SOLUTIONS DE L'ACTIVITÉ DU N° 110-111
LE PROBLÈME DES 100 VOLATILES

Mahdi ABDELJAOUAD[1]
Université de Tunis

Résumé. Dans le numéro précédent de *Petit x*, nous avions proposé six énoncés de « problèmes des 100 volatiles » choisis dans des ouvrages d'auteurs arabes anciens ; dans ce texte, nous présentons leur correction, après avoir tracé l'historique du traitement de ce type de problèmes dans les mathématiques arabes. Nous avons soumis ces problèmes à des enseignants en formation, afin de tester leur compréhension de la tâche proposée, et leur avis sur une possible transposition de ces problèmes dans des activités destinées à des élèves.

Mots-clés. Histoire des mathématiques arabes, problèmes d'algèbre à plusieurs variables, 100 volatiles.

Abstract. In the precedent issue of *Petit x*, we proposed six examples of "problems of the hundred fowls" that have been found in very ancient Arabic books. In this text, we present their solution, after having drawn the history of how these problems have been solved in Arabic mathematics. We have proposed these problems to teachers in training, in order to test their understanding of the tasks and to get their opinion about a possible transposition of this kind of problems in activities for students.

Keywords. History of Arabic mathematics, algebra problems with numerous variables, 100 fowls.

Introduction

Connu déjà chez les Chinois et les Indiens[2], le problème des 100 volatiles a été exposé pour la première fois en langue arabe par Abû Kâmil (X^{e} siècle) comme le type de problèmes qu'on peut résoudre par l'algèbre ; la plupart de ses successeurs ont repris un ou plusieurs de ses problèmes ou en ont imaginé d'autres pour illustrer la méthode algébrique comme outil de résolution. On trouve également ce type de problèmes dans des ouvrages traitant de transactions s'adressant à un public d'administrateurs, de juristes spécialistes des problèmes d'héritages et d'artisans, public mieux formé pour manipuler les proportions et moins familier de l'algèbre ; on découvre alors chez eux des techniques diverses décrites sur des exemples particuliers difficilement généralisables et ne comportant pas de justification.

En termes modernes, il s'agit, pour chaque problème, de résoudre un système de deux équations linéaires à plusieurs inconnues, les solutions étant entières :

$$\begin{cases} v_1 x_1 + \ldots + v_u x_u = v \\ x_1 + \ldots + x_u = n \end{cases}$$

Les nombres $v_1, \ldots, v_j, \ldots, v_u$ représentent des prix unitaires de chaque espèce, ce sont des nombres entiers ou des fractions positives et v la valeur totale des volatiles achetés. Les inconnues $x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_u$ sont des nombres entiers positifs, représentent le nombre de volatiles de chaque espèce et sont disposées de manière que $x_1 < \ldots < x_j < \ldots < x_u$. le nombre n est le nombre total des volatiles achetés.

---

[1] mahdi.abdeljaouad@gmail.com

[2] Caianiello (2018) décrit les techniques utilisées par Zhang Quijian au milieu du V^{e} siècle et par Mahavira au VII^{e} siècle.

Ce type de système peut avoir une ou plusieurs solutions et, également, n'en avoir aucune. Prouver l'existence d'au moins une solution constitue souvent une étape dans la résolution, mais trouver toutes les solutions est une seconde étape nécessitant l'usage de techniques différentes ; et montrer que les solutions obtenues englobent toutes les solutions demande des efforts supplémentaires. Nous allons montrer que les mathématiciens, comme Abû Kâmil, se sont préoccupés de franchir toutes les étapes, alors que la plupart des auteurs se sont contentés de la première étape, souvent en empruntant la solution algébrique d'Abû Kâmil ou en exposant une procédure arithmétique menant à une solution, souvent bricolée et sans justification ni explication.

Dans le tableau qui suit, nous avons regroupé chronologiquement les auteurs connus ayant proposé au moins un problème de type « 100 volatiles ».

Année	**Auteur**	**Type de volaille**	**Total**	**Coût**	u_1	u_2	u_3	u_4, u_5
m. 930	Abû Kâmil	canard, poule, moineau	100	100	5	1	1/20	
		canard, poule, pigeon	100	100	2	1/2	1/3	
		canard, poule, pigeon, moineau	100	100	4	1	1/2	1/10
		canard, poule, pigeon, alouette	100	100	2	1	1/2	1/3
		canard, poule, moineau	100	100	3	1/3	1/10	
		canard, poule, pigeon, moineau, alouette	100	100	2	1	1/2	1/3, 1/4
V. 1100	Al-Sardafi	pigeon, colombe, moineau	100	100	2	1	1/2	
XII^e s.	Ibn Badr	blé, orge, millet	100	100	4	2	1/2	
m. 1175	Al-Samaw'al	oie, poule, pigeon	100	100	2	1/2	1/3	
m. 1204	Ibn Yâsamîn	(hammam) juif, chrétien, musulman	30	30	2	1	1/4	
		oie, poule, pinson	100	100	5	5/2	1/4	
		oie, poule, pinson	100	100	5	1	1/20	
m. 1239	Ibn Fallûs	canard, poule, pigeon, moineau	100	100	4	1	1/2	1/10
m. 1321	Ibn Bannâ	oie, poule, étourneau	25	25	5	4	1/10	
		miel, huile vinaigre	45	45	4	2	3/16	
		oie, poule, étourneau	40	40	3	2	1/8	
m. 1325	Ibn Khawwâm	canard, poule, moineau	100	100	3	1	1/4	
m. 1340	Imad Al-Dîn Al-Kâshî	oie, poule, moineau	100	100	3	1	1/4	
m. 1346	Al-Hamilî	pigeon, colombe, moineau	100	100	2	1	1/2	
		oie, poule, moineau	100	100	6	1	1/10	
		oie, pigeon, canard, poule, moineau	100	100	5	4	3	1, 1/8
XIV^e s.	Ibn Dâwûd	oie, poule, pinson	100	100	5	1	1/20	

		oie, pigeon, moineau	100	100	4	1/2	1/10	
		oie, poule, pinson	100	100	2	1	1/2	
		oie, poule, pinson	100	100	3	1	1/40	
		(hammam) musulman, chrétien, juif	20	20	1/2	1	2	
		(hammam) musulman, chrétien, juif	20	20	1/2	1	4	
m. 1412	Ibn Hâ'im	poule, pigeon	7 70	7 70	2	1/4		
		oie, poule, pigeon, moineau	16 75	16 75	3	2	1/3	1/4
		oie, poule, pigeon	100	100	3	1	1/4	
		oie, poule, pigeon, alouette, moineau	85	80	3	2	1/3	1
		oie, poule, pigeon	40	4	3	2	1/8	
m. 1413	Ibn Haydûr	blé, orge	10	28	4	1		
m. 1427	Ghiyâth al-Dîn al-Kâshî	canard, poule, moineau	100	100	4	1	1/5	
		canard, poule, moineau	100	200	7/3	1	2/9	
		canard, poule, moineau	150	250	7/3	2	2/9	
		10 espèces	300	300	7/3	2	2/9	
m. 1460	Al Kushjî	oie, poule, moineau	100	100	4	1	1/5	
v. 1552	inconnu[3]	vieillard, vieille, fillette	100	100	1/2	1/4	10	
		oie, poule, moineau	100	100	5	3	1/40	
		homme, femme, enfant	12	12	2	1/2	1/4	
		bœuf, vache, veau	100	100	10	5	1/2	
m. 1555	Al Karmânî	oie, poule, moineau	100	100	3	1	1/4	

Tableau chronologique des présentations de problèmes de type « 100 volatiles ».

1. Trois méthodes de résolution du problème des 100 volatiles

Dans ce qui suit, nous détaillons trois méthodes de résolution de ce type de problèmes :

(1) la méthode algébrique d'Abû Kâmil,

(2) la méthode des couples coûteux et non coûteux d'Ibn al-Hâ'im,

(3) l'algorithme d'Al-Kâshî.

