DONNER UN SENS À LA RÉSOLUTION D'ÉQUATIONS : RÉFLEXIONS DIDACTIQUES INSPIRÉES DE STRATÉGIES DE CALCUL MENTAL

Jérôme PROULX[1]
Laboratoire Épistémologie et Activité Mathématique
Université du Québec à Montréal, Québec, Canada

Résumé. Cet article présente des réflexions didactiques autour de la résolution d'équations. À partir d'une analyse de diverses stratégies déployées en contexte de calcul mental (par des élèves du secondaire, des étudiants universitaires et des enseignants de mathématiques), des façons complémentaires, et parfois même alternatives, de concevoir la résolution d'équations sont exposées et discutées.

Mots-clés. Algèbre, résolution d'équations, stratégies, calcul mental.

Abstract. This article presents a number of didactical reflections about solving equations. From an analysis of a variety of strategies engaged with in a mental mathematics context, complementary and at times alternative conceptions about what it can mean to solve an equation are offered.

Keywords. Algebra, equation solving, strategies, mental mathematics.

Introduction

Il y a quelques années, j'ai été examinateur externe d'une thèse doctorale portant sur l'algèbre. La question de recherche générale du candidat ressemblait à « Comment pouvons-nous aider les élèves à comprendre l'algèbre ? ». Bien que fort raisonnable, cette question m'est toutefois apparue unilatérale, pouvant être complétée par une autre telle que : « Comment pouvons-nous aider l'algèbre à être comprise par les élèves ? ». Lorsque j'ai posé ladite question, des petits sourires en coin et des yeux suspects ont rempli la salle, accompagnés d'une réaction de stupéfaction du pauvre candidat. Il faut avouer que cette question est difficile. À l'époque, même si je ne savais pas non plus comment l'aborder, elle m'intriguait. Cette question m'a longuement suivi dans mes travaux de recherche.

Une dimension importante en algèbre concerne la résolution d'équations. Et les difficultés relatives à la résolution d'équations sont nombreuses et ont été documentées depuis fort longtemps (voir par exemple, dans *Petit x* : Booth, 1984 ; Chevallard, 1989 ; Coulange, 1997 ; Cortés & Kavafian, 1999), et ce indépendamment des contextes, des élèves et des enseignants[2]. Les origines de ces difficultés sont diverses et complexes, allant du sens donné à la lettre et à l'inconnue aux manipulations algébriques, au rôle de l'égalité, etc., et où dimensions conceptuelles et techniques s'entrecroisent. C'est aussi en ce sens que la question de recherche du candidat doctorant est pertinente et importante. Cela dit, pour aborder la question complémentaire posée au sujet « d'aider l'algèbre », je n'ai toutefois pas voulu me pencher sur

[1] proulx.jerome@uqam.ca

[2] Les recherches soulignant les difficultés des élèves à résoudre des équations abondent depuis des années en didactique des mathématiques, que ce soit au Mexique (Filloy & Rojano, 1989), aux États-Unis (Frost, 2015), en Australie (Stacey & MacGregor, 2000), en Italie (Malisani & Spagnolo, 2009), en France (Coulange et *al.*, 2012), en Angleterre (Hewitt, 2012), en Israël (Almog & Ilany, 2012), etc.

les difficultés vécues par les élèves dans le but de trouver des pistes de solution pour les aider (surtout que les articles cités regorgent déjà de ces pistes innovantes). J'ai plutôt voulu investiguer des raisonnements inspirants et des stratégies déployées pour résoudre des équations, dans le but d'analyser le sens (implicite ou explicite) qui peut être donné à la résolution d'équations elle-même. L'intention en est donc devenue d'informer l'algèbre elle-même, de l'interroger, par l'entremise d'une analyse de diverses stratégies et raisonnements déployés en algèbre (ici, pour résoudre des équations).

