
EXPÉRIMENTATION ET DÉDUCTION : UNE TECHNIQUE DIALECTIQUE AU CŒUR DU TRAVAIL MATHÉMATIQUE

Jean-Pierre BOURGADE¹

INSPÉ Toulouse Occitanie-Pyrénées,
Université Toulouse 2 Jean Jaurès

Résumé. Dans ce travail, nous étudions les praxéologies d'expérimentation en usage dans l'enseignement des mathématiques, ainsi que celles qui pourraient exister mais n'apparaissent que rarement dans l'usage de la profession. L'étude de quelques textes produits par des personnes occupant des positions différentes, à proximité de l'institution scolaire, permet de mettre en évidence des rapports à l'expérimentation dont on essaie de dégager quelques principes : ceux-ci permettent de comprendre pourquoi n'apparaissent que certains types d'expérimentations et pourquoi, en particulier, des techniques s'inscrivant dans un mouvement dialectique entre expérimentation et déduction peinent à apparaître dans l'institution scolaire et ses environs.

Mots-clés. Dialectique de l'expérimentation et de la déduction, expérimentation en mathématiques, besoins praxéologiques de la profession, théorie anthropologique du didactique.

Abstract. In this work, we study the praxeologies of experimentation used in the teaching of mathematics, as well as those that could exist but rarely appear in reality. The study of some texts, produced by people occupying different positions close to the school institution, allows to highlight typical relationships to experimentation: they enable us to understand why only certain types of experimentation do exist and why, in particular, techniques based on a dialectical movement between experimentation and deduction fail to appear in the school institution and its surroundings.

Keywords. Dialectics of the experimentation and the deduction, experimentation in mathematics, praxeological needs of the profession, anthropological theory of the didactical.

Introduction

Ce travail se veut une contribution à l'identification de besoins, c'est-à-dire de savoirs et de savoir-faire manquants, des *praxéologies* manquantes, pour la profession de professeur de mathématiques. L'enseignement des mathématiques peut être compris comme la modification du rapport des élèves aux objets mathématiques, et ce par la mise en œuvre par le professeur de savoir-faire et de savoirs (de *praxéologies*) didactiques (et, bien sûr, mathématiques). La Théorie anthropologique du didactique (TAD, Chevallard 2007) donne un cadre précis pour parler tant des praxéologies mathématiques que des rapports en telle ou telle position (celle d'élève de 5^e ou de professeur de lycée) à ces praxéologies, mais aussi des praxéologies *professionnelles* et des rapports que peuvent nouer les professeurs à ces praxéologies.

La TAD postule ainsi que toute action humaine se laisse décrire comme la réalisation d'un type de tâches T (« Concevoir et mettre en œuvre une séquence d'enseignement sur un thème mathématique donné ») au moyen d'une technique τ (« On propose une situation où un problème se pose dont la réalisation permettra d'amener les élèves à étudier le thème mathématique considéré, tout en leur ménageant une grande autonomie dans le travail d'étude », etc.) dont l'adéquation au type de tâches T est justifiée (« Le problème qui se pose dans la situation proposée aux élèves doit ressembler à des types de tâches qu'ils savent réaliser, mais dans un contexte où la technique dont ils disposent ne permet pas d'aboutir : cela crée le besoin de

¹ jean-pierre.bourgade@univ-tlse2.fr

construire un nouveau savoir-faire mathématique et la production de ce nouveau savoir-faire va, dialectiquement, conduire à la production de savoirs mathématiques, l'étude du problème permet donc de construire le savoir et le savoir-faire attendus, et l'autonomie laissée aux élèves dans ce travail garantit que l'étude est bien menée par les élèves, et non seulement pour les élèves par le professeur », etc.) au moyen d'un discours (*logos*) sur la technique (*technê*), une technologie θ qui, à son tour, peut se justifier (« En procédant ainsi, ce sont les élèves eux-mêmes qui, pour une large part, vont poser les questions auxquelles le savoir et le savoir-faire étudiés permettent de répondre, ce sont eux qui vont produire des ingrédients de techniques qui seront ensuite institutionnalisés, et on sait que l'apprentissage est plus efficace si la part prise par les élèves dans la réalisation du travail d'étude est plus importante », etc.) dans le cadre plus large d'une théorie Θ . L'ensemble noté $[T/\tau/\theta/\Theta]$ est une *praxéologie*, et s'analyse en une partie pratico-technique, la *praxis* $[T/\tau]$, et une partie technologico-théorique, le *logos* $[\theta/\Theta]$. Lorsque le type de tâches est mathématiques (par exemple : « Déterminer une aire »), on parle de *praxéologie mathématique*, ou encore d'organisation mathématique. Lorsque le type de tâches est didactique (par exemple : « Concevoir une séance d'étude sur un thème donné »), on parle de *praxéologie didactique*, de praxéologie d'étude, ou encore d'organisation didactique ou d'organisation de l'étude.

Le *logos* a, parmi d'autres fonctions, celle de permettre la *production* d'une *praxis*, en particulier de techniques permettant de réaliser un type de tâches particulier. Dans le cas des praxéologies didactiques, il s'ensuit que les techniques de gestion de la classe, de direction de l'étude, dépendront fortement du *logos* qui aura permis leur production. En particulier, la façon dont les professeurs de mathématiques *utilisent* l'expérimentation en classe (ce qui fait partie de la *praxis* du professeur, puisque c'est un élément de sa technique de direction de l'étude) découle pour une large part de ce que la profession *pense* et *dit* à propos de la place et du rôle de l'expérimentation dans le travail mathématique (ce qui fait partie du *logos* du professeur).

L'objet de ce travail est, précisément, d'étudier les praxéologies didactiques de la profession pour autant qu'elles entretiennent un rapport avec la « *dimension expérimentale du travail mathématique* » (Chevallard, 1992). Nous étudions pour cela des productions de personnes qui occupent des positions dans des institutions proches de l'institution scolaire : l'une d'entre elles peut être située dans la *noosphère*², il s'agit de Daniel Perrin, dont nous étudions une intervention dédiée à l'expérimentation en mathématiques et donnée à un colloque de la COPIRELEM³ en 2006 (Perrin, 2007) ; une autre a occupé la position de formateur au sein d'une institution de formation initiale des professeurs (dans le cadre de la préparation au concours donnant droit au CAPES⁴, il s'agit de Gilbert Julia, dont on observe le corrigé d'une épreuve orale sur dossier de ce concours (Julia, 2017)) ; enfin, nous étudions quelques productions d'élèves professeurs étudiant en 1^{re} année de master MEEF au sein d'une ESPE, désormais INSPÉ⁵. Notre objectif est triple : déterminer les praxéologies d'expérimentation qui sont utilisées par ces personnes dans l'étude de quelques problèmes géométriques ; déterminer certaines praxéologies d'expérimentation qui pourraient être utilisées mais ne le sont pas ; expliciter les éléments de

² Chevallard introduit plaisamment en didactique l'usage de ce terme forgé par Teilhard de Chardin afin de désigner la sphère où se « pense », c'est-à-dire où se conçoit et se construit, l'enseignement des mathématiques (Chevallard, 1991, p. 25).

³ Commission permanente des IREM sur l'enseignement élémentaire.

⁴ Certificat d'aptitude au professorat de l'enseignement du second degré.

⁵ Respectivement : Métiers de l'enseignement, de l'éducation et de la formation ; École supérieure du professorat et de l'éducation ; Institut national supérieur du professorat et de l'éducation.

logos de la profession et de sa noosphère qui peuvent expliquer les *praxis* observées ici. Notons que, si les cas étudiés portent tous sur l'étude de problèmes de géométrie⁶, les éléments de *logos* que nous essayons de dégager relèvent, dans l'échelle de codétermination didactique, du niveau de la discipline (c'est une certaine représentation de ce que sont les mathématiques qui s'y fait jour) et non seulement du secteur (géométrie) ou du domaine d'étude (trigonométrie, etc.). Nous pensons que l'étude qui suit vaut, *mutatis mutandis*, pour d'autres secteurs des mathématiques même s'il conviendrait de s'en assurer.

1. L'expérience comme isolat

L'étude de trois problèmes dans trois positions différentes donne lieu à des observations concordantes sur les liens entre l'expérimentation et le travail déductif tels qu'ils sont perçus par les personnes qui occupent ces positions. Dans les corpus étudiés, les praxéologies expérimentales mises en œuvre dans la résolution de problèmes sont en effet relativement détachées des praxéologies de production du savoir mathématique (praxéologies de déduction notamment) — même lorsque la personne observée insiste sur la dimension fondamentalement expérimentale de l'activité mathématique.

1.1. Expérimenter pour conjecturer

Considérons les trois problèmes suivants :

- **Problème 1** : On considère un triangle ABC (figure 1). Quels sont les points M du plan qui vérifient l'égalité d'aires $\text{Aire}(AMB) = \text{Aire}(AMC)$?

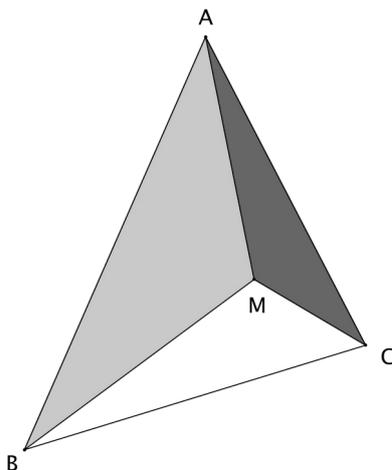


Figure 1 : Problème des aires égales.

- **Problème 2** : Soient un segment $[AB]$ de longueur 10 cm et M un point de $[AB]$ distinct de A et B . Du même côté de la droite (AB) , on construit deux triangles équilatéraux AMP et MBN . Déterminer la position du point M pour laquelle l'aire du quadrilatère $ABNP$ est minimale (voir figure 2).

⁶ Ce choix est méthodologique : il permet d'engager des comparaisons plus aisées entre les productions des diverses instances étudiées ici.

