L'INTRODUCTION DES NOMBRES IRRATIONNELS DANS L'ENSEIGNEMENT SECONDAIRE BELGE FRANCOPHONE - UNE ÉTUDE DU DISCOURS DES ENSEIGNANTS

Stéphanie BRIDOUX[1]
Université de Mons (Belgique), Laboratoire André Revuz, EA4434

Antoine DEROBERTMASURE[2]
Université de Mons (Belgique)

Simon DE VAL[3]
Université de Mons (Belgique)

Résumé. Les programmes de l'enseignement secondaire belge entrés en vigueur en 2016 préconisent d'introduire les nombres irrationnels, et par conséquent l'ensemble des nombres réels, au fil de certains chapitres, comme l'algèbre, la géométrie ou la trigonométrie. Alors que les anciens programmes contenaient des injonctions précises sur les connaissances relatives aux nombres réels à développer chez les élèves, très peu de commentaires sont désormais donnés dans les documents officiels sur la manière de définir et de manipuler ces objets. Dans cet article, nous étudions comment les enseignants vont aborder ces nouveaux nombres avec les élèves à partir de l'analyse de leur discours en termes de proximités, au sens de Bridoux et *al.* (2016).

Mots-clés. Nombres irrationnels, proximités, pratiques enseignantes, programmes de l'enseignement secondaire, apprentissages.

Abstract. New Belgian secondary school curricula (2016) recommend to introduce irrational numbers, and therefore real numbers, in several chapters such algebra, geometry or trigonometry. Former curricula gave precise recommendations on the achieved learning. In the current context, little is said about how to define these new numbers and what students have to do with them. In this article, we study how teachers introduce these numbers to students. We analyze teachers' comments in terms of proximities (Bridoux et *al.*, 2016).

Keywords. Irrational numbers, proximities, teachers' practices, secondary school curricula, learning.

Introduction

La recherche que nous présentons ici est issue d'un mémoire de fin d'études (De Val, 2019) qui trouve son origine dans une réforme récente (2015) de l'enseignement des mathématiques mise en place en Belgique francophone. Cette réforme mérite d'être soulignée car les documents officiels à destination des enseignants n'avaient pas subi de modifications depuis 1999. Dans l'enseignement secondaire belge francophone, les contenus à enseigner sont délimités dans des référentiels et des programmes d'études. Les référentiels décrivent les compétences (disciplinaires et transversales) à développer chez les élèves, comme par exemple la rigueur attendue ou des types de tâches que les élèves doivent pouvoir réaliser ; les programmes d'études, quant à eux, précisent les contenus à enseigner ainsi que l'enchainement (chronologique) selon lequel ces contenus doivent être abordés. Ces programmes peuvent

[1] stephanie.bridoux@umons.ac.be

[2] antoine.derobertmasure@umons.ac.be

[3] simon-de-val@hotmail.com

également présenter des recommandations méthodologiques et/ou didactiques aux enseignants, par exemple sur l'utilisation des TICE dans certains chapitres ou pour préconiser un fil conducteur pour l'introduction d'une nouvelle notion. La réforme de l'enseignement des mathématiques dont il est question a été mise en place dans les classes en 2016. Elle vise les quatre dernières années de l'enseignement secondaire, appelées troisième (élèves de 15 ans environ), quatrième (élèves de 16 ans environ), cinquième (élève de 17 ans environ) et sixième années (élèves de 18 ans environ). Nous utiliserons cette terminologie tout au long du texte.

Dans cet article, nous nous intéressons à un point très précis, à savoir la place qu'occupe l'introduction des nombres irrationnels dans ces nouveaux programmes d'études. En effet, une comparaison entre les anciens programmes et ceux issus de la réforme montre que, jusqu'en 2016, les nombres irrationnels étaient définis dès la troisième année comme des nombres ayant un développement décimal illimité non périodique[4]. Le nombre π apparaissait de manière récurrente dans le chapitre de trigonométrie et dans l'étude des fonctions trigonométriques. Faisaient également partie de la version précédente du programme les inclusions des différents ensembles de nombres ($\mathbb{N}\subseteq\mathbb{Z}\subseteq\mathbb{Q}\subseteq\mathbb{R}$), la représentation des nombres réels sur une droite graduée, le fait de pouvoir ordonner des irrationnels comme par exemple $\sqrt{3}$ et $2\sqrt{2}$, leur écriture décimale illimitée non périodique, l'utilisation du nombre π et le fait d'en rechercher des encadrements par la méthode d'Archimède, le nombre d'or, ...

Depuis l'introduction des nouveaux programmes, les nombres irrationnels ne font plus l'objet d'éléments théoriques comme leur définition en termes de nombres ayant un développement décimal illimité non périodique. Ils apparaissent ainsi de manière transversale au fil des chapitres dans certains types de tâches explicitement décrites dans les nouveaux programmes, principalement en troisième et en quatrième années : des calculs de longueur de segments lorsque celle-ci est un nombre irrationnel, des constructions de segments de longueur irrationnelle, des calculs contenant des racines carrées ou la résolution d'(in)équations du second degré avec des solutions irrationnelles. De plus, ces nouveaux programmes demandent d'approcher ce type de nombres à la calculatrice.

Dans ce contexte, le cas du système d'enseignement en France dans lequel l'objet « nombre irrationnel » a lui aussi été de plus en plus ignoré par les réformes successives des programmes tout en restant une notion difficile à conceptualiser par les élèves (Bronner, 2007) nous a semblé pertinent à étudier. Le passage des rationnels aux réels se fait via l'apparition des racines carrées (Dumail, 2007). L'ensemble des réels émerge alors souvent comme l'ensemble de tous les nombres sans qu'une étude spécifique sur la nature des différents types de nombres n'ait été menée avant (Bloch, 2018). Cette situation peut amener des difficultés de compréhension chez les élèves (par exemple la difficulté à distinguer valeur exacte et approchée, à définir un irrationnel ou à opérer sur ces nombres (Vergnac & Durand-Guerrier, 2014). Vivier (2008) pointe également la place très réduite de la droite numérique comme représentation des nombres réels. Notons cependant que les nouveaux programmes de la classe de seconde générale en France (MEN, 2019), entrés en vigueur en septembre 2019, y font désormais explicitement référence. Sans en avoir mené une analyse approfondie, il apparaît en effet que, dans la partie *« Nombres et calculs »*, un des objectifs annoncés est que *« les élèves rencontrent les nombres réels comme abscisses des points d'une droite graduée, et plus largement comme nombres permettant de mesurer des grandeurs »*. Des connaissances sur les nombres ainsi que sur les ensembles apparaissent également dans ces nouveaux documents, comme la représentation

[4] La formulation utilisée par certains enseignants est « nombre décimal illimité non périodique », nous la rencontrons plus loin dans les citations.

d'intervalles du type $[a-r\,;a+r]$ et leur caractérisation par une inégalité de la forme $|x-a|\leqslant r$, le fait de déterminer si un nombre réel appartient à un intervalle donné ou encore l'encadrement d'un nombre réel par des décimaux. La caractérisation d'un nombre réel en termes de développement décimal illimité ou encore la périodicité du développement décimal des nombres rationnels sont mentionnées comme des approfondissements possibles. En ce qui concerne la mise en œuvre des programmes en vigueur avant cette réforme, Bloch (2018) souligne que, malgré la présence de résultats sur les nombres dans les manuels, leur présentation se fait sur le mode de l'ostension — au sens de Brousseau (1996) — et peu d'outils sont finalement donnés aux élèves pour opérer sur les nombres. Une structuration des ensembles de nombres peut être réalisée en classe de seconde mais Bloch (*ibid.*) évoque un phénomène analogue dans le sens où l'inclusion des différents ensembles de nombres se fait elle aussi par ostension avec des dessins sagittaux.

Dans le contexte belge francophone où, contrairement au système français, les documents officiels sont moins précis sur l'enseignement des nombres irrationnels, nous nous demandons comment les enseignants belges francophones vont introduire des connaissances sur ces nouveaux nombres. Nous faisons l'hypothèse que les enseignants vont accompagner l'introduction des nombres irrationnels de commentaires. Nous pensons par exemple à des explications sur la différence entre la valeur exacte d'un nombre irrationnel et la valeur affichée par la calculatrice, au fait de donner des exemples de nombres irrationnels ou encore à l'émergence d'une définition à la fin d'un exercice où des nombres irrationnels ont été utilisés.

Ce premier questionnement général soulève la question de comment étudier ce type de commentaires dans le discours des enseignants. Pour aborder cette question, nous présentons dans la partie 1 des outils issus de la Théorie de l'Activité, contextualisée à l'enseignement des mathématiques. Ces outils nous permettent aussi de formuler notre question de recherche. La partie 2 décrit la méthodologie suivie pour l'étudier. Les analyses didactiques qui en découlent font l'objet des parties 3 et 4. Nous terminons par la présentation des résultats et quelques perspectives de recherche.

1. Outils théoriques et problématique

1.1. Les moments de cours

Nous réservons au mot « cours » l'introduction de connaissances, dans un sens très général, telles que des énoncés mathématiques (définitions, propriétés), des démonstrations, des exemples, des méthodes, des exercices résolus, des commentaires (erreurs à ne pas commettre, rappel), ... En Théorie des Situations Didactiques (TSD), un moment de cours s'apparente à ce que Brousseau appelle l'institutionnalisation (1998). Celle-ci émerge à partir d'un travail des élèves sur une situation adidactique spécifique d'une connaissance. Une idée clé de ce type de situations est que les élèves peuvent se l'approprier à partir de leurs connaissances antérieures, les nouvelles connaissances sont alors introduites comme un outil de résolution optimal de la situation en question.

Durant l'institutionnalisation, l'enseignant prend appui sur les premières formulations des élèves pour introduire des connaissances générales, décontextualisées, en particulier ce qui sera à retenir et à utiliser dans les exercices ultérieurs. Même si le passage au général peut être facilité par un travail préalable des élèves sur une situation d'introduction, nous pensons que certaines notions sont plus difficiles à introduire avec ce type de situations, notamment parce qu'elles sont trop éloignées des connaissances antérieures des élèves. Nous pensons aux notions formalisatrices, unificatrices et généralisatrices — notions FUG, au sens de Robert (1998) —, qui apportent un formalisme nouveau et généralisateur, permettant d'unifier des connaissances antérieures des élèves. C'est par exemple le cas de la notion de limite et de celle de fonction. Pour ces notions, il est difficile de trouver une situation fondamentale et les moments de cours associés à leur introduction peuvent alors prendre des formes différentes de l'institutionnalisation au sens de la TSD. Nous choisissons donc de parler de « moments de cours » ou *« moments d'exposition des connaissances »*, au sens de Bridoux et *al.* (2016), pour désigner ces moments consacrés à un exposé décontextualisé de la part de l'enseignant durant lesquels il présente le « savoir » qui sera à transformer en connaissance par les élèves. Comme l'expliquent Bridoux et *al.*, « ces moments peuvent suivre une recherche spécifique des élèves, inclure des exercices, des exemples, ... » (Bridoux et *al.*, *ibid.*, p. 188). Selon Allard (2015), d'autres moments tels que des synthèses, des phrases de conclusion pour dire ce qu'il y a à retenir, des phrases annonçant l'objet du cours, des échanges autour d'une production sont aussi propices à l'exposition de connaissances.

