamment de la distance physique.

2.5. Repérage dans le plan

La notion de repérage dans le plan s'appuie sur celle de droite graduée, mais présente aussi certaines spécificités.

Pour construire le repérage dans le plan sur la base du repérage sur une droite graduée, il est nécessaire de distinguer deux problématiques : d'une part l'effet du choix de la graduation sur chacun des axes, d'autre part la mise en lien des deux droites. Par ailleurs, il faut considérer, dans les usages du repère, le fait de chercher à représenter des nombres et le fait de « numériser » des propriétés géométriques, ainsi que les relations entre ces deux usages.

Le choix de la graduation sur chaque axe et l'usage pour la représentation

De la même manière que pour la droite graduée, n'importe quelle bijection entre \mathbb{R} et chacun des axes conviendrait pour repérer de façon univoque chaque point du plan par un couple de nombres. Les axes d_1 et d_2 étant fixés (deux droites sécantes) et les bijections f_1 et f_2 données, on peut en effet définir le couple (l'élément de \mathbb{R}^2) des coordonnées d'un point M du plan par le fait que la première coordonnée de M est l'abscisse (donnée par f_1) du projeté de M sur d_1 parallèlement à d_2 , et la seconde est l'abscisse (donnée par f_2) du projeté de M sur d_2 parallèlement à d_1 . La figure 6 présente un tel exemple.

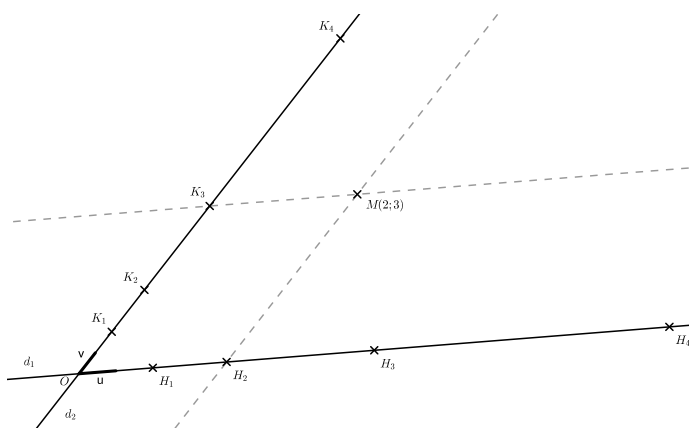


Figure 6 : Repère du plan construit tel que, sur d_1 (resp. d_2), le point H_x (resp. K_x) est à une distance $2^{|x|}$ (resp. $2^{|y|}$) de O dans l'unité donnée par le segment u (resp. v), et situé de l'un ou l'autre côté de O selon le signe de x . Le point M a pour coordonnées $(2; 3)$ dans ce repère.

³² Cf. l'axiomatique d'Euclide, reprise par Hilbert.

Remarque : il n'est même pas nécessaire que le point d'intersection des deux droites soit le point de coordonnées $(0; 0)$.

Le choix des deux bijections f_1 et f_2 sera dicté par l'usage que l'on veut en faire : en particulier, les repères dont un axe est gradué « usuellement » et l'autre avec une échelle logarithmique ou semi-logarithmique³³ (figure 7) présentent un intérêt certain pour représenter des phénomènes de croissance exponentielle (figure 8).

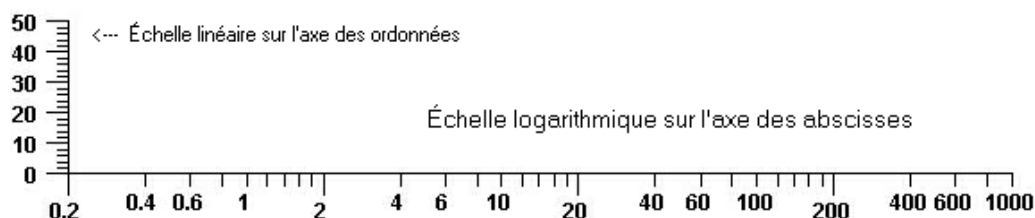


Figure 7 : Repère avec axe des abscisses portant une échelle logarithmique³⁴

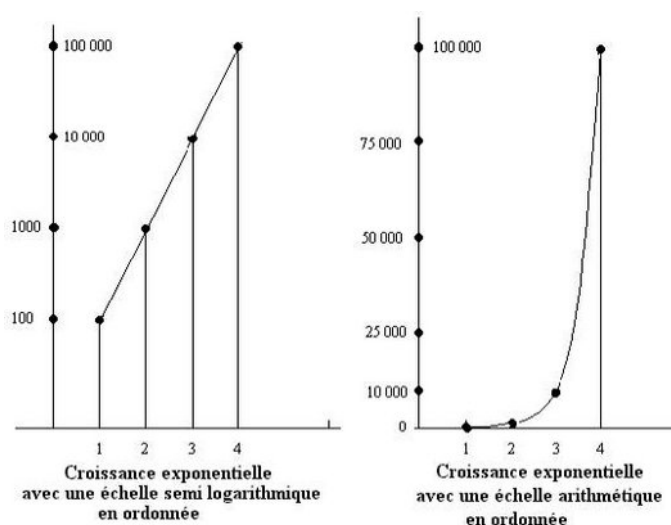


Figure 8 : Croissance exponentielle en échelle semi-logarithmique et arithmétique³⁵.

Plus généralement, il s'agit de choisir des échelles qui permettent de représenter certaines propriétés des nombres (utilité du repérage évoquée précédemment à propos de la droite graduée), ce qui nous ramène, lorsqu'on considère le plan, à la question de la représentation de la co-variation de grandeurs, c'est-à-dire des fonctions. Il s'agit alors de *visualiser spatialement* un certain nombre de propriétés de la fonction (à la fois locales, comme l'image d'un nombre donné par la fonction, mais surtout globales, notamment les variations ou les *extrema*). Cela nécessite d'établir une correspondance entre objets numériques et algébriques d'une part (coordonnées et équation de courbe ou expression algébrique de fonction), et entre objets numériques et géométriques d'autre part (la tangente comme droite qui a certaines relations géométriques avec la courbe est mise en relation avec le fait qu'une limite tend vers 0, etc.). Cette correspondance

³³ On notera qu'une des conséquences est que l'abscisse de l'intersection des deux axes n'est pas 0 sur l'axe gradué avec une échelle logarithmique.

³⁴ https://fr.wikipedia.org/wiki/%C3%89chelle_logarithmique (consulté le 20/06/20).