C'est ce qui a motivé l'envie d'aborder la résolution d'équation à travers mes travaux de recherche en contexte de calcul mental (voir Proulx, 2013 ; Proulx et *al.*, 2017), avec toutes les contraintes de temps et de matériel que ce contexte implique, pour investiguer divers raisonnements et stratégies relatives à la résolution d'équations. Dans mes travaux, des séances de calcul mental sont organisées avec une grande variété de groupes « d'élèves » : autant des élèves du début du secondaire (13-14 ans), des étudiants universitaires en mathématiques et à la formation des enseignants, que des enseignants de mathématiques suivant une formation continue[3]. Dans les séances organisées autour de la résolution d'équations (voir Proulx, *ibid.* ; Proulx et *al.*, *ibid.*), les participants doivent résoudre, sans papier-crayon et dans un délai approximatif d'une quinzaine de secondes, des équations usuelles et simples de la forme suivante (et leurs variantes) écrites au tableau à la vue tous :

$$Ax+B=C$$

$$Ax+B=Cx+D$$

$$\frac{A}{B}=\frac{C}{D}$$

(A, B, C ou D, l'un seulement, étant de la forme kx)

$$Ax^2+Bx+C=0$$

Les objectifs de ce travail de recherche sur la résolution d'équations en contexte de calcul mental sont centrés sur l'analyse de la nature des stratégies déployées, dans le but : de comprendre leur fonctionnement, de décrire leurs caractéristiques, de les comparer aux stratégies usuelles en contexte de papier-crayon, d'analyser leur potentiel pour stimuler l'avancée des mathématiques en classe, etc.[4]

Tel que le soulignent Butlen & Pézard (2000), en contexte de calcul mental les participants font rarement référence aux procédures et aux algorithmes connus, car ceux-ci s'avèrent souvent peu économiques pour exécuter les tâches données. Ceci mène plusieurs participants à proposer des stratégies particulières, parfois non usuelles, et adaptées directement aux tâches résolues. En retour, ces diverses stratégies peuvent inspirer de nombreuses réflexions didactiques, par exemple, concernant l'enseignement ou encore, dans ce cas-ci, sur des façons de concevoir et donner un sens à la résolution d'équations.

C'est justement à travers l'analyse du sens mathématique sous-jacent à certaines stratégies déployées en contexte de calcul mental que cet article est développé ; et, d'une certaine façon,

[3] Bien que d'âges différents, tous les participants ont le même rôle « d'élèves » lors des diverses séances de calcul mental. Ils ne sont donc pas distingués ici, surtout que les stratégies abordées dans la suite de l'article ont sensiblement été produites de façon similaire dans chacune des séances.

[4] Ces séances de calcul mental sont soit enregistrées sous format vidéo, soit l'objet de notes de terrain prises sur leur déroulement.

que la question ci-haut sur « comment aider l'algèbre » est abordée. Il est souvent affirmé que la résolution d'équation consiste à déterminer les valeurs qui sont solutions de l'équation[5]. Dans cet article, l'analyse mathématique de diverses stratégies mises en route en contexte de calcul mental par une variété de participants (élèves, étudiants universitaires, enseignants) ouvre la porte à d'autres significations possibles sur la façon de concevoir la résolution d'équations et de lui donner un sens. Ce qui suit aborde ces diverses significations mathématiques à propos de la résolution d'équations.

1. Résoudre une équation c'est... traiter l'équation comme une égalité

Deux des équations qui ont été données sont :

$$\frac{6}{x}=\frac{3}{5} \text{ et } \frac{1}{3x}=\frac{2}{5}$$

Une façon avec laquelle plusieurs ont résolu ces équations a été de les traiter comme des proportions. Dans le cas de $\frac{6}{x}=\frac{3}{5}$, certains ont expliqué vouloir maintenir la proportion $\frac{3}{5}$ avec $\frac{6}{x}$. Par exemple, « 3 est à 6 ce que 5 est à 10 » ou « si 6 est le double de 3, alors 10 est le double de 5 ». Traiter les équations $\frac{6}{x}=\frac{3}{5}$ et $\frac{1}{3x}=\frac{2}{5}$ comme des proportions, bien que simple, soulève des questions intéressantes sur la nature d'une équation.