Comme nous l'avons précédemment souligné, les documents officiels suggèrent différents types de tâches mobilisant des nombres irrationnels dans des domaines tels que l'algèbre, la géométrie et la trigonométrie et ce, dès la troisième année. Nous pensons donc que les enseignants ne s'appuieront pas sur des « situations d'introduction » pour introduire des connaissances sur les nombres irrationnels. En revanche, nous faisons l'hypothèse que la résolution en classe d'exercices impliquant ces nombres sera le contexte privilégié par les enseignants pour parler des nombres irrationnels. Nous expliquons maintenant comment ces moments peuvent, selon nous, participer aux apprentissages des élèves. Le lecteur pourra se référer à Bridoux et *al.* (ibid.) pour une présentation détaillée du cadre théorique retenu dans cette recherche.

Notre inscription dans la Théorie de l'Activité (TA), appliquée à la didactique des mathématiques et à la situation scolaire (Vandebrouck, 2008) nous amène à approcher les apprentissages des élèves au moyen de leurs activités[5] mathématiques. Durant les moments de cours, les activités des élèves sont difficilement observables, notamment parce que les élèves sont en général moins actifs que dans les phases d'exercices et parce qu'il y a moins d'échanges avec l'enseignant. Nous postulons toutefois que

> *l'exposition des connaissances serait un moment qui peut participer à l'appropriation visée, par la possibilité de familiariser avec des mots (et formalisations) et de faire activer ensuite (ou grâce à ce qui s'est passé avant) des connexions, d'abord provisoires et partielles, entre mots et activités mathématiques (Bridoux et al., 2016, p. 192).*

Nous étudions donc les moments d'exposition des connaissances en repérant dans le discours des enseignants des tentatives de rapprochement avec le travail des élèves. Pour mener ce type d'étude, le chercheur doit disposer d'une référence *a priori* de manière à analyser les déroulements en classe.

Cette référence résulte du croisement entre trois études : épistémologique (à finalité didactique), curriculaire et cognitive. L'étude épistémologique et curriculaire permet au chercheur de définir les spécificités des notions à partir des programmes. Ainsi, dans un contexte où des connaissances sur les irrationnels sont à introduire au fil de différents chapitres, cette étude nous amène notamment à préciser quels sont les domaines dans lesquels les connaissances en question peuvent émerger, donc à étudier les cadres, au sens de Douady (1986). Dans son étude sur

[5] Les activités désignent ce que les élèves pensent, disent, font... ou pas.

l'enseignement des nombres réels, Vivier (2008) distingue le cadre numérique dont les objets qui le constituent sont les nombres et le cadre ensembliste constitués des ensembles de nombres. Au sein d'un cadre, un même objet peut être représenté de différentes façons (symboles, dessins...), nous amenant ainsi à étudier les registres de représentation sémiotique, au sens de Duval (1993). Vivier (*ibid.*) associe au cadre numérique les registres (numériques) de représentation suivants : registre de représentation décimal, fractionnaire, scientifique et le registre algébrique dans lequel le nombre est représenté par une lettre. Font également partie de ce dernier registre des objets tels que les racines carrées, le nombre π et les développements décimaux illimités. Associé au cadre ensembliste, le registre ensembliste est constitué, selon Vivier, des signes tels que $\in$, $\notin$, $\subset$... et des notations des cinq ensembles $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{D}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$. L'étude cognitive vient compléter ce travail avec les difficultés répertoriées chez les élèves sur le sujet. Une étude de relief peut également comporter une analyse de manuels qui sont des exemples de textes de mise en forme des savoirs.

Ces analyses *a priori*, menées ici dans le contexte de l'enseignement des nombres irrationnels, vont aussi nous permettre d'anticiper les connaissances antérieures supposées disponibles chez les élèves sur les nombres en général ainsi que les liens possibles avec ces connaissances que peuvent réaliser les enseignants pour introduire des connaissances nouvelles. Reste maintenant à préciser quels types de commentaires nous traquons dans le discours des enseignants.

1.2. Quelle étude du discours des enseignants ?

Comme expliqué en amont, les moments de cours sur les nombres irrationnels que nous cherchons à étudier pourraient être intégrés dans des phases de résolution d'exercices mobilisant des connaissances (antérieures et/ou nouvelles) propres au chapitre enseigné. Par exemple, le fait de rencontrer le nombre $\sqrt{2}$ dans un exercice de géométrie serait, pour l'enseignant, l'occasion de donner des explications sur la nature de ce nombre, de donner d'autres exemples de nombres irrationnels ou encore de prouver que $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel, ... Nous pourrions donc trouver, durant ces moments, des définitions, des propriétés, des méthodes, des éléments historiques, ...

L'enseignant peut également ajouter des commentaires sur le statut des connaissances (ce qui est admis, ce qui est démontré, à quoi ça sert...) ou sur l'organisation des connaissances au sein du cours. Robert et Robinet (1996) parlent de commentaires « méta » pour décrire ce type de commentaires. On en rencontre lorsque l'enseignant accompagne son discours mathématique avec du guidage, du contrôle, des mises en garde, ... En d'autres mots,

> *l'enseignant peut parler de manière qualitative des connaissances qu'il est en train de décontextualiser, il peut expliquer à quoi elles servent, comment les utiliser, il peut citer les erreurs fréquentes qu'elles occasionnent (Robert & Robinet, 1996, p. 147).*

Dans le cas des nombres irrationnels, il pourrait s'agir de commentaires méthodologiques de l'enseignant permettant de faciliter les manipulations qui engagent ces nombres, comme par exemple pour justifier une étape d'un exercice. Plus précisément, dans le chapitre sur le théorème de Pythagore (troisième année), les élèves sont amenés à calculer la longueur de la diagonale d'un carré. La figure 1 montre un carré de côté 2, sa diagonale a donc une longueur qui vaut $2\sqrt{2}$. Nous avons trouvé le commentaire méta suivant chez un enseignant : *« on ne peut pas mesurer ce segment avec une latte, ce ne sera pas précis »*. Il s'agit d'une mise en garde qui peut sous-entendre la forme décimale illimitée non périodique de $2\sqrt{2}$, empêchant la mesure exacte du segment. Dans ce cas, nous sommes en présence d'un commentaire lié à la manipulation d'un nombre irrationnel.

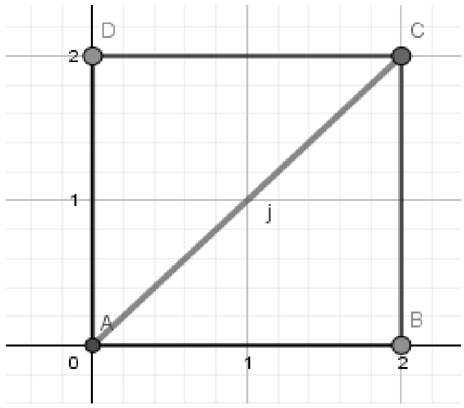


Figure 1 *: Carré de côté 2 dont on cherche la diagonale.*

Un autre exemple concerne le chapitre sur les racines carrées. Le commentaire est lié à la simplification d'une racine carrée. L'enseignant est amené à écrire au tableau : *« Prenons* $\sqrt{18}=3\sqrt{2}$ *»*. L'enseignant poursuit : *« ces deux écritures sont exactes et représentent un même nombre, mais vous ne pouvez pas l'écrire exactement avec une virgule »*. Dans ce cas, l'enseignant se base sur la nature irrationnelle du nombre pour formuler son commentaire. Cependant, la notion n'est pas approfondie et la raison de cette remarque (statut décimal illimité non périodique) n'est pas explicitement donnée par l'enseignant. Toutefois, en faisant allusion aux nombres à virgule, on peut supposer que l'enseignant se raccroche aux nombres que les élèves connaissent à ce stade pour expliquer en quoi les deux nombres s'en distinguent, même si aucune justification n'est apportée. Se pose alors la question de savoir à quel point les connaissances des élèves sur les nombres sont suffisamment disponibles pour que le commentaire de l'enseignant ait du sens pour eux.

Ainsi, dans la mesure où nous avons difficilement accès aux activités des élèves durant les moments de cours, nous faisons l'hypothèse que, pour faire progresser les connaissances des élèves et les mener aux acquisitions visées, les enseignants essaient de tenir un discours visant à rester proche du travail des élèves en classe (ce que les élèves sont en train de faire ou ce qu'ils savent déjà). Suivant cette hypothèse, inspirée du modèle de la zone proximale de développement (ZPD) de Vygotski,

> *plus l'enseignant réussirait à rapprocher les éléments généraux qui sont en jeu de ce que savent déjà ou ont déjà fait les élèves, en engendrant ainsi un travail dans la ZPD des élèves, plus la conceptualisation visée pourrait avancer (Pariès et al., p. 43).*

Robert et Vandebrouck (2014) ont introduit la notion de proximité-en-acte pour traduire une activité de l'enseignant visant à provoquer et/ou à exploiter un rapprochement avec les réflexions ou les connaissances des élèves. Cette activité peut être consciente et voulue ou, au contraire, spontanée. Elle peut aussi concerner ou non tous les élèves. Les proximités-en-acte ne sont pas non plus d'ordre strictement mathématique. Elles peuvent être affectives (encouragements), langagières (faire une analogie) ou jouer sur la motivation des élèves (en faisant référence au contrat). Nous nous intéressons ici aux proximités-en-acte ayant une portée plus cognitive, révélant par exemple des liens entre le cours et les exercices ou entre d'anciennes connaissances et les nouvelles, des reformulations pour donner une manière différente de voir les choses, ...

Pour étudier ces proximités, nous traquons dans le discours de l'enseignant et dans les échanges oraux avec les élèves tout ajout aux stricts contenus mathématiques en relation avec le travail de l'élève (Bridoux et *al.*, 2016). L'étude de relief couplée à l'analyse de manuels permet d'identifier ce qui est « supposé » déjà connu des élèves et ce qui fait l'objet d'un enseignement nouveau ; ce travail vise également à identifier les sources de difficultés des élèves. Cette étude permet donc de repérer *a priori* des occasions de proximités et de les confronter ensuite aux analyses de déroulements en classe pour voir si ces occasions de proximités sont tentées ou au contraire manquées par les enseignants. Trois types de proximités discursives à portée cognitive sont distingués (Bridoux et *al.*, 2016) :

- Les proximités ascendantes se placent entre ce que les élèves ont pu faire et le nouveau. Elles s'accompagnent d'une généralisation qui peut mener à un nouvel outil ou objet, une nouvelle définition ou propriété. Elles se conçoivent dans une perspective inductive allant du contextualisé vers le décontextualisé. Un exemple de proximité ascendante serait de montrer que le nombre irrationnel $\sqrt{2}$ est un décimal illimité non périodique pour ensuite généraliser cette propriété et faire apparaître une définition de nombre irrationnel.
- Les proximités descendantes font le lien entre l'exposition des connaissances et les exercices ou exemples qui suivent. Ces proximités s'accompagnent généralement d'une contextualisation, mais cette dernière n'est pas toujours transparente. Par exemple, si un manuel présente une définition de l'irrationalité d'un nombre et qu'il l'exemplifie avec l'exemple de π ou $\sqrt{2}$, il y a une proximité descendante possible.
- Les proximités horizontales ne changent pas le niveau de généralité du discours. Il s'agit en général d'une reformulation. Par exemple, si un manuel présente une définition de l'irrationalité avec des symboles mathématiques et une reformulation en français de cette définition, il s'agira d'une proximité horizontale.

Dans notre travail, nous n'avons étudié que les occasions de proximités dans les phases impliquant explicitement un commentaire sur la notion de nombre irrationnel. En effet, certaines proximités pourraient être relatives aux contenus enseignés et n'engageraient alors rien sur les nombres irrationnels.