1.1. La méthode algébrique d'Abû Kâmil (850-930)

Mathématicien et ingénieur égyptien, Abû Kâmil Shoja' ibn Aslam, surnommé également Al-

[3] Signalé par Sesiano (1999, p. 83), manuscrit arabe de 1552 ; BNF n° arabe 4441.

Hâsib al-Misrî — le calculateur égyptien —, est le mathématicien qui, avec son *Kitâb al-kâmil fî l-jabr — Le livre complet d'algèbre* — est, après Al-Khwârizmî, le second mathématicien ayant le plus contribué au développement de l'algèbre, son ouvrage ayant circulé en Orient et en Occident et ayant été traduit en latin et en hébreu[4].

Moins connu aujourd'hui, son second livre, intitulé *Tarâ'if fî l-hisâb — Problèmes rares en arithmétique* — est entièrement consacré aux problèmes des 100 volatiles[5]. Dans l'introduction de ce petit ouvrage, Abû Kâmil propose les énoncés et les solutions de six problèmes de 100 volatiles. Et dès l'introduction, il commence par situer son projet et justifier sa démarche dans laquelle il montre ses qualités de mathématicien pédagogue ; puis il détaille les solutions des six problèmes proposés, montrant que certains ont une solution unique, d'autres des solutions nombreuses pouvant atteindre plusieurs milliers et que certains peuvent n'avoir aucune solution.

À l'époque d'Abû Kâmil, les problèmes de type « 100 volatiles » étaient populaires comme énigmes divertissantes et exercices aux énoncés amusants et aux solutions vérifiables. Ils circulaient dans les cercles professionnels (juristes habitués à résoudre des problèmes d'héritage, négociants échangeant différents produits ou animaux, et autres artisans). Lorsque l'un interrogeait l'autre, ils acceptaient toute solution vérifiable sans connaître le moyen utilisé pour l'obtenir. Sachant qu'il était mathématicien, certains interlocuteurs de Abû Kâmil lui proposaient des énoncés de problèmes de ce type et se satisfaisaient d'une réponse correcte, sauf le jour où, face à un problème particulier ayant des milliers de solutions, l'interrogateur jugea la réponse suspecte et même fantaisiste et accusa le mathématicien d'imposture et d'incompétence. L'incident décida Abû Kâmil à rédiger un traité sur les volatiles, comme il le raconta lui-même :

> *Je décidai alors de composer un opuscule pour ce genre de problèmes dans le but d'en faciliter la résolution et d'en rendre l'accès plus aisé. J'y indiquai la manière d'obtenir une solution lorsqu'il en existait, de préciser le cas où la solution était unique et celui où il n'en existait aucune, par des méthodes correctes et vérifiables. Jusqu'à ce que j'arrive au problème qui, comme je l'avais dit précédemment, possédait deux mille six cent soixante-seize réponses exactes, permettant ainsi de contrer les accusations et d'abandonner les doutes, confirmant mes paroles et découvrant la vérité (Rashed, 2012, p. 732).*

Dans cet ouvrage entièrement consacré à la résolution de six problèmes de volatiles, Abû Kâmil donne une caractérisation des problèmes d'oiseaux et propose de recourir aux méthodes algébriques pour les résoudre.

Dans chacun de ces problèmes, il s'agit d'acheter un certain nombre de volatiles de plusieurs espèces, connaissant le prix unitaire de chaque espèce de volatiles, le prix global de l'achat et le nombre total de volatiles achetés. La question est alors de déterminer le nombre de volatiles de chaque espèce achetée.

L'auteur assigne un nom au nombre inconnu de volatiles de chaque espèce : *shay*, *dinar*, *fals*, etc. en les ordonnant du volatile le moins cher au plus cher, puis il met en équation et se ramène à résoudre une équation linéaire à une ou plusieurs inconnues. Ces problèmes peuvent avoir une seule ou plusieurs solutions et peuvent même ne pas en avoir du tout. Abû Kâmil précise que les solutions devaient être entières, car des solutions fractionnaires impliqueraient qu'on puisse rassembler des parties d'animaux d'une même espèce pour reconstituer un animal vivant, ce qui

---

[4] Pour plus d'informations sur Abû Kâmil, voir Rashed (2012).

[5] Plusieurs manuscrits de cet ouvrage existent encore dans les bibliothèques du monde ; Ahmad Saïd Saïdan (1986) (vol. 1, pp. 67-82) est le premier à en avoir publié une copie. Rashed (2012, pp. 731-762) en propose une édition critique accompagnée d'une traduction en français.

serait absurde. Il ajoute que ce type de problèmes ne s'applique pas seulement aux volatiles, mais également à des humains (hommes, femmes, enfants), à des animaux de ferme (bœufs, vaches, veaux), à des achats d'armes diverses (épées, arcs et lances) et il faut également tenir compte d'autres contraintes introduites dans l'énoncé comme, par exemple, l'obligation d'achat d'un certain type d'oiseaux en nombre supérieur aux autres types.

Pour suivre la démarche d'Abû Kâmil pour résoudre ses problèmes, nous citons dans une colonne sa solution rhétorique (c'est-à-dire sans notations ni symboles) et en vis à vis dans l'autre colonne la solution moderne.

1.2. Solution algébrique du problème 1 posé dans *Petit x n° 110-111*

> ***Problème 1*** *: On t'a donné 100 dirhams et on t'a demandé d'acheter 100 volatiles ; des canards, des poules et des moineaux. Un canard coûte 5 dirhams, 20 moineaux coûtent 1 dirham et la poule est à 1 dirham.*

Traduction du texte de Abû Kâmil	**Solution en termes modernes**
La solution est de prendre shay canards coûtant cinq shay dirhams et d'acheter dinar moineaux coûtant un vingtième de dinar de dirhams. Il reste en dirhams cent diminué de cinq shay et d'un vingtième de dinar.	On pose x le nombre de canards, y le nombre de moineaux et z le nombre de poules. Alors, en dirhams, le lot de canards coûte $5x$, le lot de moineaux $\frac{y}{20}$ et le lot de poules : $z=100-5x-\frac{y}{20}$.
Le nombre de poules est quant à lui égal à cent diminué d'un shay et d'un dinar. Et comme chaque poule coûte un dirham, le lot de poules coûte en dirhams cent diminué d'un shay et d'un dinar.	Mais comme il y a 100 volatiles, le lot de poules est composé de $100-x-y$ volatiles, chaque poule coûtant 1 dirham. Tout le lot de poules coûte donc en dirhams : $z=100-x-y$.
Égalisons les deux valeurs du lot de poules.	Égalisons les deux valeurs :
Après simplification, on trouve quatre shay égalent dix-neuf vingtième d'un dinar. Il en résulte qu'un dinar vaut quatre shay et quatre dinars et quatre dix-neuvième d'un dinar.	$z=100-5x-\frac{y}{20}=100-x-y$ On en déduit : $4x=\frac{19y}{20}$, il en résulte que $y=\frac{80x}{19}$.
Pour que le nombre de dinar soit entier, il faut que shay soit un multiple de dix-neuf.	Pour que y soit un entier naturel, il faut que x soit un multiple de 19.
Posons shay égal dix-neuf, alors un dinar égale quatre-vingt, et il n'y a qu'une seule poule.	Posons $x=19$, alors $y=80$ et $z=1$.
Mais, on aurait pu prendre un autre entier multiple de dix-neuf, comme par exemple trente-huit, alors dinar serait égal à cent soixante, bien au-delà des cents volatiles. Ce problème ne possède donc qu'une seule solution.	Pour $x=38$, on a $y=160$. C'est à rejeter car $y\leqslant 100$; la solution est donc unique.

Solutions comparées du problème 1.

L'auteur se contente de faire une analyse des deux solutions du problème sans terminer par une synthèse, car il semble la considérer comme évidente.