Cette stratégie de proportionnalité pointe sur une des différences entre équation et égalité en mathématiques. Baruk (1995) trace en ce sens une distinction entre les deux, expliquant qu'une *égalité* est une affirmation vraie ou fausse, telle que $7+2=9$ est vraie et $1+3=6$ est fausse. Une *équation*, toutefois, implique des valeurs inconnues, un x par exemple, qui rendent cette équation *conditionnelle* à ces valeurs inconnues. Par exemple, l'équation $x+7=21$ est conditionnelle, possédant ou non une solution, selon les valeurs attribuées à x. Ceci rend saillant ce à quoi la résolution d'une équation réfère, soit de déterminer les valeurs de x qui pourraient être solutions de l'équation. La même chose pour $x+y=-8$ ou $x^2+7=21x$.

Les équations impliquent des inconnues et sont donc conditionnelles, relatives aux valeurs de ces inconnues. C'est en ce sens qu'une équation n'est pas stable, dira Baruk (1995), parce qu'elle dépend des valeurs trouvées pour ses inconnues. L'égalité $2+3=5$ est stable, mais $2x+3=5$ n'est pas stable et n'est pas une égalité par définition, car elle est conditionnelle à la valeur de x. La valeur du x obtenue lors de la résolution est ce qui rend cette équation stable. En bref, c'est cette valeur de x qui rend l'équation une égalité.

Traiter l'équation $\frac{6}{x}=\frac{3}{5}$ comme une proportion fait en sorte qu'elle n'est pas traitée comme une équation, elle n'est pas considérée conditionnelle mais directement comme une égalité, vraie sur le champ et décrivant une relation entre des quantités établies. Cette proportion $\frac{3}{5}$ existe, comme toute proportion, elle n'est pas conditionnelle, elle est établie, tout comme plusieurs autres

[5] L'expression « être solution de » a été préférée à d'autres formulations, telles que « vérifier l'équation », « valider l'équation », « satisfaire l'équation » ou encore « rendre l'équation vraie », qui, bien qu'utilisées dans d'autres écrits, peuvent potentiellement porter à confusion.

proportions équivalentes à $\frac{3}{5}$ et constituées de nombres tels que $\frac{9}{15}$, $\frac{18}{30}$ et $\frac{13{,}5}{22{,}5}$. Parce que la proportion $\frac{3}{5}$ existe, parce qu'elle est possible, le nombre x existe. Lorsque traitée comme une proportion, $\frac{6}{x}=\frac{3}{5}$ n'est plus conditionnelle, mais devient une affirmation relative à une relation entre des quantités établies et connues : 3, 5, 6 et x. La valeur de x, d'une certaine façon, *est déjà prédéterminée* comme nombre relié ou contraint par sa relation avec 3, 5 et 6 dans la proportion $\frac{6}{x}=\frac{3}{5}$. La même chose pour ceux qui ont traité $\frac{6}{x}=\frac{3}{5}$ comme la recherche d'une fraction équivalente à $\frac{3}{5}$. Faire ainsi convertit l'équation $\frac{6}{x}=\frac{3}{5}$ en une égalité : il existe une fraction avec 6 au numérateur pour laquelle la fraction $\frac{3}{5}$ est équivalente (où, par exemple, pour deux fois plus de morceaux, les morceaux doivent être deux fois plus petits).

En ce sens, traiter directement $\frac{6}{x}=\frac{3}{5}$ ou $\frac{1}{3x}=\frac{2}{5}$ en tant que proportions ou fractions équivalentes revient à *traiter l'équation comme une égalité*. Cette façon de concevoir la résolution met de côté temporairement la recherche des valeurs de x qui pourraient être solutions de ces équations, puisque celles-ci sont établies dès le départ en tant que proportions ou fractions équivalentes, soit en tant qu'égalités.