Notre objectif est donc d'étudier comment les enseignants présentent aux élèves une notion nouvelle, à savoir les nombres irrationnels, en les intégrant au fil du cours, sans forcément les définir précisément. L'outil des proximités nous amène alors à formuler notre question de recherche de la manière suivante : quelles sont les proximités tentées dans le discours des enseignants dans la résolution d'exercices impliquant les nombres irrationnels ? La méthodologie mise en œuvre pour répondre à cette question est présentée dans la section suivante.

2. Méthodologie

Notre méthodologie s'inspire de celle mise en place dans Bridoux et *al.* (2016) où les proximités sont étudiées dans un cours de seconde sur les fonctions en France ainsi que pour l'enseignement de la notion de limite en première année universitaire[6]. Elle se structure de la manière suivante.

Nous avons tout d'abord mené une étude de relief qui repose sur l'analyse des programmes et des référentiels, sur les difficultés des élèves répertoriées dans un certain nombre de travaux de recherche ainsi que sur une analyse de quatre manuels homologués, c'est-à-dire validés par une commission en charge d'établir la liste de manuels faisant l'objet d'un remboursement en cas d'achat. Sans que cela ne soit prescriptif, le système éducatif en question délivre cependant un

---

[6] Il s'agit d'une comparaison en termes de proximités entre un cours magistral filmé en amphi, une vidéo de cours de type Formation à Distance et un manuel.

message clair aux enseignants quant aux ressources identifiées comme pertinentes). Ces manuels sont les suivants : Actimath à l'infini et CQFD, troisième et quatrième années pour les deux collections.

L'étude des programmes et des référentiels permet de détecter des moments durant lesquels des connaissances sur les nombres irrationnels seraient susceptibles d'être introduites. Il s'agit également d'étudier les commentaires présents dans les documents qui pourraient accompagner ces moments. L'absence de tels commentaires est aussi propice à étudier comment l'enseignant procède en classe. Par exemple, la tâche *« Construire un segment de longueur $\sqrt{a}$ dans un repère orthonormé »* (Programmes de la Fédération Wallonie-Bruxelles, 2014) n'est accompagnée d'aucun commentaire sur le fait que la longueur pourrait être un nombre irrationnel. Cette étude concerne la troisième et la quatrième années de l'enseignement secondaire. La troisième année correspond à la première rencontre avec des nombres irrationnels. En quatrième année, le domaine de l'algèbre est très présent et des cadres tels que ceux des fonctions ou de la trigonométrie sont propices à enrichir le répertoire des nombres réels chez les élèves.

Cette analyse des documents officiels nous amène à cibler dans les manuels l'étude de trois chapitres en troisième année et deux chapitres en quatrième année. Au sein de chaque chapitre, nous avons analysé la partie qui relève du cours (souvent appelée « synthèse »), au sens décrit dans la partie 1, et les exercices. Dans chaque partie, nous pointons les changements de cadre, les registres en présence et les conversions entre différents registres. L'outil des proximités est utilisé pour étudier le type de commentaires qui peut accompagner ces changements et ces conversions. Notons que, même si l'utilisation de manuels n'est pas imposée aux enseignants dans les textes officiels, l'analyse de ce type de support aide le chercheur à mieux anticiper les déroulements en classe. Les manuels délivrent en effet des exemples de présentation du savoir mathématique.

Nous intégrons également dans ces analyses des éléments sur l'étude des difficultés répertoriées chez les élèves ainsi que les conceptions erronées pouvant exister au sujet des nombres irrationnels. Nous pouvons ainsi détecter *a priori* des moments propices à des commentaires plus généraux de la part de l'enseignant, tels que la formulation d'erreurs à éviter, ou encore des aides à apporter dans certaines manipulations des nombres irrationnels.

Afin d'étudier les déroulements en classe, nous avons observé sept enseignants. Pour ce faire, nous avons recruté quatre enseignants de troisième année et trois enseignants de quatrième année. Pour étudier le discours des enseignants, nous avons choisi ici de comparer des moments analogues dans les manuels étudiés et les déroulements en classe.

Nous donnons tout d'abord quelques éléments d'analyse *a priori* pour décrire le travail mathématique à réaliser en termes de cadres et de registres et nous montrons ensuite les régularités et les variabilités en termes de proximités tentées ou non dans le manuel et dans le déroulement en classe associé.

3. Relief sur les notions à enseigner

Nous présentons dans cette partie quelques éléments de notre étude de relief sur lesquels nous prendrons appui pour étudier ensuite les déroulements en classe. Une analyse détaillée est donnée dans De Val (2019).

Durant les deux premières années de l'enseignement secondaire, les nombres entiers et les nombres rationnels (définis en termes de fractions) ont été manipulés par les élèves. Sans avoir mené d'analyses fines de ces niveaux d'enseignement, nous avons pu constater que les tâches calculatoires sont prédominantes dans les manuels issus des deux collections étudiées ici.

L'analyse des programmes et des référentiels de compétences de troisième et quatrième années a permis de cibler les chapitres dans lesquels les nombres irrationnels apparaissent explicitement. Parallèlement, des chapitres où ces nombres ne sont pas mentionnés explicitement mais pour lesquels il est probable qu'ils soient évoqués dans les déroulements de cours ou dans les manuels ont également été retenus. La figure 2 indique l'ensemble des chapitres visés dans l'étude.

En troisième année	En quatrième année
• Théorème de Pythagore • Racines carrées • Trigonométrie dans le triangle rectangle	• Trigonométrie • Deuxième degré

Figure 2 *: Chapitres impliquant (implicitement ou explicitement) des nombres irrationnels.*

De ces chapitres, nous avons pu retenir 13 points, repris dans l'annexe 1 tels qu'ils apparaissent dans les documents, susceptibles de proposer aux élèves des tâches impliquant les nombres irrationnels. Nous constatons d'emblée que les nombres irrationnels sont beaucoup plus présents en troisième année qu'en quatrième année. C'est dans le chapitre consacré à l'étude du triangle rectangle que la présence des nombres irrationnels est explicitement mentionnée.

Dans un premier temps, l'analyse, dans les programmes, de ces chapitres et des commentaires associés, révèle que ce sont les cadres de l'algèbre, de la géométrie et de la trigonométrie qui sont les plus propices à faire usage des nombres irrationnels. Toutefois, Bloch explique que lorsque les nombres irrationnels apparaissent dans le contexte de l'introduction d'une nouvelle notion, comme par exemple ici le théorème de Pythagore en géométrie ou les nombres trigonométriques dans le triangle rectangle, le répertoire des nombres rencontrés est assez réduit et peu diversifié de manière à ne pas cumuler les difficultés, *« un savoir nouveau et un champ numérique mettant les élèves en situation difficile d'un point de vue calculatoire »* (Bloch, 2018, p. 68). Le registre numérique algébrique, tel que défini par Vivier (2008), semble très présent, sous la forme de racines carrées. Aucun commentaire n'est donné sur une définition possible des nombres irrationnels.

Dans un deuxième temps, les documents mentionnent explicitement certains types de tâches à proposer aux élèves : ils doivent par exemple manipuler des irrationnels en algèbre, de type « racines carrées » et utiliser la calculatrice pour en obtenir une valeur approchée. Picot (2002) explique que ce type de tâche mène un grand nombre d'élèves à considérer la racine carrée comme une opération et non comme un nombre. Cette opération est souvent associée à une touche sur la calculatrice. De plus, la difficulté liée au passage de la valeur exacte à une valeur approchée ou vice versa est renforcée par la présence des touches « = » (ou « EXE ») sur la calculatrice.

Les exercices de simplification de racines carrées suggérés dans les programmes nous permettent aussi de pointer le statut hybride des racines carrées. En effet, les racines carrées ont un statut pseudo-algébrique (Dumail, 2007), c'est-à-dire un statut entre le nombre et la lettre. Par exemple, l'écriture $2.\sqrt{3}=2\sqrt{3}$ induit des difficultés chez les élèves — sur le statut de l'objet — liées aux conventions d'écriture, car $\sqrt{3}$ pourrait être considéré comme une lettre en perdant son statut de nombre. Ce sont alors les conventions d'écriture relatives aux calculs réalisés dans le registre algébrique qui s'appliquent (en effet on écrira de manière conventionnelle 2a plutôt que 2.a) bien que cet exemple soit issu du registre numérique[7]. De plus, la distributivité, le produit par un rationnel, les produits remarquables, ... renforcent cette dualité nombre-lettre, car le produit de deux racines carrées impose de multiplier les coefficients entre eux et les radicands entre eux. Le statut hybride des racines carrées pose donc des difficultés liées à la reconnaissance de l'objet comme un nombre à part entière chez les élèves, qui apparaissent lorsqu'il s'agit d'effectuer des opérations sur les racines carrées.

Des tâches impliquant les nombres irrationnels et le registre graphique sont également présentes dans les documents officiels. Les élèves sont en effet amenés à manipuler des irrationnels qui sont représentés graphiquement. Picot (2002) souligne le fait que les élèves ont souvent des difficultés à accepter qu'une longueur puisse être un nombre irrationnel et qu'elle ne soit donc pas mesurable avec un « outil de mesure » tel que la latte.

Cette première étude met ainsi en évidence trois types de tâches particulièrement propices à des moments de cours sur les nombres irrationnels : calculer avec des racines carrées, utiliser la calculatrice pour obtenir une valeur approchée d'un nombre irrationnel, tracer des segments de longueur irrationnelle donnée ou déterminer la longueur de tels segments. Ces tâches apparaissent en troisième année mais nous avons vu que les chapitres dédiés au second degré et à la trigonométrie en quatrième année sont également propices à manipuler des nombres irrationnels, même si ceux-ci ne sont pas explicitement mentionnés dans les documents officiels. Ces tâches montrent également que les nombres irrationnels apparaissent comme des outils pour introduire et travailler des nouvelles notions dans d'autres cadres que l'algèbre. Ces changements de cadre requièrent de manipuler les nombres dans divers registres d'écritures.

Le rôle « outil » des nombres et des irrationnels en particulier est aussi souligné par Boulais et *al.* (2018) qui s'appuient sur des aspects philosophiques, épistémologiques et didactiques pour étudier les liens entre la notion d'infini et la construction des nombres au fil du parcours scolaire des élèves. Selon eux, un travail plus approfondi sur la nature des nombres permettrait de mieux appréhender la différence entre l'infini potentiel, associé à l'idée qu'on peut toujours considérer le successeur d'un nombre entier, et l'infini actuel, à prendre comme une totalité. Les auteurs pointent en effet le changement conceptuel qui s'opère lorsqu'on passe de l'infini potentiel à l'infini actuel. Or, il semble que si l'infini potentiel apparait tout au long de l'enseignement, la présence de l'infini actuel ne se manifeste que très implicitement à la fin du collège et au début du lycée. Les auteurs donnent l'exemple d'une égalité de la forme $\frac{2}{3}=0{,}666\ldots$, qui pourrait par exemple être introduite après avoir utilisé la calculatrice pour calculer le quotient. Le membre de gauche, écrit dans le registre numérique fractionnaire correspond à une totalité achevée, donc à l'infini actuel, tandis que le membre de droite, écrit dans le registre algébrique lié aux développements illimités rend compte d'un processus itératif associé à l'infini potentiel. Or, comme l'expliquent Boulais et *al.*,

> *le saut conceptuel consistant ici à passer de la première interprétation, relativement intuitive qui met en jeu le processus à la deuxième interprétation qui consiste à considérer l'objet obtenu par*

[7] Voici un exemple qui permet de mieux comprendre la problématique énoncée dans ce point. En algèbre, la distributivité suivante $2.(a+b)$ donnera $2a+2b$, mais, dans le registre numérique, $2.(3+8)$ donnera 22. Pour l'élève l'exemple $2.(\sqrt{2}+\sqrt{3})$ qui donne $2\sqrt{2}+2\sqrt{3}$ s'apparente beaucoup plus à l'exemple algébrique présenté ci-dessus qu'à l'exemple numérique qui le suit. L'élève doit pourtant prendre conscience que ce dernier exemple donne une réponse purement numérique, et ce, malgré les ressemblances avec les conventions d'écritures algébriques.

achèvement du processus est le plus souvent passé sous silence par les enseignants... (Boulais et al., ibid., p. 249).