³⁵ http://public.iutenligne.net/mathematiques/statistiques-et-probabilites/foucart/StatPC/general/complements_pedagogiques/Exponentielles_et_logarithmes/echelle_logarithmique.htm (consulté le 20/06/20).

avec des objets géométriques permet alors essentiellement de représenter visuellement des propriétés des nombres et de l'expression algébrique : par exemple, on mettra en correspondance la parité d'une fonction avec la symétrie de la courbe par rapport à l'axe des ordonnées, etc.

Mise en lien des deux axes gradués

En supposant que l'on se restreigne à une graduation « usuelle » sur chacun des axes, des choix demeurent, liés au rapport entre les deux axes. Ils conduiront à qualifier le repère d'*orthogonal* — lorsque les axes sont perpendiculaires — et de *normé* — lorsque les « unités sont égales », comme dans l'illustration de la figure 9. Mais sur quelle géométrie se base-t-on pour définir ces notions d'angle droit et de longueurs égales ?

On s'appuie là encore sur la géométrie « à la Euclide » : un repère orthonormé est un repère dont les axes sont *perpendiculaires* (au sens d'Euclide : les angles adjacents sont superposables), et les unités égales (au sens d'Euclide : les segments sont superposables). Toutefois, comme pour la construction du repère étudiée dans la première partie, cette définition suppose de disposer de relations d'équivalence (« être superposable à ») entre les secteurs angulaires et entre les segments du plan, sur lesquelles sont fondées les grandeurs (angles, longueurs) et leurs mesures. Lorsque l'on dit que le premier repère (figure 9) n'est pas normé, on mobilise en réalité *implicitement* la distance « intuitive » déjà évoquée précédemment.

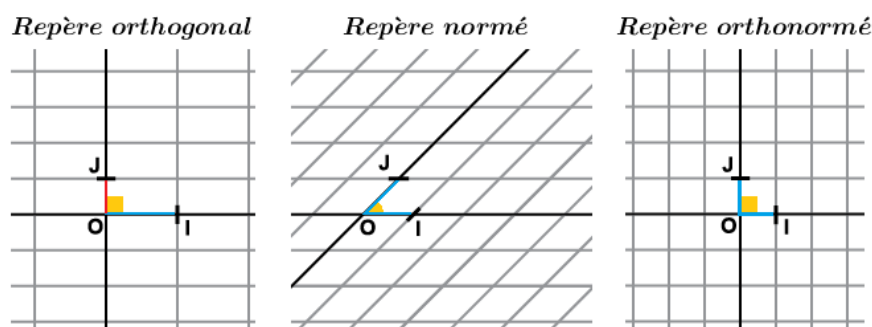


Figure 9 : Différents repères du plan³⁶.

Le choix d'une unité « commune » sur les deux axes suppose une distance définie sur \mathbb{R}^2 , pour laquelle les mesures des deux segments unité sont égales, alors que, du point de vue mathématique, le processus de définition d'un repère et d'une distance est à considérer dans l'autre sens : à partir d'un choix arbitraire d'unités de longueur sur chacun des axes, on peut définir une distance sur \mathbb{R}^2 (à partir d'un produit scalaire) par la formule usuelle (la racine carrée de la somme des carrés des différences). Le repère est alors *orthonormé pour cette distance (pour ce produit scalaire), par définition*. Et cela, même si le repère dessiné n'a pas ses axes perpendiculaires ni ses unités égales *au sens de la perpendicularité et de la longueur de la géométrie « à la Euclide »*. Dire qu'un repère est orthonormé (ou non) n'a de sens que si l'on se réfère à une distance particulière. Ainsi, lorsque l'on dit d'un repère dont les axes ne sont pas perpendiculaires et les segments unités pas de la même « longueur » qu'il est non orthonormé, on sous-entend implicitement « non orthonormé pour la distance « usuelle » ».

À nouveau, du point de vue mathématique (en particulier de la géométrie repérée), le choix de privilégier des repères avec des axes perpendiculaires et des unités de longueur superposables ne résulte pas d'une nécessité, mais il est dicté par la recherche de compatibilité avec la géométrie

³⁶ <https://mathrix.fr/maths/reperage-dans-le-plan/repere-orthogonal-norme-et-orthonorme-le-cours-video-220> (consulté le 20/06/20).

« à la Euclide » du collège. S'il paraît légitime d'accorder une place importante aux repères usuels dans l'enseignement, il nous semble néanmoins nécessaire d'accorder une place à d'autres types de repères d'une part parce que les élèves sont susceptibles de les rencontrer (par exemple en physique) et, d'autre part, pour permettre de mettre en évidence le fait que les repères usuels résultent de choix mathématiques et les motivations de ces choix. Les occulter peut en effet mener à des difficultés, pour l'enseignant ou pour les élèves, comme nous l'illustrerons dans la section suivante (cf. 3.5.), tout en faisant obstacle à la construction de l'idée des mathématiques comme construction fondée sur une axiomatique.

Ce qu'il nous semble intéressant d'en retenir : la construction de la bijection entre les points du plan et \mathbb{R}^2 est l'élément crucial, avec le choix usuel de construire cette bijection en lien avec la mesure de longueurs et, surtout, le choix de s'appuyer sur la distance « usuelle » de la géométrie « à la Euclide » enseignée au collège. Rappelons que ce choix est arbitraire du point de vue mathématique. Le fait de privilégier les graduations usuelles résulte de la « facilité » due à la correspondance entre distance entre nombres et distance au sens usuel du terme. Par ailleurs, la droite graduée et le repère cartésien n'apparaissent pas comme des réponses à des nécessités uniques, mais comme des objets permettant d'apporter une réponse formalisée et unifiée³⁷ à diverses nécessités, liées notamment à la possibilité de « calculer » des objets géométriques et à la représentation des nombres, apparaissant de fait comme particulièrement puissants. Intéressons-nous maintenant aux conséquences que l'on peut tirer de ces analyses lorsque l'on envisage l'apprentissage et l'enseignement du repérage.

3. Enjeux didactiques : quelles conséquences pour l'enseignement ?

Dans l'idée d'un enseignement fondé sur les nécessités³⁸ des notions mathématiques (Brousseau, 1986), celles-ci fournissant des problèmes porteurs du « sens » des notions, tentons d'élucider les possibilités, pour l'enseignement, qui découlent de l'analyse du savoir de référence menée dans la partie précédente. En nous appuyant également sur divers travaux didactiques, nous présentons dans cette partie quelques enjeux d'apprentissage et d'enseignement associés à l'usage du plan cartésien, qui nous paraissent à la fois cruciaux si l'on veut construire le sens de ces notions, et sources d'obstacles pour l'apprentissage.