En étudiant les techniques utilisées par les auteurs arabes, nous avons noté que la plupart s'inspiraient directement ou indirectement de la méthode algébrique proposée par Abû Kâmil au Xe siècle. Cette méthode ne diffère pas beaucoup de celle utilisée aujourd'hui, sauf qu'au Moyen Âge, les mathématiciens n'utilisaient pas de symboles, ni de notations. Parmi ses successeurs, certains, traitant essentiellement de *mu'âmalât* — transactions — et s'adressant à des publics plus diversifiés, comme les juristes spécialisés dans les problèmes d'héritages, les scribes, les comptables ou les commerçants, et ne voulant pas avoir recours à l'algèbre, ont tenté de mettre au point des procédures arithmétiques simples et pratiques sans aucune justification autre que la validité des solutions trouvées, mais tous prenant leur fondement dans le chapitre des proportions. Comme premier exemple, citons Ibn al-Yâsamîn.

1.3. Solution non algébrique au même problème proposée par Ibn al-Yâsamîn (m. 1204)

Pour le premier problème de Abû Kâmil, le mathématicien Ibn al-Yâsamîn, enseignant tantôt à Séville et tantôt à Marrakech, propose une solution arithmétique empirique :

> *La solution consiste à soustraire 1 dirham du prix de l'oie, tu obtiens 4 que tu multiplies par le nombre de moineaux, c'est-à-dire 20. Ils valent donc 80 dirhams. Ensuite tu soustrais 1 du nombre de moineaux, il reste 19, C'est le nombre d'oies. Elles valent 95 dirhams. Il en résulte que le nombre de poules est 1.*

Cet algorithme numérique est donné sans aucune justification. Nous verrons par la suite que cette solution est généralisée par Ibn al-Hâ'im, puis indépendamment par Al-Kâshî, ce qui montre que cette technique devait circuler chez les mathématiciens.

1.4. Solution algébrique du problème 2 posé dans *Petit x n° 110-111*

Dans *Al-Bâhir fi l-jabr — Livre flamboyant en algèbre* —, As-Samaw'al al-Maghribî (m. 1175) emprunte explicitement le deuxième problème d'Abû Kâmil.

> *Exemple de ce qui possède de nombreuses solutions en nombre fini : [**Problème 2** :] Nous voulons acheter pour cent dirhams cent volatiles de trois espèces — canards, pigeons et poules. Chaque canard pour deux dirhams, trois pigeons pour un dirham et deux poules pour un dirham.*

Avant de présenter la solution, relisons la manière utilisée par As-Samaw'al pour justifier le recours au cadre algébrique :

> *Ce qu'on recherche dans ce problème est diviser cent en trois parties deux fois, de telle sorte que le rapport de la première partie de la première division à la première partie de la seconde division soit égal au rapport de deux à un ; que le rapport de la deuxième partie de la première division à la deuxième partie de la seconde division soit égal au rapport de un à trois ; que le rapport de la troisième partie de la première division à la troisième partie de la seconde division soit égal au rapport de un à deux ; et que les parties de la seconde division soient entières, sans fraction (Rashed, 2012, p. 764).*

Cette manière de situer le problème est intéressante, car elle le place dans le cadre du langage des proportions : décomposer deux nombres donnés suivant trois rapports donnés.

Cependant, As-Samaw'al n'a pas poursuivi dans cette voie et a préféré la solution algébrique (As-Samaw'al, 1978 ; Rashed, 2012, pp. 764-767).

La solution est de poser x le nombre de canards, y le nombre de pigeons et z le nombre de poules. On ramène le problème à la résolution du système suivant :

$$\begin{cases} 2x+\frac{y}{2}+\frac{z}{3}=100 \\ x+y+z=100 \end{cases}$$; où x, y et z sont des entiers naturels.

Après substitution de $x=100-y-z$ dans la première équation, on trouve : $y=60-\frac{9}{10}z$.

Puisque z est le nombre de poules et qu'il doit être entier, le nombre de poules est un multiple (non nul) de 10. D'où le nombre y de pigeons est 51 et celui des canards est $x=39$.

C'est maintenant que la multiplicité des solutions va apparaître ; il suffit de considérer successivement les multiples entiers de dix, le nombre minimal de poules, les soustraire de 60 pour obtenir le nombre de pigeons et en déduire le nombre de canards. Résumons les résultats dans un tableau :

Poules : z	Pigeons : y	Canards : x
10	51	39
20	42	38
30	33	37
40	24	36
50	15	35
60	6	34

Multiplicité des solutions.

Ce problème possède donc 6 solutions.

1.5. Solution algébrique du problème 3 posé dans *Petit x n° 110-111*

> ***Problème 3** : Une personne donne à un de ses ghulam [boys] 100 dirhams et lui dit distribue-les à cent indigents : des vieillards, des vieilles et des fillettes. Donne à chaque vieillard un demi-dirham, à chaque vieille un quart de dirham et à chaque fillette dix dirhams (Auteur inconnu, XVI^e^ siècle).*

Dans le manuscrit actuellement disponible, l'auteur inconnu propose explicitement une solution algébrique, mais le document a été détérioré et la solution est illisible. La solution unique de ce problème est clairement proposée : 66 vieillards, 28 vieilles et 6 fillettes.

La méthode des couples coûteux - non coûteux

Au XIV[e] siècle, quelques auteurs proposent des problèmes des 100 volatiles en les situant explicitement dans le cadre des problèmes des *« quatre quantités proportionnelles »* et faisant intervenir les quadruplets (quantité 1, coût 1, quantité 2, coût 2), les deux premiers paramètres correspondant au volatile dit coûteux (*ghâlî*) et les deux seconds au volatile non coûteux (*rakhîs*).

Parmi ces auteurs, le mathématicien yéménite Abû Bakr al-Hâmilî (m. 1367) tente d'expliciter cette méthode dans *Kitâb ma'ûnat at-tâlib fî 'ilm l-hisâb — Livre sur l'aide à l'étudiant en science du calcul —*[6]. Il commence par proposer un problème d'achat de trois espèces de

[6] Le traité d'Al-Hâmilî est un commentaire sur le traité d'arithmétique d'un de ses prédécesseurs, également établi

volatiles, spécifiant que l'une est coûteuse, l'autre non coûteuse et la troisième valant 1 dirham à l'unité. C'est un exemple générique dans lequel les valeurs précises des volatiles ne sont pas données. Il commence par énoncer une règle (asl) qu'il dit valable dans tous les cas et généralisable. Relisons-le :

> *Règle pour les problèmes de volatiles et pour les problèmes semblables.*
>
> *Tu soustrais toujours 1 du nombre de volatiles non coûteux ; ce qui reste est le nombre de volatiles coûteux. Puis, tu soustrais toujours 1 de la valeur du [volatile] coûteux et ce qui reste est la valeur en dirhams des volatiles non coûteux. Tu achètes avec [les dirhams] qui te restent autant en nombres de volatiles coûtant 1 dirham.*

Comme application, Al-Hâmilî donne la solution d'un problème posé par son prédécesseur As-Sardafi. Nous ne détaillerons pas sa solution car elle contient plusieurs non dits que nous retrouvons explicités chez Ibn al-Hâ'im.

1.6. La méthode des couples coûteux - non coûteux explicitée

Dans *Al-Ma'ûna fî 'ilm al-ḥisâb al-hawâ'î* — *L'aide en science du calcul aérien* —, Ibn al-Hâ'im propose un ouvrage basé sur le calcul mental et la mémorisation, dans lequel les nombres entiers ou fractionnaires, ainsi que les opérations sur ces nombres, sont écrits en toutes lettres. L'auteur se revendique comme un disciple d'Abû l-Wafâ (m. 998) et consacre une section spécifique à la résolution des problèmes de volatiles (pp. 391-394). Son travail se distingue des auteurs que nous avons consultés par sa tentative de fournir au lecteur un algorithme suffisamment général pour résoudre un grand nombre de problèmes des volatiles.

Il commence par définir le type des problèmes de volatiles, puis il identifie trois situations :

(1) cas de deux espèces,

(2) cas d'un nombre pair d'espèces

(3) cas d'un nombre impair d'espèces.

