LA CONSIGNE *« SCHÄTZ MAL! »* DANS LES ÉCOLES ÉLÉMENTAIRES ALLEMANDES LORS DE SÉANCES PORTANT SUR LES GRANDEURS

Florence SORIANO-GAFIUK[1]
INSPÉ de Lorraine - Sarreguemines, campus biculturel franco-allemand
Institut Elie Cartan de Lorraine (UMR 7502)

Merci à mes deux collègues professeures d'allemand,
Sandrine QUENET et Hildegarde SCHAFF

Résumé. Cet article propose d'apporter une réflexion sur l'apprentissage des estimations de mesures de grandeurs physiques enseignées dans les écoles élémentaires françaises (cycles 2 et 3), par la découverte des problèmes d'estimation tels qu'ils sont posés dans les ouvrages pédagogiques allemands. Dans la littérature germanophone, *« Schätz mal! »* signifie *« Donne une estimation ! »* dans le sens de *« devine, mais pas à l'aveuglette ! »*. Ces problèmes d'estimation (les *Schätzaufgaben*) sont généralement des questions ouvertes dont les données sont insuffisantes pour pouvoir recourir aux méthodes traditionnellement utilisées en séance de mathématiques. Ils mobilisent des habiletés cognitives qui engagent certains processus tels que la mémorisation et la perception, ils développent le sens des ordres de grandeur et favorisent la construction de compétences comme l'aptitude à argumenter. Le travail s'achève par une mise en perspective dans le contexte français.

Mots-clés. Estimation, grandeur, ordre de grandeur, perception, mémorisation, argumentation, Allemagne, Fermi.

Introduction

Dans de nombreux pays (États-Unis, Canada, Espagne, Allemagne, …), la littérature portant sur la pratique dans les écoles élémentaires des estimations de mesures de grandeurs d'objets réels s'avère très dense. Les innombrables exercices proposés trouvent leur origine auprès du scientifique italien Enrico Fermi (1901-1954), récipendiaire du Prix Nobel de physique : celui-ci avait en effet l'habitude de confronter ses étudiants à des problèmes d'estimation (qui portent aujourd'hui son nom). En France, même si les problèmes de Fermi restent peu présents dans les manuels scolaires et dans les tests d'évaluation nationale (Sirieix, 2023, pp. 91 & 104), le Ministère de l'Éducation Nationale manifeste, au fil des programmes scolaires en vigueur depuis 2002, un certain attachement à la pratique des estimations. Le document d'accompagnement aux programmes de 2002 portant sur les *« Grandeurs et mesures »* (MEN, 2002, p. 3) préconise en effet que les élèves apprennent à estimer la mesure avant de procéder au mesurage, en recourant notamment à la perception visuelle. Le programme 2008 du cycle 3 (MEN, 2008, p. 23) appelle à fournir, puis à valider des estimations de mesure à l'occasion de la résolution de problèmes concrets. Enfin, dans les programmes en vigueur depuis la rentrée 2023, les attendus de fin du cycle 2 (MEN, 2023a, p. 55) stipulent de *« comparer, estimer, mesurer des longueurs, des masses, des contenances, des durées »*, alors que ceux du cycle 3 (MEN, 2023b, p. 99) notifient de *« comparer, estimer, mesurer des grandeurs géométriques »* telles que la longueur

[1] florence.soriano-gafiuk@univ-lorraine.fr

(périmètre), l'aire, le volume et l'angle. En réponse à ces attentes ministérielles, certains auteurs ont choisi de s'intéresser à la pratique des estimations dans les écoles élémentaires françaises en prenant appui sur des ressources littéraires issues de pays développant justement une certaine expertise sur cette question. Deux publications peuvent être notamment citées. Très récemment, dans la revue *Grand N*, l'article Sirieix (2023), qui propose un enrichissement des réflexions par le biais d'une revue littéraire anglosaxonne et hispanique, s'attache à répondre à la question suivante : *« Où en sont les élèves sur l'estimation de la mesure de longueurs ? »* Paru beaucoup plus en amont, l'article Cabassut (2007) apporte des exemples de problèmes de Fermi, extraits cette fois-ci de la littérature germanophone, offrant notamment un regard sur la pratique des modélisations au niveau du collège. Les pages suivantes viennent en complément au travail de Cabassut (2007) en s'appuyant toujours sur les ressources germanophones, mais en se plaçant cette fois-ci au niveau du premier degré et en se concentrant sur le développement chez les élèves du sens des ordres de grandeur par la pratique de problèmes d'estimation de mesures de grandeurs d'objets réels. Considérés dans ce nouveau cadre, ces problèmes sont dits « simples » : leur résolution est opérée mentalement, elle ne recourt ni aux instruments de mesure, ni à la calculatrice. En opposition aux problèmes de Fermi, qualifiés de « complexes », les exercices proposés dans cet article sont appelés des *Schätzaufgaben* (appellation germanophone).

Les pages suivantes, en s'intéressant aux pratiques de l'estimation dans le système scolaire allemand, nous proposent de décentrer notre regard. L'objectif est d'élaborer une réflexion qui offre, dans le respect des programmes officiels français et après la prise en compte des observations de (Sirieix, 2023), des pistes d'activités visant la construction de la compétence *estimer la mesure d'une grandeur* au niveau des cycles 2 et 3. Pour cela, l'article présent est structuré en six parties. Après un rappel sur les notions de grandeurs, mesures et estimations (partie 1.), il apporte une caractérisation des *Schätzaufgaben* (partie 2.) en précisant notamment ce qu'il faut entendre par la consigne *« Schätz mal! »*. La section suivante (partie 3.) explique que les *Schätzaufgaben* sont traités en procédant à des comparaisons mentales entre grandeurs d'objets réels, ce qui nécessite de construire chez les élèves un répertoire d'objets de référence. L'article traite ensuite des processus cognitifs mobilisés dans la tâche d'estimation (partie 4.), avant de s'attacher aux questions de mise en œuvre dans la classe (partie 5.). Il s'achève par une recontextualisation dans le système français, en faisant notamment écho à certains points de conclusion de Sirieix (2023). En outre, il s'attache à répondre aux questions suivantes :

- Comment renforcer et organiser l'enseignement de l'estimation au niveau des cycles 2 et 3 ?
- Comment étoffer le répertoire d'objets de référence des élèves ?
- Et quelles activités proposer en classe ?

1. Grandeurs, mesures et estimations

Comme les grandeurs, mesures et estimations sont des concepts complexes, nous proposons de revenir sur leurs définitions. Concernant la grandeur, nous nous référons aux travaux de Brousseau. Pour ce dernier, une grandeur pourrait être considérée comme un ensemble d'objets muni d'un ordre total (Brousseau, 2002, p. 9). Par exemple, pour la grandeur *longueur*, il serait possible de comparer directement et deux à deux les objets qui composent cette grandeur (est plus grand que / est aussi grand que /est moins grand que). Brousseau fait cependant noter la nécessité d'englober dans la définition la configuration spatiale des objets. Par exemple, la longueur d'une corde est la même, que cette corde soit tendue ou enroulée. Ces remarques conduisent au final le didacticien à poser la définition suivante : *« Une grandeur est un ensemble* *de classes d'objets, stables par rapport aux manipulations ou aux transformations compatibles avec la résolution d'une situation d'ordination »* (Brousseau, 2002, p. 10). Une grandeur est ensuite dite *spécifiée* lorsqu'elle est attachée à une circonstance ou à un objet particulier : la longueur est une grandeur, mais la taille des enfants, la hauteur d'une tour, la profondeur d'un puits et la longueur des trajets sont des grandeurs spécifiées (*ibid.*, p. 7). Dans la suite de cet article, toutes les grandeurs considérées sont supposées spécifiées et mesurables.

À des fins de cohérence, les deux prochaines définitions sont celles retenues dans Sirieix (2023). La mesure d'une grandeur est *« obtenue par le rapport entre la grandeur de l'objet et la grandeur d'un objet étalon choisi et dont la grandeur est appelée unité »* (*ibid.*, p. 86). Un *mesurage* est, selon le Vocabulaire International de Métrologie, *« un processus consistant à obtenir expérimentalement une ou plusieurs valeurs que l'on peut raisonnablement attribuer à une grandeur »* (*ibid.*, p. 87). Les mesures de grandeurs sont généralement déterminées à l'aide d'instruments, et donc en recourant à des mesurages (*ibid.*). Toutefois dans cet article, l'appréciation (quantitative) d'une grandeur, relativement à une unité, est opérée sans recourir à des instruments de mesurage, mais en s'appuyant sur la perception. Le résultat ainsi obtenu est un nombre appelé une *estimation*[2] de la mesure. Cette dernière est donc moins précise que les valeurs recueillies par mesurage et se présente davantage comme l'attribution d'une valeur numérique *« qui utilise des nombres les plus simples possibles »* (*ibid.*, p. 87). Il serait en effet illusoire de viser un excès de précision. Aussi une estimation se présente-t-elle comme un arrondi à une puissance de 10 qui dépend du contexte (*ibid.*, p. 88), ou sinon, lorsque la situation le permet et/ou l'impose, comme une approximation plus fine qui n'atteindra cependant pas la précision des valeurs obtenues selon des mesurages instrumentés. Il est enfin intéressant de noter que les problèmes de Fermi n'indiquent pas les raisons pour lesquelles lesdites estimations sont effectuées. De telles indications conduiraient pourtant à se poser de nouvelles questions concernant la nécessité éventuelle de déterminer une estimation par excès, ou au contraire par défaut. Quelques lignes ont cependant été réservées à ce sujet dans la section 5.6.