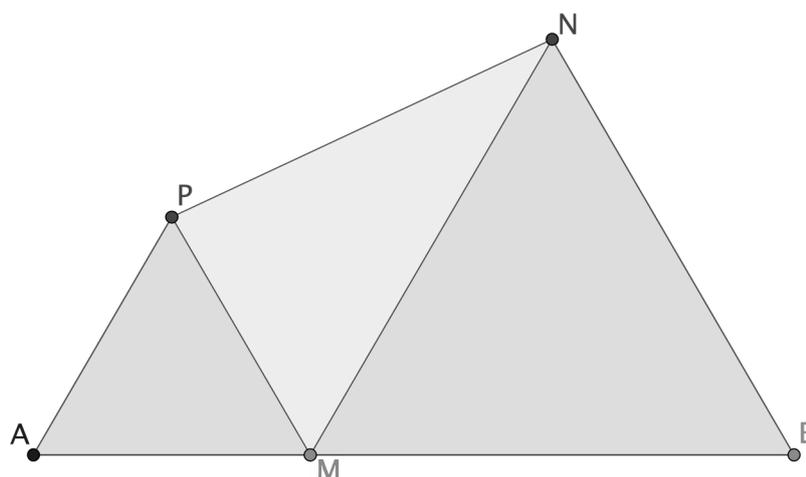


Figure 2 : Problème de minimisation de l'aire d'un quadrilatère.

- **Problème 3 :** Dans un plan, parmi les triangles rectangles ayant une hypoténuse de 8 cm, en existe-t-il ayant un périmètre supérieur ou égal au périmètre de tous les autres ?

Dans quelle mesure, et de quelle façon, l'expérimentation peut-elle trouver sa place dans l'étude de ces trois problèmes ?

Pour le premier problème, Perrin (2007, p. 12) décrit une expérimentation possible (en classe, à un niveau qu'il ne précise pas) de la façon suivante :

L'outil d'expérimentation est Cabri, ou un autre logiciel de géométrie, qui permet d'afficher les aires des triangles et de regarder comment elles varient avec M. Une conjecture se dégage assez vite, car on voit apparaître la médiane issue de A. On propose :

2.4 Conjecture. Les aires de AMB et AMC sont égales si et seulement si M est sur la médiane de ABC issue de A.

À l'appui de ce propos, Perrin (2007) fournit une figure (semblable à la figure 3) qui laisse entrevoir le type d'expérimentation menée au moyen d'un logiciel de géométrie (ici, *GeoGebra*). Dans une communication dont l'objectif est d'insister sur la place importante de l'expérimentation en mathématiques, il est notable que l'auteur ne fournisse pas plus de détails sur la façon dont « on voit apparaître la médiane issue de A ».

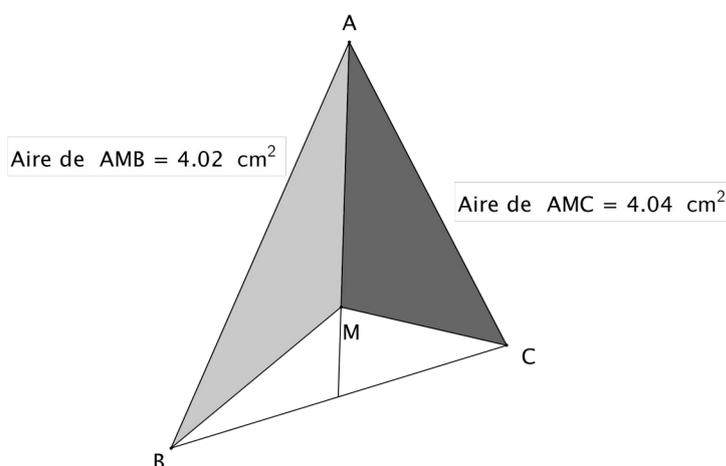


Figure 3 : Expérimentation ; aires égales.

Précisément, on déplace le point M dans le plan (en réalité dans le domaine limité par le triangle ABC) et on fait afficher à chaque instant l'aire des triangles AMB et AMC . On observe que les points M pour lesquels les aires sont à peu près égales semblent alignés, et que la droite qui apparaît semble être la médiane du triangle ABC issue du sommet A .

Pour le problème 2, un sujet d'oral proposé au concours du CAPES en 2016 (Jury du CAPES de mathématiques, 2016) fournit la réponse d'élève suivante (élève de 1^{re} S) :

En faisant la figure avec un logiciel de géométrie dynamique et en déplaçant le point M sur le segment $[AB]$ on s'aperçoit que la figure est symétrique. Par conséquent, l'aire de $ABNP$ est minimale lorsque M est le milieu de $[AB]$, c'est-à-dire $AM = 5$ cm.

Le même sujet propose une autre réponse d'élève de 1^{re} S :

J'ai fait une figure et j'ai trouvé que les aires de AMP et MNB sont $\frac{x^2\sqrt{3}}{4}$ et $\frac{(10-x)^2\sqrt{3}}{4}$.

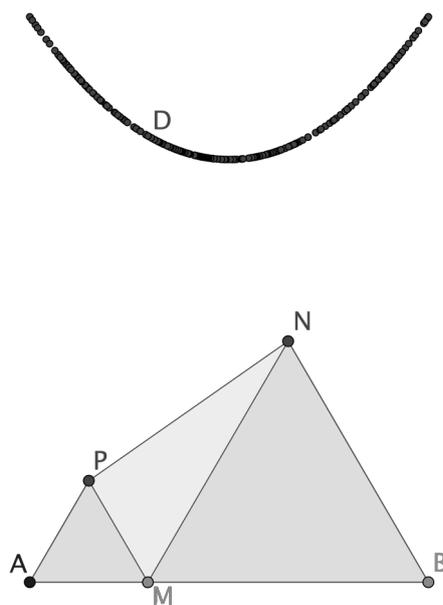


Figure 4 : Une expérimentation possible pour le problème 2.

En revanche, je ne vois pas comment on peut calculer l'aire de MPN car le triangle n'est pas un triangle particulier... Du coup, je ne vois pas comment on peut faire. Mais je pense que l'aire est minimale si on prend pour M le milieu de $[AB]$. J'ai fait plusieurs essais à la main et c'est pour cette position que j'ai trouvé l'aire minimale.

On peut imaginer que le premier élève a produit l'expérimentation résumée sur la figure 4 (affichage de la trace du point D de même abscisse que le point M et d'ordonnée l'aire du quadrilatère $ABNP$ — moyennant ici, figure 4, un changement d'échelle pour plus de lisibilité). Nous n'étudierons pas plus en détail l'expérimentation menée par le deuxième élève, qui se résume vraisemblablement à des calculs dans des situations particulières, mais nous prendrons note du fait que l'établissement de l'expression algébrique de l'aire du triangle MPN s'avère problématique pour lui (la variable x renvoie selon toute vraisemblance à la mesure, en cm , de la longueur AM).

À propos du problème 3, voici quelques propositions d'expérimentation formulées par des élèves professeurs étudiant en première année de master MEEF en 2017-18.

Un premier élève-professeur propose :

Élève-professeur n°1 : Expérimentation sur GeoGebra :

On trace un segment $[AB]$ de longueur 8 cm. Ensuite on utilise la propriété des triangles inscrits dans un cercle : « Si un triangle est inscrit dans un cercle et a pour côté un diamètre de ce cercle alors ce triangle est rectangle. Le diamètre est son hypoténuse ». Ainsi on construit le demi-cercle passant par les extrémités du segment (le cercle complet n'est pas nécessaire puisqu'on a la symétrie par rapport au segment) et on place un point C sur ce demi-cercle.

En reliant les points A , B et C on obtient un triangle rectangle en C et d'hypoténuse 8 cm, on a donc recréé les conditions du problème. Puis en faisant bouger C sur le demi-cercle on retrouve tous les triangles rectangles dont l'hypoténuse mesure 8 cm.

Pour finir, on crée une variable P qui calcule le périmètre du triangle ABC et on cherche le maximum s'il existe. Ici, en l'occurrence il existe, et le périmètre semble maximal pour C positionné de telle sorte que la longueur de $[AC]$ soit égale à la longueur de $[BC]$, c'est-à-dire que le triangle ABC soit isocèle en C .

Un autre élève-professeur propose l'expérimentation suivante :

Élève-professeur n°2 : On trace sur GeoGebra un triangle rectangle ayant pour hypoténuse 8 cm, à l'aide d'un tableur on calcule la somme de chaque côté du triangle en variant les deux longueurs des côtés de l'angle. Puis on trace une courbe à l'aide des données dans le tableur et on remarque qu'il existe un maximum.

Un troisième élève-professeur s'engage dans un travail semblable :

Élève-professeur n°3 : On trace sur un logiciel dynamique, ici GeoGebra, un triangle rectangle avec l'hypoténuse de 8 cm. Grâce à ce logiciel on peut représenter tous les triangles possible du plan répondant aux propriétés imposées dans l'énoncé. De plus on crée un point (G) ayant pour coordonnées l'abscisse du point C variant et pour ordonnée le périmètre du triangle obtenu. En affichant la trace de ce point on peut obtenir une courbe montrant l'évolution du périmètre des triangles rectangles d'hypoténuse 8 cm en fonction des différentes longueurs des côtés de l'angle droit. On peut alors dire s'il existe un triangle rectangle ayant un périmètre supérieur ou égal à ceux des autres triangles. De plus on peut utiliser le tableur afin d'approcher la courbe obtenue par un polynôme du second degré (cette approximation reste vague).

La dernière phrase renvoie à la figure 5, où on perçoit bien que le modèle d'ajustement polynomial de degré 2 (courbe) n'approche que très imparfaitement les données acquises (points).

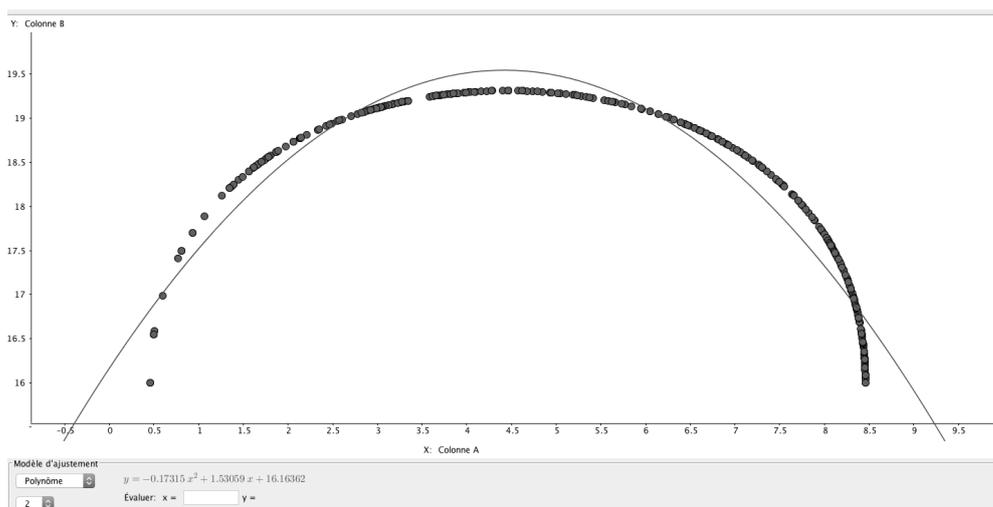


Figure 5 : Ajustement polynomial de degré 2.