Ensuite, il pose qu'un volatile est coûteux (*ghâlin*) si son prix unitaire est strictement supérieur à 1 et un volatile est non coûteux (*rakhîs*) si son prix unitaire est de la forme $\frac{1}{b}$ avec b un entier strictement supérieur à 1. On constate que le cas de deux espèces est primordial dans les solutions proposées par Ibn al-Hâ'im. D'ailleurs, le premier exemple qu'il propose est de ce type.

Lemme : Cas de deux espèces, une coûteuse et une non coûteuse

> *Comme exemple de deux espèces, on dit : chaque poule coûte 2 dirhams et chaque pigeon un quart de dirham. On désire avoir sept volatiles pour sept dirhams.*
>
> *Tu soustrais 1 du dénominateur du prix unitaire du volatile non coûteux. Ce qui reste est le nombre de volatiles coûteux. Puis, tu multiplies toujours le dénominateur du volatile non coûteux par le prix unitaire du volatile le plus coûteux diminué de 1. Le produit est le nombre de volatiles non coûteux.*
>
> *Ainsi, le nombre de poules est 3, celui des pigeons est 4.*

Ibn al-Hâ'im affirme que si a est le prix unitaire d'un volatile coûteux et $\frac{1}{b}$ le prix unitaire d'un volatile non coûteux, alors $b-1$ est le nombre de volatiles coûteux et $(a-1)b$ est le nombre de volatiles non coûteux.

---

au Yémen, Abû Ya'qûb As-Sardafi (mort vers 1100). Les ouvrages d'As-Sardafi et d'Al-Hâmilî sont présentés et analysés dans Rebstock (1999/2000).

Tentons d'imaginer la manière de procéder de l'auteur : On note x le nombre inconnu de volatiles coûteux, y le nombre de volatiles non coûteux, et c le nombre total de volatiles achetés. La spécificité des problèmes des 100 volatiles est que le coût total des volatiles achetés doit être également égal à c. Alors, on doit résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} ax+\frac{1}{b}y=c \\ x+y=c \end{cases}$$; où a, b, c, x et y sont des entiers naturels non nuls.

Égalisons les deux équations : $ax+\frac{1}{b}y=c=x+y$, d'où $(a-1)x=\frac{b-1}{b}y$.

Posons $x=b-1$. Il est clair que le couple $(b-1,(a-1)b)$ est une solution du système.

Dans ce lemme, l'auteur propose une procédure facile à mémoriser permettant de trouver une solution à tout problème d'oiseaux dans lequel on doit acheter seulement deux espèces, l'une coûteuse et l'autre non coûteuse. À partir de ce lemme, un grand nombre de problèmes de volatiles ont une solution, à condition que les espèces puissent être regroupées en des couples (coûteux, non coûteux). Voici ce que l'auteur recommande :

> *Dans le cas où l'on a plus de deux espèces, et si le nombre total [d'espèces de volatiles] est pair, alors tu couples chaque espèce coûteuse à une espèce non coûteuse, et tu procèdes comme précédemment.*
>
> *Mais, si le nombre total [d'espèces de volatiles] est impair, il faut que l'une des espèces ne soit ni coûteuse, ni non coûteuse, i.e. son prix unitaire est égal à 1, alors tu regroupes le reste des espèces en couples comme précédemment.*

L'exemple suivant permet d'illustrer la méthode 'Ibn al-Hâ'im.

1.7. Solution du problème 4 posé dans *Petit x n° 110-111*

> *Si le problème concerne un nombre pair d'espèces, comme lorsque l'on te dit : un canard coûte trois dirhams, une poule deux dirhams, un pigeon un tiers de dirham et un moineau un quart de dirham. On désire avoir seize volatiles pour seize dirhams.*
>
> *Tu procèdes pour chaque couple d'espèces, l'un [au prix unitaire] entier et l'autre fractionnaire, comme s'ils étaient isolés ; puis tu additionnes les résultats obtenus. Si le total correspond aux données initiales, alors les regroupements est judicieux, sinon tu changes de couples.*
>
> *Pour ce problème, tu peux regrouper les canards et les pigeons d'une part et les poules et les moineaux d'autre part. Il en résulte 2 canards, 6 pigeons, 3 poules et 4 moineaux, soit 15 volatiles ; ce qui n'est pas conforme à la demande de l'énoncé. Alors, regroupe les canards et les moineaux d'une part et les poules et les pigeons d'autre part. Tu obtiens 3 canards, 8 moineaux, 2 poules et 3 pigeons, soit 16 volatiles. C'est ce qui est demandé (pp. 391-392).*

Pour bien comprendre les calculs de l'auteur, nous les illustrons dans les deux tableaux qui suivent (qui ne sont pas dans le traité de l'auteur) :

Couples : canards-pigeons et poules-moineaux	Canards	Poules	Pigeons	Moineaux	TOTAL
Nombre de volatiles	1	1	3	4	
Prix unitaire de chaque espèce	3	2	1	1	
Différences	2	1	2	3	
Solution : Nombre de volatiles de chaque espèce	2	3	6	4	15
Valeur en dirhams de chaque espèce	6	6	2	1	15

Application de l'algorithme sur un couplage non fonctionnel
(une flèche représente un produit).

Ce couplage ne fonctionne pas ; par contre, pour les couples canards-moineaux et poules-pigeons, on obtient la solution.

Couples : canards-pigeons et poules-moineaux	Canards	Poules	Pigeons	Moineaux	TOTAL
Nombre de volatiles	1	1	3	4	
Prix unitaire de chaque espèce	3	2	1	1	
Différences	2	1	2	3	
Solution : Nombre de volatiles de chaque espèce	3	2	3	8	16
Valeur en dirhams de chaque espèce	9	4	1	2	16

Application de l'algorithme sur un couplage fonctionnel
(une flèche représente un produit).

L'auteur signale que si le total de volatiles achetés était 80 valant 80 dirhams, alors on multiplie tous les résultats de la deuxième combinaison par 5, et on obtient : 15 canards, 40 moineaux, 10 poules et 15 pigeons. Il est clair que la formalisation par Ibn al-Hâ'im de procédures antérieures, telles que celles utilisées par Ibn al-Yâsamîn, est originale, mais n'est pas universelle. Elle ne couvre pas les cas où le nombre d'espèces coûteuses n'est pas égal au nombre d'espèces non coûteuses et *a fortiori* quand il n'y en a pas. Rien n'est également dit des cas où le prix unitaire est une fraction qui n'est pas de la forme $\frac{1}{b}$ où b est un entier strictement supérieur à 1. Les cinq exemples qu'il donne ne nous éclairent pas à ce sujet. Ces situations sont par contre traitées par Al-Kâshî.

2. La procédure d'Al-Kâshî

La renommée de Ghiyâth Ad-Dîn al-Kâshî (m. 1429), le mathématicien astronome du roi Ulûgh Beg et directeur de l'observatoire de Samarkand, est suffisamment grande chez les historiens des sciences et également auprès du public scolaire ; mais ses prouesses ne se réduisent pas à ses calculs très précis en astronomie, à sa découverte des fractions décimales et à leur intégration dans le système des nombres entiers décimaux, ou aux théorèmes portant son nom que l'on enseigne dans les lycées ou à ses calculs merveilleux utilisés par les architectes pour construire les dômes des mosquées d'Iran et d'Asie. En préparant cette note sur les problèmes des 100 volatiles, nous avons découvert que son fameux manuel de mathématique : *Miftâh al-hisâb*

— *La clé de l'arithmétique* — contenait également d'autres pépites relatives à leur résolution.