La tâche estimer étant explicitée, nous allons nous intéresser aux *Schätzaufgaben*. Comme ceux-ci se présentent comme des problèmes d'estimation portant sur les mesures de grandeurs d'objets réels, il est utile de poser une dernière définition : lorsqu'une mesure constitue une estimation d'une grandeur d'un objet réel, ledit objet est appelé un *représentant* de ladite mesure. Par exemple, un seau d'eau est un représentant de 10 *L* (contenance), mais aussi de 10 *kg* (masse) et de 30 *cm* (hauteur). Cet exemple offre par ailleurs une occasion de rappeler les préconisations ministérielles sur l'importance *« qu'à de multiples occasions les élèves constatent que l'on peut associer plusieurs grandeurs à un même objet »* (MEN, 2016, p. 2).

Les définitions ayant été formulées, nous pouvons dès lors expliciter la consigne allemande *« Schätz mal! »*, ce qui nous permettra de caractériser les *Schätzaufgaben*.

2. La consigne *« Schätz mal! »*

2.1. Le verbe *schätzen*

Dans les ouvrages dictionnairiques allemands, le verbe *schätzen* est traduit en français par *estimer* et signifie plus précisément : donner une approximation en s'appuyant sur notre perception, en se référant à notre expérience/vécu, en émettant des conjectures ou en effectuant des calculs approchés. La définition du mot *schätzen* se rapproche donc de celle du verbe *estimer*

[2] L'*estimation* désigne aussi l'acte d'estimer.

pour la dimension approximative, mais aussi de celles des verbes *deviner* (répondre correctement, sans forcément connaître toutes les informations utiles) et *percevoir* (saisir des informations par nos sens). La consigne *« Schätz mal! »* est par exemple traduite par la Maison d'édition allemande PONS par *« Essaie de deviner »*. Comme l'augure le célèbre adage *Traduttore, traditore* (connu en français sous l'expression « Traduire, c'est trahir »), le verbe *schätzen* trouve difficilement son équivalent dans la langue française ; il a en effet un sens plus riche que sa simple traduction *estimer*. Pour cette raison, tout au long de ce travail, nous avons choisi d'employer les mots en allemand *schätzen* et *Schätzaufgabe* plutôt que leurs traductions en français.

2.2. Les caractéristiques des *Schätzaufgaben*

Un *Schätzaufgabe* portant sur les grandeurs est un problème d'estimation d'une grandeur spécifiée dont la résolution peut être conduite sans recourir à des instruments de mesurage, à des recherches sur internet ou à des calculs posés — ou du moins à des calculs qui ne pourraient être opérés mentalement, l'enseignant étant susceptible de vouloir des traces écrites des travaux de ses élèves. Son traitement consiste à s'appuyer sur des connaissances et expériences de la vie, à mobiliser des aptitudes cognitives comme la perception (notamment visuelle), mais aussi à opérer des comparaisons mentales entre grandeurs de même espèce. Cette dernière stratégie suppose que des éléments de comparaison ont été préalablement mémorisés par les élèves. Quoi qu'il en soit, les Schätzaufgaben ne sont pas des devinettes qui se résolvent à l'aveuglette (Winter, 2003, p. 18).

Afin de rendre notre discours plus parlant, nous proposons la découverte de deux premiers *Schätzaufgaben* :

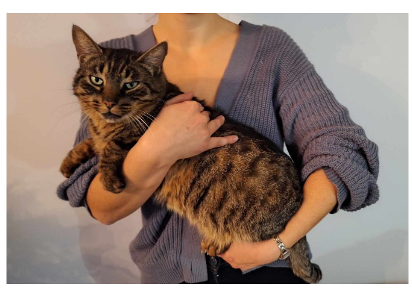
Schätzaufgabe 1 (niveau cycle 2)

Donne une estimation de la hauteur du lampadaire.

Une réponse possible. La fillette semble être un peu plus âgée que les élèves de cycle 2. Comme ces derniers sont supposés connaître leur propre taille (environ 130 *cm*), ils sont en mesure d'estimer la taille de la fillette à environ 140 *cm*, peut-être un peu plus. Cette jeune personne est donc un représentant de 140 *cm*. Se présentant comme un élément de référence, elle permet d'achever le traitement du problème : le lampadaire étant, à vue d'œil, deux fois plus grand que la fillette, sa hauteur peut être estimée à environ 2,8 *m*.

Schätzaufgabe 2 (niveau cycle 3)

Devine la masse de la pomme, du chat, puis du cartable.



Une réponse possible. L'estimation de la masse d'une pomme peut être effectuée en s'appuyant sur l'expérience de l'achat d'un kilogramme de pommes (supposons 8 pommes). Ce lot de 8 fruits est donc un représentant de 1 000 *g*. Choisi comme élément de référence, il permet d'achever le traitement de cette question : le calcul mental du quotient de 1 000 par 8 permet en effet d'estimer la masse de la pomme à environ 125 *g*. Ensuite, le chat de la photographie semble adulte et plutôt grand pour son espèce. Les élèves peuvent s'appuyer sur les connaissances de leurs propres animaux domestiques. Ces derniers deviennent alors des éléments de référence : un gros chat peut naturellement être comparé à un autre gros chat, mais aussi à un petit chien ou à un gros lapin. Il est ainsi possible d'estimer la masse du chat de la photographie à environ 5 *kg*. Enfin, l'estimation du cartable pose la question du contenu de celui-ci. L'image laisse penser que le sac est bien rempli. Les élèves ont ensuite pu entendre, peut-être dans le cadre d'un débat avec l'enseignant lui-même, les discussions récurrentes portant sur les cartables trop lourds, ces derniers pouvant même dépasser 10 *kg*. Ces informations peuvent être utilisées comme des éléments de référence. Une estimation de la masse du cartable de la photographie à environ 8 *kg* semble plausible.

Les deux énoncés précédents révèlent des caractéristiques communes. Ils sont ouverts. Ils ne comportent aucune donnée numérique, ce qui peut être déstabilisant pour un public scolaire non habitué à ce type d'activités et empêche la conduite d'une résolution mathématique selon les schémas habituels de raisonnement. Pour être traités, ces exercices exigent des élèves de percevoir, de comparer mentalement en recourant à des éléments de référence et en mobilisant la mémoire. Dans tous les cas, s'il ne s'agit pas d'apporter des résultats précis, mais des réponses seulement plausibles. C'est l'enseignant qui, par son expérience plus avancée dans la vie, pourra être considéré comme un expert apte à valider ou invalider la vraisemblance des mesures estimées.

Avant de développer les sections suivantes relatives à la mobilisation de certaines aptitudes cognitives et à la mise en œuvre des *Schätzaufgaben*, une nouvelle parenthèse est faite sur les problèmes de Fermi afin d'éviter toute confusion qui gênerait la compréhension de la suite de cet article. Les problèmes de Fermi sont des problèmes d'estimation dont certaines caractéristiques se rapprochent de celles des *Schätzaufgaben* (questions ouvertes, données numériques manquantes, …), mais dont les compétences visées chez les élèves ne sont pas forcément les mêmes, sans toutefois être disjointes. Ils sont en effet considérés comme plus « complexes » que les *Schätzaufgaben* tels que ces derniers viennent d'être introduits. Ils se présentent ainsi comme marquant une nouvelle étape dans l'apprentissage des problèmes d'estimation, par exemple au niveau du collège. Ils nécessitent en effet des connaissances plus pointues et autorisent de fait la recherche d'informations sur la Toile ou auprès d'experts. Ils mobilisent parfois des compétences mathématiques plus avancées, comme le calcul de la moyenne d'un échantillon. Ils peuvent aussi exiger de recourir à une modélisation et à des expérimentations, et donc à des mesurages. Enfin, si les calculs restent simples et rapides, ils ne peuvent plus être forcément effectués mentalement. Les calculs opérés dans le traitement d'un problème de Fermi sont d'ailleurs appelés les *calculs de coin de table*.

Après cet éclaircissement, nous rappelons ce qui avait été déjà mentionné en introduction : cet article, qui se concentre sur les problèmes d'estimation dits « simples », réserve la prochaine section au traitement de ceux-ci.

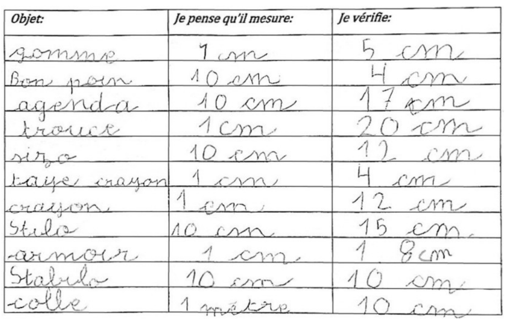
3. Comparer pour estimer

3.1. Analyse de la production d'une élève

En Moselle, dans le cadre de sa formation en constellation, une professeure des écoles a engagé sa classe de CE1 dans des activités autour des estimations. C'est ainsi que l'exercice suivant a été proposé à des élèves :

Schätzaufgabe 3 (niveau cycle 2)

Trouve dans la classe des objets qui mesurent à peu près 1 m, 1 cm, puis 10 cm. Devine d'abord, puis vérifie en mesurant.