2. Résoudre une équation c'est... éliminer le statut conditionnel de l'équation

Une situation presque à l'opposé de la précédente s'est produite lorsque l'équation suivante a été donnée :

$$5x+6+4x+3=-1+9x$$

Plusieurs, après l'avoir résolu, ont affirmé que ceci était « faux » et « impossible ». Cette affirmation de « fausseté » montre bien que l'équation $5x+6+4x+3=-1+9x$ a été traitée de façon différente de $\frac{6}{x}=\frac{3}{5}$ ou $\frac{1}{3x}=\frac{2}{5}$. Les deux types d'équation ont des inconnues, mais leur statut n'est pas le même. L'équation $5x+6+4x+3=-1+9x$ est considérée conditionnelle, dépendante des valeurs de x ; alors que $\frac{6}{x}=\frac{3}{5}$ ou $\frac{1}{3x}=\frac{2}{5}$ ont été décrites sous une relation de proportionnalité entre des nombres dont x.

Ces différences soulèvent certaines questions. D'une certaine façon, lors de la résolution de l'équation $5x+6+4x+3=-1+9x$, celui qui résout agit « comme si » un x solution de l'équation pouvant exister. Toutefois, pour $5x+6+4x+3=-1+9x$, ce x n'existe pas. Lors de la résolution de $5x+6+4x+3=-1+9x$, il est possible d'aboutir, par exemple, à $-1=9$ ou $10=0$, ou quelque chose de semblable : toutes des affirmations fausses, toutes des fausses égalités, mais toutes stables, tel que souligné plus haut. Pour en arriver là, des manipulations algébriques sont toutefois réalisées, d'une certaine façon, en assumant qu'il existe un x qui est solution de l'équation $5x+6+4x+3=-1+9x$. Lorsque celui qui résout arrive à $10=0$, ce n'est pas tant que $10=0$ est faux, mais plutôt que l'*hypothèse initiale* que l'équation possède une solution est invalidée, que $5x+6+4x+3$ et $-1+9x$ ne sont pas égaux et que d'avoir posé $5x+6+4x+3$ égal à $-1+9x$ est ce qui est faux, comme certains l'ont par la suite affirmé. Ceci montre qu'avoir cru que $5x+6+4x+3=-1+9x$ avait une solution était une supposition invalide, de là la contradiction avec $10=0$ ou $-1=9$.

Face au résultat $10=0$, un participant a tout bonnement affirmé que « c'est comme si le x ne vaut pas la même chose des deux côtés de l'équation ! ». Tel que l'affirme Deledicq (2004), une égalité est une affirmation stipulant que les membres de part et d'autre du signe d'égalité représentent la même quantité. Ceci représente aussi l'hypothèse de départ, voire l'hypothèse de travail, de toute résolution d'équations. Dans le cas de $5x+6+4x+3=-1+9x$, toutefois, cette hypothèse n'est pas valide car elle est relative à un x qui est montré impossible. C'est pourquoi ceci pointe vers l'idée fort curieuse que le membre de gauche $5x+6+4x+3$ devrait être différent du membre de droite $-1+9x$, voire que le x de $5x+6+4x+3$ doit être différent du x de $-1+9x$, tel que le soulignent Stacey et MacGregor (2000). Par contre, si ce x n'est pas le même des deux côtés de l'équation, alors bizarrement $9x-9x$ ne serait pas non plus égale à zéro.

Au niveau des opérations et manipulations algébriques, c'est aussi la supposition que $5x+6+4x+3=-1+9x$ possède une solution qui *permet* de les faire, ouvrant la porte à un certain cercle vicieux. Un cercle vicieux, car ces manipulations ne seraient pas permises si la valeur de x n'est soudainement plus la même des deux côtés du signe d'égalité. Ainsi, la conclusion, par exemple, ne souligne pas uniquement que l'hypothèse de travail sur le fait que l'équation possède une solution est invalide, mais surtout que sa validité reposerait sur le fait que les valeurs de x ne peuvent pas être les mêmes des deux côtés de l'égalité. Tout ceci menant à questionner la légitimité des manipulations algébriques qui elles aussi reposent sur cette même hypothèse, qui font que $9x-9x$ doit donner zéro.