Étudions une dernière production d'élève-professeur :

Élève-professeur n°4 : Expérimentation : Comme l'ensemble des triangles rectangles d'hypoténuse 8 cm forment un cercle de centre le milieu de $[BC]$ et de rayon 4 cm.

Pour le cercle, on a une symétrie axiale, d'axe (BC) , on peut donc se contenter d'expérimenter que dans la partie du cercle inférieure à (BC) .

Considérons l'arc \widehat{AC} , on crée alors un point d'abscisse la longueur de l'arc et d'ordonnée le périmètre du triangle.

En faisant se déplacer le point A , le long du demi-cercle, on remarque qu'il y a un maximum, on peut conjecturer le fait qu'il est atteint quand A est au milieu du demi-cercle. Soit quand le triangle ABC est isocèle rectangle en A .

En faisant de même avec AC en fonction du périmètre [sic, il s'agit plutôt du périmètre en fonction de la longueur AC], on obtient la même conjecture. De même en regardant la longueur du périmètre en fonction de l'angle \widehat{ABC} .

Cet élève-professeur fournit trois expérimentations différentes qui conduisent à « *la même conjecture* ». Essentiellement, les expérimentations consistent à reprendre le travail proposé par l'élève-professeur n°3 (ou par l'élève-professeur n°2) en faisant varier les variables indépendantes : la longueur de l'arc de cercle d'extrémités A et C ; la longueur du segment $[AC]$; l'angle \widehat{ABC} .

Ces quelques exemples d'expérimentations menées sur trois problèmes différents par des instances différentes (un chercheur en mathématiques, occupant une position noosphérique ; des élèves de 1^{re} S imaginaires ; des élèves-professeurs de mathématiques en master MEEF première année) mettent en évidence une fonction⁷ de l'expérimentation vraisemblablement bien connue dans la profession : « *l'expérimentation, en mathématiques, sert à produire des conjectures* ».

1.2. Déduire sans expérimenter

Il nous revient de présenter des résolutions de ces trois problèmes et d'examiner la part qui y revient à l'expérimentation. Le premier problème est examiné par Perrin (2007) qui en fournit une résolution complète. Le second problème n'est pas résolu par les élèves de 1^{re} S (probablement fictifs) dont le sujet d'épreuve orale du CAPES que nous avons étudié donne des extraits des productions. On se rabat donc, assez naturellement, sur un corrigé proposé par une ressource régulièrement consultée par les élèves professeurs (notamment les candidats au CAPES) : le site personnel de Gilbert Julia⁸, ancien formateur en mathématiques à l'IUFM⁹ et auteur d'un manuel de préparation à l'oral du CAPES (Julia, 2008). Le troisième problème qui, nous l'avons vu, a été soumis à des élèves professeurs étudiant en première année de master MEEF, a été résolu par ces élèves de diverses manières que nous analyserons.

Le problème des aires égales

Perrin (2007), après avoir formulé une conjecture dûment produite à l'issue d'un travail expérimental (« *Les aires de AMB et AMC sont égales si et seulement si M est sur la médiane de ABC issue de A* »), en présente une déduction dans le cadre d'une théorie géométrique dont il

⁷ Bien sûr, le *logos* relatif à l'expérimentation ne se réduit pas à la mise en avant de cette fonction : nous prétendons seulement que la fonction de production de conjectures est celle qui est le plus puissamment illustrée dans les exemples que nous avons analysés.

⁸ <https://gjmaths.pagesperso-orange.fr/>

⁹ Institut universitaire de formation des maîtres.

nous faudra élucider certains éléments supposés disponibles :

La preuve de la conjecture est facile : on regarde le point d'intersection A' de (AM) et de (BC) . On montre facilement (c'est le lemme du chevron, voir figure 7, qui résulte par exemple de la formule $\frac{\text{base} \times \text{hauteur}}{2}$, cf. [ME]) que l'on a $\frac{A(AMB)}{A(AMC)} = \frac{A'B}{A'C}$, de sorte que les aires sont égales si et seulement si le point A' est milieu de $[BC]$, donc si (AM) est la médiane issue de A .

Le texte renvoie (« voir figure 7 ») à une figure semblable à la figure 6 et la référence « [ME] » est (Perrin, 2005).

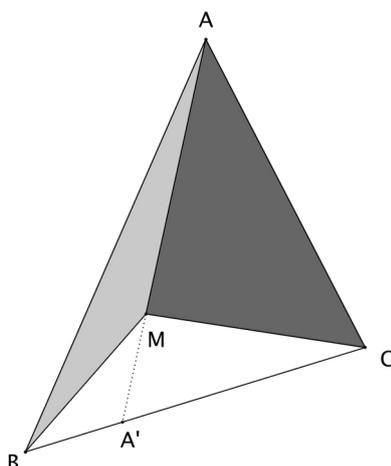


Figure 6 : Lemme du chevron (Perrin, 2007).

La « preuve de la conjecture » est donc « facile » pour autant que l'on connaisse le « lemme du chevron », ou que l'on sache le déduire « de la formule $\frac{\text{base} \times \text{hauteur}}{2}$ ». La théorie géométrique requise pour déduire la conjecture doit donc comporter ce « lemme », ou tout au moins les éléments nécessaires à son établissement.

Le problème de l'aire du quadrilatère

Après une présentation de l'exercice étudié, où il souligne que le fait de minimiser l'aire du quadrilatère pose plus de problème que la maximisation de la somme des aires des deux triangles équilatéraux (qui est, selon lui, un problème plus classique à partir de la même configuration géométrique), Gilbert Julia s'engage dans le commentaire des deux productions d'élèves données dans le sujet :

[L'élève 1] a donc expérimenté et son expérimentation l'amène à conjecturer la réponse correcte mais il a été incapable de passer à un stade de mathématisation de la situation. C'est le conseil que l'on peut lui donner [de passer à la mathématisation] (Julia, 2017, p. 2, je souligne).

On pourra donc conseiller à cet élève de « passer à un stade de mathématisation » : l'expérimentation est vraisemblablement détachée de ce prochain « stade ». Pour l'élève 2, voici les commentaires de Julia :

Cet élève tente de modéliser la situation par une fonction. On comprend qu'il a posé $x = AM$ et il exprime correctement en fonction de x les aires des deux triangles équilatéraux. Il échoue à exprimer l'aire du triangle NMP qui lui paraît être totalement quelconque. Il a parfaitement conscience de la cause de son échec.

Il a la capacité de changer de stratégie et de procéder à quelques essais qui l'amènent à émettre une conjecture exacte.

On peut conseiller à cet élève d'abord de préciser l'intervalle auquel appartient x et ensuite de

persévérer dans la voie qu'il a choisie : le triangle MNP n'est pas totalement quelconque, il devrait s'intéresser à son angle de sommet M. Dispose-t-on d'une formule permettant d'exprimer l'aire d'un triangle dont on connaît la mesure d'un angle et la longueur des côtés de ce même angle ? (Julia, 2017, p. 2, je souligne).

Les commentaires se répartissent en deux temps : un temps de commentaire sur l'expérimentation, un temps dédié à la « mathématisation ». Les liens entre les deux sont très réduits. On suggère à l'élève de « préciser l'intervalle auquel appartient x » sans que la fonction de cette précision soit donnée. Ensuite, les conseils prodigués à l'élève 2 sont spécifiques de la situation observée (ils s'appuient sur la mesure d'un angle) et consistent en des « indications ». Comme le dit le mot, l'indication « indique » « la voie » ; elle ne fournit pas de techniques didactiques qui pourraient conduire l'élève à créer lui-même « la voie » à suivre. En particulier, les indications fournies ne font pas le lien entre l'expérimentation et la mathématisation : on aurait pu par exemple suggérer à l'élève 2 de réaliser une expérimentation sur un logiciel de géométrie dynamique afin de construire un modèle algébrique de l'aire du triangle MNP (nous détaillons un tel scénario par la suite).

La correction proposée par Julia reprend cette dichotomie entre expérimentation-pour-conjecturer et mathématisation-pour-démontrer :

Il n'y a pas d'inconvénient à présenter une figure construite avec un logiciel de géométrie dynamique, par exemple celle de [l'élève 1]. On conjecture que l'aire du quadrilatère est minimale quand M est milieu de $[AB]$. Mais il faut le démontrer...

Pour cela, la démarche de l'élève 2 est reprise. On identifie sa variable maître x , en précisant que x appartient à l'intervalle $]0; 10[$. Il faut exprimer l'aire du quadrilatère en fonction de x et, pour cela, déterminer l'aire du triangle MNP que l'élève 2 n'a pas obtenue. On s'intéresse à l'angle de sommet M puis à l'expression de l'aire d'un triangle dont on connaît un angle et les côtés adjacents à cet angle. Ce qui amène à minimiser la fonction polynôme du second degré :

$A(x) = \frac{\sqrt{3}}{4}(x^2 + (10-x)^2 + x(10-x))$... Ce qu'on fait faire aux élèves soit avec l'outil de la dérivation, soit avec les techniques spécifiques au second degré (Julia, 2017, p. 3, je souligne).

Julia semble embarrassé par la difficulté de l'établissement du modèle algébrique. Le fait même que le jury du CAPES ait proposé une production d'un élève qui rencontre cette difficulté laisse pourtant penser qu'il a des attentes à cet égard : que le candidat soit capable de fournir des aides pour que l'élève surmonte cette difficulté. Voici les commentaires que Julia énonce à ce propos :

La configuration présentée dans ce sujet est assez classique. [...] La question étudiée le plus fréquemment est de maximiser la somme des aires des deux [triangles équilatéraux]. Dans le cas présent, il s'agit de minimiser l'aire d'un quadrilatère. Cette variante rend la modélisation de la situation plus difficile. L'évaluation de l'aire du quadrilatère constitue un sérieux obstacle, que l'élève 2 par exemple n'a pas réussi à surmonter (Julia, 2017, p. 2).