Objet:	Je pense qu'il mesure:	Je vérifie:
gomme	1 cm	5 cm
Bon poin	10 cm	4 cm
agenda	10 cm	17 cm
trouce	1 cm	20 cm
sizo	10 cm	12 cm
taye crayon	1 cm	4 cm
crayon	1 cm	12 cm
Stulo	10 cm	15 cm
armoir	1 cm	1 8cm
Stabulo	10 cm	10 cm
colle	1 mètre	10 cm

Figure 1 *: Production d'Abelle (7 ans ½).*

À propos de la production d'Abelle. L'élève sait mesurer en utilisant les graduations de la règle, elle connaît le centimètre comme unité de mesure. Par contre, elle ne donne clairement pas de sens au concept de mesure, et donc au concept de grandeur. En outre, elle n'a pas intériorisé les mesures 1 *cm*, 1 *dm* et 1 *m*, et ne semble pas être en mesure d'accéder à une collection de représentants[3] de ces mesures. Elle se retrouve ainsi dans l'incapacité d'effectuer une comparaison quantitative qui lui permettrait par exemple de ne pas affirmer que la gomme a une longueur de 1 *cm*.

Par ailleurs, Abelle traite de façon séparée chaque objet mentionné dans le tableau, sans jamais penser à croiser ses résultats. Incapable d'élaborer une *comparaison qualitative*, Abelle n'est pas gênée par le fait que son stylo puisse, d'après ses estimations, être dix fois plus grand que sa trousse.

Le cas d'Abelle reflète en fait une situation réelle expliquée par l'épistémologie génétique :

> *Selon Piaget, les structures de l'intelligence ne sont pas innées ou préformées dans le système nerveux (maturationnisme), ni préexistantes dans l'environnement physique où l'enfant n'aurait qu'à s'en saisir (empirisme), mais elles naissent d'un processus actif qui consiste à assimiler les données de l'expérience aux cadres de connaissances du sujet* (Laval, 2019, p. 38).

En outre, toujours selon le même psychologue-épistémologue, une centration sur la mesure peut *« masquer un défaut de conceptualisation des grandeurs »* (Munier & Passelaigue, 2012, p. 14) si bien que *« l'entrée dans la mesure n'est pas forcément le moyen le plus efficace pour construire les connaissances liées à la grandeur »* (*ibid.*). Ces conclusions ont d'ailleurs influencé les ressources d'accompagnement des programmes scolaires passés et actuels, comme l'illustrent par exemple MEN (2002, p. 2) et MEN (2016, p. 2).

Ces lignes confirment le fait que, pour remédier à ses difficultés, Abelle doit s'appuyer sur son expérience de manipulation des objets du quotidien, afin de développer sa connaissance desdits objets et, au final, pouvoir opérer des comparaisons mentales qualitatives et quantitatives :

- *Comparaison quantitative*. Un surligneur (représentant que l'on suppose mémorisé et dont la mesure a d'ailleurs été correctement estimée par Abelle) a une longueur de mesure 10 *cm*. A vue d'œil, la gomme semble deux fois plus petite que le surligneur,

[3] Exemples de représentants de 1 *cm* : un ongle du pouce, une abeille, un timbre, une touche de clavier, …

donc la gomme a une longueur d'environ 5 *cm*.

- *Comparaison qualitative*. Une trousse est plus grande que les stylos qu'elle contient, donc sa longueur est supérieure à celle des stylos.

Cette section venant de rappeler que la stratégie de « comparer pour estimer » n'est pas innée, il est important de s'intéresser à présent à l'apprentissage de ce type de comparaisons.

3.2. Comparaisons concrètes et mentales

Pour être en mesure d'apporter une réponse plausible à un *Schätzaufgabe*, les élèves doivent apprendre à compenser l'insuffisance des données numériques apportées par l'énoncé en prenant appui sur leurs connaissances, leurs expériences de vie et leur perception, mais aussi en opérant des comparaisons mentales. Ces dernières jouent donc un rôle stratégique dans le traitement des *Schätzaufgaben*, se présentant ainsi comme une étape vers la compréhension du concept de grandeur.

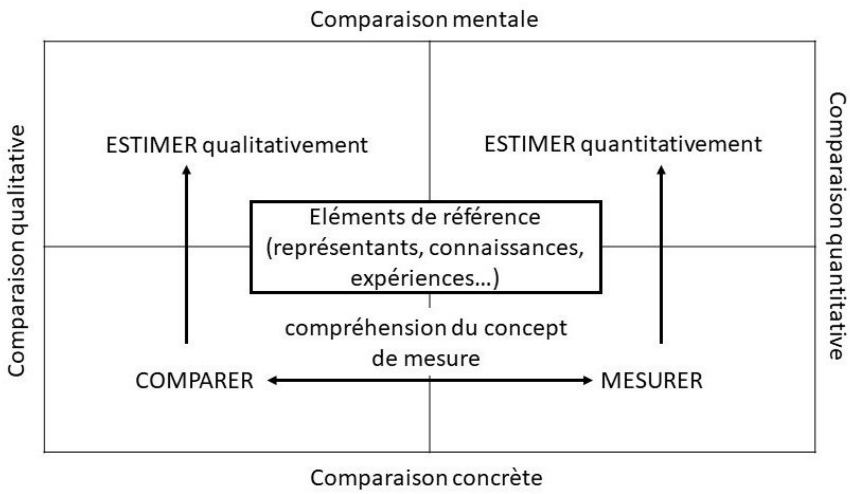


Figure 2 *: Schéma interprété - vers la compréhension du concept de grandeur et la pratique des* Schätzaufgaben *(Reuter & Schuler, 2023, p. 15).*

Le schéma de la figure 2 rappelle d'abord que des grandeurs de même espèce peuvent être comparées expérimentalement/concrètement, soit qualitativement (par juxtaposition, par superposition, …), soit quantitativement en procédant à des mesurages (par le geste ou à l'aide d'instruments de mesure). Le va-et-vient entre ces comparaisons qualitatives/quantitatives permet la compréhension du concept de mesure. Les objets dont on veut comparer les mesures ne sont cependant pas forcément dans le même champ de vision, si bien que le recours aux comparaisons mentales, et donc aux estimations, est parfois nécessaire. Le degré d'abstraction devient alors plus élevé et oblige notamment à intérioriser des mesures de comparaison et à accéder mentalement à des représentants de grandeurs spécifiées d'objets réels. Ce processus d'abstraction permet au final la compréhension du concept de grandeur. Dans tous les cas, ces comparaisons, qu'elles soient concrètes ou mentales, qualitatives ou quantitatives, s'appuient sur les connaissances et expériences des élèves.

Avant d'aller plus en amont, il est utile d'apporter quelques mots de vocabulaire. Les comparaisons mentales peuvent être *directes* ou *indirectes* — il s'agit dans ce second cas d'introduire un représentant intermédiaire. Par exemple, pour comparer les masses d'une feuille de papier et d'un cartable, nous pouvons raisonner :

• directement, en énonçant, sans recours à un représentant intermédiaire, qu'une feuille de papier est plus légère qu'un cartable ;

• indirectement, en énonçant, avec recours à un représentant intermédiaire, qu'une feuille de papier est plus légère qu'un cahier, qu'un cahier est plus léger qu'un cartable, et donc que, par transitivité, une feuille de papier est plus légère qu'un cartable. Dans cet exemple, le représentant intermédiaire est le cahier.

L'exercice suivant concerne une nouvelle comparaison mentale qui est à la fois qualitative et indirecte, Mélissa étant l'élément intermédiaire. Il repose sur la notion d'échelle et présente un intérêt particulier, les photographies pouvant induire en erreur.

Schätzaufgabe 4 (niveau cycle 2)

Qui est la plus grande ? Laurie, Mélissa ou Aurélia ?

L'apprentissage des comparaisons mentales, et donc de l'intériorisation de mesures de comparaison, nécessite selon Heid (2017, pp. 104-106), la pratique de quatre types d'activités d'estimation (préalablement, sans instrument de mesure et sans recherche documentaire).

• Le professeur donne une mesure de grandeur et les élèves cherchent des représentants dans la classe.

Exemple : Quel objet de la classe a une mesure approximative de 40 *cm* ?

Réponse possible : L'armoire (profondeur).

• Le professeur montre un objet de la classe et les élèves estiment mentalement des mesures de grandeur.

Exemple : Quelles sont les dimensions de la fenêtre de la classe ?

Remarque : Il peut être intéressant de comparer les dimensions de la fenêtre à celles de la porte ou sinon à celles du tableau, surtout si ces dimensions sont déjà connues des élèves.

• Le professeur donne une mesure de grandeur et les élèves cherchent des représentants hors de leur champ visuel.

Exemple : Cite un animal qui pèse 40 *kg*.

Réponse possible : Un berger allemand (vécu d'un élève), puis par comparaison mentale, un loup, une chèvre, …

• Le professeur cite un objet qui n'est pas dans la classe et les élèves estiment des mesures de cet objet.

Exemple : Quelle est la masse d'un petit poney ?

Réponse possible : Les chiens les plus lourds atteignent environ 80-100 *kg* (représentant mémorisé et/ou vécu d'un élève). Par comparaison mentale, on peut estimer la masse d'un petit poney à 80-100 *kg*.

Qu'elles soient expérimentales ou mentales, les comparaisons permettent aux écoliers français (comme allemands) de découvrir et d'assimiler les relations de proportionnalité liant les différentes unités de mesure d'une grandeur (par exemple, $1\,km = 1\,000\,m$). La littérature scientifique des deux pays précise par ailleurs l'importance de conduire un apprentissage des ordres de grandeur avant même d'introduire des tableaux des unités. Dans le cas contraire, la conversion d'unités devient, pour les élèves, une sorte de recette dénuée de sens qui consiste à ajouter ou à supprimer des zéros, ou encore à déplacer une virgule. Cet apprentissage des ordres de grandeur, et donc des estimations, passe par la perception (notamment visuelle) des grandeurs, les compétences plus techniques étant, au début de l'enseignement des grandeurs et mesures, secondaires.