Nous précisons tout d'abord les enjeux liés au repère lui-même en tant qu'objet, enjeux qui renvoient à la notion de graduation et à la bijection entre droite géométrique et droite réelle, avant de revenir, ensuite, sur les enjeux liés à la caractérisation cartésienne des courbes.

3.1. La droite réelle : un support pour la dialectique entre les nombres réels et la droite vue comme ensemble continu de points

Les droites considérées dans un repère (qu'il s'agisse des axes ou d'autres droites) sont des ensembles de points continus (donc non-dénombrables), en bijection avec \mathbb{R} , bijection qui peut être définie de différentes manières, comme nous l'avons montré dans la partie précédente.

Nous avons pu constater dans nos travaux (et nous l'illustrerons davantage dans la deuxième partie de l'article) certaines difficultés d'élèves, à l'entrée au lycée, à considérer la droite comme un ensemble de points (Cerclé et *al.*, 2016) : pour de nombreux élèves, les seuls points d'une

³⁷ On pourrait ainsi considérer que le repérage cartésien apparaît comme une notion FUG, au sens de Robert (1998) dans les programmes actuels du lycée, mais nous ne nous attarderons pas sur cet aspect.

³⁸ Ou encore sur les « raisons d'être » des notions mathématiques (Chevallard, 2007).

droite qui « existent » sont ceux qui sont marqués et/ou nommés. De même, sur une ligne dans le cadre repéré, de nombreux élèves peinent à considérer des points autres que ceux correspondant à des extrémités de segments, des sommets de polygones ou ayant des coordonnées entières.

En effet, la droite de la géométrie « à la Euclide » du collège n'est pas encore la droite réelle. Cette dernière constitue, de fait, un nouveau niveau de conceptualisation de la notion de droite (Chesnais & Mathé, 2016). La construction des notions de nombre réel, de continuité et de droite comme ensemble continu de points doit donc se faire de façon dialectique. Comme nous l'avons dit précédemment, l'idée de continuité d'un trait tracé au crayon présente une première approche la continuité au sens mathématique, relativement « naturelle », mais qui présente de sérieuses limites (*cf. supra*).

Notons que cette question ne se limite pas à la construction de la *droite* réelle, mais que penser plus globalement les notions de *courbe* représentative d'une fonction ou d'équation cartésienne d'un objet géométrique nécessite de mettre en correspondance les objets géométriques et les nombres réels. En effet, notamment dans le plan, il s'agit de penser la bijection entre les points constituant les objets géométriques, et l'ensemble des couples de nombres solutions d'une équation.

3.2. Rapport entre distance et nombres : pourquoi certains nombres sont-ils plus « accessibles » que d'autres ?

Dans le repère cartésien « usuel », l'articulation des aspects « repère d'une position » (qui renvoie à l'aspect *ordinal* des nombres³⁹) et « mesure d'une grandeur » (sur une demi-droite graduée, l'abscisse du point renvoie à sa distance à l'origine) est en jeu dès l'introduction de la demi-droite graduée. Par exemple, lorsque l'on cherche à lier, sur la droite graduée, la symétrie des points par rapport à l'origine et la notion d'opposé d'un nombre relatif ; ou encore dans la formule de calcul d'une longueur à partir des coordonnées dans un repère orthonormé.

Or, ce que montre la partie précédente, c'est que la construction mathématique de la notion de graduation, liée à la notion de droite réelle, ne va pas de soi et que la construction de la bijection entre \mathbb{R} et la droite D (ou entre \mathbb{R}^2 et le plan P) nécessite d'être prise en charge explicitement.

En effet, mathématiquement, on peut considérer dans le cas de la graduation « usuelle » que la bijection entre D et \mathbb{R} est construite par la définition de l'abscisse comme liée à la distance à l'origine (sur la demi-droite, étendue facilement à la droite), assurant que pour tout nombre réel d , il existe un point M sur la droite tel que $d = \pm OM$, ou réciproquement, que tout point M de la droite correspond à un nombre réel.

Du point de vue de l'apprentissage, il apparaît que si, pour les élèves, les nombres décimaux (au moins ceux à 1 décimale) ont bien leur place sur la droite graduée car ils correspondent sans difficulté à des longueurs par l'usage de la règle graduée, ce n'est pas aussi simple pour les autres nombres. La construction du lien entre fractions et droite graduée est préconisée dans les programmes (en faisant du travail sur la droite graduée un moyen de travailler sur les fractions), mais divers travaux de didactique convergent vers le fait qu'accepter qu'un nombre irrationnel mesure une longueur ne va pas de soi pour les élèves (Vergnac & Durand-Guerrier, *ibid.*)⁴⁰, voire

³⁹ Et aux usages du repère de type « bataille navale » (Chesnais & Destribats, 2018).

⁴⁰ La prise en considération des enjeux liés à la nature des nombres (rationnels et décimaux) est alors primordiale mais elle dépasse le cadre de cet article.

parfois un nombre non-décimal (Chesnais & Munier, 2016)⁴¹. La situation des rectangles d'aire 10 cm^2 , que nous développerons dans la deuxième partie de l'article, met ainsi en lumière la difficulté des élèves à accepter de placer sur la droite graduée certains nombres comme $\sqrt{10}$ ou $\frac{10}{3}$. En effet, considérer un réel comme une mesure (en particulier une mesure de longueur) suppose d'avoir construit l'idée de « mesure théorique » (cf. *supra* et Chesnais & Munier, 2016), mais cette construction est très peu prise en charge dans l'enseignement⁴².

3.3. La mesure pour repérer : un moyen à privilégier ?

Les modèles de construction des grandeurs et de leurs mesures préconisés par la recherche et par les programmes scolaires français suggèrent que la mesure émerge comme réponse au problème fondamental de comparaison des longueurs (c'est-à-dire pour être capable de déterminer, parmi deux longueurs, laquelle est la plus grande).

Cependant, indépendamment même de la question de la nature des nombres mentionnée ci-dessus, le travail de Bessot et Eberhard (1983) montre bien que le fait de graduer la droite en utilisant la quantification des longueurs par la mesure n'émerge pas si facilement lorsque les élèves sont confrontés au problème de comparaison de longueurs. En effet, la comparaison des longueurs à l'aide d'une droite peut mobiliser deux modèles différents : le « repérage » ou la « mesure » (Bessot & Eberhard, 1983). Le modèle du repérage consiste à construire des échelles non nécessairement régulières, et ne fait pas appel au nombre, du moins pas dans sa dimension cardinale (donc ne fait pas appel à la mesure).