Puis :

Il semble qu'il n'y ait pas vraiment d'intérêt à s'intéresser à l'aire du quadrilatère ABNP plutôt qu'à la somme des aires des deux triangles équilatéraux. L'obstacle créé par le calcul de l'aire de MNP fait barrage à la réussite d'une modélisation par une fonction, la production de l'élève 2 en témoigne, alors même que l'optimisation se produit pour une position de M évidente. On ne gagne rien au change.

Il y aurait pourtant un avantage...

Un examen plus attentif de la figure dynamique fait apparaître autre chose que la conjecture « optimisation pour M milieu du segment » : il apparaît que N et P se déplacent chacun sur un côté d'un triangle équilatéral ABC de côté 10 [voir la figure 7]. De plus, le quadrilatère MNCP est un parallélogramme [...]. L'aire du quadrilatère peut dès lors se calculer de deux façons : ou bien

c'est la somme des aires de trois triangles dont MNP comme l'a dit l'élève 2, ou bien c'est l'aire du triangle ABC diminuée de l'aire du triangle CNP. L'aire du quadrilatère est minimale quand l'aire du triangle CPN est maximale.

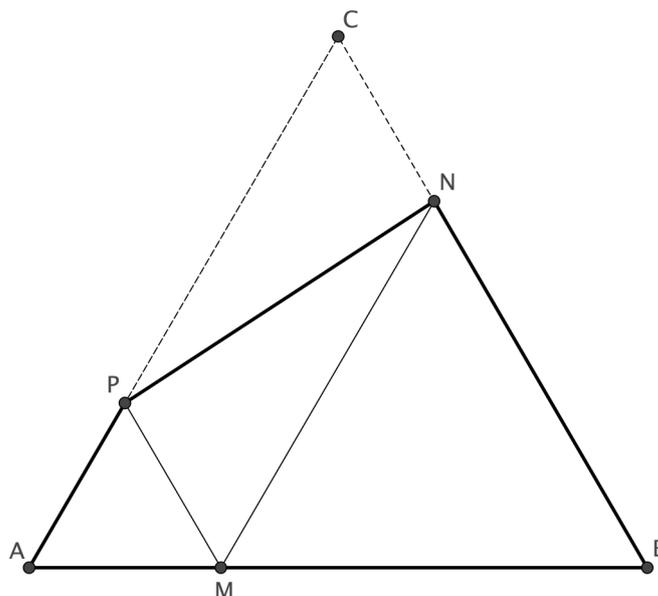


Figure 7 : Proposition de G. Julia (2017).

Certes, on ne coupe pas au calcul de l'aire de l'un des deux triangles isométriques, *CPN* ou *MNP*, mais on a maintenant l'opportunité de reformuler le problème posé [maximisation de l'aire de *CPN* plutôt que minimisation de l'aire du quadrilatère] (Julia 2017, p. 3, je souligne).

Si l'on résume : la difficulté principale réside dans l'établissement d'un modèle algébrique de la situation géométrique étudiée. Une fois un tel modèle produit, des connaissances disponibles telles que le calcul de dérivées et son exploitation pour l'étude des variations d'une fonction, ou encore des « techniques spécifiques au second degré » (qu'il conviendrait de préciser), permettent de prouver la conjecture.

Quant à la difficulté principale, celle que pose le calcul de l'aire du triangle *MNP*, on la surmonte en faisant appel à « l'expression de l'aire d'un triangle dont on connaît un angle et les côtés adjacents à cet angle ». Le long paragraphe que nous venons de citer n'apporte rien à ce sujet, il permet seulement de reformuler un problème de minimisation sous la forme d'un problème de maximisation, mais laisse entière la difficulté de calculer l'aire de *MNP*.

Le problème des triangles rectangles ayant même hypoténuse

Reprenons les travaux des élèves-professeurs dans l'ordre où nous les avons rencontrés dans leur travail d'expérimentation. Le premier élève-professeur n'a pas réussi à proposer de déduction de sa conjecture. Le second propose la justification suivante :

Élève-professeur n°2 : *On peut résoudre le problème algébriquement en posant P cm le périmètre du triangle et x cm et y cm deux longueurs des côtés de l'angle du triangle.*

On sait d'après le théorème de Pythagore que :

$$x^2 + y^2 = 8, \quad x^2 + y^2 = 64, \quad y^2 = 64 - x^2, \quad y = \sqrt{64 - x^2} \text{ car les longueurs sont positives.}$$

$$\text{On sait que } P = 8 + x + y, \text{ on a donc } P = 8 + x + \sqrt{64 - x^2}. \text{ Si on le dérive, on a : } P' = 1 - \frac{x}{\sqrt{64 - x^2}}.$$

On cherche l'extremum : $P' = 0$, on a :

$1 - \frac{x}{\sqrt{64-x^2}} = 0$, $\frac{x}{\sqrt{64-x^2}} = 1$, $x = \sqrt{64-x^2}$, $x^2 = 64-x^2$, $2x^2 = 64$, $x^2 = 32$, $x = \sqrt{32}$ car les longueurs sont positives.

$$y = \sqrt{64-x^2} = \sqrt{64-32} = \sqrt{32}.$$

Le périmètre maximal du triangle rectangle avec l'hypoténuse de longueur 8 cm est de $8 + 2\sqrt{32}$ cm.

Le travail d'expérimentation se limite ici pour l'essentiel à un travail sur le modèle algébrique (Chevallard, 1992 ; voir la section 1.3. ci-après pour une explicitation de ce point) qui avait été proposé par l'élève-professeur dans son premier travail d'expérimentation (« on calcule la somme de chaque côté du triangle en variant les deux longueurs des côtés de l'angle ») : il introduit des notations pour les mesures des deux longueurs des côtés de l'angle droit, puis il travaille le modèle de façon à établir une relation entre les deux variables et exprime l'une en fonction de l'autre. Ensuite, il met en œuvre une technique d'étude proche de celle qu'un élève de première ou de terminale scientifique mettrait en œuvre.

Le troisième élève professeur propose une résolution relativement proche de celle-ci :

Élève-professeur n°3 : On pourrait proposer cet exercice en classe de 1^{re} S puisqu'il faut avoir des connaissances sur les équations de cercle. En effet pour le résoudre algébriquement il faut exprimer les longueur AC et BC grâce au projeté de C sur AB appelé H on obtient alors deux triangles rectangles AHC et BHC avec $AH = x$ d'après l'équation du cercle qui est $(x-4)^2 + y^2 = 16$. À partir de Pythagore on obtient AC et BC en fonction de x l'abscisse de C. On a alors en 1^{re} les élèves doivent connaître (sic) le sens de variations du type \sqrt{u} avec u une fonction connue.

La variable indépendante choisie (la distance AH) ne correspond à aucune de celles qui sont utilisées dans l'expérimentation proposée par cet élève professeur (mesures des deux côtés de l'angle droit). L'expérimentation menée pour produire la conjecture ne joue donc aucun rôle dans sa déduction.

Considérons enfin la production du quatrième élève-professeur :

Élève-professeur n°4 : Pour les trois conjectures, le but de l'exercice est de déterminer le maximum d'une fonction à l'aide notamment de son tableau de variation qu'on déterminera à l'aide du signe de sa dérivée. On utilisera alors les dérivés des fonctions trigonométriques, ainsi que la dérivée d'une fonction composée du type \sqrt{u} .

Résolutions :

Pour la conjecture avec l'arc de cercle et celle de l'angle :

Soit $x =$ longueur de l'arc de cercle \widehat{AC} ou $x = \widehat{ABC}$.

Ici on pose, $x = \widehat{AC}$, sachant que $\widehat{AC} = \frac{\widehat{ABC}}{2}$.

On obtient $P(x) = 8 \left(1 + \frac{\cos(x)}{2} + \frac{\sin(x)}{2} \right)$ avec P le périmètre en fonction de x. En dérivant, on obtient que le maximum qui (sic) vaut 90°.

Avec la deuxième conjecture,

Soit $x = AC$, $P = x + 8 + \sqrt{64-x^2}$. Le périmètre est maximum quand $x = \sqrt{32}$.

Cette fois, les modèles sont en adéquation assez proche avec le travail d'expérimentation qui a été mené précédemment : les variables indépendantes sont celles qui ont été amenées lors de la production de la conjecture et le lien entre expérimentation (pour conjecturer) et déduction est plus visible que dans les productions des autres élèves. La résolution du problème repose

cependant toujours, *in fine*, sur l'utilisation de techniques à connaître, ici relatives au calcul de dérivées, et l'expérimentation n'y joue qu'un rôle très réduit — même si ici la consigne laissait les élèves professeurs libres du choix du niveau d'étude.

1.3. Un paradoxe didactique

Les trois exemples qui précèdent donnent à voir une typologie assez restreinte du travail à caractère expérimental qui peut se mener dans le cadre de l'activité mathématique. Pour l'essentiel, l'expérimentation y a une *fonction d'anticipation* (voir Artaud, 2003) et aboutit à la formulation de conjectures. Elle n'est jamais utilisée dans une visée de *contrôle* ou de *vérification* (dans les situations présentées dans les sections précédentes, aucun des modèles algébriques produits n'est contrôlé par l'usage d'une calculatrice graphique ou d'un logiciel de géométrie dynamique). Lorsqu'elle est mise en œuvre dans le cadre de la preuve des conjectures, l'expérimentation consiste essentiellement en un travail d'un modèle en vue de produire un nouveau modèle (passage, par exemple, d'un modèle algébrique à un modèle fonctionnel).

En particulier, on ne rencontre pas, dans ces trois situations, de technique qui consisterait à travailler un modèle au-delà du moment où il a fourni ce qu'on attendait de lui — et qui, donc, se résume à une conjecture générale venant répondre à la question initiale qui était posée. On observe au contraire des hiatus entre ce qui est clairement perçu comme de l'expérimentation (souvent parce qu'on l'associe à l'usage d'un appareillage identifié comme expérimental : la calculatrice ou le logiciel de géométrie dynamique) et le travail de « mathématisation », de déduction des conjectures dans une théorie mathématique disponible. On peut induire de cela que l'élément de *logos* que nous avons identifié plus haut, « l'expérimentation, en mathématiques, sert à produire des conjectures », pourrait bien prendre la forme suivante dans le *logos* de la profession (et de ses entours noosphériens) : « l'expérimentation, en mathématiques, ne sert qu'à produire des conjectures ».