3.3. Vers une collection de représentants de référence

Pour pratiquer les *Schätzaufgaben*, les élèves développent et mémorisent une collection de représentants de référence (c'est-à-dire une collection d'éléments de comparaison) et de leurs mesures. En France, la construction de ce répertoire de mesures commence en cycle 2 et poursuit en cycle 3 grâce aux échanges au sein de l'école entre les professeurs des deux cycles (MEN, 2016, pp. 3 et 6). Cet apprentissage peut commencer par la constitution d'une collection de représentants des unités standards, mais aussi de leurs multiples et sous-multiples.

> *Il ne suffit pas que les élèves de CE1 connaissent l'unité de mesure 1 m et sachent s'en servir dans les calculs. Ils doivent surtout être capables de nommer et de montrer des objets d'environ 1 m de long* (Franke & Ruwisch, 2010, p. 177).

Il est cependant possible de noter que des débats existent sur la pertinence de débuter par les unités standards, plutôt que par des unités non standardisées tant *« les expériences informelles préalables des enfants sont multiples et variées […], doivent donc être prises en compte et être rendues accessibles à une utilisation consciente »* (*ibid.*, p. 178). Dans tous les cas, la littérature germanophone souligne l'importance de permettre aux élèves d'effectuer des mesures sur leurs propres corps (éventuellement avec des unités standards), les parties du corps mesurées devenant alors des étalons mobilisables dans de nouvelles comparaisons (donc avec des unités non standards) qui permettront notamment d'observer les proportions du corps humain.

> *Quelle est la longueur de ta paume de main ? Quelle est l'épaisseur d'un ongle ?*
>
> *Quelle est la largeur de ton pouce ? Quelle est la longueur de ton pas ?*
>
> *Quelle est la longueur de ton empan ? Quelle est l'envergure de tes bras ?*
>
> *Quelle est ta masse ? Quelle est ta taille ?*
>
> …

Nombre de ressources pédagogiques proposent de telles séries de questions (appelées parfois *devinettes cognitives*) portant généralement sur les grandeurs issues de l'environnement direct de l'élève. Cet intérêt pour les grandeurs issues notamment de l'espace-classe se retrouve dans (MEN, 2016, p. 6) :

> Quelles sont les dimensions du t*ableau ? Quelles sont les dimensions de la classe ?*
>
> *Quelle est la hauteur du sous-plafond ? Quelle est la hauteur de ta chaise ?*
>
> *Quelle est la hauteur de la porte ? Quelle est la largeur de la porte ?*
>
> *Quelle est la longueur de ta trousse ? Quelle est la masse de ton cartable ?*

De combien de temps as-tu besoin pour effacer le tableau ? pour venir à l'école ?

*Quelle est la contenance de ta gourde ? Quel est le volume de ta boît*e à goûter ?

…

ou s'appuyant sur les expériences des élèves :

Combien de temps peux-tu rester sans respirer ?

Combien de temps peux-tu rester debout sur un seul pied ?

Combien de temps as-tu besoin pour te brosser les dents ? pour te laver les mains ?

Combien de temps te faut-il pour compter jusqu'à 50 ?

…

Ce répertoire de mesures de référence présente de très grandes variations, d'un élève à un autre, d'une classe à une autre, d'abord parce que chaque individu est porteur d'expériences de son propre quotidien, et ensuite parce que la palette des possibilités en termes de représentants est immense. Or il semble difficile d'exiger d'un élève la mémorisation d'une telle étendue de représentants. Pour cette raison, les enseignants seront conduits à faire des choix en fonction des connaissances et des centres d'intérêts de leurs élèves. Ruwisch (2021, p. 2) préconise aussi de thématiser la recherche des représentants, tant les références isolées sont inutiles :

> *Ce n'est que dans la comparaison avec d'autres représentants de référence, dans l'exactitude des relations entre représentants et grandeurs, que la connaissance d'une collection de représentants de référence et que l'intériorisation des mesures de ces représentants peuvent devenir de véritables points d'appui utilisables pour comparer, estimer et calculer avec des arrondis* (Ruwisch, 2021, p. 2).

Par exemple, un travail sur les animaux peut être conduit à l'occasion d'une sortie scolaire, et de nouvelles séries de questions être alors posées :

Quelle est la hauteur d'un éléphant ? Quelle est sa longueur ? Quelle est sa masse ?

Quelle est la hauteur d'une girafe ? Quelle est la longueur de son cou ?

Quelle est la masse d'un hippopotame ? Quelle est la masse d'un rhinocéros ?

Quelle quantité de lait produit chaque jour une vache ? Quelle est la masse d'une vache ?

Quelle est la longueur du saut d'un kangourou ? Quelle est la hauteur du saut ?

…

Pies-Hötzinger et Waasmaier (2020, p. 4) conseillent aux enseignants de profiter de toutes les opportunités (interroger les chiffres publiés dans des journaux ou magazines, ou encore dans les exercices de traitement de données…) ; il s'agit à chaque fois de se poser la question de la vraisemblance des informations numériques données. L'élaboration de cette collection de représentants requiert donc des compétences en lecture, en compréhension de texte, mais aussi des connaissances disciplinaires. Par exemple, en éducation physique et sportive, les terrains de jeu de balle peuvent offrir de nouveaux représentants ; en géographie, les longueurs des fleuves ou les hauteurs des montagnes peuvent être comparées entre elles. Les mathématiques apportent aussi des connaissances mobilisables lors d'activités d'estimation : par exemple, les fractions facilitent l'estimation des portions.

Précisons ensuite qu'il est important que les élèves soient amenés à comparer les valeurs devinées/estimées à celles obtenues en recourant à la mesure instrumentée ou obtenue par le geste, en interrogeant des experts, en consultant des ressources documentaires variées, ou encore en comptant, en expérimentant, en calculant, … En France, comme en Allemagne, les préconisations ministérielles appellent à inciter les enfants à faire leurs propres estimations avant de recourir au mesurage. Ces derniers propos sont illustrés par une nouvelle série d'exercices :

Schätzaufgabe 5 (niveau cycle 2) (Griesel *et al.*, 2021, p. 35)

Devine (à vue d'œil) la longueur de chacun de ces insectes (sans les antennes), puis mesure et compare avec tes premières estimations. Les insectes sont représentés en vraie grandeur sur les images.


frelon


puceron


abeille


coccinelle


pince-oreille

Schätzaufgabe 6 (niveau cycle 2) (Brand *et al.*, 2014, p. 120)

Devine, et ensuite calcule précisément.
Pour te brosser les dents, tu as à peu près besoin de 5 litres d'eau.
De combien de litres d'eau as-tu besoin en une journée ? en une semaine ? en un mois ?

Schätzaufgabe 7 (niveau cycle 3)

Le professeur projette les trois photographies suivantes et demande aux élèves d'estimer les contenances du mug, du distributeur de savon, du porte brosses à dents et de la carafe. Une fois les estimations élaborées et argumentées par les élèves, il sort de son sac les quatre récipients précités et interroge la classe sur un moyen de vérifier les résultats.

Une réponse possible. Le mug semble être de taille normale, sa contenance est donc comparable à celle d'une canette de soda (expérience de la vie et/ou représentant mémorisé par les élèves), soit environ de 30 *cL*. Le distributeur de savon, qui possède un socle, a *grosso modo* la même hauteur que le mug, mais présente un diamètre beaucoup plus petit. Sa contenance est estimée à la moitié de celle du mug, soit 15 *cL*. Le porte brosses à dents a la particularité de ne pas être cylindrique, mais plutôt cubique. La mesure de son côté semble être égale à la hauteur du mug, soit à la largeur d'une main adulte sans le pouce replié, soit encore à peu près 8 *cm*. Le cube a donc une contenance de $8\times8\times8\,cm^3$, soit, en arrondissant, $500\,cm^3$. Ensuite, on note que la moitié inférieure du cube, qui correspond aux racines de la dent, est partiellement « évidée », estimons de moitié. Au final, le volume de la dent est donc environ égal à $250+250\times0{,}5\,cm^3$, soit, en arrondissant, $370\,cm^3$, ou encore 37 *cL*. Enfin, une carafe a en général une contenance de 1 *L*, soit 100 *cL*, ce qui est confirmé par le fait qu'elle semble à peu près de même diamètre que le mug, mais d'une hauteur trois fois plus grande. La vérification peut être faite en déversant le liquide contenu dans chacun de ces récipients dans un verre mesureur. Les mesures ainsi obtenues sont successivement : 30 *cL*, 18 *cL*, 34 *cL* et 100 *cL*, soit 1 *L*. Les estimations effectuées étaient donc vraisemblables.

Cette section, qui a montré le rôle stratégique des comparaisons mentales dans la pratique de l'estimation, a également mis en évidence l'importance de deux aptitudes cognitives : mémoriser et percevoir. Ce point fait l'objet du chapitre suivant.

4. Les processus cognitifs

« Du point de vue de la didactique des mathématiques, l'estimation est une interaction complexe entre perception, mémoire, mise en relation, approximation et calcul » (Winter, 2003, p. 19). Si ces trois dernières compétences ne constituent pas des processus cognitifs, la mémorisation et la perception sont bien, quant à elles, des modes de traitement de l'information par les systèmes neurologiques. L'estimation passe donc par un traitement cognitif et son apprentissage relève, au moins en partie, de l'éducation cognitive :

> *On parle d'éducation cognitive lorsque l'on cherche explicitement, par la mise en œuvre d'une démarche de formation, à améliorer le fonctionnement intellectuel des personnes et ainsi à augmenter leur capacité d'apprentissage et, plus largement, leurs possibilités d'adaptation. Il ne s'agit donc plus, pour le formateur, d'enseigner des contenus, des connaissances propres à certaines disciplines, mais d'enseigner des règles générales de pensée, des procédures intellectuelles, des processus d'acquisition et d'utilisation* (Loarer, 1998, p. 121).