Par exemple, pour comparer la longueur de deux segments avec une règle graduée, on peut positionner l'extrémité de la règle (et non pas la graduation 0 qui, en général, n'est pas à l'extrémité de la règle) en face d'une des extrémités d'un segment et lire le nombre situé en face de l'autre extrémité du segment ; en répétant l'opération avec l'autre segment, cela permet de savoir lequel est le plus long. Les nombres lus ne correspondent alors pas à des mesures, mais uniquement à des repères ordonnés (qui pourraient par exemple être remplacés par des lettres). On peut en fait imaginer de comparer des longueurs avec une graduation irrégulière, dans laquelle les repères ne sont même pas nécessairement des nombres.

Le modèle du repérage présente une certaine efficacité, même s'il a des limites (par exemple, dans le cas précédent, il faut nécessairement utiliser exactement la même règle graduée car l'écart entre l'extrémité de la règle et la graduation zéro peut varier d'une règle à l'autre ; par ailleurs, il ne permet pas de faire des opérations sur les longueurs). Le modèle de la mesure permet de dépasser ces limites, mais avec un « coût » certain : il est en effet conceptuellement nettement plus élaboré (il nécessite notamment le concept d'unité, voire de fractionnement de l'unité, et suppose une maîtrise des nombres qui ne se limite pas à l'aspect ordinal). La mesure n'apparaît donc que comme un moyen de repérage et de comparaison de longueurs parmi d'autres, qui présente certaines propriétés (notamment celle de pouvoir opérer sur des longueurs

⁴¹ Chesnais et Munier (2016) proposent à cette occasion de réinterpréter cette difficulté en considérant non pas que les élèves n'acceptent pas les non-décimaux comme longueurs parce qu'ils ne les acceptent pas comme des nombres, mais plutôt qu'ils ne les acceptent pas comme longueur car leur conception de la mesure (de la longueur en particulier) est liée à la mesure *empirique* (celle que l'on obtient par un mesurage matériel avec un instrument), qui est par nature décimale (avec peu de décimales, de surcroît) ou rationnelle.

⁴² Cela amène également à penser autrement la dialectique entre la construction des réels et la construction de la droite comme ensemble de points (cf. Chesnais & Mathé, 2016), ouvrant ainsi des perspectives qui se rapprochent des propositions de Vergnac et Durand-Guerrier, mais cela dépasse le cadre de cet article.

en l'absence des objets), mais aussi un certain « coût ».

Du point de vue didactique, le principe de repérage des points sur une (demi-)droite par la mesure de la distance à un point donné (distance au sens usuel, vue comme quantité d'unités reportées) peut donc difficilement être présenté comme nécessaire (le travail de Bessot et Eberhard montre bien, de ce point de vue, qu'il est difficile d'élaborer une situation d'apprentissage où il est réellement nécessaire), et son caractère un peu arbitraire (ou encore, non nécessaire) doit être reconnu, tout en pointant son efficacité. Cela suppose un travail sur la mise en lien de la fonction du nombre comme « repère » (mobilisant l'aspect ordinal du nombre) avec sa fonction comme mesure (mobilisant son aspect cardinal). C'est cet aspect mesure qui justifie d'établir des graduations régulières qui, sinon, ne sont pas nécessaires.

Cet aspect « mesure » doit également être retravaillé dans le cadre du repère du plan afin d'assurer l'association des coordonnées à des mesures de grandeurs (au risque, sinon, de se limiter à une vision du repère de type « bataille navale », peu opératoire pour l'activité mathématique).

3.4. Courbe représentative d'une fonction : clarifier les différentes notions

Autour de la notion de courbe représentative d'une fonction numérique⁴³ gravitent plusieurs notions que le plan repéré permet de clarifier.

- Le choix d'un repère R dans un plan P permet d'obtenir le plan cartésien P_R , qui établit une bijection φ_R entre le plan P (cadre géométrique) et \mathbb{R}^2 (cadre algébrique-numérique). $\Gamma_f = \{(x; f(x)) \mid x \in \mathbb{R}\}$ est un ensemble de couples de nombres réels, donc une partie de \mathbb{R}^2 . Plongé dans le plan cartésien, il devient le graphe géométrique $G_R(f) = \{M(x; f(x)) \mid x \in \mathbb{R}\}$ (Chauvat, 1999).
- D'autre part, on peut considérer une courbe C , qui est un ensemble de points, donc une partie du plan P . Plongée dans le plan cartésien, elle devient une courbe cartésienne $C_R = \{M(x; y) \mid M \in C\}$.
- On peut associer une courbe à une fonction ou une fonction à une courbe : la courbe associée à f est $C = \varphi_R^{-1}(\Gamma_f)$; la fonction associée à C est donnée par son graphe $\Gamma_f = \varphi_R(C)$. Lorsque C est la courbe représentative de f , on a $G_R(f) = C_R$.
- Parallèlement à ces objets théoriques, le passage dans le registre graphique sur un support matériel M (feuille de papier ou écran, choix d'une fenêtre et d'unités graphiques, ...) donne une représentation graphique de f : $C_M(f)$.

Dans la pratique, on peut avoir tendance, par abus de langage, à amalgamer différents objets sous le terme de « courbe représentative d'une fonction » : le dessin $C_M(f)$, l'ensemble de points repérés $G_R(f) = C_R$, et l'ensemble de points du plan $C = \varphi_R^{-1}(\Gamma_f)$. Or cela peut poser problème à la compréhension des objets en jeu et de l'activité mathématique associée : par exemple, si l'ensemble des points repérés est amalgamé avec son dessin, il est difficile de comprendre pourquoi il n'est pas suffisant, pour savoir si un point appartient à la courbe représentative d'une fonction, de vérifier en le plaçant sur le dessin ; de même, le fait de ne représenter qu'une partie d'une courbe (dans une certaine fenêtre) peut poser problème à certains élèves, questionnant « ce qui se passe au-delà ». Enfin, l'exemple proposé dans la section 5 ci-dessous, montre qu'il faut

⁴³ Précisons que nous ne nous intéressons ici qu'aux fonctions du secondaire, d'une partie E de \mathbb{R} vers une partie F de \mathbb{R} .

pouvoir envisager que certaines propriétés de l'ensemble des points repérés C_R semblent contradictoires avec des propriétés que l'on peut observer sur la représentation graphique de l'ensemble des points du plan C .