La combinaison de ces idées avec les précédentes sur les proportions souligne le fait que résoudre une équation pour x exige davantage que de trouver les valeurs de x qui en sont les solutions : résoudre une équation engage à supposer que l'équation possède une solution, ce qui permet d'opérer sur elle avec des manipulations algébriques qui la supposent tout autant. D'une certaine façon, penser la résolution d'équations en ces termes implique que de tenter de déterminer la valeur de x qui est solution de l'équation revient aussi à essayer d'*éliminer le statut conditionnel de l'équation*. Résoudre une équation c'est vouloir confirmer l'hypothèse du départ, dans une quête quelque peu circulaire de chercher la valeur qui rend légitime (a) d'avoir supposé que l'équation possède une solution dès le départ et (b) de l'avoir manipulée algébriquement sur la base de cette supposition. Cela dit, comme le montre la résolution de $5x+6+4x+3=-1+9x$, ceci n'est pas toujours possible et montre plutôt que l'hypothèse de travail est parfois invalide, voire mène à une contradiction.

3. Résoudre une équation c'est... obtenir une forme lisible

Un autre type d'équation donnée a été :

$$\frac{2}{5}x=\frac{1}{2}$$

Une façon proposée pour résoudre cette équation a été de premièrement « doubler la $\frac{1}{2}$ », ce qui en retour nécessite de « doubler $\frac{2}{5}x$ » et où l'équation en devient $\frac{4}{5}x=1$. À ce moment, certains ont affirmé connaître la réponse $\frac{5}{4}$ sur-le-champ, sans avoir à faire d'autres manipulations algébriques, parce que pour eux $\frac{5}{4}$ représente la valeur qui multipliée par $\frac{4}{5}$ donne 1.

Ce que ce type de stratégie met en avant est la façon avec laquelle la résolution d'une équation peut se faire directement, sans manipulations algébriques, en la « lisant » comme le décrit Arcavi (2004) ; un peu de la même façon que pour $2x=2$ ou $x+1=2$ il est possible d'inférer directement la valeur de $x=1$, sans avoir à passer par quelque manipulations que ce soit. Voici d'autres exemples de lectures directes proposées :

- Pour résoudre l'équation $3x=\frac{3}{4}$, certains ont affirmé que trois fois le x est égal à trois quarts, alors x vaut un quart. Ou, à l'inverse, « si trois quarts vaut trois x, alors x est un quart » ;
- Pour résoudre $2x+3=5$, certains ont affirmé directement que $x=1$, parce que ceci est similaire à $2+3=5$ et que le x ne doit pas changer le 2 de cette égalité. D'autres ont utilisé le même raisonnement, mais ont affirmé de façon erronée que x devait alors valoir 0, ou encore que le x n'est pas nécessaire dans l'égalité ;
- Pour résoudre $\frac{2}{5}x=\frac{1}{2}$, certains ont expliqué vouloir obtenir $\frac{1}{2}$ des deux côtés de l'équation. Puisque la moitié de 5 est 2,5 et que c'est en ce moment 2, alors x doit valoir 1,25 pour obtenir 2,5. De façon similaire, certains ont transformé l'équation en $\frac{4}{10}x=\frac{1}{2}$ et cherchaient 5, la moitié de 10, menant x à valoir 1,25 pour faire 5 au numérateur (4 fois 1,25 valant 5). D'autres ont transformé l'équation en $\frac{4}{10}x=\frac{5}{10}$ et, utilisant le même raisonnement mais de façon additive (et erronée), ont affirmé que x devait valoir $-\frac{1}{10}$.