4.1. Le recours à la mémoire

Pour résoudre un *Schätzaufgabe*, les élèves doivent trouver des stratégies de comparaison en recourant notamment à des éléments de référence. Pour cela, ils doivent s'appuyer sur leur mémoire à long terme (expériences, connaissances sémantiques, …). *« Si là rien ne convient, il ne reste plus qu'à se taire ou à répondre au hasard. Estimer ne signifie en aucun cas deviner à l'aveuglette »*, rappelle Winter (2003, p. 18). Les élèves doivent ensuite traiter le problème dans la mémoire de travail, donc dans une mémoire à court terme (Heid, 2017, p. 45). Selon cette même littérature, il s'agit ensuite de vérifier la plausibilité de la réponse générée au niveau d'une centrale de contrôle (*cf.* figure 3). Si le résultat est jugé inadéquat, alors le processus est relancé, sinon il est achevé et la réponse est donnée (*ibid.*).

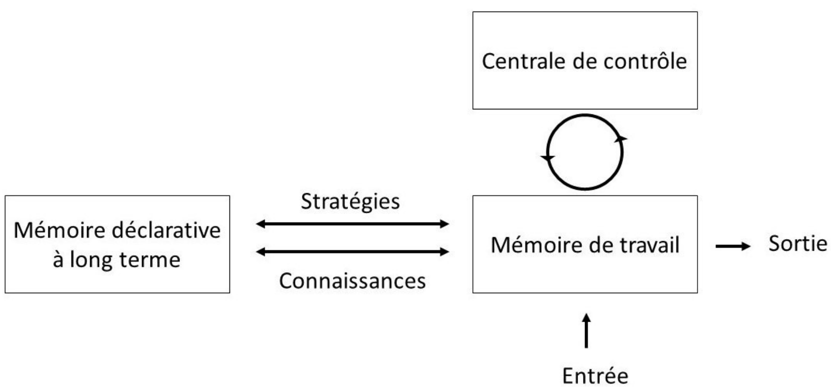


Figure 3 *: Schéma interprété - recours à la mémoire (Heid, 2017, p. 46).*

Afin de faciliter la mémorisation et donc le recours à la mémoire, Reuter et Schuler (2023, p. 60) proposent la conception d'affiches pédagogiques. Quelques exemples peuvent être donnés :

- *une affiche sur l'espace-classe, ses longueurs et superficies* : salle, porte, fenêtre, table, siège, écran d'ordinateur, cahier, touche d'un clavier, un point laissé avec un feutre sur une feuille de papier, etc ;

- *une affiche sur les parties du corps et ses mesures* : corps (masse, taille et envergure), tête (longueur et largeur), main (longueur, *empan*[4], *main*[5], largeur du pouce et épaisseur d'un ongle), bras (longueur), jambe (longueur et enjambée), pied (longueur), etc ; les proportions du corps peuvent être mises en évidence : la taille est *grosso modo* égale à l'envergure, le *pied* est à peu près égal au triple de la *main* ;
- *une affiche sur les récipients avec leurs mesures de longueur et contenances* : piscine, citerne, tonneau, baignoire, aquarium, seau, casserole, carafe, gourde, canette, mug, petite tasse, cuillère à soupe, cuillère à café, etc.

Les élèves peuvent également concevoir des cartes d'identité d'objets ou d'animaux, sur lesquelles différentes mesures sont indiquées (hauteur, longueur, masse, performance en saut, …). Là aussi, il est important que les mesures des grandeurs de même espèce soient comparées entre elles. Par exemple, les élèves pourront comparer le saut en longueur d'un écureuil avec la taille de l'animal, ou encore constater qu'un éléphant d'Afrique est *grosso modo* trois fois plus lourd qu'un rhinocéros.

Pour illustrer ces propos, nous proposons une nouvelle série de problèmes d'estimation. Les solutions apportées ne sont que des possibilités : il n'y a pas de réponses justes ou fausses, mais seulement des estimations censées ou raisonnables (Franke & Ruwisch, 2010, p. 250). Le professeur des écoles, par son expérience et ses connaissances, jouera le rôle d'expert apte à apprécier les suggestions de ses élèves.

Schätzaufgabe 8 (niveau cycle 2) (Cech-Wenning, 2022, carte n° 23)

Une girafe peut entrer dans ta classe. Est-ce possible ?

Une réponse possible. Dans une structure scolaire, le sous-plafond est à une hauteur minimale de 2,5 *m*. La hauteur du sous-plafond est supposée mémorisée par les élèves ou, sinon, peut être comparée à la hauteur de la porte d'environ 2 *m* (comparaison avec un représentant de référence).

Concernant la taille de la girafe, les élèves peuvent s'appuyer sur leur vécu (visite d'un zoo par exemple), ou recourir à leur mémoire (mesure mémorisée à l'occasion de l'élaboration de la carte d'identité de la girafe, ou souvenir d'une photographie représentant une girafe broutant le sommet d'un arbre, avec dans ce cas, la possibilité d'élaborer une comparaison indirecte girafe-arbre-classe). Ils peuvent également s'appuyer sur l'image de l'énoncé — la girafe semble trois fois plus grande que la jeep (comparaison indirecte girafe-jeep-classe), donc l'animal a une hauteur estimée à un peu plus de 6 *m*. L'affirmation de l'énoncé n'est pas plausible.

Schätzaufgabe 9 (niveau cycle 3) (Cech-Wenning, 2022, carte n° 36)

Une vache laitière peut subvenir à la consommation quotidienne de lait de tous tes camarades de classe. Est-ce possible ?

---

[4] L'*empan* est la longueur entre les extrémités du pouce et de l'auriculaire.

[5] La *main* est ici une unité, c'est-à-dire la largeur de la main en comptant le pouce plié.

Une réponse possible. Une vache laitière donne environ 28 *L* de lait par jour (mesure mémorisée au cours de l'élaboration de la carte d'identité d'une vache, ou vécu d'un élève par exemple issu d'une famille d'agriculteurs). Si on suppose que la classe compte 25 élèves (information connue des élèves), que chaque élève boit deux bols de lait par jour (vécu des élèves) et que la contenance d'un bol est environ de 30-35 *cL* (représentant mémorisé ou comparaison mentale avec une canette de 33 *cL*), la consommation journalière de la classe est environ de 15-20 *L* (valeurs arrondies puisque les calculs précis n'ont pas de sens dans un exercice d'estimation). L'affirmation de la *Schätzaufgabe* 9 est plausible.

Schätzaufgabe 10 (niveau cycle 3) (Cech-Wenning, 2022, carte n° 34)

Une maman hippopotame est 5 fois plus lourde que son bébé (naissant). Est-ce possible ?

Une réponse possible. Un hippopotame a une masse d'environ 1,5 *t*, soit 1 500 *kg* (représentant mémorisé et mesure intériorisée). Si l'affirmation est vraie (raisonnement par l'absurde), le bébé pèserait en gros 300 *kg* (calcul mental).

Or un enfant de 10 ans pèse environ 30 *kg* (vécu des élèves). Le bébé aurait donc la masse de 10 élèves, ce qui est vraiment beaucoup. L'image de l'énoncé conforte cette impression. L'affirmation de la *Schätzaufgabe* 10 n'est pas plausible.

Il est intéressant de noter que ces trois exercices ne sont pas ouverts. Dans la littérature allemande, on les appelle des *Kann-das-stimmen-Aufgaben* (formule traduite littéralement par « exercices-est-ce-possible »). Ce matériel pédagogique facilite l'entrée dans l'activité en apportant des éléments de comparaison et en offrant ainsi une première idée de l'échelle de valeurs dans laquelle il est proposé de travailler. Il met en évidence le fonctionnement de la centrale de contrôle puisqu'il s'agit à chaque fois de vérifier la plausibilité d'estimations déjà opérées. Il constitue, pour les élèves, une étape vers une « maturité » mathématique, l'objectif final étant l'aptitude à résoudre des problèmes d'estimation totalement ouverts.

4.2. Le recours à la perception

La perception est l'ensemble des processus cognitifs qui conduisent, à partir de la saisie sensorielle des informations qui nous sont offertes par les objets/les actions/les espaces, à construire une représentation mentale du monde qui nous entoure. Selon une étude de Hatwell (1994), 83 % de ces informations sont saisies par la vue. Par exemple, dans le domaine qui nous intéresse et qui est celui des grandeurs physiques, la longueur, l'aire et le volume sont des grandeurs visuellement perceptibles. La masse qui n'est pas perceptible par la vue peut cependant l'être par l'action de soupeser, c'est-à-dire par le sens haptique qui résulte de l'activité des récepteurs tactiles et kinesthésiques. Le temps n'est perceptible par aucune des cinq modalités sensorielles (Franke & Ruwisch, 2010, p. 217) ; il est en revanche saisissable de façon indirecte via le vécu perceptible (mouvements, actions, mécanismes physiologiques, …). En conclusion, toutes les grandeurs physiques étudiées à l'école élémentaire peuvent être rendues perceptibles soit directement, soit indirectement, la vue restant le sens le plus mobilisé. Il est d'ailleurs intéressant de noter que nombre de ressources pédagogiques allemandes proposent des exercices sous la forme de *Schätzbilder* (traduit littéralement par « images estimation »). Il existe notamment, en vente dans les librairies, des coffrets d'images — les exercices n° 1, n° 2, n° 5, n° 7, n° 8, n° 10, n° 14, n° 15 et n° 16 sont des *Schätzbilder*, trois d'entre eux correspondant à des cartes du coffret Cech-Wenning (2022).