On distingue parfois « une courbe pouvant représenter f », pour désigner le *dessin* $C_M(f)$ et « la courbe représentative de f » pour désigner la *figure* ; mais les élèves (voire les enseignants) sont-ils conscients de cette subtilité ? De plus, la caractérisation « soit $M(x; y)$ un point du plan cartésien P_R ; $M \in C \Leftrightarrow y = f(x)$ » pousse à nommer « courbe » l'ensemble C de P plutôt que l'ensemble $G_R(f) = C_R$ de P_R . Quoi qu'il en soit, la définition $C = \varphi_R^{-1}(\Gamma_f)$ n'a de sens que si on a défini le repère R , ce qui montre l'importance du repère (Chauvat, 1999). En toute rigueur, on devrait parler de « la courbe associée à f par le repère R ». Les situations qui seront proposées dans la deuxième partie de l'article (situation du rectangle d'aire 10 et du demi-cercle, notamment) visent à montrer les nécessités associées à certaines de ces distinctions et à proposer des options pour les travailler avec les élèves au lycée.

Il y a donc, dans la notion de courbe représentative d'une fonction, d'une part un changement de cadre qui associe des objets géométriques (le graphe géométrique) à des objets numériques (le graphe ensembliste), d'autre part le changement de registre, entre les registres des écritures algébriques/numériques et le registre graphique (du dessin). Les difficultés associées au premier aspect sont principalement liées à la question de la mise en bijection des nombres avec les objets géométriques détaillée précédemment. Par exemple, la mise en relation de propriétés des nombres avec les propriétés des objets géométriques qui les représentent, qu'il s'agisse simplement de comprendre le lien entre le fait qu'un point appartient à la courbe représentative d'une fonction et le fait que son ordonnée est l'image de son abscisse par ladite fonction ; ou de questions plus complexes comme le rapport entre la symétrie d'une courbe et la parité de la fonction. Le deuxième aspect renvoie à la distinction entre les objets géométriques et leur représentation dans le registre graphique (distinction entre *dessin* et *figure*, cf. Parzys, 1988 ou Laborde & Capponi, 1994). Notons que, comme mentionné précédemment, ces deux aspects ne sont toutefois pas sans lien. Vergnac et Durand-Guerrier (2018) et Durand-Guerrier (2018) pointent ainsi les difficultés des élèves (et étudiants futurs enseignants) à comprendre la spécificité des nombres réels au regard des nombres rationnels, tout en montrant la fécondité d'une approche mettant en correspondance les objets numériques avec des objets géométriques via les grandeurs (notamment en s'intéressant à la question des nombres constructibles à la règle et au compas) pour établir qu'il existe des segments dont la longueur n'est pas rationnelle.

Ces problématiques (de changement de cadre et de registre) sont souvent intimement liées dès qu'il s'agit de repérage (Perrin-Glorian, 2004), du fait de l'importance du registre graphique et, de fait, l'une peut occulter l'autre dans le processus d'enseignement-apprentissage. L'expression « courbe représentative d'une fonction » est ainsi elle-même susceptible de renforcer des confusions, car elle induit une confusion potentielle entre le graphe de la fonction (objet géométrique) et une de ses représentations dans le registre graphique (objet matériel, dessin). Ces confusions se traduisent par exemple par le fait déjà mentionné précédemment que les élèves puissent avoir des difficultés à comprendre pourquoi la lecture sur le graphique peut permettre de conjecturer l'appartenance d'un point de coordonnées données au graphe géométrique de la fonction (à partir du fait que le dessin du point semble se situer sur le dessin de la ligne), mais qu'elle ne constitue pas une preuve, qui peut en revanche être obtenue algébriquement à partir de l'expression de la fonction (lorsqu'on en dispose).

Un travail est donc nécessaire avec les élèves non seulement sur l'articulation des cadres, mais

aussi sur la distinction entre les objets et leurs représentations dans le registre graphique, qui constitue une condition essentielle de l'apprentissage (Duval, *op. cit.*). Par exemple, comme nous l'avons déjà remarqué, assimiler la droite au dessin d'un trait rectiligne ne permet pas de distinguer la droite réelle de la droite rationnelle, et comme nous l'illustrons plus loin, rabattre le concept de cercle sur son dessin peut empêcher de « reconnaître » un cercle dans un repère non orthonormé pour la distance « physique ».

Ainsi, dans le cadre repéré, appréhender une courbe en tant que figure à partir de son dessin suppose de maîtriser un certain nombre de règles de codage résultant de conventions (Gasquet & Chuzeville, 1994)⁴⁴, qui correspondent aux règles de formation, de traitement et de conversion (Duval, *ibid.*) associées au registre graphique. Par exemple, quand on veut représenter graphiquement la fonction $x \mapsto f(x) = \frac{\sin x}{x}$, comment dessiner le « trou » correspondant au fait que la fonction n'est pas définie en 0 ? Dans le monde empirique, on ne peut pas le « dessiner », c'est-à-dire le faire apparaître visuellement comme un espace, on est obligé de créer un *code* pour montrer qu'il y a un « trou ». Le dessin suppose ainsi un code pour représenter la théorie : soit on décide de coder le trou, car on veut le faire apparaître (on fait alors un « gros trou »), soit on le néglige (comme lorsqu'il s'agit de tracer la droite rationnelle).

3.5. Le repère orthonormé : difficultés cachées au lycée et cohérence avec le supérieur

Clarifier les implicites sous-jacents à la construction du repère cartésien et de ses propriétés peut permettre de lever des incompréhensions voire les contradictions apparentes au-delà du lycée, mais aussi dès la seconde.

Au lycée, on suppose acquise la notion de distance entre deux points, comprise comme étant la distance « physique » (de la feuille de papier). Lorsque l'on établit la formule permettant de calculer la distance entre deux points en fonction de leurs coordonnées dans un repère, on l'assortit d'une mise en garde : « la formule de la distance ne s'applique que dans le cas d'un repère orthonormé ». On part donc d'une distance naturelle grâce à laquelle on construit un repère orthonormé assorti d'une formule permettant de calculer cette distance. L'élève doit comprendre que cette mise en garde ne signifie pas que l'on ne peut pas appliquer la même formule dans d'autres cas, mais que ce n'est que si le repère est orthonormé pour la distance physique (avec les droites perpendiculaires au sens d'Euclide et des segments unités superposables entre eux) que la formule correspond à la distance « physique » (de la feuille euclidienne) : appliquer la formule dans un repère non orthonormé au sens de la géométrie d'Euclide, aboutit à trouver des égalités de mesure entre des segments non superposables, ce qui questionne la notion de longueur (et la signification de longueurs égales).