Ces stratégies, bien que différentes et certaines erronées, soulèvent l'idée que la valeur de x peut être inférée directement, en manipulant de façon minimale l'équation elle-même. Ceci montre comment la résolution d'une équation pour x ne se résume pas à isoler le x, ni à obtenir une équation de la forme $x=$__ ; l'objectif est simplement de trouver les valeurs de x qui sont solutions de l'équation. En d'autres mots, isoler le x par des manipulations algébriques représente uniquement une façon parmi d'autres de déterminer cette valeur de x.

Baruk (1995) explique que l'obtention d'une équation de la forme $x=3$, par exemple, représente ce qu'elle appelle une forme *lisible*, où il est possible d'inférer que de remplacer x par 3 solutionne l'équation. Toutefois, les stratégies utilisées ci-dessus montrent qu'une équation peut être lue directement pour y obtenir cette valeur de x, mais sans être sous la forme $x=$__. La notion de forme lisible est intéressante lorsque ces stratégies sont considérées, car elle souligne que la lisibilité d'une équation est possible pour d'autres formes que $x=$__. De plus, la lisibilité d'une équation est une dimension relative au lecteur : l'équation $\frac{4}{5}x=1$ peut être lisible pour certains, et non pour d'autres, tout comme $3x=\frac{3}{4}$ ou $2x=2$ le sont pour certains.

Cette idée de lisibilité rappelle celle de *lecture globale* de l'équation de Bednarz et Janvier (1992) (ou encore ce que Arcavi (2004) nomme l'investigation *a priori* de l'équation). Pour une équation de la forme $x+\frac{x}{4}=\frac{x}{4}+6$, elles montrent comment certains élèves se plongent tête première dans diverses manipulations algébriques pour isoler le *x*, alors que d'autres prennent un pas de recul, regardent l'équation dans son ensemble et infèrent que $x=6$ parce que $\frac{x}{4}$ est présent de façon additive de part et d'autre du signe d'égalité dans l'équation.

De plus, isoler le *x* ne représente pas non plus une panacée pour l'obtention d'une forme lisible. La formule quadratique $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ en est un bon exemple où, bien qu'isolé, il reste encore plusieurs étapes à franchir pour obtenir la valeur du *x* recherché. Il est aussi possible de penser à une équation du type $2x=27^2$ transformée en $x=\frac{27^2}{2}$, qui n'est pas nécessairement une forme si lisible pour plusieurs. De façon similaire, l'obtention de la forme $3=x$ ne représente pas toujours une forme lisible pour tous, où certains jeunes élèves se demandent parfois « et là, je fais quoi ? » (P. Liljhedal, communication personnelle).

La résolution d'une équation revient ici à *obtenir une forme lisible*, soit une équation qui permet d'inférer les valeurs qui sont solutions de l'équation. Ces formes lisibles, comme le montrent les stratégies précédentes, peuvent être de différentes natures et parfois exigent peu ou pas de transformations ou manipulations algébriques.

4. Résoudre une équation c'est... produire une famille d'équations équivalentes

Il y a plus à dire sur cette stratégie de « doubler la $\frac{1}{2}$ ». Cette transformation de $\frac{2}{5}x=\frac{1}{2}$ vers $\frac{4}{5}x=1$ a aussi été justifiée par le fait qu'elle rendait l'équation plus facile à résoudre en éliminant la $\frac{1}{2}$. Deux éléments ressortent de cette justification.

Premièrement, cette stratégie souligne la façon avec laquelle l'emphase peut être placée ailleurs que sur le *x* lors de la résolution. Dans ce cas, les manipulations se sont centrées sur la $\frac{1}{2}$, pour l'éliminer. Comme un collègue le pointait (P. Liljhedal, communication personnelle), ceci rend explicite comment plusieurs d'entre nous sommes souvent centrés sur le *x* alors que les jeunes élèves se centrent tout autant sur les nombres dans l'équation — Filloy et Rojano (1989) abordent aussi cette idée. Ceci participe également à la remise en question de la stratégie centrée sur l'isolation du *x*, qui se veut être réalisée efficacement à travers le plus petit nombre d'étapes. Cette stratégie impliquant de doubler $\frac{2}{5}x=\frac{1}{2}$ vers $\frac{4}{5}x=1$ n'est justement pas centrée sur le *x* dès le départ et est davantage centrée sur l'équation elle-même, sa forme, sa structure, pour la simplifier. En ce sens, cette étape pourrait ne pas être vue comme étant très efficace pour isoler le *x* !