Bien sûr, il ne s'agit pas de prétendre que chacune des personnes dont nous avons étudié les productions reprendrait à son compte un tel précepte, mais plutôt de mettre en évidence le fait que leur *praxis* telle qu'elle apparaît dans leurs productions est globalement cohérente avec celui-ci, et qu'elle est à tout prendre *en meilleure adéquation avec lui qu'avec une autre représentation* du travail expérimental en mathématiques que nous dégagerons dans la suite de ce travail.

Remarquons également que l'indigence expérimentale à laquelle mène un tel précepte (inconscient) conduit à un appauvrissement du milieu sur lequel on pourrait s'appuyer pour produire une déduction de l'énoncé conjecturé¹⁰, comme l'indiquent Boero, Garuti et Lemut (2007) :

we want to stress some aspects of continuity, concerning the production, during the conjecturing phase, of the elements ("arguments") that will be used later during the construction of the proof (Boero, Garuti & Lemut, 2007, p. 249).

Bartolini Bussi souligne également que :

there are good reasons to believe that conjecturing through exploration before proving might be very useful. Yet, when conjecture production is too fast, it might offer no element to be used in the proving process. Hence it is useful to look for strategies that slow down the conjecture production and encourage effective exploration of the problem. The time spent in conjecture production is not

¹⁰ Un autre point de vue pourrait conduire à regretter que l'on ne voie pas le processus de construction de la preuve comme un processus dialectique où la formulation de conjectures successives trouve naturellement sa place.

wasted and may be recovered in the proof construction (Bartolini Bussi, 2010, p. 229, je souligne).

À l'inverse, si le temps consacré à la « *conjecture production* » est insuffisant, il y a toutes les chances pour que le « *proving process* » ne puisse se réaliser qu'au moyen d'outils *déjà-là* avant l'expérimentation : du point de vue du professeur, la théorie mathématique supposée « disponible » devient alors pléthorique. On suppose ainsi connu le « *lemme du chevron* » (Perrin, 2007), ou bien le calcul des dérivées, ou encore telle formule donnant « *l'aire d'un triangle dont on connaît la mesure d'un angle et la longueur des côtés de ce même angle* » (Julia, 2017). Dans tous les cas, la distance alors produite entre ce qui est connu du système étudié et ce qu'engage le processus de preuve accroît la difficulté spécifique à la construction de la preuve :

the greater is the gap between the exploration needed to appropriate the statement and the proving process, the greater is the difficulty of the proving process (Garuti, Boero & Lemut, 1998).

Reprenant ici une terminologie introduite par Chevallard (Ladage & Chevallard, 2011, p. 87), on observe à l'œuvre un habitus rétrocognitif :

le mode d'étude rétroactif tend à faire que, dans le milieu M du schéma herbartien développé, n'apparaîtront guère que des réponses R° et des œuvres déjà connues de l'enquêteur, au lieu d'avoir été (re) découvertes (voire créées) pour les besoins de l'enquête.

Le schéma herbartien, rappelons-le (Chevallard, 2007), a vocation à modéliser les situations d'étude et en particulier les situations d'enquête. Dans sa forme semi-développée, il exprime le fait, pour une communauté d'étude X et un collectif d'aides à l'étude Y , de se constituer en système didactique $S(X, Y, Q)$ pour étudier une question Q , de constituer à cette fin un milieu pour l'étude M et de l'utiliser de façon à produire une réponse R^\vee à la question Q . Le schéma herbartien semi-développé prend la forme suivante :

$$[S(X, Y, Q) \Rightarrow M] \Rightarrow R^\vee.$$

Une attitude rétrocognitive consiste précisément à se satisfaire d'un milieu M restreint, pour l'essentiel, à du déjà su — et, plus profondément, à considérer que c'est là un mode d'étude satisfaisant la plupart du temps, ou même que c'est le seul mode d'étude possible.

Pour préciser les enjeux qui sont les nôtres ici, il est utile d'amener un autre élément théorique relevant de la TAD :

On désignera par [l'expression « équipement praxéologique »] le complexe des praxéologies qu'une personne ou une institution « possède », « maîtrise », « met en branle ». Nous aurons l'occasion de voir que, très souvent, c'est son équipement praxéologique qui, en vérité, « possède », « maîtrise », « met en branle » la personne ou l'institution, tant celle-ci a ordinairement du mal à s'en émanciper en faisant évoluer cet équipement même — ce qui est un très grand problème didactique (Ladage & Chevallard, 2011, p. 88).

L'attitude rétrocognitive se traduit donc par le fait de n'admettre dans le milieu que des praxéologies qui relèvent d'ores et déjà de l'équipement praxéologique disponible pour la communauté X , ou pour la « classe » $[X, Y]$. Bien souvent, dans les institutions scolaires, le professeur y limitera sciemment la richesse praxéologique du milieu de l'étude aux praxéologies dont il sait ou croit savoir qu'elles constituent l'équipement praxéologique déjà disponible des élèves X .

Les situations étudiées ici ont été choisies parce qu'elles mettent en évidence la limite d'une telle attitude : la disponibilité du lemme du chevron, ou d'une technique de détermination de l'aire d'un triangle connaissant un de ses angles et les mesures des côtés de cet angle, est très peu

probable dans la plupart des classes de collège ou de lycée. Si le calcul des dérivées est généralement disponible en classe de première, le troisième problème pose tout de même la question de l'adéquation de l'outil à la tâche à réaliser : ne peut-on pas étudier ce problème sans disposer de cet outil ?

En outre, ce type de situations, où le savoir supposé disponible pour pouvoir avancer n'est, en fait, pas disponible, est paradigmatique de l'étude en général. Si l'objectif de la classe $[X, Y]$ est bien de construire une praxéologie \wp nouvelle (pour la classe), pour réaliser un certain type de tâches T , elle se trouve confrontée à une situation paradoxale : mise en demeure de réaliser un certain type de tâches, dans des conditions telles qu'elle ne peut pas le faire avec les praxéologies disponibles dans son équipement praxéologique, elle doit pourtant le faire, mais en mettant en œuvre une praxéologie... dont elle ne dispose pas encore. Ce nœud est inévitable puisqu'il est au cœur de l'apprentissage : on sait depuis Bachelard et Brousseau qu'on ne peut apprendre que mis dans une situation où *on ne sait pas faire*.

Ce paradoxe est à l'œuvre dans les trois situations que nous venons de présenter : on ne peut pas répondre aux questions posées si on ne dispose pas d'un savoir et d'un savoir-faire que, par ailleurs, l'étude de ces situations pourrait clairement contribuer à faire émerger. On pourrait en effet utiliser la situation proposée par Perrin pour faire émerger un ingrédient technologico-théorique relatif au partage d'un triangle en deux triangles d'aires égales (la notion de médiane) ; on pourrait utiliser la situation proposée dans le sujet d'oral 2 pour faire émerger une technique de calcul d'aire d'un triangle (dans le cas où on connaît un angle et les mesures des côtés adjacents à cet angle) ; on pourrait utiliser le problème soumis aux étudiants de M1 MEEF pour faire émerger des techniques d'optimisation.

On peut objecter que ces situations gagnent également à être étudiées comme des « problèmes » permettant de vérifier l'acquisition de certaines praxéologies mathématiques. C'est vrai, mais il est intéressant de noter que, ayant à parler du rôle de l'expérimentation dans les mathématiques, Perrin l'évoque dans le contexte de la résolution de problèmes, et non dans celui de la production de nouveaux savoirs : il apparaît en effet que l'expérimentation prend tout son sens dans les processus d'étude conduisant à la *production*, et non seulement à l'*utilisation* de praxéologies mathématiques.

2. Expérimenter et déduire : deux pôles en tension

La résolution du paradoxe passe par l'inclusion dans l'équipement praxéologique de la classe¹¹ $[X, y]$ de praxéologies *didactiques*, de praxéologies d'étude qui ne sont pas strictement réductibles à des praxéologies mathématiques enjeux de l'étude (qui pourraient par exemple faire l'objet d'une évaluation en classe). Mais on n'avance guère si l'expérimentation se réduit à la formulation d'une conjecture avant le passage aux choses sérieuses, c'est-à-dire à la déduction proprement dite. En réalité, l'expérimentation est ce qui, dans tout processus d'étude, contribue à la production de nouvelles connaissances sur le système étudié. Plus précisément :

Chaque fois, en effet, que nous avons rencontré un système, nous n'avons pas eu à le manipuler pour produire des connaissances à son propos, soit que nous ayons utilisé des connaissances antécédentes le concernant, soit que nous l'ayons modélisé pour tirer, de notre connaissance antécédente de ce système qu'est le modèle obtenu, des connaissances quant au système modélisé lui-même. [...]

¹¹ Dans l'institution qui nous concerne, l'École, le collectif des aides à l'étude Y , est le plus souvent un singleton $\{y\}$, réduit au professeur, qu'on notera y sans risque de confusion.

Il y a expérience quand il y a manipulation d'un système. Or la construction d'un modèle n'appelle pas forcément une manipulation du système à modéliser. En revanche, l'étude du modèle appelle presque toujours une expérience sur le modèle devenu (fonctionnellement) système, afin de produire des connaissances relatives au système, ou pour produire un modèle du modèle (récurrence des modèles). L'expérience se concentre dans le travail du modèle (Chevallard, 1992, pp. 10-12, souligné dans le texte).

La grande affaire est bien de « produire des connaissances » à propos d'un système (serait-il modèle d'un autre système). Et faire parler de la sorte un système dénué d'intention didactique (un élément du milieu) nécessite un outillage expérimental qui n'a rien à envier à celui du chimiste :

L'expérience suppose, plus précisément, un objet de l'expérience, ce que nous avons appelé au fond un système (en n'oubliant pas qu'un système, même matériel, est toujours construit théoriquement, n'est jamais un pur donné).

À ce système, l'expérience fera subir une manipulation, réglée par un montage expérimental. La détermination de la manipulation à effectuer se fait en fonction de ce que l'on recherche, et en fonction de la théorie (savoir et connaissances) dont on dispose (Chevallard, 1992, p. 9).

La richesse de l'étude dépend donc étroitement du savoir-faire du manipulateur expérimentateur : les *manipulations* qu'il sait opérer sur un système donné, les *montages expérimentaux* qu'il est capable de réaliser, etc.