Par ailleurs, il est nécessaire de savoir que, pour que le lien entre les deux axes gradués respecte la propriété de Thalès (avec la proportionnalité) et avoir des cercles qui « ressemblent » à des cercles ou des « droites droites⁴⁵ », les graduations doivent être « régulières » au sens de la superposition (Cerclé & Nyssen, à paraître). Par exemple, en considérant, dans le plan, un repère

⁴⁴ La brochure *Fenêtres sur courbes* (Gasquet & Chuzeville, 1994) insiste sur les conventions qui régissent le registre graphique dans la représentation des courbes, en les mettant en évidence, en listant les propriétés à *voir* (convention d'orientation des axes, convention de cadrage, ...) et les propriétés à *lire* (repérage d'un point, rôle de certains points). On notera que certaines conventions sont souvent explicitées aux élèves, d'autres plus rarement, et d'autres encore restent totalement implicites.

⁴⁵ Au sens de « rectilignes ».

(O, I, J) pour lequel $[OI]$ et $[OJ]$ ne sont pas superposables (ce que l'on aurait envie d'exprimer par $OI \neq OJ$), alors on obtient des objets qui, soit « ressemblent à des cercles », mais dont les points ne vérifient pas la condition d'équidistance au centre ; soit des objets qui satisfont cette condition mais dont les dessins ne « ressemblent pas à des cercles » (cf. figure 10 et Cerclé & Nyssen, à paraître).

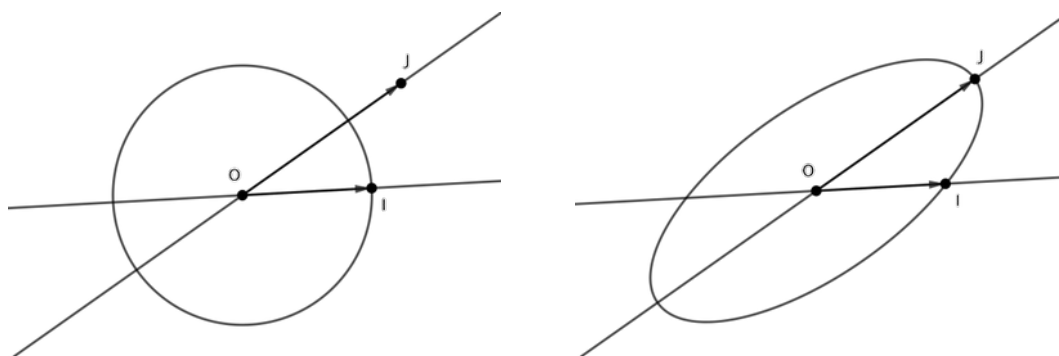


Figure 10 : Sont-ce des cercles ? Images tirées de Cerclé et Nyssen (à paraître).

Ainsi, sur la figure 10, le deuxième dessin représente bien un cercle⁴⁶ au sens de la distance associée au repère (O, I, J) par la formule habituelle. Il est d'ailleurs tout à fait possible de reconnaître le deuxième repère comme orthonormé !

Un cas similaire peut se présenter en classe, si l'on cherche à représenter un cercle sur un repère orthogonal mais non normé pour la distance usuelle, par exemple sur la calculatrice lorsqu'elle ajuste automatiquement le repère à la fenêtre, comme dans la figure 11.

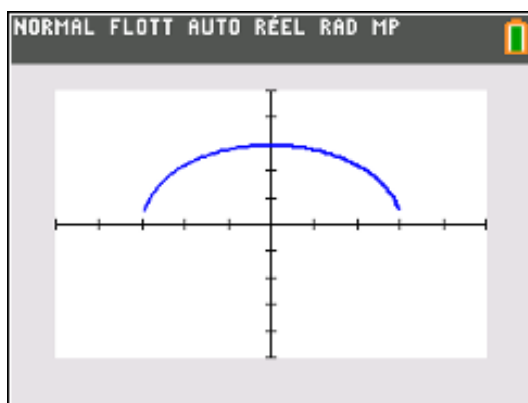


Figure 11 : Capture d'écran de calculatrice montrant la représentation graphique de la fonction $x \mapsto \sqrt{9 - x^2}$.

De la même manière, dans la figure 12, les points P, M et N ne sont pas alignés, alors que leurs coordonnées vérifient l'équation $x + y = 5$.

⁴⁶ Pour le lecteur capable de décoder les conventions mathématiques usuelles, bien évidemment et de considérer ainsi non pas le dessin pour lui-même mais comme représentation d'une figure.

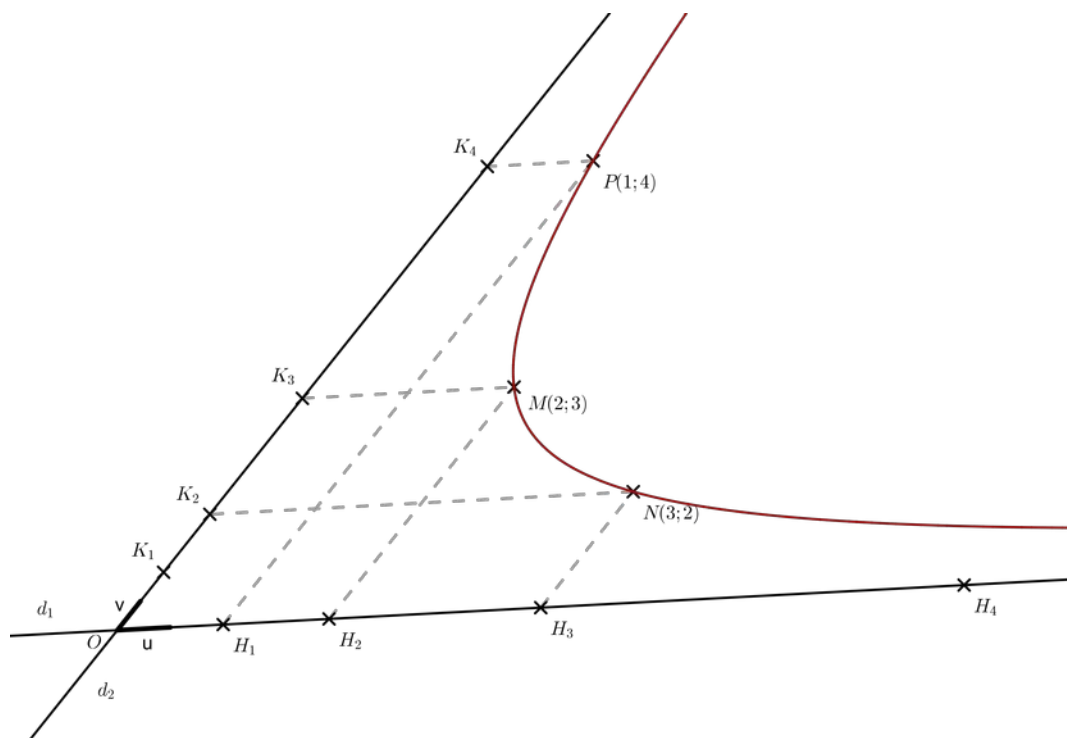


Figure 12 : Une droite « non droite » dans un repère non usuel.