Quoi qu'il en soit, ce recours à la perception mobilise des compétences qui ne sont pas innées :

> *N'ayant pas conscience des coulisses de la perception, nous pensons, à tort, que la perception est passive. En réalité, la perception est une construction active permanente de notre cerveau*[6] (Naccache & Naccache, 2018, pp. 122-123).

Dans le cas de la perception par la vue, la rétine transmet les signaux électriques au cerveau par les nerfs optiques après avoir d'abord trié et compressé les informations grâce à ses cellules ganglionnaires (Buffet, 2020). Les messages envoyés sont alors traités par différentes aires du cerveau qui permettent de voir en trois dimensions, d'apprécier les distances et de saisir les couleurs, les formes et les directions. La mémoire (connaissances, expériences, …) intervient ensuite dans le processus de perception qui aboutit au final à une image intégrée et interprétée de l'objet visualisé. En résumé, la pratique des *Schätzaufgaben* mobilise la perception, un processus cognitif qui n'est pas inné, mais peut et doit être développé.

La compétence *percevoir* est mobilisée dans cette nouvelle série d'exercices :

Schätzaufgabe 11 (niveau cycle 2)

Le professeur trace différents segments au tableau. Les élèves doivent estimer à vue d'œil les longueurs de ces segments.

Schätzaufgabe 12 (niveau cycle 2)

Les enfants soupèsent un paquet de spaghettis de 500 *g* (masse indiquée de façon visible sur l'étiquette du paquet), puis différents objets dont ils doivent estimer la masse. La connaissance de certaines propriétés des objets soupesés peut apporter des informations exploitables (par exemple, 1 *L* de jus de fruit a une masse légèrement supérieure à *L* d'eau, soit un peu plus de 1 *kg* puisque la masse volumique de l'eau est 1 *kg/L*).

Les élèves doivent également être en mesure de se représenter mentalement, ou sinon de dessiner à main levée, donc de façon très schématique, des objets de la vie quotidienne, l'intérêt étant pour eux de percevoir plus facilement les relations de proportionnalité existantes entre les différentes dimensions desdits objets.

Schätzaufgabe 13 (niveau cycle 3)

Quelle est la superficie de dix places de stationnement ?

Une réponse possible. La largeur d'une voiture est supérieure à l'envergure des bras (même d'un adulte) — il suffit de s'imaginer posté devant une voiture, les bras tendus orthogonalement au corps. On estime donc la largeur d'une voiture à environ 2 *m*. Un dessin à main levée d'une voiture vue d'en haut (schématisée par un rectangle) laisse percevoir que la longueur d'une voiture est un peu plus grande que le double de la largeur, soit environ 5 *m*. La largeur d'un emplacement doit être légèrement supérieur à la largeur de la voiture, soit environ 2,5 *m*. La superficie de dix places de stationnement est donc estimée à environ $2{,}5 \times 5 \times 10 = 125\, m^2$ (calcul qu'il est possible de mener mentalement).

[6] L'intelligence et la perception ne sont pas innées : elles relèvent toutes les deux d'une construction active (*cf.* partie 3.1.). Il ne faut cependant pas entendre qu'elles sont en relation ; en effet, d'après (Piaget, 1957, p. 377), *« l'intelligence se développe en se libérant progressivement de la perception »*.

Schätzaufgabe 14 (niveau cycle 3)

À quelle hauteur est le siège de la chaise géante ? Quelle est la hauteur de la table géante ?

Une réponse possible. Les deux dames de la photographie sont adultes. Pour estimer leur taille, différentes stratégies sont possibles. Certains élèves peuvent avoir mémorisé la taille de leurs mamans, le professeur peut également avoir abordé en classe l'évolution de la taille de la naissance à l'âge adulte, ou encore avoir au préalable proposé aux élèves de comparer leurs propres tailles avec celle d'une adulte intervenant dans la classe.

Les deux dames de la photographie sont ainsi supposées avoir une taille d'environ 165 *cm*. Il faut ensuite ajouter quelques centimètres correspondant à la hauteur des talons des chaussures. On retiendra ainsi l'arrondi 170 *cm*. Visuellement, il apparaît que le siège de la chaise arrive à mi-hauteur de la dame en arrière-plan. Il peut donc être considéré à une hauteur estimée à un peu plus de 85 *cm*. La table arrive au milieu du visage de la dame qui est en premier plan. Sa hauteur peut ainsi être estimée à environ $170-20=150\,cm$.

Cette section a montré que l'estimation mobilise des compétences cognitives qui ne sont pas innées et qui nécessitent d'être travaillées en classe. La question de la mise en œuvre des *Schätzaufgaben* se pose désormais.

5. Quelques réflexions pour la mise en œuvre

5.1. Choisir des énoncés convaincants

Les *Schätzaufgaben* prennent d'autant plus de sens chez les élèves s'il est impossible d'y répondre par le mesurage ou par recours à la Toile. C'est pour cela qu'il peut être intéressant de discuter avec les élèves de la pertinence du recours à l'estimation. L'exercice suivant est en ce sens intéressant, le recours (direct) au mesurage étant impossible.

Schätzaufgabe 15 (niveau cycle 3) (Cech-Wenning, 2022, carte n° 40)

Quelle est la taille de cet homme ?

Une réponse possible. Dans les logements récents, la hauteur sous plafond standard est de 2,5 *m* (valeur supposée mémorisée). On ne voit que les deux tiers (environ) du personnage (il suffit d'imaginer mentalement le reste du corps ou de percevoir les proportions du corps humain en regardant un camarade). L'homme de l'image mesure donc environ $2{,}5+1{,}2=3{,}7\,m$.

5.2. Développer les techniques du calcul avec des arrondis

La résolution de *Schätzaufgaben* s'appuie sur la manipulation de valeurs approchées de mesures généralement obtenues par la perception, par la connaissance sémantique ou par la mémoire épisodique (vécu/expérience). Pour cette raison, le recours aux valeurs arrondies est privilégié, d'abord parce que les valeurs arrondies sont plus faciles à mémoriser, ensuite parce qu'elles simplifient les calculs, et enfin parce que les contextes des énoncés peuvent exiger l'utilisation d'ordres de grandeur. Pour illustrer l'intérêt de ce type de calcul, Van den Heuvel-Panhuizen (2001, p. 174) donne l'exemple de l'estimation de la consommation personnelle hebdomadaire de carburant, pour lequel un calcul précis n'aurait pas de sens, chaque semaine comptant ses imprévus. L'exercice suivant offre un nouvel exemple :

Schätzaufgabe 16 (niveau cycle 3) (Böttner e*t al.*, 2010, p. 133)

Quelle est la masse totale approximative des trois pêcheurs ?

Une réponse possible. Les masses de deux petits personnages ne relèvent pas du même ordre de grandeur (moins de 100 *kg*) que la masse de l'éléphant : elles apparaissent donc comme des quantités négligeables et peuvent être arrondies à 0 *kg*. La masse totale des trois pêcheurs est donc approximativement égale à la masse de l'éléphant qui peut être estimée à 3 *t* (ça ne semble pas être un très gros éléphant, ses oreilles semblent d'ailleurs courtes comme celles des éléphants d'Asie).

5.3. Apprendre aux élèves à argumenter

Lors du traitement d'un *Schätzaufgabe*, les élèves doivent justifier leurs résultats : ils sont en effet conduits à expliquer leurs choix en termes de stratégie, d'hypothèses et de points d'appui (PIKAS, 2010, p. 5). L'objectif pour eux est d'être suffisamment persuasifs pour obtenir l'adhésion de leurs camarades, et pour cela, de trouver des arguments suffisamment convaincants. L'argumentation vise en effet à convaincre un public cible de la validité d'un propos en faisant appel à sa raison et en s'appuyant sur des énoncés qui ne peuvent être mis en doute. Si, autant pour argumenter que pour raisonner, il est utile d'avancer des énoncés-tiers, les objectifs sous-jacents ne sont cependant pas les mêmes.

> *L'argumentation est ce mode de raisonnement qui est intrinsèquement lié à l'utilisation de la langue naturelle. À ce titre, elle apparaît être le mode naturel du raisonnement. Elle est, en effet, spontanément mise en œuvre dans toutes les situations où un avis, une affirmation, une opinion, un choix peuvent être mis en doute et requièrent une justification, cela aussi bien dans les situations de discussion réelle avec des interlocuteurs que dans des situations d'interrogation ou de recherche en dehors de toute discussion réelle avec quelqu'un. En outre son fonctionnement est congruent à celui de la pratique spontanée du discours* (Duval, 1992-1993, p. 59).

En résumé, la pratique des estimations exige des compétences d'argumentation (Pies-Hötzinger & Waasmaier, 2020, p. 5), celles-ci se présentant comme des compétences spécifiques dont le développement *« n'ouvre pas une voie vers le raisonnement »* (Duval, 1992-1993, p. 60), mais qui ont toute leur place dans l'enseignement des mathématiques et intéressent aussi l'enseignement du français (*ibid.*).