Comme pour d'autres problèmes faisant intervenir les proportions, Al-Kâshî propose au moins deux solutions, l'une algébrique, devenue traditionnelle depuis Abû Kâmil, et l'autre souvent assez originale, car basée sur une méthode qu'il nomme lui-même *tarîqat al-maftûhât*. Le terme *al-maftûhât* est le pluriel du terme *maftûh* dont la racine *fa-ta-ha* se traduit par « ouvrir » ; on pourrait donc traduire *tarîqat al-maftûhât* par « la méthode des ouverts » ou « la méthode libre ». Pour Al-Kâshî, toute méthode pragmatique ne faisant pas appel à l'algèbre est une méthode « ouverte » : il y inclut explicitement la méthode des deux erreurs et l'algorithme que nous allons décrire ci-dessous.

Dans le cas des problèmes de volatiles, l'auteur donne systématiquement les solutions algébriques traditionnelles telles qu'elles figurent chez Abû Kâmil ; mais il préfère très nettement la méthode des *maftûhât* qu'il illustre explicitement par l'usage de tableaux récapitulatifs.

Deux termes si'run et mas'urun sont utilisés dans cette introduction ; le terme si'run se traduit généralement par le mot « valeur », alors que mas'urun veut dire « la quantité de pièces du lot évalué ». Al-Kâshî emploie donc ces deux termes en leur assurant un sens particulier : si l'on précise dans l'énoncé qu'un lot de *n* oiseaux coûte *p* dinars, alors mas'urun est égal à *n* et si'run est égal à *p*. Pour faciliter la traduction, et par convention, dans l'exemple précédent, on aura le couple $(nombre, valeur)=(mas\text{ ‘ }urun, si\text{ ‘ }run)$.

Avant de résoudre les deux derniers problèmes qui nous intéressent dans ce travail, nous décrirons l'algorithme d'Al-Kâshî en utilisant les notations modernes et nous montrerons qu'il couvre un très grand nombre de cas sans toutefois être universel.

2.1. L'algorithme d'Al-Kâshî en notations modernes

1. Ranger les couples de volatiles en trois familles, ceux coûteux, caractérisés par leur prix unitaire supérieur strictement à 1, ceux moyens dont le prix unitaire est égal à 1 et ceux non coûteux dont le prix unitaire est strictement inférieur à 1.
2. À partir de l'énoncé, noter les couples d'entiers $(cardinal, valeur)$ pour les espèces coûteuses (m_i, p_i) et pour celles non coûteuses (n_j, q_j) ; on a donc $p_i > m_i$ et $q_j < n_j$. Noter *D* la somme des différences dans le cas des oiseaux coûteux : $D=\sum_i (p_i - m_i)$ et, pour les oiseaux non coûteux, $d=\sum_j (n_j - q_j)$.
3. Alors, pour chaque espèce coûteuse *i*, le couple (X_i, A_i) où $X_i = d \times m_i$ et $Ai = d \times p_i$ constitue une solution pour les volatiles coûteux de l'espèce *i*. Cela représente la quantité de volatiles coûteux de l'espèce *i* achetés et sa valeur, et de même pour chaque espèce non coûteuse *j*, le couple (Y_j, B_j) où $Y_j = D \times n_j$ et $B_j = D \times q_j$ constitue une solution pour les volatiles non coûteux de l'espèce *j*. C'est la quantité d'oiseaux d'un lot de volatiles non coûteux de l'espèce *j* achetés et sa valeur.

Illustrons cet algorithme dans un tableau, comme le fait d'ailleurs Al-Kâshî lui-même :

	Coûteux	**Moyen**	**Non coûteux**
Prix unitaire d'un volatile	$\frac{p_i}{m_i}$	1	$\frac{q_j}{n_j}$
<u>Nombre</u> dans un lot de volatiles par espèce	m_i	1	n_j
<u>Valeur</u> de ce lot	p_i	1	q_j
Différences : $\lvert n_k - v_k \rvert$ (k est i ou j)	$p_i - m_i$	0	$n_j - q_j$
Somme des différences	$D = \sum_i (p_i - m_i)$		$d = \sum_j (n_j - q_j)$
Nombre de volatiles achetés par espèce	$X_i = d \times m_i$		$Y_j = D \times n_j$
Valeur des volatiles achetés par espèce	$A_i = d \times p_i$		$B_j = D \times q_j$

Tableau regroupant les éléments de l'algorithme d'Al-Kâshî.

Pour mettre en œuvre l'algorithme d'Al-Kâshî, il est nécessaire qu'un nombre restreint de conditions préalables soient vérifiées :

(a) Il faut que le nombre total n de volatiles achetés soit strictement supérieur aux valeurs de tous les lots coûteux et non coûteux : $n > \sum_i A_i + \sum_j B_j$. Cette condition se vérifie *a posteriori* une fois les calculs élémentaires faits.

(b) Il faut que l'une des espèces ait un coût unitaire égal à 1, pour permettre l'ajustement nécessaire afin d'atteindre le nombre total de volatiles achetés.

(c) Il faut que la valeur moyenne des volatiles achetés soit égale à 1. Al-Kâshî propose quelques pistes pour contourner cette difficulté, mais conclut la solution proposée en insistant que dans ce cas il vaut mieux utiliser la méthode algébrique.

Vérification

Il s'agit de vérifier que le nombre total de volatiles achetés est le même que le prix global de ces volatiles. Il faut donc montrer que : $\sum_i X_i + \sum_j Y_j = \sum_i A_i + \sum_j B_j$.

$$\begin{aligned}
\sum_i X_i + \sum_j Y_j &= \sum_i (d \times m_i) + \sum_j (D \times n_j) \\
&= d \times \sum_i m_i + D \times \sum_j n_j \\
&= \sum_j (n_j - q_j) \times \sum_i m_i + \sum_i (p_i - m_i) \times \sum_j n_j \\
&= \cancel{\sum_j n_j \times \sum_i m_i} - \sum_j q_j \times \sum_i m_i + \sum_i p_i \times \sum_j n_j - \cancel{\sum_i m_i \times \sum_j n_j} \\
&= -\sum_j q_j \times \sum_i m_i + \sum_i p_i \times \sum_j n_j
\end{aligned}$$

On montre de manière analogue que :

$$\sum_i A_i + \sum_j B_j = \sum_i p_i \times \sum_j n_j - \sum_j q_j \times \sum_i m_i$$

cqfd.

2.2. Solution du problème 5 posé dans *Petit x n° 110-111*

> ***Problème 5*** *: Si on te dit : « Un canard coûte 4 dirhams, 1 poule 1 dirham, 2 pigeons 1 dirham et 10 moineaux 1 dirham. On achète cent volatiles pour cent dirhams ». Combien y a-t-il de chaque espèce ?*

Il s'agit ici du cinquième problème d'Abû Kâmil. En partant de la méthode algébrique, il trouve l'équation $x=\frac{3}{10}y+\frac{1}{6}z$, où x est le nombre de canards, y le nombre de moineaux et z le nombre de pigeons. Tous ces nombres étant des entiers naturels, y doit être un multiple de 10 et z un multiple de 6. On prend d'abord $z=6$ et $y=10$; alors $x=4$, et le quadruplet $(canards, poules, pigeons, moineaux)=(4, 80, 6, 10)$ est une première solution ; puis, l'auteur combine les multiples de 6 d'une part et ceux de 10 d'autre part, teste la validité du résultat ou son rejet. À la fin du processus combinatoire, il en déduit ce problème possède 96 solutions. Par exemple, si pour $y=10$ moineaux, on double le nombre de pigeons, i.e. $z=12$, il faut prendre 5 canards et 73 poules.