La présentation d'une synthèse sur les ensembles de nombres et les inclusions entre les différents ensembles rencontrés par les élèves au fil de leur parcours pourrait elle aussi être une occasion de prendre appui sur la nature des nombres pour travailler des questions liées aux deux types d'infini. Nous pensons par exemple à la question du successeur et à des propriétés telles que la densité ou la continuité des ensembles. Une hypothèse de Boulais et *al.* est en effet que la confusion entre infini potentiel et infini actuel est *« un obstacle à l'appréhension du concept de nombre réel et à la distinction entre le discret, le dense et le continu »* (Boulais et *al.*, *ibid.*, p. 248). D'après Vivier, une piste pour produire une synthèse sur les nombres est de s'appuyer sur les développements décimaux mais ceux-ci sont peu exploités dans l'enseignement secondaire. Ainsi,

> *la* synthèse *proposée aux élèves se contente de couvrir le concept de nombre par une couche d'ensembles. Finalement, la synthèse sur les nombres disparaît au profit d'un bilan sur les ensembles de nombres, bilan d'une grande pauvreté mathématique (Vivier, 2008, p. 64).*

En termes d'occasions de proximités, il est clairement indiqué dans les programmes (Fédération Wallonie-Bruxelles, 2015) que les calculs sur les racines carrées doivent mener à des conjectures sur les propriétés de ces objets qui seront ensuite démontrées. Le fait de partir des calculs pour les généraliser offre des occasions de proximités ascendantes. L'utilisation de la calculatrice peut amener des occasions de proximités horizontales sur la distinction entre la valeur approchée affichée à l'écran et le nombre irrationnel associé. Des rappels sur les nombres rationnels peuvent être faits et une définition peut émerger pour les nombres irrationnels, par exemple en termes de nombres ayant un développement décimal illimité non périodique. Ce cheminement peut donner lieu à des occasions de proximités ascendantes. Les tâches concernant des segments de longueur irrationnelle se trouvent dans le chapitre (des programmes) consacré au théorème de Pythagore, c'est-à-dire, dans le domaine de la géométrie. Il y est explicitement mentionné de « profiter » de ce chapitre pour parler des nombres irrationnels. Il y a donc un changement de cadre entre la géométrie et l'algèbre, lequel peut également provoquer des changements de registre, comme par exemple le fait de passer d'une longueur à un nombre. Il est possible que ce passage représente une difficulté pour les élèves et faire l'objet, par l'enseignant, d'une explicitation à l'aide de commentaires prenant la forme de proximités horizontales. Ces changements de registre provoquent d'autres occasions de proximités horizontales pour expliquer qu'il est possible de représenter des nombres sur une droite graduée sans connaître la valeur exacte de ces nombres. Le rôle outil des nombres irrationnels pourrait faire l'objet de commentaires plus méta comme faire remarquer aux élèves qu'ils peuvent résoudre de nouveaux exercices grâce aux nouveaux nombres, ce qui amènerait des occasions de proximités horizontales. Enfin, la présence d'un moment de synthèse sur les ensembles pourrait amener des proximités horizontales pour mettre en lien le cadre numérique et le cadre ensembliste et les registres associés à chaque cadre.

Dans la section suivante, nous nous centrons sur les calculs avec des racines carrées, sur l'utilisation de la calculatrice ainsi que sur les moments de synthèse sur les ensembles de nombres.

4. Manuels et déroulements en classes : régularités et variabilités

Comme expliqué dans la méthodologie, nous avons observé 7 enseignants d'expériences variées[8], notés dans cette partie P_1, P_2, ... , P_7. Les quatre premiers enseignent en troisième année et les autres en quatrième année. Notre objectif est ici de montrer comment nous faisons fonctionner l'outil des proximités dans nos analyses. Le lecteur pourra trouver des analyses plus approfondies et quantitatives dans De Val (2019). Le tableau suivant montre le temps consacré aux différents chapitres étudiés par chaque enseignant. Nous avons ainsi recueilli 153 heures d'enregistrement. Rappelons que pour les quatre premiers enseignants de troisième année, les chapitres étudiés sont les racines carrées, le théorème de Pythagore et la trigonométrie, et qu'en quatrième année, les trois enseignants ont été observés durant les chapitres dédiés au second degré et à la trigonométrie. Les différences entre le nombre d'heures, relativement importantes, s'expliquent par le fait que certains enseignants ont choisi d'accorder moins de temps à certains chapitres.

P_1	21 h
P_2	12 h
P_3	20 h
P_4	33 h
P_5	13 h
P_6	32 h
P_7	22 h

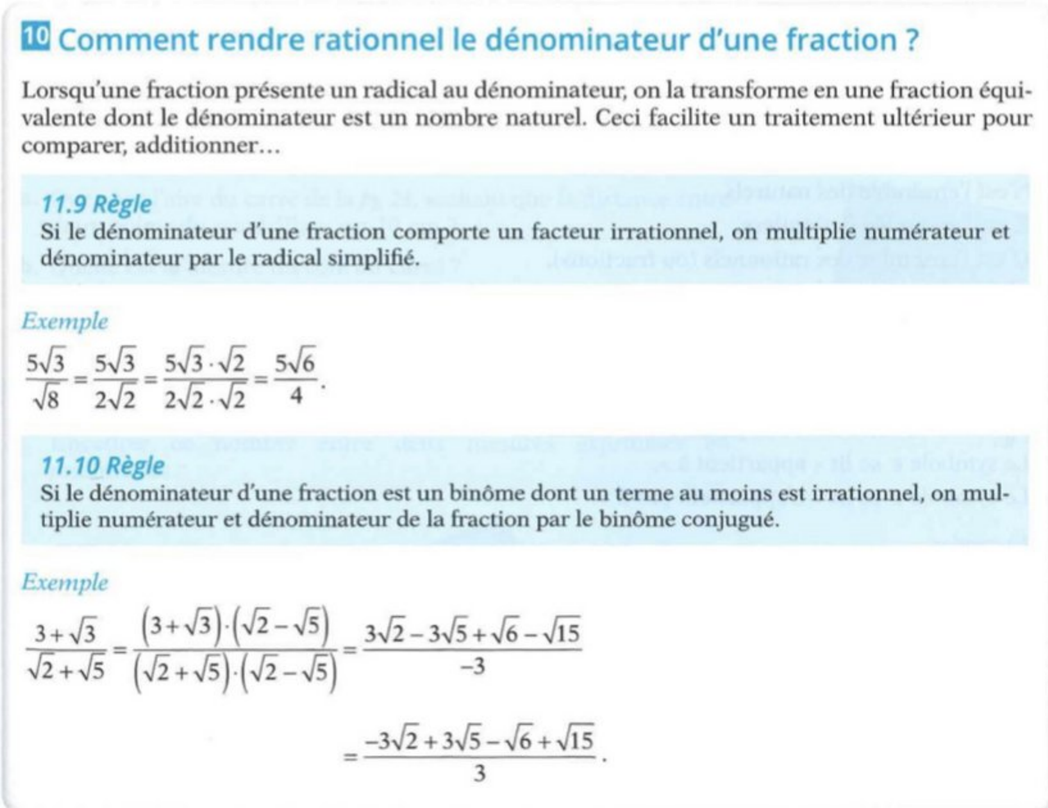
Durée des enregistrements pour chaque enseignant

4.1. Opérations sur les racines carrées

Dans le manuel de troisième année, nous avons repéré, comme dans la figure 3, des endroits où la présence de nombres irrationnels est explicitement mentionnée mais tout se passe comme si la nature de ces nombres allait de soi pour le lecteur (ici entendu comme, a minima, l'enseignant et l'élève), alors qu'aucune définition de ces nombres n'a été donnée auparavant dans le manuel. Le lecteur doit également admettre que la nécessité de ne pas laisser de nombres irrationnels au dénominateur d'une fraction vise à faciliter certaines manipulations algébriques ultérieures. Ce passage aurait pu être l'occasion de commenter la nature des nombres qui sont le résultat des calculs, de parler de la valeur affichée à la calculatrice si on veut par exemple calculer $\frac{5\sqrt{6}}{4}$ ou encore d'expliquer qu'il ne s'agit pas d'un nombre rationnel. Des occasions de proximités horizontales (par exemple des liens entre les rationnels et les irrationnels ou des liens entre valeur exacte et valeur approchée) sont manquées. Cette absence de commentaire pourrait de plus renforcer le fait que des objets tels que les racines carrées ne prennent pas le statut de nombres pour un certain nombre d'élèves, comme le confirment les travaux de Picot (2002) évoqués dans notre étude de relief. Les propriétés sont énoncées dans le registre de la langue naturelle. Lorsqu'elles sont exemplifiées dans le registre algébrique, rien n'est dit sur comment

[8] Tous les enseignants de troisième année enseignent depuis plus de 20 ans. En quatrième année, les profils sont variés allant de peu à très expérimenté.

le cas particulier s'inscrit dans l'énoncé décontextualisé. Ce passage serait une occasion de tenter une proximité descendante.



10 Comment rendre rationnel le dénominateur d'une fraction ?

Lorsqu'une fraction présente un radical au dénominateur, on la transforme en une fraction équivalente dont le dénominateur est un nombre naturel. Ceci facilite un traitement ultérieur pour comparer, additionner…

11.9 Règle
Si le dénominateur d'une fraction comporte un facteur irrationnel, on multiplie numérateur et dénominateur par le radical simplifié.

Exemple

$$\frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{8}}=\frac{5\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}=\frac{5\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}}{2\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=\frac{5\sqrt{6}}{4}.$$

11.10 Règle
Si le dénominateur d'une fraction est un binôme dont un terme au moins est irrationnel, on multiplie numérateur et dénominateur de la fraction par le binôme conjugué.

Exemple

$$\frac{3+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{5}}=\frac{\left(3+\sqrt{3}\right)\cdot\left(\sqrt{2}-\sqrt{5}\right)}{\left(\sqrt{2}+\sqrt{5}\right)\cdot\left(\sqrt{2}-\sqrt{5}\right)}=\frac{3\sqrt{2}-3\sqrt{5}+\sqrt{6}-\sqrt{15}}{-3}$$
$$=\frac{-3\sqrt{2}+3\sqrt{5}-\sqrt{6}+\sqrt{15}}{3}.$$

Figure 3 *: Transformation d'un dénominateur en un nombre rationnel (Van Dieren, Bianchi, & Sartiaux, 2015, p. 183).*

Nos analyses de déroulements en classe ont montré que tous les enseignants de troisième année ont intégré dans leur discours des commentaires plus nombreux et variés que ceux repérés dans les manuels, notamment durant des phases d'exercices. Ainsi, les opérations sur les racines carrées ont fait apparaître quatre types de commentaires :

1. des commentaires liés à la façon de procéder (mise en évidence, simplification, multiplication par le binôme conjugué du dénominateur comme dans les manuels) ;
2. des commentaires sur le fait qu'il ne faut pas décimaliser[9] la réponse finale sans en préciser la raison ;
3. des commentaires liés au statut pseudo-algébrique des racines carrées ;
4. des commentaires liés au fait qu'on ne doit pas transformer la réponse finale en un nombre décimal étant donné que le nombre est irrationnel.