La difficulté pour les élèves est accentuée par le fait que l'on manipule ces objets principalement *via* leur représentation graphique, sur une feuille de papier (ou un écran), qui constitue un support porteur intrinsèquement d'une structure géométrique euclidienne (si l'on considère la longueur « usuelle ») : c'est le fait que la *distance* définie par le repère ne coïncide pas avec la distance « physique » sur la feuille de papier qui peut rendre difficile l'acceptation du deuxième dessin comme représentation d'un cercle. Cette distinction entre la distance « physique » et la notion de distance au sens mathématique du terme fait ainsi écho à la distinction entre les objets et leur représentation.

3.6. Conclusion sur les enjeux didactiques

Qu'il s'agisse de la géométrie repérée (incluant des vecteurs ou non) ou de l'analyse, le travail dans un repère suppose de croiser les cadres numérique et géométrique. Réduire cette problématique à une question de représentation nous semble réducteur dans la mesure où il s'agit en réalité de manipuler de nouveaux objets, nous incitant à considérer cette problématique comme celle de la construction d'un nouveau cadre au sens de Douady : celui du plan cartésien, qui mobilise de nouveaux objets : notamment des « points repérés », définis comme l'association des points avec leurs coordonnées, et la « droite réelle », qui embarque une bijection entre l'ensemble des points de la droite et l'ensemble des nombres réels.

Les enjeux d'apprentissage et d'enseignement associés à la construction de la droite graduée, du repère cartésien et plus globalement du repérage sont donc à considérer comme étant constitués à la fois d'enjeux propres à chacun des cadres en jeu (nombres, fonctions, géométrie, etc.), mais aussi au croisement de ces cadres — nourrissant en retour le travail dans chacun des cadres — et, enfin, aux enjeux liés à la question de la représentation (au sens des registres de représentation sémiotiques) de ces objets.

Le travail sur la construction de la bijection entre ensembles de nombres et ensembles de points

doit donc être l'occasion d'approfondir et de prolonger l'apprentissage, à la fois, des objets géométriques et des nombres — tout en étant une condition du travail sur les fonctions (cf. par exemple Bloch, 2002). La construction de la droite graduée puis, à nouveau, du repère du plan, doit en outre être l'occasion d'une réflexion sur la notion de mesure et son rôle, en lien avec les grandeurs, dans la mise en bijection des objets géométriques et des nombres. Enfin, le rôle fondamental du registre graphique en lien avec ces thèmes doit soutenir un travail sur la nature des objets mathématiques et de l'activité mathématique, en contribuant à la distinction entre les objets non-ostensifs et les objets ostensifs (Bosch & Chevillard, 1999) qui permettent de les manipuler.

Conclusion générale

Très peu de travaux de recherche en didactique se sont intéressés spécifiquement à la question du plan cartésien, le travail sur le repère cartésien n'étant souvent qu'un moyen du travail sur les fonctions — voir par exemple, pour ne citer que ceux-là, Bloch (2002) ou Chauvat (1998-1999) — ou encore sur les nombres — par exemple Perrin-Glorian (2004). Pourtant, le repère cartésien porte des potentialités mathématiques multiples et imbriquées : représenter les nombres sur une droite, algébriser la géométrie, représenter des relations (*via* les fonctions). Ces potentialités soulèvent des enjeux d'enseignement par l'articulation de cadres et de registres qu'elles exploitent, par la richesse des concepts en jeu (notion de droite, de fonction, d'équation), par les difficultés mise en évidence par l'épistémologie (ligne continue, constructibilité des nombres) ou la didactique (grandeur et mesure, idécimalité (Bronner, 1997), statut des énoncés, ...).

Or la place croissante prise par le repérage dans les programmes, autant au lycée qu'au collège, ainsi que les difficultés associées pour les élèves (Cerclé et *al.*, 2016) nous invitent à considérer qu'il est nécessaire de prendre davantage en considération pour eux-mêmes ces enjeux, sans pour autant les isoler du reste. Il s'agit ainsi surtout de rendre plus explicites les choix mathématiques associés au repérage lors du travail sur d'autres notions, en particulier au lycée, même si certains aspects méritent d'être traités pour eux-mêmes, qu'il s'agisse de la droite graduée et de l'introduction du repère au collège, ou de la droite réelle et du repère cartésien au lycée.

La deuxième partie de cet article sera l'occasion de présenter des situations élaborées par le groupe pour prendre en charge dans les classes, au collège et au lycée, au moins en partie des enjeux didactiques identifiés dans cette première partie, concernant la construction des objets spécifiques du cadre de la géométrie repérée (les points repérés notamment) en dépassant l'idée d'une « simple » représentation de nombres et/ou d'objets géométriques dans le registre graphique, c'est-à-dire en accordant une importance à la construction de la mise en bijection des ensembles de nombres (ou de couples de nombres) avec des ensembles de points via la notion de distance.

Références bibliographiques

- Anselmo, B., Bonnet, M., Colonna, A., Combiér, G., Latour, J., Planchette, P. (1999). *La sixième entre fractions et décimaux*. IREM de Lyon.
- Artaud, M. (1997). Introduction à l'approche écologique du didactique. L'écologie des organisations mathématiques et didactiques, In Bailleul et *al.* (Eds.), *Actes de la IX^e École d'Été de Didactique des Mathématiques*, Houlgate, pp. 101-139.