Nous proposons ci-dessous de résoudre ce problème en utilisant l'algorithme d'Al-Kâshî qui traite le même problème en commençant par une remarque :

> *Si le nombre d'espèces dépasse 3, les volatiles achetés sont séparés en trois classes : (1) ceux dont la valeur [si'ru] est strictement supérieure au nombre de volatiles évalués [mas'ûru], on les appelle les volatiles coûteux, (2) ceux dont le prix unitaire est égal à 1 dinar et (3) ceux dont la valeur est strictement inférieure au nombre de volatiles évalués, on les appelle les volatiles non coûteux. Puis nous prenons la différence entre nombre et valeur pour chaque espèce coûteuse. Nous additionnons les différences obtenues et nous multiplions cette somme par le nombre de volatiles de chaque espèce non coûteuse. Les produits résultant donnent le nombre de volatiles non coûteux achetés. Ensuite, nous prenons la différence entre valeur et nombre pour chaque espèce non coûteuse. Nous additionnons les différences obtenues et nous multiplions cette somme par le nombre de volatiles de chaque espèce coûteuse, les produits résultant donnent le nombre de volatiles coûteux achetés. Nous complétons le résultat final en ajoutant autant que nécessaire en volatiles valant 1 dirham. Nous illustrons notre démarche dans le tableau qui suit.*

Le tableau suivant (qu'on trouve également chez l'auteur) illustre bien la méthode :

Canards-pigeons & poules-moineaux	Canards	Poules	Pigeons	Moineaux	TOTAL
N = nombre de volatiles de l'énoncé	1	1	2	10	
P = prix unitaire de ces volatiles	4	1	1	1	
$\|N-P\|$	3	0	1	9	
Somme des différences	3	0	10		
Solution : nombre de volatiles de chaque espèce	10	54	6	30	100
Valeur en dirhams de chaque espèce	40	54	3	3	100

Résolution du problème 5 à l'aide de la méthode d'Al-Kâshî
(une flèche représente un produit).

L'algorithme fonctionne merveilleusement et permet de trouver $(10, 54, 6, 30)$ comme solution, l'une de celles trouvées par Abû Kâmil. Cependant, Al-Kâshî se contente de prévenir qu'il existe de nombreuses autres solutions sans entrer dans les détails.

2.3. Résolution par la méthode d'Al-Kâshî du problème 6 de *Petit x n° 110-111*

> *Nous souhaitons acheter 10 espèces de volatiles, à raison de 300 volatiles pour 300 dinars. Une*

grue vaut 3 dinars, 2 canards valent 3 dinars, 3 oies valent 5 dinars, 1 coq de neige vaut 1 dinar, 3 perdrix pour 2 dinars, 2 faisans pour 1 dinar, 3 pigeons pour 1 dinar, 4 poules pour 1 dinar, 5 cailles pour 1 dinar et 6 moineaux pour 1 dinar.

Les volatiles achetés sont ordonnés du plus coûteux au moins coûteux, en passant par ceux qui coûtent 1 dinar l'unité[7].

Ce problème d'Al-Kâshî revient à résoudre un système de deux équations linéaires à dix inconnues. Les solutions, si elles existent, doivent ne comporter que des entiers positifs.

$$\begin{cases} 3x_1+\dfrac{3x_2}{2}+\dfrac{5x_3}{3}+x_4+\dfrac{2x_5}{3}+\dfrac{x_6}{2}+\dfrac{x_7}{3}+\dfrac{x_8}{4}+\dfrac{x_9}{5}+\dfrac{x_{10}}{6}=100 \\ x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7+x_8+x_9+x_{10}=100 \end{cases}$$; où les x_i sont des entiers naturels.

Le tableau suivant résume bien l'énoncé :

	Grue	Canard	Oie	Coq	Perdrix	Faisan	Pigeon	Poule	Caille	Moineau
Nombre de volatiles	$x_1=1$	$x_2=2$	$x_3=3$	$x_4=1$	$x_5=3$	$x_6=2$	$x_7=3$	$x_8=4$	$x_9=5$	$x_{10}=6$
Valeur des volatiles	3	3	5	1	2	1	1	1	1	1

Tableau résumant les données du problème 6.

Il est clair que la solution algébrique de ce système est longue à calculer algébriquement et illustre bien la nécessité d'imaginer une manière plus pratique de l'obtenir. C'est l'algorithme proposé par Al-Kâshî. Nous en montrons le fonctionnement, l'efficacité et la simplicité grâce au tableau qui suit, qui n'est qu'une copie de celle trouvée dans le texte de l'auteur.

	Les plus coûteux			Moyen	Les non coûteux					
	A	B	C	D	E	F	G	H	K	L
Prix unitaire d'un volatile	3	5	3	1	2	1	1	1	1	1
<u>Nombre</u> de volatiles par espèce : n_i	1	3	2	1	3	2	3	4	5	6
<u>Valeur</u> de ce lot : v_i	3	3	5	1	2	1	1	1	1	1
Différences : $\lvert n_i - v_i \rvert$	2	1	2	0	1	1	2	3	4	5
Multipliez la somme *d* des différences des volatiles non coûteux, i.e. 16, par chacun des <u>nombres</u> de volatiles coûteux.					Multipliez la somme *D* des différences des volatiles coûteux, i.e. 5, par chacun des <u>nombres</u> de volatiles non coûteux.					
Nombre total de volatiles : 300	16	32	48	89	15	10	15	20	25	30
Multipliez la somme *d* des différences des volatiles non coûteux, i.e. 16, par chacune de leurs <u>valeurs</u>.					Multipliez la somme *D* des différences des volatiles coûteux, i.e. 5, par chacune de leurs <u>valeurs</u>.					
Valeurs de toutes les espèces : 300	48	48	85	89	10	5	5	5	5	5

Résolution du problème 6 à l'aide de la méthode d'Al-Kâshî.

Dans ce tableau, nous avons placé les colonnes des oiseaux onéreux à gauche.

[7] Voici le nom de chaque espèce de volatile achetée : Oiseaux coûteux : (A) Karki [grue] ; (B) Baṭṭa [canard] ; (C) Wazza [oie]. Oiseau au prix moyen : (D) Qamja [coq de neige]. Oiseaux non coûteux : (E) Tayhij [perdrix] ; (F) Darraj [faisan] ; (G) Hamam [pigeon] ; (H) Dajaja [poule] ; (K) Salwa [caille] ; (L) 'Usfur [moineau].

3. Réponses à quelques questions

3.1. Problèmes récréatifs ?

Peut-on considérer les problèmes de type « 100 volatiles » comme des problèmes récréatifs ? Un problème récréatif utilise le langage de tous les jours, prend ses racines dans la vie quotidienne et sa solution nécessite le recours à des astuces. De plus, les données d'un problème récréatif sont le plus souvent peu vraisemblables, voire même absurdes[8]. Notre étude montre que le problème des 100 volatiles, considéré comme un jeu de l'esprit, récréatif et amusant, a retenu l'attention de mathématiciens renommés et respectés, tel Abû Kâmil, qui écrit :

> *J'ai vu l'une des sortes d'arithmétique, qui circule entre les hommes de science et les hommes du commun, entre le savant et l'ignorant, avec laquelle ils se divertissent et qu'ils apprécient, qu'ils trouvent ingénieuse et à propos de laquelle les uns interrogent les autres. Celui qui, parmi eux répond, le fait par conjecture et par intuition, sans revenir en cela à un principe ou à une inférence (Rashed 2012, 732).*

Dans ce paragraphe, Abû Kâmil montre clairement la transformation d'un problème récréatif en un sujet d'étude nécessitant la rédaction d'une épître spécifique prouvant l'efficacité de l'algèbre nouvellement formalisée comme outil de résolution des problèmes. Quant à Al-Kâshî, il consacre dans son plus fameux ouvrage de mathématiques un chapitre spécifique à ce type de problèmes et invente un algorithme efficace et d'usage facile pour leur résolution. En abordant ce thème ainsi que d'autres thèmes susceptibles de divertir leurs contemporains, ces mathématiciens ont contribué au progrès de la science et au développement des méthodes et des techniques mathématiques.

Que pour les gens ordinaires, un problème d'oiseaux soit un problème amusant, il n'y a aucun doute car il leur évoque le « couffin » de la ménagère et les courses au marché. Les mathématiciens, quant à eux, ont vu son utilité pédagogique et n'ont pas hésité à le placer dans le chapitre des applications aux transactions des techniques arithmétiques ou algébriques. Certains ont inventé des situations de la vie quotidienne, utilisant des données réelles et crédibles (ou tout au moins vraisemblables) pour écrire des énoncés de problèmes de difficulté croissante et parfois de solutions complexes. Par exemple, Ibn al-Yâsamîn enchâsse un problème d'oiseaux dans un problème d'héritage suite à la mort du père de plusieurs garçons et filles. Dans d'autres énoncés, on peut acheter des volatiles de toutes sortes ou des animaux de la ferme ; on peut imaginer des problèmes de dons ou de salaires à partager entre différentes personnes de tous âges ou de toutes confessions.