Nous présentons ici un exemple lié au premier et au troisième types de commentaires.

Dans la retranscription du dialogue présenté à la figure 4, P_1 désigne l'enseignant et E_1 l'élève avec qui il interagit. L'enseignant a énoncé une propriété dans le registre de la langue naturelle, comme dans le manuel, permettant d'additionner deux racines carrées ayant le même radicand. Toujours comme dans le manuel, il traite ensuite des exemples dans le registre algébrique. Ce moment donne des occasions de proximités descendantes pour montrer comment l'énoncé

[9] Nous entendons pas « décimaliser » le fait de réaliser une approximation décimale d'un nombre irrationnel.

général est particularisé. Cela peut être l'occasion de revenir sur le vocabulaire utilisé dans l'énoncé (les mot « radicand », « coefficient », ...) et de faire expliciter aux étudiants ce qui est semblable dans les trois exemples.

L'enseignant s'appuie sur une proximité horizontale en utilisant un vocabulaire plus familier que celui utilisé dans l'énoncé général pour évoquer le mot « radicand » en mentionnant le « nombre en-dessous » de la racine carrée. Il donne lui-même la valeur des coefficients. Il reformule ensuite avec une proximité horizontale les manipulations à réaliser en changeant de registre d'écriture pour passer des nombres aux lettres.

Dans notre étude de relief, nous avons expliqué que les programmes préconisent de partir des calculs pour conjecturer les propriétés, ce qui pourrait donner lieu à des proximités ascendantes. À l'inverse, le manuel ainsi que l'enseignant P_1 partent de la propriété générale et la particularisent à des exemples.

Texte présenté au tableau	**Déroulement**
La somme de deux radicaux semblables (même radicand) est un radical semblable dont le coefficient est la somme des coefficients. Exemples : $2\sqrt{7}+4\sqrt{7}=(2+4)\sqrt{7}=6\sqrt{7}$ $3\sqrt{5}-\sqrt{5}=(3-1)\sqrt{5}=2\sqrt{5}$ $\sqrt{2}-7\sqrt{2}=(1-7)\sqrt{2}=-6\sqrt{2}$	P_1 : Voilà. On va faire un petit peu la même chose dans ce cas-ci, quand est-ce que je vais pouvoir additionner des racines carrées ? Quand j'aurai le même nombre en dessous, si je n'ai pas le même nombre en dessous, je ne sais rien faire. Et donc ainsi $2\sqrt{7}+4\sqrt{7}$, je vais additionner les coefficients $2+4$, ça fait 6 et racine de 7, je le recopie. C'est un petit peu la même chose que si j'avais écrit $2x+4x$. Ça fait 6*x*. Mais *x* ici c'est $\sqrt{7}$. On ne peut le faire que si on a la même chose en-dessous de la racine, sinon ça ne fonctionne pas. E_1 : Mais on n'a pas de termes semblables. P_1 : Mais $\sqrt{7}$ et $\sqrt{7}$ ce n'est pas la même chose ? E_1 : Si si, mais c'est des racines. P_1 : C'est ce que je dis, c'est les mêmes racines.

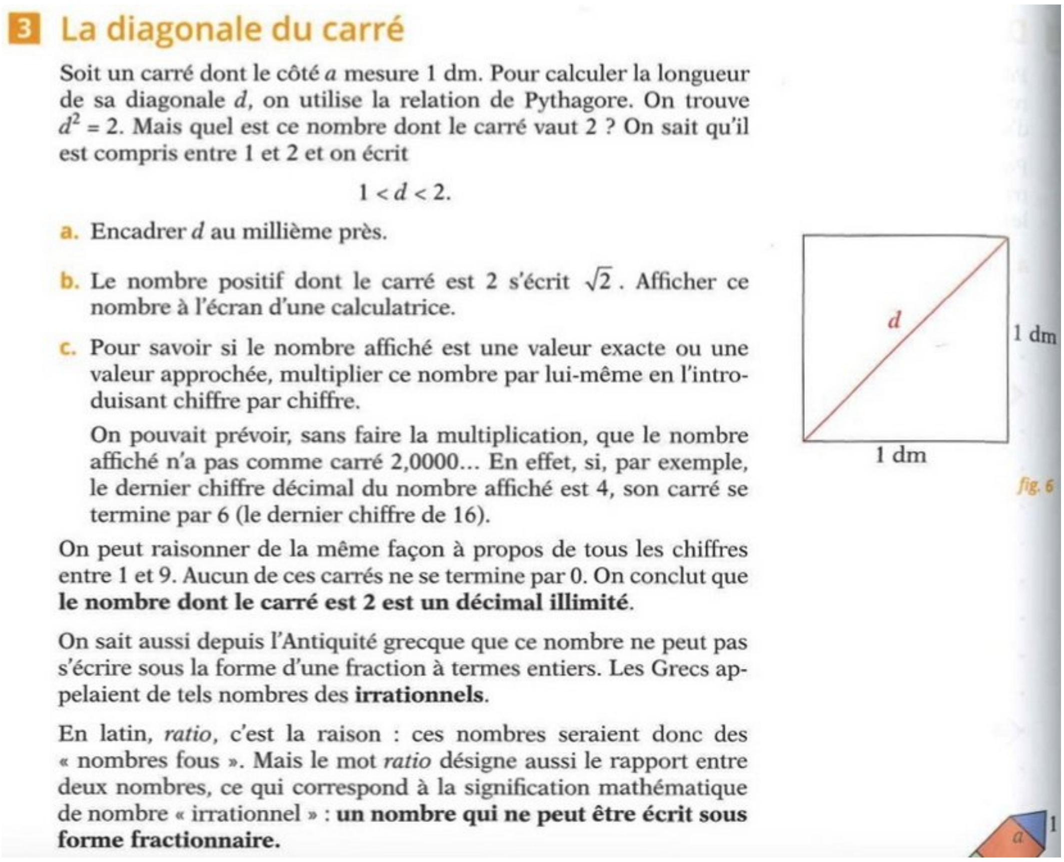
Figure 4 *: Manipulations algébriques et statut pseudo-algébrique des racines carrées.*

Deux enseignants de troisième année sur les quatre observés ont associé, dans les calculs, l'objet $\sqrt{a}$, où a est un nombre naturel, à une variable quelconque *x* pour expliquer comment calculer avec des racines carrées. Ce changement de registre a, à chaque fois, été commenté par l'enseignant, permettant ainsi une tentative de proximité horizontale. Toutefois, notre étude de relief a montré que le fait de donner un statut hybride aux nombres de la forme $\sqrt{a}$ peut amener les élèves à ne pas considérer ces objets comme des nombres. L'extrait montre aussi que ce changement de registre ne va pas de soi pour un élève, au moins.

4.2. Nombres irrationnels et valeur approchée

Le deuxième type de tâche que nous avons considéré concerne la décimalisation des irrationnels, c'est-à-dire le fait d'associer à un nombre irrationnel une valeur approchée sous la forme de nombre à virgule avec un nombre fini de chiffres après la virgule.

Dans le manuel CQFD de troisième année, ce type de tâche est proposé pour introduire la notion de nombre irrationnel, comme l'illustre la figure 5. La recherche du nombre positif d satisfaisant la relation $d^2=2$ est utilisée pour définir les nombres irrationnels comme des nombres ayant un développement décimal illimité non périodique, offrant ainsi une occasion de proximité ascendante pour généraliser le travail fait sur l'exemple et introduire la définition. Il est tout d'abord demandé à l'élève de réaliser un travail d'encadrement du nombre d dans le registre de représentation décimal. Le nombre $\sqrt{2}$ est introduit sans lien avec le travail précédent dans le registre algébrique. Un travail mobilisant la calculatrice est ensuite proposé à l'élève. Des connaissances en arithmétique sont ensuite utilisées pour justifier que le nombre affiché à la calculatrice n'est pas une valeur exacte de $\sqrt{2}$. Cette activité s'appuie donc sur des changements de registre pour introduire la formulation suivante en langue naturelle : *« le nombre dont le carré est 2 est un décimal illimité »*. Il y a ensuite une occasion de proximité horizontale lorsque le contexte historique est utilisé pour reformuler la définition en termes de nombres ne pouvant pas être écrits sous forme fractionnaire. Cette proximité permettant de passer d'une formulation à l'autre n'est cependant pas commentée. Les changements de registre dans cette activité semblent donc laissés à la charge du lecteur.



3 La diagonale du carré

Soit un carré dont le côté a mesure 1 dm. Pour calculer la longueur de sa diagonale d, on utilise la relation de Pythagore. On trouve $d^2 = 2$. Mais quel est ce nombre dont le carré vaut 2 ? On sait qu'il est compris entre 1 et 2 et on écrit

$$1 < d < 2.$$

a. Encadrer d au millième près.

b. Le nombre positif dont le carré est 2 s'écrit $\sqrt{2}$. Afficher ce nombre à l'écran d'une calculatrice.

c. Pour savoir si le nombre affiché est une valeur exacte ou une valeur approchée, multiplier ce nombre par lui-même en l'introduisant chiffre par chiffre.

On pouvait prévoir, sans faire la multiplication, que le nombre affiché n'a pas comme carré 2,0000… En effet, si, par exemple, le dernier chiffre décimal du nombre affiché est 4, son carré se termine par 6 (le dernier chiffre de 16).

On peut raisonner de la même façon à propos de tous les chiffres entre 1 et 9. Aucun de ces carrés ne se termine par 0. On conclut que **le nombre dont le carré est 2 est un décimal illimité**.

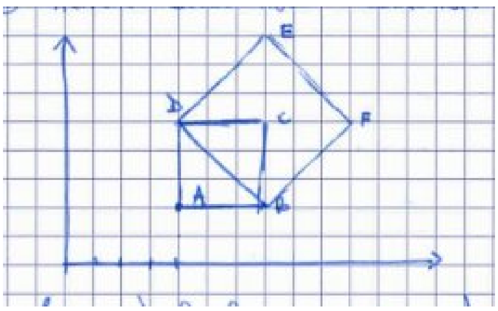
On sait aussi depuis l'Antiquité grecque que ce nombre ne peut pas s'écrire sous la forme d'une fraction à termes entiers. Les Grecs appelaient de tels nombres des **irrationnels**.

En latin, *ratio*, c'est la raison : ces nombres seraient donc des « nombres fous ». Mais le mot *ratio* désigne aussi le rapport entre deux nombres, ce qui correspond à la signification mathématique de nombre « irrationnel » : **un nombre qui ne peut être écrit sous forme fractionnaire.**

Figure 5 *: Distinction entre valeur approchée et valeur exacte (Van Dieren et al., 2015, p. 170).*

En classe, la décimalisation d'un irrationnel a, comme dans le manuel, fait l'objet de tentatives de proximités dans le chapitre consacré aux racines carrées pour accompagner la découverte des irrationnels. Elles portent généralement sur le fait qu'on ne peut pas en donner la valeur exacte, comme le montre l'extrait présenté en figure 6 dans lequel nous trouvons un échange entre P_4 et un élève noté E_3.