- Bessot, A. & Eberhard, M. (1983). Une Approche Didactique des Problèmes de la Mesure. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 4(3), 293-324.
- Bloch, I. (2002). Un milieu graphique pour l'apprentissage de la notion de fonction au lycée, *Petit x*, 58, 25-46.
- Bronner, A. (1997). *Étude didactique des nombres réels, idécimalité et racine carrée*. Thèse de l'Université Joseph Fourier, Grenoble.
- Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en didactique des mathématiques*, 7(2), 33-115.
- Brousseau, G. (2002). Les grandeurs dans la scolarité obligatoire. In JL Dorier, M Artaud, M Artigue, R Berthelot, R Floris (coordonné par), *Actes de la XI^e Ecole d'Été de Didactique des Mathématiques*, Corps (Isère), 21-30 août 2001. Grenoble : La pensée sauvage.
- Bosch, M. & Chevallard, Y. (1999). La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs: Objet d'étude et problématique. *Recherches en didactique des mathématiques*, 19(1), 77-123.
- Bourguet, M. (2016). *Enjeux de langage dans le processus de conceptualisation en mathématique et secondarisation du discours : un exemple à propos de l'objet « équation cartésienne d'une droite » en première S*. Mémoire de master 2, Didactique Des Sciences (non publié). Université de Montpellier.
- Chauvat, G. (1998-1999). Courbes et fonctions au collège. *Petit x*, 51, 23-44.
- Cerclé, V., Chesnais, A., Gosselin, E., Leberre, J. & Nyssen, L. (2016). Enjeux de logique et de raisonnement au croisement des cadres et registres à propos des équations de droites. *Actes du XXII^e colloque CORFEM*, Nîmes, 11-12 juin 2015.
http://www.univ-irem.fr/exemple/corfem/Actes_2015_06.pdf (consulté le 15/11/20).
- Cerclé, V. & Nyssen, L. (à paraître). Le repère cartésien comme enjeu de l'entrée de la géométrie repérée. *Actes au XXVI^e colloque CORFEM*, Bordeaux, 11-12 juin 2018.
- Chesnais, A., Destribats, A., Dutaut, S. & Herrmann, E. (2018). La géométrie dans le cadre repéré : une occasion de travailler les liens entre objets géométriques, grandeurs et nombres. *Atelier au XXIII^e colloque CORFEM*, Nîmes, 10-11 juin 2016.
http://www.univ-irem.fr/exemple/corfem/Actes_2016_01.pdf (consulté le 15/11/20).
- Chesnais, A. & Destribats, A. (à paraître). Construire le repère cartésien comme objet mathématique au collège. *Actes du XXVI^e colloque CORFEM*, Bordeaux, 11-12 juin 2018.
- Chesnais, A. & Mathé, A.-C. (2016). Construire les objets élémentaires de la géométrie, de l'école au lycée : une cohérence possible ? Conférence - *Actes du XXVI^e colloque CORFEM*, Bordeaux, 11-12 juin 2018.
- Chevallard, Y. (2007). Passé et présent de la théorie anthropologique du didactique. In L Ruiz-Higuera, A Estepa & F Javier Garcia (Eds.), *Sociedad Escuela y Mathematicas : aportaciones de la Teoria Antropologica de la Didactico* (pp. 705-746). Baeza (Espagne) : Universidad de Jaen.

http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Passe_et_present_de_la_TAD-2.pdf
(consulté le 15/11/20).

- Chevallard, Y. & Bosch, M. (2001). Les grandeurs en mathématiques au collège. Partie I. Une Atlantide oubliée. *Petit x*, 55, 5-32.
- Chevallard, Y. & Bosch M. (2002). Les grandeurs en mathématiques au collège. Partie II. Mathématisations. *Petit x*, 59, 43-76.
- Chevallard, Y. & Chambris, C. (2015). Grandeurs et nombres : quelques remarques pour un programme. Sur le site de la CFEM :
<http://www.cfem.asso.fr/actualites/GrandeursetnombresYCCC.pdf> (consulté le 21/04/16).
- Deledicq, A. (2009). *Descartes - la Géométrie*. Textes choisis, présentés et commentés par A Deledicq. ACL-Les classiques Kangourou.
- Dhombres, J. (1978) *Nombre, mesure et continu. Épistémologie et histoire*. IREM de Nantes. Paris : CEDIC / Fernand Nathan.
- Douady, R. (1987). Jeux de cadres et dialectique outil/objet. *Recherches en didactique des mathématiques*, 7(2), 5-32.
- Durand-Guerrier, V. (2018). La triade discret, dense et continu dans la construction des nombres. *Atelier au XXIII^e colloque CORFEM*, Nîmes, 10-11 juin 2016.
http://www.univ-irem.fr/exemple/corfem/Actes_2016_04.pdf (consulté le 15/11/20).
- Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Peter Lang.
- Duval, R. (2005). Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie : développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements. *Annales de didactique et sciences cognitives*, 10, 5-53.
- Gardies, J.-L. (2004). Du mode d'existence des objets de la mathématique. *Collection problèmes et controverses*. Vrin.
- Gasquet, S. et Chuzeville, R. (1994). *Fenêtres sur courbes*. CRDP Grenoble.
- Jardin B., Tilleuil, P. et Gilbert ; T. (1994). Faire la droite avec des points ? in *Actes du Colloque inter-IREM d'histoire et épistémologie*, mai 1992. IREM de Brest.
- Laborde C. & Capponi B. (1994). Cabri-géomètre constituant d'un milieu pour l'apprentissage de la notion de figure géométrique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 14(1-2), 165-209.
- Parzysz, B. (1988). Voir et savoir - la représentation du « perçu » et du « su » dans les dessins de la géométrie de l'espace. *Bulletin de l'APMEP*, 364, 339-350.
- Perrin-Glorian, M.-J. (1989-1990). L'aire et la mesure. *Petit x*, 24, 5-36.
- Perrin-Glorian, M.-J. (2004). Éclairages et questions pour la didactique des mathématiques :

Cadres et registres en jeu dans la résolution de problèmes en lien avec les connaissances des élèves et recherches sur l'action des enseignants en classe. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 9, 67-82.

Robert, A. (1998). Outils d'analyse des contenus mathématiques à enseigner au lycée et à l'université. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 18(2), 138-190.

Robert, A. (2003). Un point de vue sur les spécificités du travail géométrique des élèves à partir de la quatrième : l'organisation des connaissances en niveaux de conceptualisation, *Petit x*, 63, 7-29.

Robert, A. (2005). Deux exemples d'activités en formation des enseignants de mathématiques du second degré, *Petit x*, 67, 63-76.

Vergnac, M. & Durand-Guerrier, V. (2014). Le concept de nombre réel au lycée et en début d'université : un objet problématique. *Petit x*, 96, 7-29. hal-02070144.

Vergnac, M. (2018). Les nombres réels au lycée. Quelle place ? quels enjeux ? Conférence - *XXIII^e colloque CORFEM*, Nîmes, 10-11 juin 2016.
http://www.univ-irem.fr/exemple/corfem/Actes_2016_06.pdf (consulté le 15/11/20).