Deuxièmement, combinée avec cette idée, un autre élément rendu explicite par cette stratégie est le fait que la manipulation de $\frac{2}{5}x=\frac{1}{2}$ vers $\frac{4}{5}x=1$ revient clairement à produire une équation équivalente, qui se veut plus simple. En ce sens, toute manipulation algébrique d'une équation produit une équation équivalente : de $\frac{2}{5}x=\frac{1}{2}$ à $\frac{4}{5}x=1$ et vers $x=1\cdot\frac{5}{4}$, par exemple, menant ensuite à $x=\frac{5}{4}$, qui représentent toutes des équations équivalentes produites dans une intention de déterminer la valeur du x. Cette transformation de l'équation en la doublant, bien que locale et fonctionnant particulièrement bien avec cette équation précise, souligne comment résoudre une équation revient à produire une série d'équations équivalentes. Ceci mène à considérer que, d'une transformation ou d'une étape à une autre pour résoudre l'équation, ceci produit différents membres d'une famille d'équations équivalentes. Dans le cas de $\frac{2}{5}x=\frac{1}{2}$, une famille d'équations équivalentes possédant la même solution de $x=\frac{5}{4}$ est produite ; famille pour laquelle il existe plusieurs autres membres, tous équivalents à $\frac{2}{5}x=\frac{1}{2}$, tels que $5=4x$, $8x=10$, $2x=\frac{5}{2}$, $20x=25$, $8\pi x=\frac{30}{3}\pi$, etc.

Concevoir la résolution d'équations comme étant la production d'une famille d'équations équivalentes mène à considérer qu'un des membres de cette famille est de la forme $x=$__. Dans le cas de $\frac{2}{5}x=\frac{1}{2}$, ce membre est $x=\frac{5}{4}$. Ce $x=\frac{5}{4}$ est souvent conçu comme étant l'étape finale de la résolution de $\frac{2}{5}x=\frac{1}{2}$, où le x est isolé et représente la valeur qui est solution de l'équation. Toutefois, si la résolution est conçue comme étant la production d'une famille d'équations équivalentes, $x=\frac{5}{4}$ est uniquement un des membres de cette famille, bien que dans une forme simple qui peut être considérée plus lisible par plusieurs. Ceci rend la recherche de la valeur de x pour $\frac{2}{5}x=\frac{1}{2}$ comme étant la recherche de la forme la plus simple de l'ensemble des membres de la famille d'équations équivalentes à $\frac{2}{5}x=\frac{1}{2}$.

Parce que l'équation $\frac{2}{5}x=\frac{1}{2}$ est apparue trop difficile à « lire » pour certains (mais pas pour tous, tel que mentionné plus haut), elle a été transformée en une forme plus simple de la même famille d'équations équivalentes pour en inférer la valeur de x. Résoudre une équation se conçoit ici comme l'idée de *produire une famille d'équations équivalentes* à travers des manipulations algébriques, dans le but de trouver la forme la plus simple de cette famille, soit la plus lisible pour celui ou celle qui résout.

En guise de conclusion

Les façons de concevoir la résolution d'équations soulevées dans cet article revêtent un intérêt didactique, centré sur le sens mathématique pouvant être donné à la résolution d'équations. Bien qu'alignées aux tâches à résoudre, parfois locales et ne portant pas en elles un sens nécessairement général, les stratégies analysées ouvrent la porte à une conception qui peut s'avérer tangible, voire verbalisée, de ce que peut signifier résoudre une équation. Sans être complètement alternatives aux sens habituels donnés à la résolution d'équation, ces façons de concevoir s'ajoutent, se complémentent et offrent même des entrées additionnelles pour travailler l'équation, qui vont bien au-delà de la simple envie d'identifier les valeurs de x.