3.2. Techniques arithmétiques ou algébriques ?

En l'état de nos connaissances actuelles, nous avons constaté que la plupart des auteurs arabes, ayant introduit un ou plusieurs problèmes d'oiseaux dans leur traité, les ont délibérément évoqués dans un cadre algébrique, celui là même défini par Abû Kâmil (souvent sans le citer), dans un chapitre sur les transactions. Bien que connaissant parfaitement les méthodes de résolutions algébriques, certains mathématiciens, comme Ibn al-Hâ'im ou Al-Kâshî, ont préféré recourir aux techniques arithmétiques, cadre plus familier pour un public formé de juristes ou d'administrateurs chargés de résoudre des problèmes d'héritage ou de partage de biens. Ils ont alors développé des algorithmes faciles à utiliser et à retenir et permettant d'obtenir une ou plusieurs solutions, lorsqu'elles existent. Il s'est agi d'abord de remplacer la solution algébrique par une série d'opérations arithmétiques opérant sur les données du problème et de les ramener à

[8] Nous reprenons ici en partie la définition des problèmes récréatifs de Hoyrup, citée par Moyon (2019, p. 231).

une proportion entre quatre grandeurs, puis d'élaborer l'approche « coûteux - non coûteux », simple procédure efficace pour trouver des solutions. Nombreux sont les auteurs qui se sont contentés de l'obtention d'une solution et n'ont pas jugé nécessaire de se demander si d'autres solutions existaient.

Nous avons été surpris de constater qu'aucun des auteurs arabes étudiés n'avait placé le problème des 100 volatiles dans le cadre des problèmes d'alliages, comme l'a fait, par exemple Fibonacci[9]. Sa méthode, basée sur la compensation entre chaque métal précieux par un ou plusieurs métaux non précieux diffère peu, dans son principe, de la méthode « coûteux - non coûteux », mais elle la complexifie et permet d'obtenir rapidement plusieurs solutions.

Nous n'avons pas évoqué, dans ce travail, l'approche empirique d'Abû l-Wafâ ni l'approche théorique d'Ibn al-Haytham[10] car ni l'un ni l'autre n'ont traité explicitement de problèmes de type « 100 volatiles ». Pourtant l'application de leurs approches aux problèmes des 100 volatiles permet de résoudre tous les cas possibles en restant dans le cadre de la théorie classique des rapports et des proportions, sans aucun recours à l'algèbre. Voici comment Ulrich Rebstock qualifie les méthodes suivies par les mathématiciens arabes :

> *Le mathématicien islamique prototypique n'est pas satisfait des méthodes trouvées chez les Anciens pour satisfaire aux besoins pratiques de la société. Il les dépasse, cherchant des approches plus élaborées, des principes, des preuves et des théories.*
>
> *[...] Il ne peut pas non plus se satisfaire du fait que les théories, aussi abstraites soient-elles, restent inutilisées et ne considérait pas que la pureté des mathématiques serait souillée par un contact possible avec des problèmes quotidiens. La manière dont Abû Kâmil a résolu le problème des 100 oiseaux et Ibn al-Haytham a conçu son traité de mu'amalât donne vie à ce prototype du mathématicien islamique, tout en illustrant clairement que la division grecque entre mathématiques théoriques et pratiques est surmontée, dans le milieu islamique, par une synthèse de ces deux types classiques de mathématiques.*
>
> *Ce sont surtout les hussâb qui ont profité de la relation nouvellement mise en place entre les concepts orientés vers les problèmes et les concepts orientés vers la pratique. Cela a consacré, pour ainsi dire, leur touche professionnelle, sa spécificité en mathématiques et une place dans la société (Rebstock, 2008, p. 99).*

3.3. Un atelier de travail avec des enseignants en formation continue

Le problème des 100 volatiles a-t-il sa place dans nos classes ? Nous avons posé cette question dans un atelier auquel neuf enseignants de collèges et de lycées ont participé[11].

Trois phases ont été prévues pour l'atelier :

Lors de la première phase, qui devait durer une demi-heure, nous avons distribué à chaque participant les énoncés de l'un des trois problèmes n° 2 (Al-Samaw'al), n° 4 (Ibn al-Ha'im) ou n° 5 (Abû Kâmil). Chacun devait choisir le cadre mathématique le plus adéquat pour résoudre le problème reçu, procéder à sa résolution et signaler les difficultés rencontrées. À l'issue de la

[9] *cf.* Caianiello (2011) et (2018).

[10] Tous les détails sur ces approches et leurs démonstrations en notations modernes se trouvent dans Rashed (2002), pp. 195-198 ; les textes reproduits en arabe et traduit en français se trouvent pp. 332-340.

[11] Nous remercions Rahim Kouki qui nous a permis d'organiser cet atelier de travail avec ses étudiants du mastère de didactique des mathématiques. À la fin de l'atelier, auquel M. Kouki a assisté en observateur, il a analysé la session et discuté avec ses étudiants de ses implications didactiques. Il prévoit de publier plus tard une communication sur cet atelier.

phase, et comme attendu, les participants ont considéré qu'il s'agissait de résoudre dans le cadre algébrique un système de deux équations linéaires à 3 ou 4 inconnues, qu'on devait choisir, selon les cas les inconnues principales et les inconnues secondaires. Tous les participants ont tenté d'avancer dans la recherche de solutions et seuls ceux qui avaient reçu l'énoncé du problème 2 ont complété la solution. Lors de la courte discussion qui a suivi, certains participants ont signalé que ce type de problèmes nécessite que les solutions soient des entiers naturels.

Chaque groupe devait analyser la solution de l'auteur, la situer dans une cadre mathématique, identifier le type de connaissances et d'argumentations qu'elle nécessite, établir la validité de la solution proposée et sa généralisation possible à d'autres problèmes du même type, en restant dans le même cadre. À la fin de la session, chaque groupe devait présenter un rapport sur la solution proposée par l'auteur et les obstacles rencontrés dans l'analyse de cette solution.

Notre objectif pour cette deuxième phase de l'atelier était d'observer le comportement de ces enseignants devant une situation nouvelle pour eux, tout en prévoyant leur comportement effectif. Ainsi, nous nous attendions à ce qu'une fois les difficultés de la langue aplanies, les membres du premier groupe identifient rapidement le cadre algébrique choisi par Abû Kâmil et fassent un rapport exhaustif sur sa solution. Pour le second groupe, en précédant la solution d'Ibn al-Hâ'im par l'énoncé du lemme — donnant la solution arithmétique du cas de deux espèces —, nous nous attendions à ce que les membres du groupe placent résolument le problème dans le cadre des proportions. Pour le troisième groupe, il était prévisible que ses membres commenceraient par décrypter la solution proposée par Al-Kâshî, puis comprendraient l'originalité de son usage des tableaux pour résoudre le problème et pour le généraliser à d'autres problèmes.

Les discussions dans chaque groupe furent animées et soutenues. Nous n'avons été amené à intervenir qu'une fois, sollicité par les membres du premier groupe dont le travail était bloqué. Ils pensaient qu'une donnée essentielle manquait à l'énoncé du problème : le lien entre les deux monnaies dirhams et dinars, le raisonnement de l'auteur leur semblant boîteux. En écoutant l'information permettant de lever l'obstacle, le groupe se remit au travail.

Après une heure de décryptage, de débats passionnés, suivie d'une accalmie permettant de préparer le rapport de synthèse, le représentant de chaque groupe a présenté un rapport oral.