Déduire une assertion au sein d'une théorie qui ne la comprend pas encore nécessite généralement de produire de nouvelles connaissances à propos de systèmes dont cette théorie est la théorie : systèmes géométriques pour la théorie géométrique, systèmes algébriques pour la théorie algébrique, etc. Autrement dit, *pour déduire*, il est *nécessaire* de produire des connaissances à propos de modèles de ces systèmes et, pour cela, d'*expérimenter*. L'expérimentation, en droit comme en fait, ne se cantonne jamais, dans le travail mathématique, à la production de conjectures — ou alors en tenant compte du fait que tout travail de *production* de la preuve comporte un mouvement dialectique entre la production de conjectures en grand nombre et leur déduction. Tout se passe en fait comme si, dans la profession et sa noosphère, on en était venu à confondre la *production* de la preuve — qui inclut le travail expérimental — et sa *mise en forme* discursive qui, elle, exclut le recours à l'expérimentation.

On retrouve cette difficulté à penser la production de la preuve comme un processus dialectique dans les études portant sur les liens entre argumentation et démonstration (Balacheff, 1987 ; Duval, 1991 ; Duval, 1993 ; Garuti, Boero & Lemut, 1998 ; Boero, Garuti & Mariotti, 1996 ; Pedemonte, 2006) qui cherchent à analyser les (dis)continuités (dont une formulation due à l'école italienne se fonde sur l'idée de *cognitive unity*) entre les structures argumentatives des conjectures et les structures déductives des preuves :

D'abord nous pensons que l'unité cognitive peut être analysée en considérant tout le processus de résolution d'un problème de conjecture et de démonstration. L'identification des deux phases de production de la conjecture et de construction de la démonstration n'est pas si évidente : il se peut qu'elles restent implicites ou imbriquées (Pedemonte, 2006, p. 318, je souligne).

L'imbrication du travail de « *production de la conjecture et de construction de la démonstration* » est une autre façon de désigner le caractère dialectique entre la production de conjectures et celle de preuves, ou encore, pour ce qui nous intéresse ici, entre la réalisation d'expérimentations et la production de déductions : le processus de « *construction de la démonstration* » ne se distingue pas du processus de « *production de la conjecture* » — pour la bonne raison qu'il s'agit d'un seul et même processus consistant en la mise en œuvre d'une seule

technique, dialectique, de conjecture et de déduction.

Reprenons l'étude des trois problèmes rencontrés précédemment afin d'envisager la place plus importante que pourrait s'y faire le travail d'expérimentation.

Le problème des aires égales

Commençons par remarquer que la technique expérimentale proposée par Perrin est extrêmement fruste ; on pourrait lui substituer une technique reposant sur un algorithme : on génère aléatoirement un grand nombre de points M , pour lesquels on calcule le rapport des aires des triangles AMB et AMC ; on ne retient que ceux d'entre eux pour lesquels ce rapport est proche de 1, à une précision donnée (0,1 par exemple) ; ayant observé que le nuage de ces points semble se concentrer autour d'une droite passant par A , impression que l'on peut renforcer en renouvelant l'expérience précédente à une précision plus élevée, on détermine, parmi toutes les droites issues de A , celle qui minimise la somme des carrés des distances des points M retenus à cette droite — on peut par exemple considérer toutes les droites (AN) , où N est sur le segment $[BC]$, et faire une boucle en incrémentant $\frac{AN}{AB}$. Enfin, on calcule le rapport $\frac{AN}{AB}$ pour cette droite et on constate qu'il est proche de $\frac{1}{2}$ (si le nombre de points simulés est suffisamment grand, etc.). Si une telle expérimentation peut sembler démesurément compliquée pour l'objectif à atteindre, il faut noter que c'est probablement parce qu'elle repose sur des mathématiques plus développées, et en quantité plus élevée, que l'expérimentation évoquée par Perrin qui, elle, requiert surtout une bonne maîtrise du logiciel de géométrie dynamique, mais ne fait pas appel à des mathématiques particulièrement subtiles. C'est là un trait constant que l'on retrouve : la part du mathématique dans l'expérimentation est généralement minime.

Partant de la conjecture proposée par Perrin, on peut désormais essayer de comprendre pourquoi ces deux triangles peuvent être de même aire. Un élève reviendra probablement à la technique de calcul de l'aire d'un triangle : on calcule le demi-produit d'un côté par la hauteur issue du sommet opposé à ce côté. Puisqu'on cherche à déterminer les points M pour lesquels les deux triangles ont même aire, le chemin sera déjà facilité si l'on peut déterminer un côté de chaque triangle de sorte que ces deux côtés soient de même longueur : il restera ensuite à déterminer les points M pour lesquels les hauteurs correspondantes sont de même longueur. Or les côtés $[AB]$ et $[AC]$ n'ont aucune raison d'être égaux (le triangle ABC n'est pas supposé isocèle), et une expérimentation rapide (figure 8) permet de s'assurer que les aires peuvent être égales sans que les segments $[MB]$ et $[MC]$ soient égaux.

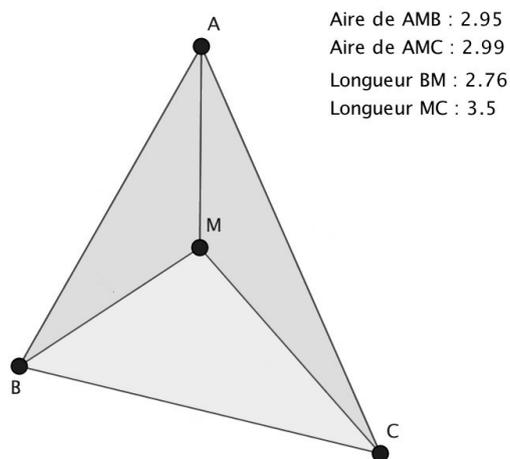


Figure 8 : Aires égales, $MB \neq MC$.

Il ne reste donc qu'une possibilité, qui s'avère évidente : les côtés $[AM]$ du triangle AMB et $[AM]$ du triangle AMC sont confondus, donc de même longueur. On peut donc reformuler la conjecture de la manière suivante : les mesures des hauteurs des triangles AMB et AMC issues des points B et C sont égales si et seulement si M est sur la médiane issue de A dans le triangle ABC . L'expérimentation, qui consiste ici à tracer les hauteurs issues de B et de C , à faire afficher simultanément les aires des deux triangles et les longueurs des deux hauteurs, permet de valider cette conjecture (figure 9).

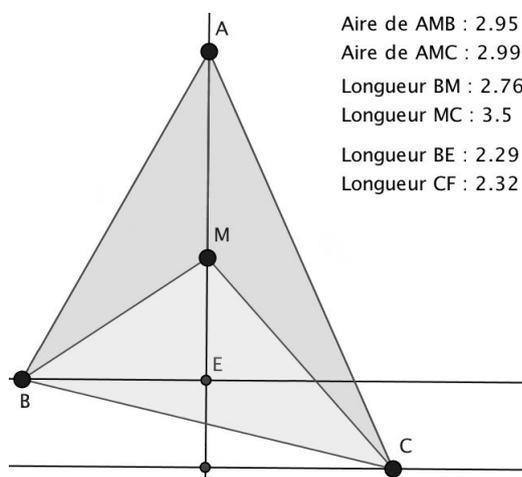


Figure 9 : Hauteurs BE et CF égales.

On peut poursuivre le travail du modèle en exploitant les *connaissances produites* jusqu'ici : le point M convient si les segments parallèles $[BE]$ et $[CF]$ sont de même longueur — en effet, ces segments sont perpendiculaires à une même droite, (AM) . Cela conduit à proposer un autre modèle géométrique du système considéré : on étudie désormais le quadrilatère $BECF$ et ce qu'on a établi jusqu'ici se traduit dans ce nouveau modèle de la manière suivante, « les aires des triangles AMB et AMC sont égales si et seulement si $BECF$ est un parallélogramme ». L'introduction du quadrilatère $BECF$ dans le milieu est une manipulation expérimentale. Les connaissances (supposées disponibles) sur les parallélogrammes permettent alors de passer à un modèle constitué des seules diagonales de $BECF$, et à reformuler encore ce que l'on sait : « les aires des triangles AMB et AMC sont égales si et seulement si $[EF]$ et $[BC]$ se coupent en leurs milieux ». En particulier, « si les aires sont égales, alors (AM) est la médiane issue de A dans ABC », puisqu'alors (AM) , et donc $[EF]$, passe par le milieu de $[BC]$. La réciproque est également vraie puisque, si (AM) n'est pas cette médiane, alors elle ne coupe pas $[BC]$ en son milieu, et donc $[EF]$ ne coupe pas $[BC]$ en son milieu et $BECF$ n'est donc pas un parallélogramme, ce qui suffit à prouver que les aires de AMB et AMC ne sont pas égales.

À titre de comparaison, nous donnons ici une présentation du « théorème du chevron » tirée d'un bulletin de l'APMEP (figure 10, voir Laur, 2006).

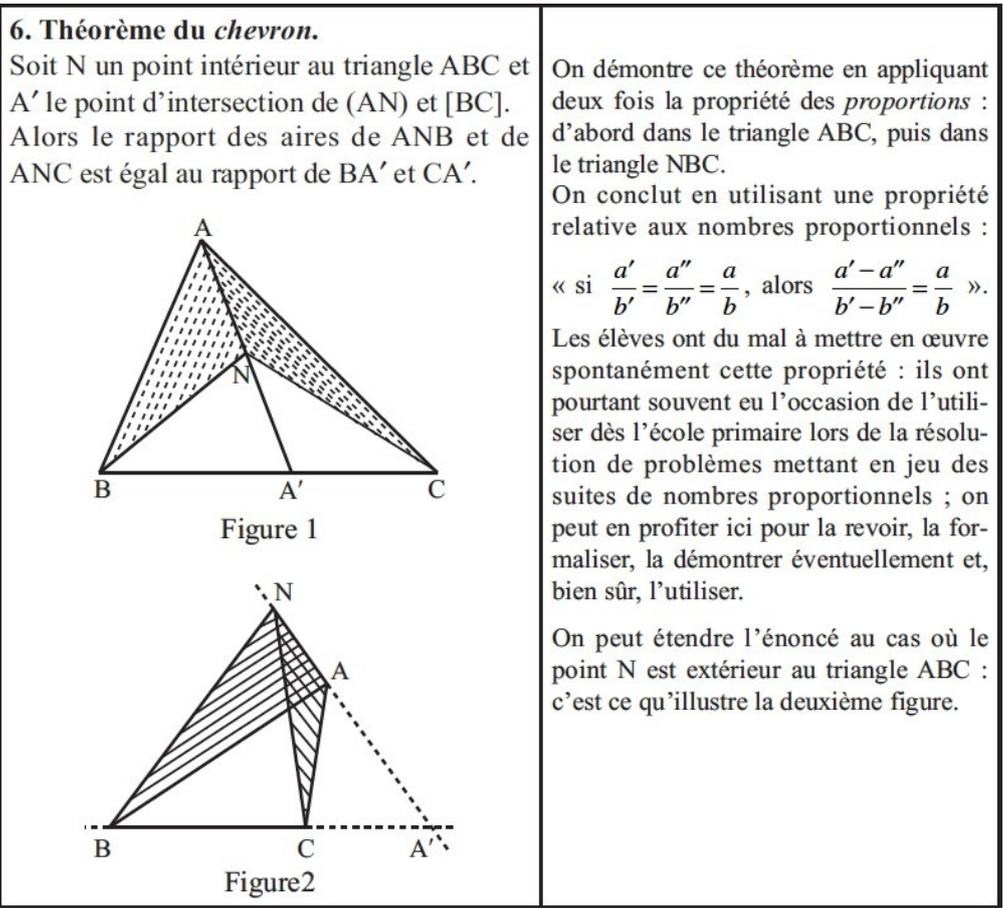


Figure 10 : Une déduction du théorème du chevron.