Il s'agit d'un exercice de géométrie. Après avoir calculé la longueur des côtés d'un carré, l'énoncé demande de calculer la longueur du côté d'un carré où ce dernier est une diagonale du carré initial. La tâche revient à chercher, comme dans le manuel, un nombre positif dont le carré est ici 18. Cette tâche peut être l'occasion de mettre en œuvre des proximités horizontales pour parler des registres algébrique et décimal mobilisés pour distinguer la valeur exacte de la valeur approchée donnée par la calculatrice ou pour introduire des connaissances sur les nombres irrationnels telles que donner une définition, d'autres exemples... Ici, l'enseignant a déjà introduit l'ensemble des nombres irrationnels comme l'ensemble des *« nombres décimaux illimités non périodiques »*. Après avoir mesuré à la règle la longueur du côté, l'enseignant élimine la réponse 4,3 *cm* en remarquant que le carré de 4,3 ne vaut pas 18. Pour ce faire, il formule la question dans le registre algébrique en introduisant lui-même un nombre ℓ et demande aux élèves quelle tâche doit alors être réalisée. La réponse de l'élève étant incomplète, l'enseignant donne lui-même la réponse. Des proximités horizontales sont tentées durant cette phase. Le travail réalisé ensuite avec la calculatrice amène l'enseignant à parler de *« nombres décimaux illimités non périodiques »*. L'enseignant tente alors une proximité ascendante pour parler de l'ensemble des réels et des nombres irrationnels. Durant ce moment, l'enseignant fonctionne sur le mode de l'ostension car aucune justification n'est apportée aux réponses données par un élève. De plus, le passage du cadre numérique au cadre ensembliste n'est pas commenté. L'enseignant introduit lui-même le fait que l'ensemble des irrationnels est un sous-ensemble des réels. Le passage du cadre géométrique au cadre numérique ne fait lui aussi l'objet d'aucun commentaire de la part de l'enseignant. Le passage du registre algébrique au registre décimal donné par la calculatrice fait quant à lui l'objet de proximités horizontales. Des proximités sont donc manquées ici et le mode de fonctionnement de l'enseignant rejoint les pratiques enseignantes où l'ostension est très présente, décrites par Bloch (2018) dans notre étude de relief.

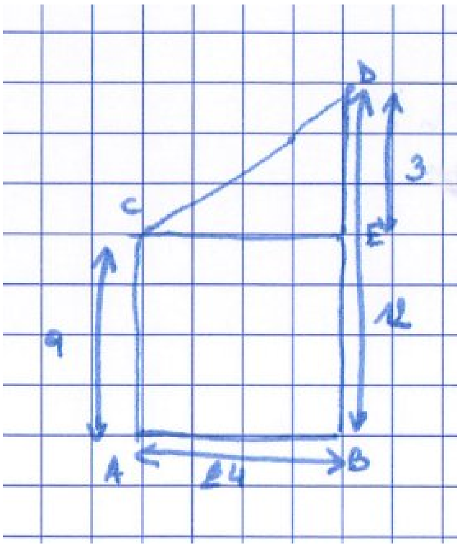
Texte présenté au tableau	**Déroulement**
Activité découverte : construis un carré *ABCD* de $9\,cm^2$ d'aire.  • Que vaut la longueur des côtés de ce carré ? Le côté mesure $3\,cm$, car $3\times3=9$ • Trace la diagonale [*BD*] de ce carré. • Construis un carré *BDEF* dont un des côtés est [*BD*]. • Quelle est l'aire de ce carré ?	[...] P_4 : Oui, qu'est-ce qu'on cherche ? Le côté au carré. Donc je cherche une longueur de côté que je vais appeler ℓ par exemple et qu'est-ce qu'il faut que je fasse avec ce ℓ ? E_3 : Le mettre au carré. P_4 : Et quand je vais le mettre au carré, il faudra que ça fasse 18. Raisonnement mathématique, c'est exactement ce qu'on nous propose ici. Il faudrait une longueur de côté telle que quand je vais l'élever au carré, je vais avoir 18. Je sais déjà que ce n'est pas 4,3. Alors est-ce que c'est 4,2 ? Sortez les calculettes. E_3 : c'est 4,24. P_4 : tu l'as sors d'où ta réponse ? E_3 : 4,2426.

$18\,cm^2$ • Que vaut la mesure du côté du carré ? Par mesure : $4{,}3\,cm$ $Aire\ de\ BDEF = 4{,}3 \times 4{,}3 = 18{,}49\,cm^2$ Par raisonnement mathématique On recherche un nombre qui élevé au carré donne $\ell^2 = 18$ $\sqrt{18} = 2{,}242640687\ldots$ Nombre irrationnel $\pi = irrationnel$	P_4 : Et tu le sors d'où ? E_3 : De ma calculatrice. P_4 : Et qu'est-ce que t'as fait sur ta calculatrice pour trouver ce ℓ ? E_3 : J'ai fait shift racine carrée. P_4 : Tu as tapé racine carrée de 18 et tu as obtenu quoi ? Quand t'as voulu sa forme décimale, tu as obtenu quoi ? E_3 : 4,242640687. P_4 : Et c'est parce que l'écran de la machine de Romain s'arrête là, mais c'est un nombre. Quelle est sa forme décimale ? E_3 : Illimitée non périodique. P_4 : Et pourquoi j'ai eu tant de mal avec mes 4,3 ? E_3 : Parce qu'il était illimité non périodique. P_4 : Et le 4,3 que vous m'avez proposé, est-ce que c'est la vraie valeur ? Non, le 4,3 ça n'est qu'une valeur arrondie, approchée. C'est une valeur approximative, c'est à peu près ça, mais ça n'est pas vraiment ça. Vous m'avez dit c'est une forme décimale illimitée non périodique, comment on a appelé, dans quel ensemble de nombres est-ce qu'on avait mis les nombres qui ont une forme décimale illimitée non périodique ? E_3 : Les réels. P_4 : Oui ce sont des réels, mais ils ont le droit de rentrer dans un sous-ensemble. E_3 : Irrationnels. P_4 : Les nombres irrationnels. De quel type de nombre s'agit-il ? E_3 : D'un nombre irrationnel. P_4 : Et donc je n'arriverai pas à donner de forme décimale exacte. E_3 : C'est comme π. P_4 : Effectivement, π on l'avait classé comme irrationnel. Pourquoi ? Parce que sa forme décimale est illimitée non périodique.

Figure 6 *: Nombre irrationnel et nombre ayant un développement décimal illimité non périodique.*

Nous avons également observé dans les classes de P_1, P_2 et P_4 des exercices dans lesquels il est demandé d'arrondir la réponse finale. Nous sommes ici dans un contexte de résolution de problèmes. Les enseignants ne font alors plus directement mention du caractère irrationnel des nombres manipulés. Lorsque l'énoncé impose d'arrondir la réponse, ces trois enseignants alternent entre l'utilisation du symbole « $\approx$ » pour distinguer la valeur exacte de la valeur approchée obtenue et l'utilisation du signe égal entre la réponse exacte et approchée (figure 7), dernière phrase prononcée par P_1), sans commenter ce passage. Cette manière de procéder pourrait induire des conceptions erronées chez les élèves sur le caractère illimité non périodique du développement décimal des nombres irrationnels, comme celles évoquées par Jacquier (1995) ainsi que Dumail et Robert (2007). En revanche, P_3 distingue tout le temps les deux valeurs en utilisant le symbole « $\approx$ ».

<table>
<tr><th>Texte présenté au tableau</th><th>Déroulement</th></tr>
<tr><td>
Un funambule tend un fil entre deux poteaux qui ont pour hauteurs respectives $9\,m$ et $12\,m$. Ils sont à $24\,m$ l'un de l'autre. On suppose que le fil est bien tendu. Quelle est alors la longueur (arrondie au décimètre près) du fil ?



$$\begin{aligned}|CD|^2 &= |DE|^2+|CE|^2\\ &= 3^2+24^2\\ &= 9+576\\ &= 585\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|CD| &= \sqrt{585}\\ |CD| &= 3\sqrt{65}\\ &= 24{,}2\,m\end{aligned}$$
</td><td>
P_1 : Ça c'est la valeur exacte, si tu t'arrêtes là, s'il y a 5 points tu as 4. Car dans l'énoncé on me demande arrondi au décimètre près. Si vous prenez vos calculatrices, qu'est-ce qu'elles indiquent comme réponse ?

E_4 : 24,18

P_1 : Bon, comme c'est au décimètre, cela signifie que je dois garder un chiffre après la virgule. Puisque mes longueurs sont exprimées en mètres, je dois donc arrondir au dixième près et ça va me donner $|CD|$ égal 24,2 mètres.
</td></tr>
</table>

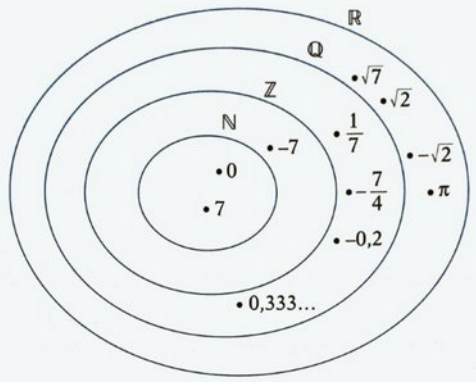
***Figure** 7 : Association de la valeur exacte avec la valeur approchée.*

4.3. Synthèse sur les ensembles de nombres

Dans les chapitres au sein desquels nous étudions la présence de nombres irrationnels, les parties consacrées aux moments d'exposition de connaissances ne mentionnent aucune définition de ce type de nombres et ce, dans tous les manuels étudiés. Cependant, le manuel CQFD de troisième année présente dans le chapitre sur le théorème de Pythagore les différents ensembles de nombres (figure 8). On peut y lire que certains nombres ne sont pas rationnels, mais il n'y a aucune explication à ce sujet. Les ensembles sont décrits dans le registre de la langue naturelle, les exemples sont quant à eux donnés dans le registre algébrique en intégrant des notations ensemblistes.

11 Comment représenter les différents ensembles de nombres ?

On représente les ensembles de nombres par un diagramme qui montre comment ils « s'emboîtent ».



$\mathbb{N}$ est l'ensemble des naturels,
$\mathbb{Z}$ est l'ensemble des entiers,
$\mathbb{Q}$ est l'ensemble des rationnels (ou fractions),
$\mathbb{R}$ est l'ensemble des réels.
$\mathbb{R}_0$ est l'ensemble des réels privé de zéro,
$\mathbb{R}^+$ est l'ensemble des réels positifs,
$\mathbb{R}^-$ est l'ensemble des réels négatifs,
$\mathbb{R}_0^+$ est l'ensemble des réels positifs, privé de zéro.
Le symbole $\in$ se lit « appartient à »,
Le symbole $\notin$ se lit « n'appartient pas à »,

Exemples

Les nombres 0 ; -3 ; $-\frac{2}{7}$; $\sqrt{5}$ sont des réels,

on écrit : $0 \in \mathbb{R}$; $-3 \in \mathbb{R}^-$; $-\frac{2}{7} \in \mathbb{R}^-$; $\sqrt{5} \in \mathbb{R}$.

Les nombres $\sqrt{5}$ et π ne sont pas des rationnels,

on écrit $\sqrt{5} \notin \mathbb{Q}$; $\pi \notin \mathbb{Q}$.