5.4. Accepter de prendre du temps

L'apprentissage des estimations est exigeant en temps, d'abord parce que le *« développement des capacités d'argumentation est didactiquement plus complexe et plus long que l'apprentissage de ce qu'est une démonstration »* (*ibid.*), ensuite parce que les aptitudes à percevoir se construisent par l'expérience, et enfin parce que le recours à un répertoire de mesures de référence n'est possible que si celui-ci est suffisamment riche — les textes officiels MEN (2016, p. 6) précisent d'ailleurs à ce propos qu'il est important de *« continuer de faire vivre au cycle 3 le répertoire établi au cycle 2, tout en l'enrichissant de nouvelles valeurs de référence »*, confirmant ainsi la nécessité de persévérer d'une année sur l'autre. Les enseignants allemands expriment clairement cette impression partagée que la pratique des estimations *« prend trop de temps »* (Pies-Hötzinger & Waasmaier, 2020, p. 5). Il existe cependant une différence essentielle entre les professeurs des écoles français et leurs collègues allemands : les premiers sont polyvalents, alors que les seconds sont bivalents. S'il est important de relever ce point, c'est parce que la polyvalence des professeurs français offre à ces derniers davantage d'opportunités de conduite d'activités visant l'enrichissement du répertoire de valeurs de référence de leurs élèves. Cette diversité de possibilités évite de reporter tout le temps consacré aux estimations sur les heures dévolues aux mathématiques.

5.5. Privilégier le travail en groupe

Même si la pratique des estimations est préconisée par les programmes scolaires de cycle 2 et 3, les *Schätzaufgaben* ne sont pas des activités habituelles de la classe et peuvent décontenancer les élèves confrontés à des énoncés qui semblent ne permettre aucune saisie numérique. L'erreur serait de laisser croire que les *Schätzaufgaben* sont une sorte de jeu de loterie. La littérature germanophone le répète inlassablement : *« Schätzen ist jedenfalls kein blindes Raten »* / « Estimer ne signifie en aucun cas deviner à l'aveuglette », les *Schätzaufgaben* exigeant la construction d'une collection de représentants suffisamment riche. Comme les élèves développent des expériences de vie et mémorisent des éléments de comparaison qui, au moins pour une part, leur sont propres, la mutualisation des richesses individuelles par le biais d'un travail en groupe présente une véritable plus-value. Déjà pour cette raison, les *Schätzaufgaben* offrent des opportunités pour la conduite en classe d'activités de coopération — comme le précise par exemple le site allemand *KIRA*[7]. L'animation de la classe par groupe peut être autrement motivée. Si certains élèves identifiés comme « bons » en mathématiques (cas de l'écolière Abelle) peuvent être gênés par ce type d'activités, d'autres en revanche, parce qu'ils sont dotés d'un sens pratique des choses, pourront au contraire se révéler : les *Schätzaufgaben* font en effet émerger des talents moins scolaires, et donc moins visibles dans l'environnement-classe. Un travail par groupe hétérogène peut en effet s'avérer très efficace en termes de valorisation d'élèves à profils/talents particuliers. Ensuite, il ne faut pas oublier que la pratique des *Schätzaufgaben* s'appuie sur l'aptitude des élèves à convaincre leurs camarades. Les échanges au sein de petits groupes sont donc des occasions de confronter les points de vue, d'affûter les arguments et de développer des stratégies de comparaison. Pour cela, différentes animations sont possibles. Par exemple, le professeur propose à chaque groupe un *Schätzaufgabe* différent ; une fois que les élèves ont élaboré une estimation consensuelle, un ambassadeur peut présenter les arguments de son groupe devant la classe entière — et si aucun consensus n'a pu

[7] *KIRA* — KInder Rechnen Anders (Chaque enfant apprend autrement) — est le nom d'une plateforme gérée par l'Institut Leibniz, soit l'un des principaux instituts scientifiques dans le domaine de la pédagogie et de la didactique des sciences naturelles et des mathématiques en Allemagne.
https://kira.dzlm.de/ [en allemand, consulté le 01/03/24].

être trouvé, l'ambassadeur peut expliquer la nature des difficultés. La parole est ensuite donnée au reste de la classe qui est invitée à dire si elle a été convaincue, voire à avancer de nouveaux arguments ou contre-arguments. Une variante peut être utilisée : le professeur propose à chaque élève d'apporter la photographie de son animal de compagnie qu'il aura au préalable pesé et/ou mesuré. La suite est globalement conduite de la même façon : rassemblés par petits groupes, les élèves estiment la masse, la longueur ou la hauteur de l'animal de compagnie présenté par leur camarade. Après avoir échangé leurs arguments (*je me souviens*, *j'ai le même à la maison*, *j'ai lu*, …), ils essaient de trouver une estimation qui fait consensus. Le propriétaire de l'animal annonce ensuite la mesure obtenue instrumentalement à la maison. Dans tout ceci, nous comprenons que la question de la validation des réponses des élèves est centrale, ce que la section suivante propose de développer.

5.6. Savoir valider/invalider les estimations des élèves

L'évaluation des productions des élèves doit porter sur la stratégie adoptée, mais aussi sur le résultat obtenu (la valeur estimée). Or la validation/invalidation de ce résultat dépend du contexte de l'énoncé : pour certains exercices, une estimation grossière est suffisante, et pour d'autres, une approximation plus fine est attendue. Parfois, il n'est pas possible pour l'enseignant d'apprécier la valeur estimée, en particulier pour les énoncés dont les contextes requièrent des connaissances spécifiques ou dont les processus de résolution échappent à l'observation. C'est ainsi que :

- Pour Heid (2017, p. 36), il n'existe pas de critères généraux d'évaluation des *Schätzaufgaben* ;
- Pour Hope (1989, pp. 12-16), la validation des estimations doit constituer un chapitre important de la formation des enseignants ;
- Pour Franke et Ruwisch (2010, p. 250), il s'agit d'apprécier si les résultats obtenus sont *« sensés, exploitables, suffisants ou raisonnables plutôt que vrais ou faux »*.

Dans le cas où l'enseignant dispose d'une valeur considérée comme *réelle* (valeur jugée suffisamment précise), il est possible de calculer l'erreur relative de la réponse d'un élève par rapport à la valeur réelle. Par exemple, le chat de la *Schätzaufgabe* 2 a été estimé à 5 *kg*, alors que sa masse est en réalité de 5,4 *kg* d'après la balance. L'erreur d'estimation est donc $\frac{100\times(5{,}4-5)}{5{,}4}\approx 7\,\%$. Si la masse du même animal avait été estimée à 10 *kg*, l'erreur d'estimation aurait été $\frac{100\times(10-5{,}4)}{5{,}4}\approx 85\,\%$. Certains auteurs se sont attachés, en fonction de l'âge des enfants et de la grandeur considérée, à majorer l'erreur relative, autrement dit à fixer un intervalle dans lequel les réponses des élèves peuvent être considérées par l'enseignant comme des estimations acceptables. Il est cependant important de noter qu'il n'y a pas uniformité entre les différentes études scientifiques. *A minima*, pour une grandeur donnée, les erreurs relatives offriront aux enseignants un indicateur permettant l'observation des progrès des élèves.

Ensuite, il est possible de noter que les énoncés des *Schätzaufgaben* ne précisent pas les raisons pour lesquelles les estimations sont faites. L'enseignant français peut cependant choisir de contextualiser davantage les estimations, afin de renforcer la dimension utilitaire des estimations dans la vie quotidienne. Par exemple, s'il s'agit de construire un abri pour la girafe de la photographie de la *Schätzaufgabe* 8, dont la hauteur avait été estimée à 6 *m*, l'élève pourra décider d'opter pour un bâtiment d'une hauteur de 7 *m*, l'idée étant de ne pas abuser des majorations afin de contrôler les coûts de construction. S'il s'agit en revanche d'installer une mangeoire, on peut convenir de placer ladite mangeoire à une hauteur de 5 *m*, une girafe pouvant lever la tête comme la baisser en fonction de sa taille réelle.

S'il s'agit d'acheter de la peinture pour les dix places de stationnement (estimées à $125\,m^2$) de la *Schätzaufgabe* 13, afin de transformer celles-ci en des emplacements réservés, tout dépendra naturellement de la taille des pots vendus en commerce, mais si chaque pot est supposé couvrir $10\,m^2$, il est possible de décider d'en acheter 13, voire un 14e, en préférant se limiter à cette quantité pour ne pas en acheter inutilement alors qu'il est toujours possible de revenir en boutique.

S'il s'agit de proposer aux trois pêcheurs de la *Schätzaufgabe* 16, dont la masse totale a été estimée à environ 3 *t*, de passer sur un pont dont la charge maximale affichée est justement 3 *t*, l'élève pourra décider d'autoriser la traversée, une marge de sécurité étant toujours prévue lors de la conception d'un pont afin, justement, de tenir compte des surcharges temporaires, mais aussi de parer aux problèmes liés aux estimations trop grossières.

Dans tous les cas, cette nécessité de prendre en compte le contexte de l'énoncé est rappelée par Heid (2017, p. 42), qui propose au final de se concentrer d'abord sur la stratégie adoptée par l'élève (ou par le groupe d'élèves). L'autrice conclut : *« La pratique des estimations devrait en outre être utilisée pour faire accepter aux élèves la diversité des réponses possibles »* (*ibid.*).

Conclusion

Cet article proposait de porter un regard sur la pratique dans les écoles élémentaires allemandes des estimations des mesures des grandeurs physiques, pour une mise en perspective dans le contexte français qui tient à la fois compte des instructions officielles et des observations relevées par Sirieix (2023). Cette dernière littérature mentionne notamment qu'en France, l'enseignement des estimations de la mesure est insuffisant, que les écoliers disposent de peu d'éléments de référence et que les exercices portant sur ces questions sont peu présents dans les manuels scolaires.