Du point de vue des praxéologies d'expérimentation, on produit ici un modèle géométrique d'un système algébrique : ayant à l'esprit l'une des formules donnant l'aire d'un triangle (comme demi-produit d'une de ses bases et de la hauteur correspondante), on produit plusieurs modèles géométriques de cette formule. Pour cela, on choisit différents appariements base/hauteur pour les deux triangles ABM et ACM , jusqu'à ce que l'un de ces choix conduise à un modèle géométrique intéressant (les deux bases confondues) ; sur ce nouveau système, on réalise une *manipulation* consistant à tracer les deux hauteurs issues des points B et C et leurs pieds E et F ; une dernière manipulation consiste ensuite à tracer le quadrilatère $BECF$.

Le problème de l'aire du quadrilatère

On s'intéresse ici, non à la résolution du problème d'optimisation de l'aire du quadrilatère, mais seulement à la production du modèle algébrique de ce problème : trouver une expression algébrique de l'aire de ce quadrilatère s'avère une difficulté importante, comme nous l'avons vu dans la section précédente.

Partant de la situation étudiée (figure 2), on peut (avec *GeoGebra*) construire un point D de même abscisse que le point M et d'ordonnée la mesure de l'aire du quadrilatère $ABNP$. Ceci permet déjà de produire une conjecture : l'aire semble minimale lorsque le point M est le milieu du segment $[AB]$ (figure 11).

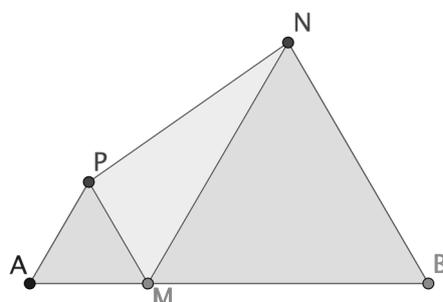


Figure 11 : Trace du point D.

Néanmoins, cette conjecture reste relativement pauvre et l'expérimentation menée ne permet guère d'aller très loin en termes de modélisation. On peut alors chercher à tirer plus d'informations de cette figure à l'aide du tableur de *GeoGebra*, en enregistrant les valeurs prises par l'abscisse de *M* et la mesure de l'aire de *ABNP* (figure 12), puis en traçant les points associés à ces jeux de coordonnées ainsi qu'un « modèle d'ajustement » (représenté par la courbe continue) polynomial de degré 2 (voir figure 13).

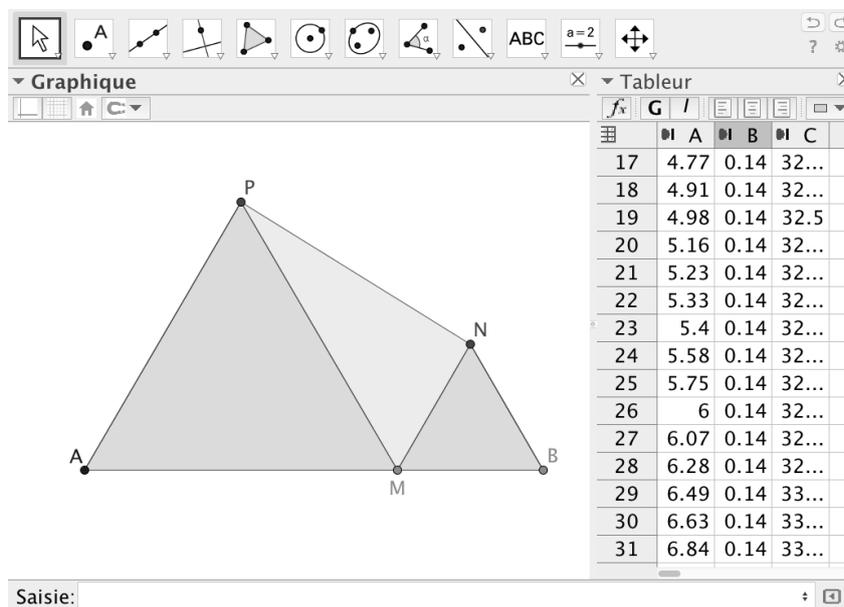


Figure 12 : Acquisition de l'aire en fonction de l'abscisse de *M*.

L'équation donnée par le logiciel pour la courbe d'ajustement est : « $y=0.433x^2-4.3301x+43.3013$ » lorsqu'on impose un arrondi à 4 décimales. Par ailleurs, cette équation varie peu lorsqu'on demande un modèle d'ajustement de degré supérieur à 2 : les termes de degré supérieur à 2 semblent nuls, comme on peut s'en convaincre avec l'équation fournie par *GeoGebra* pour un modèle d'ajustement polynomial de degré 9, équation dont les

termes de degré supérieur ou égal à 3 sont nuls même avec un affichage à 10 décimales (un affichage à 15 décimales fournit des coefficients non nuls très petits). Cela permet d'établir expérimentalement des valeurs approchées des coefficients du polynôme trouvé.

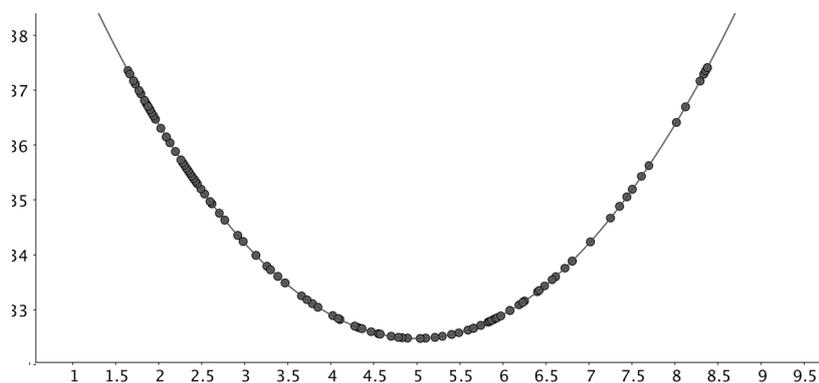


Figure 13 : Modèle d'ajustement polynomial de degré 2.

Cette expérimentation, tout en permettant de conjecturer la minimalité de l'aire pour la même position de M , fournit plus d'informations : la relation de dépendance entre l'abscisse de M et l'aire du quadrilatère semble être de type polynomial de degré 2. Il est difficile de conjecturer les valeurs exactes des coefficients mais on constate que $\frac{0,433}{4,3301}$ et $\frac{4,3301}{43,3013}$ sont à peu près égaux à 0,1. On en déduit que les trois coefficients sont probablement égaux à des facteurs -10 et 100 près. La solidité de cette conjecture est renforcée si l'on pousse l'affichage à 15 décimales, ce qui donne les coefficients suivants pour les termes de degré inférieur ou égal à 2 : $0,433012701892304$, $-4,33012701892233$, et $43,301270189220794$.

En notant $y=ax^2+bx+c$ l'expression algébrique (conjecturale) de la relation de dépendance entre l'aire et l'abscisse du point M , on peut donc conjecturer que $c=-10b=100a$. On peut donc (si cette conjecture est vraie) déterminer la valeur de a , b et c uniquement en déterminant la valeur de c qui est celle de l'aire lorsque $x=0$, c'est-à-dire lorsque M est en A . Le calcul de c permettrait en retour de conforter nos conjectures si une valeur approchée de ce nombre est proche de $43,3$. Lorsque M est en A , le quadrilatère est un triangle ABN équilatéral de côté 10 cm . Son aire vaut alors :

$$10 \frac{\sqrt{3}}{2} \times 5 \text{ cm}^2 = 25 \sqrt{3} \text{ cm}^2 \approx 43,30127018922193 \text{ cm}^2.$$

À l'issue de cette expérimentation, on obtient une valeur de c proche de celle trouvée expérimentalement au moyen de *GeoGebra*. Cela vient renforcer les conjectures faites pour établir cet élément du modèle algébrique, et on peut donc penser que la valeur exacte de c serait en réalité $25\sqrt{3}$.

On peut également essayer (même si ce n'est pas nécessaire, comme nous le verrons) de valider la conjecture portant sur a , b et c ($c=-10b=100a$), conjecture qui n'est validée expérimentalement qu'à 12 décimales pour le nombre c (sur les quinze décimales affichées). On peut exploiter par exemple une information supplémentaire que l'on dégage de l'expérimentation qu'on vient de mener : le caractère symétrique du problème (qui se vérifie par la symétrie de la courbe par rapport à la médiatrice du segment $[AB]$). Cette symétrie se traduit par les égalités suivantes: $\text{aire}(x_{\text{milieu}}-x) = \text{aire}(x_{\text{milieu}}+x)$, c'est-à-dire $\text{aire}(5-x) = \text{aire}(5+x)$. En écrivant cette égalité pour un polynôme de degré 2 quelconque ax^2+bx+c , on obtient : $20ax+2bx=0$, soit

finalement $10a+b=0$. On est donc parvenu à déduire la relation $b=-10a$ des conjectures déjà faites.