***Figure 8** : Présentation des ensembles de nombres (Van Dieren et al., 2015, p. 182).*

Bien qu'ils ne soient pas présentés dans la partie relative au « cours » dans les manuels, les nombres irrationnels ont tous fait l'objet de moments d'exposition des connaissances dans le cours des enseignants de troisième année au sein du chapitre consacré aux racines carrées. En effet, l'ensemble des enseignants ont défini (selon la définition de leur choix) les nombres irrationnels. Ces passages théoriques ont été accompagnés de tentatives de proximités. La figure 9 présente un extrait issu d'une séance donnée par P_3. Il définit les nombres irrationnels en tant que nombres ne pouvant pas s'écrire sous la forme d'une fraction et en tant que nombres décimaux illimités non périodiques. Il n'y a pas de lien entre les deux formulations. L'enseignant donne ensuite l'exemple du nombre π et tente ainsi une proximité descendante pour particulariser la notion mais il est difficile de savoir comment les élèves vont inscrire le cas particulier dans les deux définitions générales données oralement par l'enseignant et percevoir qu'il s'agit bien d'un nombre irrationnel. La figure 10 provient d'un extrait d'une séance donnée par P_1. Il va, quant à lui, partir d'exemples de nombres connus pour passer en revue les différents types de nombres et arriver à une définition des ensembles associés, ce qui donne lieu à une tentative de proximité ascendante. Ces extraits montrent de nouveau des pratiques ostensives des enseignants. Les ensembles sont introduits par couches successives comme décrit par Vivier (2008) dans notre étude de relief et le répertoire de nombres donnés en exemples est assez réduit.

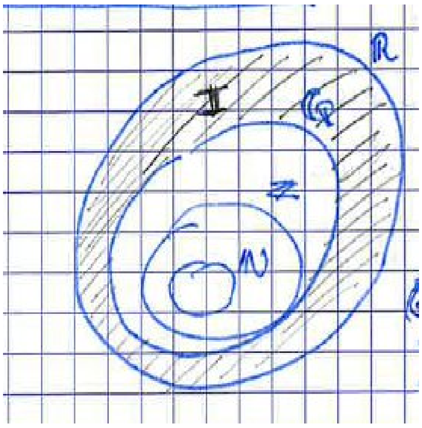
Texte présenté au tableau	**Déroulement**
<u>Remarque</u> Les irrationnels sont des nombres qui ne peuvent pas s'écrire sous la forme de fractions (ce sont les nombres décimaux illimités non périodiques). La plupart des radicaux sont des irrationnels. Ensemble des nombres  $\mathbb{N}$: ensemble des nombres naturels (entiers positifs). $\mathbb{Z}$: ensemble des nombres entiers (positifs et négatifs). $\mathbb{Q}$: ensemble des rationnels : peuvent s'écrire sous forme de fractions : entiers, décimaux limités, décimaux illimités périodiques. $\mathbb{R}$: ensemble des réels (tous les nombres existants). **I** : ensemble des irrationnels.	P_3: **I** ensemble des irrationnels, j'ai expliqué là-bas de quoi il s'agissait donc ce sont les illimités non périodiques. Les décimaux illimités non périodiques, exemple classique c'est π : 3,141, etc. Je ne connais pas les autres moi-même, mais il y en a un nombre illimité c'est le cas de le dire, on en a calculé très très loin. Il y a des gens qui ont passé leur temps, je me demande s'il y en a pas jusque 1000 ou 100 000 dans un bouquin avec les chiffres qui représentent les décimales de pi et montrent bien qu'il n'y a pas de période.

Figure 9 *: Définition d'un nombre irrationnel donnée par* P_3*.*

Texte présenté au tableau	**Déroulement**
Un même nombre peut s'écrire de différentes manières : $\frac{1}{10\,000} = 0{,}0001 = 10^{-4}$ → ne nous fions pas aux apparences.	P_1 : On a vu que certains nombres pouvaient s'écrire sous la forme..., comme $\frac{2}{3}$, $\frac{7}{16}$. Ce sont des ? E_5 : Des nombres décimaux.

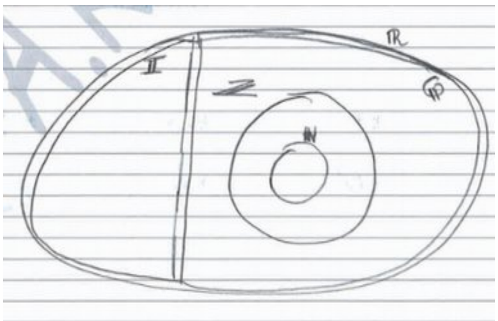
Nous pouvons classer ces nombres : 1) Les nombres naturels dans l'ensemble $\mathbb{N}$ qui servent à compter, à dénombrer. 2) Les nombres entiers $\mathbb{Z}$ qui sont les naturels et leurs opposés. 3) Les nombres rationnels $\mathbb{Q}$ qui s'écrivent sous forme d'une fraction à termes entiers : • sous forme décimale limitée ($\frac{1}{4}, \frac{1}{2}$, ...), • sous forme décimale illimitée périodique. 4) Les nombres irrationnels $\mathbf{I}$ qui ne s'écrivent pas sous la forme d'une fraction à termes entiers. 5) L'ensemble des réels $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbf{I}$.  	E_6 : Des nombres illimités périodiques. P_1 : Oui, une fraction quand tu l'écris, tu peux toujours l'écrire sous forme décimale. Mais le résultat de ta division il peut avoir des aspects différents. Tu peux avoir par exemple dans $\frac{1}{2}$, ça fait 0,5 ; $\frac{1}{4}$, ça fait 0,25 ; $\frac{7}{16}$: 0,4375. Ce résultat-là c'est un nombre décimal limité. D'accord ? D'autre part, pour d'autres fractions, $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{12}$, $\frac{1}{3}$, le résultat que je vais obtenir c'est aussi un nombre décimal, mais celui là il va être illimité avec une période qui va revenir. Et puis, on a notre troisième série. Racine carrée de 5, lorsqu'on veut l'écrire sous forme décimale, on obtient un nombre qui est décimal, illimité et pour lequel je n'ai pas de période. Et c'est tout cet ensemble de nombres que l'on peut écrire sous forme décimale illimitée non périodique que l'on va appeler les nombres irrationnels. Rationnel : quotient. Tous les quotients je peux les écrire sous forme décimale illimitée périodique. Ceux que je ne peux pas écrire sous forme décimale périodique, on va les appeler les irrationnels.

***Figure 10** : Définition d'un nombre irrationnel donnée par P_1.*

Ces analyses des discours des enseignants confrontées aux occasions de proximités dans les manuels montrent que les interactions avec les élèves en classe permettent aux enseignants de tenter des proximités. Nous n'avons pratiquement pas repéré de proximités descendantes (elles couvrent moins de 5 % de l'ensemble des discours étudiés). On pourrait penser que cela peut s'expliquer par l'étude des documents officiels dans lesquels il est clairement indiqué d'étudier les nombres irrationnels dans différents chapitres et de profiter des calculs, donc d'exemples, pour développer des connaissances sur ces nombres. Ce cheminement est davantage propice à des tentatives de proximités ascendantes. Mais nous avons montré que les manuels et les enseignants partent des énoncés généraux pour les exemplifier sans tenter de proximités descendantes.

Le travail réalisé montre aussi que les proximités ascendantes sont plus nombreuses dans le discours des enseignants de troisième année que chez ceux de quatrième année. Cela peut s'expliquer par le fait que ce niveau d'enseignement correspond à la première rencontre des élèves avec les nombres irrationnels et qu'il est donc « à la charge » de ces enseignants d'amener de nouvelles connaissances relatives à ces nombres. Les proximités consistent majoritairement en des explications sur le fait que la calculatrice ne donne qu'une valeur approchée du nombre. La définition qui émerge alors est celle de nombre irrationnel comme nombre ayant un développement décimal illimité non périodique. En quatrième année, nous n'avons pas repéré de proximités dans le discours des enseignants observés, ils semblent considérer que cette définition est devenue une connaissance disponible puisque les enseignants la rappellent sans la commenter. De plus, aucun enseignant n'a démontré l'irrationalité de $\sqrt{2}$, suggérée dans les programmes, moment qui aurait pu être l'occasion pour les élèves d'avoir une démonstration où on peut justifier que certains nombres ne s'écrivent pas sous la forme d'une fraction.

Les changements de cadre et de registre font finalement l'objet d'un nombre de proximités très réduit, ils sont majoritairement laissés à la charge de l'élève. Enfin, nous avons montré que certaines pratiques, à la fois dans les manuels et dans les études de discours, sont propices à induire des conceptions erronées chez les élèves. Il semble aussi que dans les résolutions de problèmes, les enseignants soient peu attentifs à distinguer valeur exacte et valeur approchée et nos analyses de discours montrent que certains d'entre eux considèrent ces deux valeurs comme égales.

5. Discussion et perspectives

Les changements récents (2015) dans les documents officiels en ce qui concerne l'enseignement des nombres irrationnels nous ont amenés à nous intéresser aux discours des enseignants en classe, et ce, dans une temporalité proche de l'injonction faite aux enseignants (entrée en vigueur 2016 et récolte des données en 2018). L'outil des proximités a tout d'abord permis de repérer *a priori*, grâce à notre étude de relief, les types de tâches dans lesquels peuvent être impliqués des nombres irrationnels, en précisant les cadres (algèbre, géométrie et trigonométrie) et les registres possibles pour ces nombres (registres numérique, algébrique et graphique). Ces tâches consistent en des opérations sur les racines carrées, l'utilisation de la calculatrice pour obtenir une valeur approchée et la construction de segments de longueur irrationnelle. Les travaux de recherche sur les nombres irrationnels montrent que les changements de cadre et de registre associés à ces tâches représentent une difficulté pour les élèves et doivent être explicités par les enseignants. L'utilisation de la calculatrice, très préconisée dans les nouveaux documents, induit également des conceptions erronées sur les nombres irrationnels. Nous avons complété cette étude par une analyse de manuels. En ce qui concerne les opérations sur les racines carrées, vues en troisième année, nous n'avons pas trouvé d'occasions de proximités dans les manuels permettant d'amener des connaissances nouvelles sur les nombres irrationnels. Des proximités ascendantes ont été repérées dans les tâches de décimalisation des nombres irrationnels pour introduire leur nature de nombre décimal illimité non périodique. La construction de segments de longueur irrationnelle dans le chapitre sur le théorème de Pythagore amène des occasions de proximités horizontales pour faire le lien entre la construction géométrique et l'application du théorème de Pythagore.

En ce qui concerne les analyses de déroulements dans les classes, c'est dans le chapitre sur les racines carrées que les enseignants évoquent les nombres irrationnels et en donnent une définition alors que les programmes préconisent de faire ce travail dans le chapitre dédié au théorème de Pythagore. Dans le chapitre de trigonométrie, vu en quatrième année, nous n'avons pas repéré de proximités liées à la manipulation de nombres irrationnels dans le discours des enseignants.