C'est en ce sens que l'analyse effectuée sur les stratégies aborde la question initiale posée sur comment « aider l'algèbre » à se faire mieux comprendre. En effet, ces différentes façons de concevoir la résolution d'équations offrent des façons de penser l'algèbre, en aidant la résolution d'équation à se faire penser autrement. S'inspirant directement de stratégies déployées en contexte de calcul mental, ces façons de concevoir la résolution d'équations portent en elles un potentiel pouvant inspirer des façons complémentaires, voire alternatives, d'aborder cette même résolution d'équations. Et, bien qu'elles ne représentent pas des prescriptions pour l'enseignement et encore moins une panacée pour la compréhension, elles portent à réflexion et peuvent contribuer à la bonification des façons d'entrer et de travailler la résolution d'équations à proprement parler.

Références bibliographiques

Almog, N. & Ilany, B.-S. (2012). Absolute value inequalities: high school students' solutions and misconceptions. *Educational Studies in Mathematics, 81*(4), 347-364.

Arcavi, A. (1994). Symbol sense: informal sense-making in formal mathematics. *For the learning of Mathematics, 14*(3), 24-35.

Baruk, S. (1995). *Dictionnaire des mathématiques*. France : Seuil.

Booth, L. (1984). Erreurs et incompréhensions en algèbre élémentaire. *Petit x, 5*, 5-17.

Butlen, D. & Pézard, M. (2000). Calcul mental et résolution de problèmes numériques au début du collège. *Repères IREM, 41*, 5-24.

Chevallard, Y. (1989). Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collègue. 2e partie. *Petit x, 19*, 43-72.

Cortés, A. & Kavafian, N. (1999). Les principes qui guident la pensée dans la résolution des équations. *Petit x, 51*, 47-73.

Coulange, L. (1997). Les problèmes « concrets » à « mettre en équations » dans l'enseignement. *Petit x, 47*, 33-58.

Coulange, L., Ben Nejma, S., Constantin, C. & Lenfant-Corblin, A. (2012). Des pratiques enseignantes aux apprentissages des élèves en algèbre à l'entrée au lycée. In L. Coulange, J.P. Drouhard, J.L. Dorier, A. Robert (Eds.), *Enseignement de l'algèbre élémentaire, bilan et perspectives. Recherches en Didactique des Mathématiques* (pp. 57-79). Grenoble : La Pensée Sauvage.

Deledicq, A. (2004). *Maths - Lycée*. France : Éditions de la Cité.

Filloy, E. & Rojano, T. (1989). Solving equations: the transition from arithmetic to algebra. *For* *the Learning of Mathematics, 9*(2), 19-25.

Frost, J. (2015). Disapearing *x* : when solving does not mean finding the solution set. *Journal of Mathematical Behavior, 37*, 1-17.

Hewitt, D. (2000). Young students learning formal algebraic notation and solving linear equations: are commonly experienced difficulties avoidable? *Educational Studies in Mathematics, 81*(2), 139-159.

Malisani, E. & Spagnolo, F. (2009). From arithmetical thought to algebraic thought: the role of the “variable”. *Educational Studies in Mathematics, 71*(1), 19-41.

Proulx, J. (2013). Le calcul mental au-delà des nombres : conceptualisations et illustrations avec la résolution d’équations algébriques. *Annales de didactique et de sciences cognitives, 18*, 61-90.

Proulx, J., Lavallée-Lamarche, M.-L. & Tremblay, K.-P. (2017). Équations algébriques et activité mathématique en calcul mental : regard sur les défis d’enseignement. *Annales de didactique et de sciences cognitives, 22*, 43-65.

Stacey, K. & MacGregor, M. (2000). Learning the algebraic method of solving problems. *Journal of Mathematical Behavior, 18*(2), 149-167.