Le premier rapporteur se contente d'interpréter en langue moderne le texte d'Abû Kâmil en omettant toute référence à l'obstacle épistémologique rencontré. Il place la solution d'Abû Kâmil dans le cadre de l'algèbre et précise qu'il s'agit de la résolution d'un système de deux équations linéaires à deux inconnues ayant six solutions possibles présentées dans un tableau.

Le second rapporteur décrit le raisonnement suivi par Ibn al-Hâ'im dans le lemme en indiquant qu'il s'agit d'une preuve par un exemple générique. Pour lui, la procédure est correcte puisqu'elle permet de trouver la solution. Un auditeur lui demande de justifier la procédure, sans succès. Par la suite, le rapporteur se contente de traduire les propos d'Ibn al-Hâ'im en langue moderne.

Considérant le décryptage du texte d'Al-Kâshî comme ayant été pénible, le troisième rapporteur présente au tableau noir ses raisonnements. Remplaçant, par exemple l'expression « valeur d'un lot de canards » par val(ca) et « nombre de canards » par nb(ca), et les terme « ajouter », « soustraire » et « multiplier » par les symboles modernes ; il reconstitue le texte en langue moderne et termine par un tableau synthétisant la démarche de l'auteur.

À la suite de ces trois rapports, les rapporteurs ont été soumis à un flot de questions de leurs collègues, mais nous avons décidé d'intervenir pour mettre en valeur les résultats des trois groupes, répondre aux questions et contextualiser le problème des 100 volatiles.

1. Les trois rapporteurs ont montré la difficulté de différencier description et analyse, compréhension et argumentation, vérification et validation.
2. Notons qu'un énoncé de problème clair et compréhensible, suivi d'une solution entièrement verbale, sans symboles ni notations, a déstabilisé les participants qui ont perdu beaucoup de temps pour reconstruire les raisonnements ou les procédures. Par exemple, dans l'algèbre arabe totalement rhétorique, les chiffres n'apparaissent que littéralement, l'inconnue des problèmes recevant une dénomination spécifique, le terme « *shay* ». Pour les autres inconnues, les auteurs choisissaient des séries de termes familiers, comme les noms de monnaies (*dinars*, *fils*, etc.), remplacées plusieurs siècles plus tard par les lettres x, y, z, etc.
3. La méconnaissance de l'histoire des mathématiques ne permet pas de distinguer ce qui était connu, admis ou prouvé à une époque donnée de ce qui n'était pas licite. Pour les problèmes des 100 volatiles, l'arithméticien pouvait travailler essentiellement dans les ensembles de nombres positifs (entiers et fractionnaires), devait maîtriser les lois relatives à la proportionnalité, avait recours aux exemples génériques comme preuves d'un problème donné. L'algèbre elle même était considérée comme un chapitre de l'arithmétique, dans lequel les opérations et les procédures étaient généralisables aux monômes exprimés en termes conventionnels. La résolution de plusieurs problèmes est devenue beaucoup plus aisée, tout en restant limitée par des obstacles épistémologiques.

Pour la troisième phase de l'atelier, dont la durée avait été fixée à une demi-heure, nous avons demandé aux participants de réfléchir sur l'utilisation possible du problème des 100 volatiles dans l'enseignement. Quel niveau d'enseignement ? Quel bénéfice peut-on en tirer ?

La discussion animée qui a suivi ce temps de réflexion individuelle a montré que la curiosité de la lecture de textes mathématiques anciens peut se transformer en enthousiasme à partir du moment où les difficultés d'appropriation de la langue sont aplanies et les raisonnements des auteurs sont compris ; cependant, tous les participants ont affirmé que les problèmes de type « 100 volatiles » avaient leur place dans les sessions de formation continue des enseignants de lycées et collèges, mais pouvaient difficilement être intégrées dans les cursus scolaires traditionnels compte-tenu de leurs complexité. Certains participants, eux-mêmes animateurs de clubs de mathématiques, ont souligné l'apport que pourrait apporter à la classe la perspective historique, l'aspect ludique apparent, le potentiel d'inclusion de données de la vie quotidienne dans les énoncés, les techniques utilisables pour résoudre les problèmes (calculs sur les nombres et les fractions, proportions et règle de trois, équations linéaires à une ou deux variables, systèmes de deux équations linéaires, graphes de droites, tableaux, combinatoire, etc.). Ils pensent être en mesure d'intégrer ce type de problèmes en tenant compte du niveau des élèves, et en profiter pour multiplier les approches et changer de cadre didactique.

Conclusion

Les informations concernant le problème classique des 100 volatiles et les commentaires le concernant, bien que rares, nous ont permis de suivre l'évolution des techniques dans la littérature mathématique arabe et de révéler leurs transformations. Nous espérons que ce travail constituera une étape utile dans le projet débuté par Eva Caianiello et visant à suivre ce problème, né en Chine et en Inde, et circulant vers l'Europe en passant par les contrées islamiques.

L'atelier de travail avec des enseignants en formation continuée a montré la nécessité d'inclure l'approche historique des problèmes comme expérience didactique enrichissante ; mais il a mis en évidence les difficultés — que nous avions anticipées — de ce type de problèmes, et de sa modélisation algébrique. Pour des analyses didactiques des difficultés de l'introduction et de l'enseignement de l'algèbre, on peut par exemple se référer aux (très pertinentes) contributions du numéro spécial de *Recherches en Didactique des Mathématiques* sur ce sujet, voir Coulange et Drouhard (2012).

Références bibliographiques

As-Samaw'al. (1972). *Al-Bâhir fî l-jabr*. Édition, notes et introduction par Salah Ahmad.

Caianiello, E. (2018). Indeterminate linear problems from Asia to Europe. *Lettera Matematica*. https://doi.org/10.1007/s40329-018-0242-4

Caianiello, E. (2011). *Des monnaies et des oiseaux dans l'œuvre de Léonard de Pise*. https://www.researchgate.net/publication/291064683_On_Coins_and_Birds_in_Leonardo_da_Pisa

Chevalarias, N. et al. (éditeurs). (2019). *Mathématiques récréatives : Éclairages historiques et épistémologiques*. Paris : UGA Editions.

Coulange, L. & Drouhard, J.-P. (2012). Enseignement de l'algèbre élémentaire - Bilan et perspectives. Coordonné par J.L. Dorier et A. Robert, numéro spécial de *Recherches en Didactique des Mathématiques*. La Pensée Sauvage, Grenoble.

Moyon, M. (2019). Récréations mathématiques et algorithmes dans le Liber Abaci de Fibonacci (XIII^e siècle). in *Mathématiques récréatives : Éclairages historiques et épistémologiques*. Natalie Chevalarias et al. (éditeurs). Paris : UGA Editions.

Rashed, R. (2002). *Les mathématiques infinitésimales du IX^e au XI^e siècle : Ibn al-Haytham*. Volume IV. London: Al-Furqan.

Rashed, R. (2012). *Abû Kâmil, Algèbre et analyse diophantienne*. Édition, traduction et commentaires. Berlin : De Gruter.

Rebstock, U. (2008). *Kitâb al-Ḥâwî li-l-a'mâl as-sulṭânîya wa-rusûm al-ḥisâb ad-dîwânîya (Das umfassende Buch über die herrschaftlichen Tätigkeiten und Rechenvorschriften in der Steuerverwaltung) von Abû 'Abdallâh as-Saqqâq (st. 511/1118)*. Übersetzt und kommentiert von Ulrich Rebstock, Frankfurt a. M.: Institut für Geschichte der Arabisch-Islamischen Wissenschaften (Islamic Mathematics and Astronomy 113).

Rebstock, U. (1999/2000). *The Kitâb al-Kâfî of al-Sardafî*. Zeitschrift für Geschichte der arabisch-islamischen Wissenschaften 13. pp. 189-204.

Saïdan, A.-S. (1986). *Târîkh 'ilm l-jabr fi l-'âlam al-'arabî*. (2 volumes). Koweit.

Sesiano, J. (1999). *Une introduction à l'histoire de l'algèbre*. Lausanne : Presses Polytechniques et universitaires romanes.