Concernant le premier constat, il est utile de rappeler que l'apprentissage des estimations ne peut être pensé dans la ponctualité. Le professeur des écoles gagne au contraire à développer chez ses élèves une sorte de réflexe à appréhender les « choses » environnantes par leurs mesures (dans la classe, dans l'école, lors des sorties, …), en s'interrogeant d'abord, puis en mettant en œuvre des stratégies d'estimation par le biais de comparaisons mentales, processus qui peuvent être suivis de mesurages. Cette nécessité d'apprentissage au quotidien peut également se concrétiser dans le cadre d'activités ritualisées : le professeur a la possibilité, un jour donné de la semaine, de projeter l'image d'un objet dont la mesure d'une grandeur est à estimer. Ces activités ne doivent naturellement pas se substituer aux travaux de coopération par petits groupes, qui faciliteront entre autres le développement des compétences de communication orale et notamment d'argumentation.

Concernant le second constat relatif à la pauvreté du répertoire de référents des élèves, il est rappelé que les ressources écrites (documentations, notices, affiches, textes littéraires, …) étudiées dans l'enceinte de l'école ou dans la classe en plein air, en séance de mathématiques ou dans une autre discipline, se présentent comme des occasions d'enrichissement dudit répertoire, dès lors que lesdites ressources contiennent des données numériques. Les *Schäzaufgaben* s'imposant, au moins au début de l'apprentissage, comme des activités inhabituelles et parfois déroutantes, il est important de ne pas placer les élèves en situation de difficultés, mais au contraire de leur faire vivre des situations de réussite. Par exemple, l'exercice portant sur la masse des trois pêcheurs (*Schätzaufgabe* 18) est contre-productif si les élèves ne se sont pas au préalable constitué une collection de représentants parmi les gros animaux comptant idéalement l'éléphant, et sinon d'autres animaux comme l'hippopotame ou le rhinocéros, ceux-ci pouvant être comparés à un éléphant de taille modeste comme une éléphante d'Asie. Il est donc essentiel de choisir des exercices dont la résolution peut s'appuyer sur des référents qui font écho à des expériences de vie ou à des connaissances mémorisées par les élèves. L'idée est donc de choisir une thématique susceptible de susciter l'intérêt de la classe, de développer un répertoire de représentants autour de cette thématique, et ensuite d'opter pour des exercices mobilisant ce répertoire.

En réponse au troisième constat relatif aux manuels scolaires et à la faible offre d'activités portant sur l'estimation, un professeur des écoles a toujours la possibilité de concevoir lui-même des *Schätzaufgaben* qui seront adaptés aux connaissances de ses propres élèves — il suffit pour cela de télécharger ou de prendre des clichés d'objets ou d'animaux *environnés*, c'est-à-dire photographiés dans un environnement qui permet des comparaisons. Le champ des possibilités devient alors immense même si certaines thématiques apparaissent comme des incontournables. Au fil des semaines, la panoplie des stratégies d'estimation ne peut que s'élargir, les élèves ayant la possibilité de recourir à des représentants issus de collections de plus en plus différentes, que ces dernières aient été constituées récemment ou plus anciennement.

Bien entendu, tout ceci exige une certaine coordination entre les enseignants des cycles 2 et 3, afin que la collection de représentants construite en cycle 2 puisse être réinvestie et enrichie en cycle 3. Lorsque tous ces efforts sont faits, les *Schätzaufgaben* qui, au premier abord, semblaient apparaître comme des jeux de hasard, finissent par s'imposer comme de vraies activités mathématiques, effectuées avec de plus en plus de dextérité et en un temps de plus en plus court. Par ailleurs, ces problèmes d'estimation présentent un véritable intérêt pour la compréhension de la notion de grandeur et la construction du rapport de soi au réel car, si le concept de grandeur s'est développé dans l'histoire de l'humanité selon un processus d'abstraction (Franke & Ruwisch, 2010, p. 178), il est au final relié à des objets réels tels que ces derniers s'offrent à nous dans la vie de tous les jours. C'est d'ailleurs pour cette dernière raison que les estimations revêtent un véritable sens, tant il est important pour quiconque d'appréhender les choses qui composent l'environnement dans lequel il évolue au quotidien.

Références bibliographiques

Böttner, J., Hantschel, K., Maroska, R., Müller, V., Olpp, A., Pongs, R., Stöckle, C., Wellstein, H. & Wontroba, H. (2010). *Schnittpunkt, Mathematik - Orientierungsstufe, 5. Klasse*. Stuttgart : Ernst Klett.

Brand, K., Hitzel, T. & Zacher, K. (2014). *Matherad Arbeitsbuch 4*. Klasse. Stuttgart : Verlag für pädagogische medien.

Brousseau, G. (2002). Les grandeurs dans la scolarité obligatoire. *Actes de la XIe École d'été de didactique des mathématiques*. Grenoble : La pensée sauvage.

http://guy-brousseau.com/wp-content/uploads/2012/07/2001-Grandeurs139-p.pdf

Buffet, T. (2020). La rétine, premier centre d'intégration des informations visuelles. *Planet Vie, Ressources en sciences de la vie pour les enseignants et enseignantes*.

https://planet-vie.ens.fr/thematiques/animaux/systeme-nerveux-et-systeme-hormonal/la-retine-premier-centre-d-integration-des [consulté le 01/03/2024].

Cabassut, R. (2007). Exemples de modélisation à l'école primaire allemande : quels enjeux pour la formation des maîtres ? *Actes du XXIV^e^ colloque Copirelem*. Bouc bel Air : ARPEME.

Cech-Wenning, S. (2022). *Die Fermi Kartei - Offene Aufgaben in 3 Schwierigkeitsstufen mit Lösungshilfen Klasse 1-3*. Staßfurt : Verlag an der Ruhr.

Duval, R. (1992-1993). Argumenter, démontrer, expliquer : continuité ou rupture cognitive ? *Petit x, 31*, 37-61.

Franke, M. & Ruwisch, S. (2010). Größen und Messen. *Didaktik des Sachrechnens in der Grundschule. Mathematik Primarstufe und Sekundarstufe I + II, vol. 0* (pp. 177-259). Heidelberg : Spektrum Akademischer Verlag.

Griesel, H., Postel, H., Suhr, F., Ladenthin, W. & Lösche, M. (2021). *Elemente der Mathematik (EdM), 5. Klasse*. Rheinland-Pfalz : Westermann.

Hatwell, Y. (1994). *Traité de psychologie expérimentale*. Paris : P.U.F.

Heid, L.-M. (2017). *Das Schätzen von Längen und Fassungsvermögen. Perspektiven der Mathematikdidatik*. Wiesbaden : Spektrum.

Hope, J. (1989). Promoting Number Sense in School. *Arithmetic Teacher, 36*(6), 12-16.

Laval, V. (2019). L'approche constructiviste et structuraliste de la théorie de Jean Piaget. *La psychologie du développement*, 206-209.

Loarer, E. (1998). L'éducation cognitive : modèles et méthodes pour apprendre à penser. *Revue française de pédagogie, 122*, 121-161.

Munier, V. & Passelaigue, D. (2012). Réflexions sur l'articulation entre didactique et épistémologie dans le domaine des grandeurs et mesures dans l'enseignement primaire et secondaire. *Tréma, 38*, 106-147.

Naccache, L. & Naccache, K. (2018). *Parlez-vous cerveau ?* Paris : Odile Jacob.

Piaget, J. (1957). Les relations entre la perception et l'intelligence dans le développement de l'enfant. *Bulletin de psychologie, tome 10 n°7*, 376-381.

Pies-Hötzinger, A. & Waasmaier, S. (2020). Zum Thema. Schätz doch mal!. *Grundschule Mathematik - Fachzeitschrift im Abo, 52*, 4-5. Hannover : Friedrich Verlag.

PIKAS (2010). Größen und Messen - Stützpunktvorstellungen aufbauen.
https://pikas.dzlm.de/pikasfiles/uploads/upload/Material/Haus_7_-_Gute_-_Aufgaben/IM/Informationstexte/H7_IM_Fermi-Aufgaben.pdf (consulté le 01/03/24).

Reuter, D. & Schuler, S. (2023). *Vergleichen, Messen, Schätzen - Größen im Mathematikunterricht. Lernstandserhebungen und Unterrichtsmodule für die Grundschule*. Seelze : Klett Kallmeyer.

Ruwisch, S. (2021). Stützpunkte kennen, vorstellen und nutzen. *Grundschule Mathematik, 69*, 2-3.

Sirieix, P. (2023). Où en sont les élèves sur l'estimation de la mesure de longueurs ? *Grand N, 111*, 85-122.

Van den Heuvel-Panhuizen, M. (2001). *Children learn Mathematics. A learning-teaching trajectory with intermediate attainment targets for calculation with whole numbers in primary school*. Utrecht : Freudenthal Institut.

Winter, H. (2003). *Sachrechnen in der Grundschule. Problematik des Sachrechnens. Funktionen des Sachrechnens. Unterrichtsprojekte. 6. Auflage*. Frankfurt am Main : Cornelsen Verlag Scriptor.

MEN (2002). *Documents d'accompagnement des programmes de 2002, Grandeurs et mesures à l'école élémentaire*. Éduscol.

MEN (2008). *Horaires et programmes d'enseignement de l'école primaire. B.O. n°3 hors-série du 18 juin 2008*. Scéren CNDP.

MEN (2016). *Grandeurs et mesures au cycle 2*. Éduscol.

MEN (2023a). *Programme de cycle 2 en vigueur à la rentrée 2023*. Éduscol.

MEN (2023b). *Programme de cycle 3 en vigueur à la rentrée 2023*. Éduscol.