Nos analyses de déroulements en classe ont également montré que les enseignants se conforment relativement bien aux nouveaux documents officiels mis à leur disposition dans le sens où ils profitent des différents chapitres pour « parler » des nombres irrationnels. Ils intègrent donc des moments d'exposition des connaissances sur les irrationnels dans des moments de résolution d'exercices et ne font pas un chapitre isolé consacré à l'étude de ces nombres. Nous avons également montré des variabilités entre le discours des enseignants et les analyses *a priori* : nous avons en effet repéré davantage de proximités dans le discours des enseignants, dont beaucoup sont sans doute spontanées puisqu'elles sont majoritairement liées à des questions de la part des élèves, ce qui n'est pas sans poser question, notamment dans les situations où les élèves, pour différentes raisons, posent moins de questions aux enseignants et bénéficient donc de moins de proximités. Ainsi, en troisième année, la conception principalement développée avec l'usage de la calculatrice est qu'un nombre irrationnel n'a pas d'écriture décimale exacte. Les enseignants essaient d'expliquer la nature irrationnelle de certaines racines carrées avec des expressions comme « ça ne s'arrête jamais ». Toutefois, dans des exercices de géométrie et dans la résolution de problèmes, plusieurs enseignants ne reviennent plus sur la nature irrationnelle des racines carrées et vont même jusqu'à écrire une égalité entre la racine et la valeur donnée par la calculatrice. Ce type de résultats, comme d'autres d'ailleurs, soulève des questions sur la formation mathématique des enseignants. En effet, en Belgique francophone, la formation des enseignants est très différente selon qu'il s'agisse du niveau secondaire inférieur ou supérieur, renvoyant tantôt à un bachelier réalisé en trois ans, tantôt à un master. Tous les enseignants de troisième année vont faire le point sur les ensembles de nombres et parler des inclusions successives pour en arriver à définir l'ensemble des nombres réels comme l'ensemble de tous les nombres connus. En quatrième année, les enseignants ne commentent pas la rencontre avec des nombres irrationnels. Le manque d'explication précise sur les nombres irrationnels rencontrés, qui sont majoritairement des racines carrées, soulève la question de savoir comment les élèves vont distinguer les nombres rationnels des irrationnels et quel répertoire de nombres ils vont se construire. En quatrième année, les documents officiels ne mentionnent pas explicitement de parler des nombres irrationnels et les enseignants semblent se conformer à ces injonctions.

Cette première étude qui pourrait être élargie à un nombre plus important d'enseignants et prolongée à des enseignants de la fin du lycée (moment où les fonctions trigonométriques auront été enseignées) montre toutefois l'importance des interactions entre l'enseignant et les élèves, même si nous savons que les proximités tentées par les enseignants ne s'adressent sans doute pas à l'ensemble de la classe. L'outil des proximités nous a également permis d'analyser comment l'enseignant s'appuie sur le travail et les questions des élèves pour amener des connaissances sur les nombres irrationnels.

Finalement, dans un système éducatif à l'aube d'une réforme majeure de la formation des enseignants (un décret a été voté en 2019) caractérisée par un renforcement de la formation en ce qui concerne l'axe disciplinaire et didactique, il apparait que l'outil des proximités présenté dans cet article, notamment parce qu'il peut à la fois être mobilisé comme cadre de conception (pour le (futur) enseignant) et comme cadre d'analyse (pour le chercheur) dans le domaine de la didactique des mathématiques pourrait trouver une place de choix. En effet, recourir à ce type d'outil de réflexion permettrait de sensibiliser davantage les enseignants à la portée, en termes d'apprentissage, des interactions en classe et de leur impact sur les apprentissages des élèves.

Références bibliographiques

Allard, C. (2015). *Étude du processus d'institutionnalisation dans les pratiques de fin d'école primaire : le cas de l'enseignement des fractions*. Thèse de l'Université Paris-Diderot.

Ancia, P., Bams, M., Chevalier, M., Colin, M., Dewaele, P. & Want, A. (2017). *Actimath à l'infini : 3-livret d'exercices*. Mont-Saint-Guibert : Éditions Van In.

Bloch, I. (2018). Connaissances sur les nombres des élèves de fin de secondaire et adaptation à l'université. *Petit x, 106*, 65-77.

Boulais, P., Brouzet, R., Durand-Guerrier, V., Majaj, M., Marino, D., Monnoyeur, F. & Vergnac, M. (2018). Enseignement et apprentissage de l'infini. Aspects philosophiques, épistémologiques et didactiques. In *Actes du Colloque EMF 2018*.

Bridoux, S., Grenier-Boley, N., Hache, C. & Robert A. (2016). Les moments d'exposition des connaissances, analyses et exemples. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 21*, 187-234.

Bronner, A. (2007). Anthropologie didactique du numérique dans l'enseignement secondaire français. http://www4.ujaen.es/~aestepa/TAD/Comunicaciones/Bronner.pdf (consulté le 25/09/20).

Brousseau, G. (1998). *Théorie des Situations Didactiques*. Grenoble : La Pensée Sauvage.

De Val, S. (2019). *Les nombres irrationnels au second degré de l'enseignement secondaire général de la Fédération Wallonie-Bruxelles : quelles pratiques enseignantes dans les classes ?* Mémoire de Master en Sciences de l'Éducation, finalité spécialisée en enseignement et apprentissages scolaires. Université de Mons, Belgique.

Douady, R. (1986). Jeux de cadre et dialectique outil-objet. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 6*, 132-158.

Dumail, A. (2007). La racine carrée en troisième : Des enseignements aux apprentissages. *Cahier de DIDIREM, 57*. Université Paris Diderot.

Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 5*, 37-65.

Jacquier, I. (1995). Quelles conceptions des nombres chez les élèves de troisième ? *Petit x, 41*, 27-50.

Pariès, M., Pilorge, F. & Robert, A. (2017). Pour étudier le dispositif classe inversée. Analyses des moments d'exposition des connaissances en classe et de capsules vidéos. *Petit x, 105*, 37-72.

Picot, M. (2002). Racine de 2 + racine de 3, on ne peut pas le faire. *Repères-IREM, 49*, 5-16.

Robert, A. (1998). Outils d'analyses des contenus mathématiques à enseigner au lycée et à l'université. *Recherches en didactique des mathématiques, 18*(2), 139-190.

Robert, A. & Robinet, J. (1996). Prise en compte du méta en didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 16*(2), 145-176.

Robert, A. & Vandebrouck, F. (2014). Proximités-en-acte mises en jeu en classe par les enseignants du secondaire et ZPD des élèves : analyses de séances sur des tâches complexes. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 34*/2-3, 239-285.

T'Kindt-Demulder, I. & Gérard, F. (2017). *Actimath à l'infini : 4-Algèbre, analyse*. Louvain-la-Neuve : Éditions Van In.

Vandebrouck, F. (2008). *La classe de mathématiques : activités des élèves et pratiques des* *enseignants*. Toulouse : Octarès.

Van Dieren, F., Bianchi, G. & Sartiaux, P. (2015). *CQFD maths 3e : Manuel*. Bruxelles : Éditions De Boeck éducation.

Vergnac, M. & Durand-Guerrier, V. (2014). Le concept de nombre réel au lycée et en début d'université : un objet problématique. *Petit x, 96*, 7-28.

Vivier, L. (2008). De la synthèse sur les nombres à la doxa ensembliste. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 13*, 63-92.

Fédération Wallonie-Bruxelles. (2014). *Compétences terminales et savoirs requis en mathématiques. Humanités générales et technologiques*. http://enseignement.be/download.php?do_id=14074 (consulté le 25/09/20).

Fédération Wallonie-Bruxelles. (2015). *Programme d'études mathématiques : Enseignement secondaire ordinaire Humanités générales et technologiques 2e degré*. http://www.wallonie-bruxelles-enseignement.be/progr/467-2015-240.pdf (consulté le 25/09/20).

MEN (2019). *Programme d'enseignement de mathématiques de la classe de seconde générale et technologique*.

Annexe
Éléments retenus dans les programmes de troisième et quatrième années pour les analyses (Fédération Wallonie-Bruxelles, 2015)

Les programmes sont organisés en unités d'acquis d'apprentissage (UAA). Une UAA est définie comme *« un ensemble cohérent d'acquis d'apprentissage susceptible d'être évalué »* (p. 2). Chaque UAA contient des ressources permettant d'identifier les savoirs à enseigner et/ou à remobiliser et des processus (connaître-appliquer-transférer) pour mettre en œuvre ces ressources. Des commentaires méthodologiques sont également donnés pour préciser certaines injonctions. Nous donnons ci-dessous les points retenus dans les programmes en précisant s'il s'agit d'une ressource, d'un processus ou d'un commentaire.

Troisième année

UAA : Triangle rectangle

> *Dans cette UAA, on rencontre des nouveaux nombres : les irrationnels de type racine carrée. On se limitera à déterminer à l'aide de la calculatrice la valeur approchée d'une racine carrée, le but étant la résolution de problèmes et non l'exploitation des propriétés des racines carrées (p. 17).*

a) [Ressources] Nombres irrationnels (p. 22) Commentaire :

> *Le calcul de mesures à l'aide du théorème de Pythagore permet de découvrir des nombres irrationnels. Il est donc naturel de les introduire dans cette UAA et opportun d'en préciser le contexte historique. L'irrationalité de $\sqrt{2}$ peut être démontrée ;*

b) [Appliquer] *« Construire un segment de longueur $\sqrt{a}$ avec a naturel »* (p. 23) ;

c) [Appliquer] *« Calculer la distance entre deux points dans un repère orthonormé »* (p. 23) ;

d) [Transférer] *« Résoudre un problème (calcul d'une longueur, construction) en utilisant le théorème de Pythagore et les propriétés métriques du triangle rectangle »* (p. 23).

Commentaires :

> *Les applications du théorème sont nombreuses, on traitera notamment les problèmes suivants :*
>
> *- le calcul de la diagonale d'un carré (*), d'un rectangle ;*
>
> *- le calcul de la diagonale d'un cube (*), d'un parallélépipède rectangle ;*
>
> *- le calcul de la hauteur d'un triangle équilatéral (*) ;*
>
> *- le calcul de la distance entre deux points dans un repère orthonormé (*) ;*
>
> *- la construction d'un segment dont le carré de la longueur est un naturel (aux instruments ou avec un logiciel de géométrie).*
>
> *On ne manquera pas de dégager une formule générale pour les problèmes marqués d'une étoile (*).*

e) [Appliquer] *« Utiliser les relations trigonométriques du triangle rectangle »* (p. 23). Commentaire : *« Pour obtenir une valeur approchée d'un nombre trigonométrique d'un angle et réciproquement, l'élève doit utiliser la calculatrice »* ;

f) [Connaître] *« Établir les nombres trigonométriques dans des triangles rectangles particuliers (30°, 45°, 60°) »* (p. 23).

UAA : Outils algébriques

g) [Ressources] *« Racines (carrée-cubique) »* (p. 41). Commentaire :

> *Les racines carrées d'un nombre réel positif sont définies comme solutions de l'équation $x^2=a$. On précisera que la notation $\sqrt{a}$ est la racine carrée positive. Les propriétés des radicaux d'indice 2 peuvent être conjecturées, notamment à l'aide d'une calculatrice, et peuvent être ensuite démontrées. On se limitera à définir la racine cubique d'un nombre comme solution de l'équation $x^3=a$.*

Quatrième année

UAA : Trigonométrie

h) [Connaître] *« Représenter sur un cercle trigonométrique un point correspondant à un angle ainsi que ses nombres trigonométriques »* (p. 62) ;

i) [Appliquer] *« Calculer la longueur d'un côté/d'un angle d'un triangle avec la calculatrice »* (p. 62).

UAA : Deuxième degré

j) [Appliquer] *« Résoudre graphiquement et algébriquement une équation ou une inéquation du 2^e degré »* (p. 77).