Pour le moment, admettons que l'égalité $c=100a$ est également vraie (elle est expérimentalement avérée ; imaginons que, pour l'heure, nous ne soyons pas parvenus à la déduire de la théorie disponible). Nous parvenons alors à l'expression suivante pour la mesure de l'aire du quadrilatère :

$$\text{aire}(x) = \frac{c}{100}(x^2 - 10x + 100) = \frac{\sqrt{3}}{4}(x^2 - 10x + 100).$$

Vérifions expérimentalement¹² que cette expression (*partiellement déduite, partiellement conjecturée*, à quoi l'on voit une fois de plus le caractère dialectique du travail de production de la preuve) coïncide à un bon degré de précision avec la courbe d'ajustement de la figure 13. On crée pour cela une nouvelle colonne dans le tableur, où l'on saisit la valeur exacte de la mesure de l'aire (voir figure 14).

	A	B	C	D	E
1	x(M)	y(M)	poly3		
2	6.8...	0.14	33.88571865...	33.88571865...	
3	6.7...	0.14	33.75608865...	33.75608865...	
4	6.6...	0.14	33.60284116...	33.60284116...	
5	6.4...	0.14	33.32564622...	33.32564622...	

Figure 14 : Saisie de la valeur exacte de la mesure de l'aire.

Puis on trace le nuage de points dont les coordonnées sont les paires de valeurs tirées d'une même ligne dans les colonnes C et D (voir figure 14, les valeurs dans la colonne C sont les valeurs expérimentales, les valeurs dans la colonne D sont les valeurs calculées par le tableur à partir de l'élément théorique partiellement déduit précédemment). On obtient un nuage de points bien approché par la droite d'équation $y=x$, comme l'indique la figure 15 (les résidus, c'est-à-dire les écarts à la droite d'ajustement sont tous compris strictement entre $-0,0001$ et $0,0001$, et l'équation de la droite d'ajustement donnée par *GeoGebra* est $y=x-0,0000000000001985$).

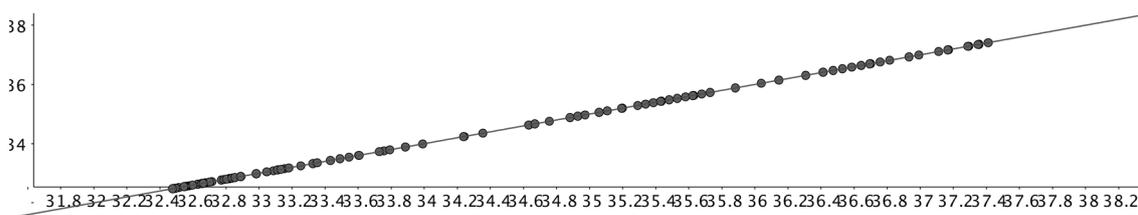


Figure 15 : Bonne approximation du nuage par la droite d'équation $y=x$.

Si l'on se résume, nous avons conjecturé que l'expression de la mesure de l'aire en fonction de l'abscisse du point M est donnée par une relation polynomiale de degré 2, de la forme $\text{aire}(x)=ax^2+bx+c$ (conjecture C_1). Nous avons par ailleurs admis la relation $c=100a$ (conjecture C_2), et établi (sous réserve que l'expression soit bien polynomiale de degré 2 et que

¹² Alors que dans ce qui précède, l'usage des TICE avait principalement une fonction d'anticipation, elles réalisent ici une fonction de vérification (Artaud, 2003).

sa courbe possède un axe de symétrie d'équation $x=5$, C_3) la relation $b=-10a$. On a pu établir que l'expression exacte de la mesure de l'aire était nécessairement (sous les hypothèses C_1 , C_2 et C_3) :

$$\text{aire}(x) = \frac{\sqrt{3}}{4}(x^2 - 10x + 100).$$

Il reste donc à établir la véracité des conjectures C_1 , C_2 et C_3 . Où peut encore nous avancer l'expérimentation ? Reprenons le travail sur l'expression algébrique de l'aire : l'aire du quadrilatère $ABNP$ est la somme des aires des triangles AMP , MPN et MBN . Les triangles AMN et MBP sont équilatéraux, de côtés respectifs x cm et $(10-x)$ cm. On peut donc en déduire que leurs aires sont données par¹³ :

$$\text{Aire}_{AMP}(x) = \frac{\sqrt{3}}{4}x^2 \text{ cm}^2, \text{ et } \text{Aire}_{MBN}(x) = \frac{\sqrt{3}}{4}(10-x)^2 \text{ cm}^2.$$

On a donc :

$$\text{Aire}(x) = \text{Aire}_{ABNP}(x) = \frac{\sqrt{3}}{4}x^2 \text{ cm}^2 + \frac{\sqrt{3}}{4}(10-x)^2 \text{ cm}^2 + \text{Aire}_{MNP}(x).$$

En admettant toujours que l'expression de la mesure de l'aire du quadrilatère $ABNP$ établie précédemment est correcte, on obtient :

$$\text{Aire}_{MNP}(x) = \frac{\sqrt{3}}{4}(x^2 - 10x + 100) \text{ cm}^2 - \frac{\sqrt{3}}{4}x^2 \text{ cm}^2 - \frac{\sqrt{3}}{4}(10-x)^2 \text{ cm}^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}(10x - x^2) \text{ cm}^2.$$

L'expérimentation permet donc de parvenir à conjecturer une expression (qui s'avérera exacte) de l'aire du triangle MPN , sans faire appel à des connaissances sur le calcul de « l'aire d'un triangle dont on connaît la mesure d'un angle et la longueur des côtés de ce même angle » (Julia, 2017). Mais on peut pousser plus loin le travail sur le modèle et quelques connaissances du calcul des grandeurs permettent d'avancer encore en direction d'une déduction proprement dite de la formule exacte de l'aire de ce triangle.

Comme $\text{Aire}_{MNP}(x)$ est une aire, c'est une grandeur produit (de deux longueurs). Ceci guide le calcul et conduit à faire une factorisation en deux facteurs de l'espèce « longueur » de l'expression $(10x - x^2) \text{ cm}^2$, que l'on peut déjà lire ainsi : $10 \text{ cm} \times x \text{ cm} - x \text{ cm} \times x \text{ cm}$. On peut ensuite factoriser par $x \text{ cm}$, ce qui conduit à l'expression suivante :

$$\text{Aire}_{MNP}(x) = \frac{\sqrt{3}}{4}x \text{ cm} \times (10-x) \text{ cm}.$$

Ce produit, qui donne l'aire d'un triangle, peut donc se comprendre comme le demi-produit de deux longueurs (une hauteur et la longueur du côté correspondant) :

$$\text{Aire}_{MNP}(x) = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}x \text{ cm} \times (10-x) \text{ cm}}{2}.$$

¹³ Nous travaillons désormais avec les grandeurs, pour des raisons qui apparaîtront plus bas. Pour cette raison, nous notons « Aire » la grandeur dont « aire » est une mesure en cm^2 .

On a plusieurs possibilités. Les plus simples sont les suivantes : l'aire est le demi-produit de la longueur $\frac{\sqrt{3}}{2}x$ cm et de la longueur $(10-x)$ cm, ou bien elle est le demi-produit de la longueur x cm et de la longueur $\frac{\sqrt{3}}{2}(10-x)$ cm. Il reste à interpréter ces longueurs comme les longueurs de segments particuliers de la configuration étudiée, et même de segments que l'on peut associer au triangle MNP puisqu'il s'agit de calculer son aire. Comme une façon simple de calculer l'aire d'un triangle consiste à calculer le demi-produit de l'une de ses hauteurs par la longueur du côté correspondant, on peut choisir l'un des deux côtés de ce triangle dont on connaît les longueurs¹⁴ : $[MP]$ (de longueur x cm) ou $[MN]$ (de longueur $(10-x)$ cm). Prenons par exemple le côté $[MN]$; notons H le pied de la hauteur de MNP issue de P . L'aire du triangle MNP se laisse exprimer sous la forme :

$$\text{Aire}_{MNP}(x) = \frac{1}{2} \times MN \times HP = \frac{1}{2} \times HP \times (10-x) \text{ cm}.$$

À ce point, il existe deux possibilités : ou bien le fait que la hauteur d'un triangle équilatéral et la longueur d'un de ses côtés sont dans un rapport fixe égal à $\frac{\sqrt{3}}{2}$ est connu de la classe (donc disponible dans le milieu de l'étude), ou bien ce n'est pas le cas (ou du moins la classe ne parvient pas à mobiliser cette connaissance). Dans le premier cas, le facteur $\frac{\sqrt{3}}{2}$ qui apparaît dans l'expression de l'aire établie plus haut se laisse interpréter comme le facteur d'échelle permettant de passer de la longueur du côté d'un triangle équilatéral à sa hauteur, ce qui conduit à chercher à faire apparaître un triangle équilatéral de côté x (ou $10-x$ selon le choix fait plus haut, mais aussi selon la position du point M par rapport au milieu du segment $[AB]$) au cœur du triangle MNP (voir figure 16).

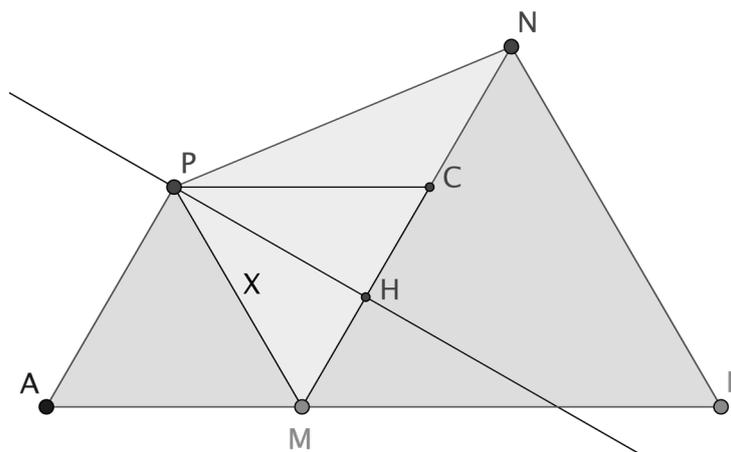


Figure 16 : Un triangle équilatéral PMC .

La hauteur $[PH]$ vaut bien $\frac{\sqrt{3}}{2}x$ cm puisque le triangle PMC est équilatéral de côté x cm. L'aire du triangle PMN est alors donnée par le demi-produit de cette hauteur par la longueur du côté $[MN]$, qui vaut $(10-x)$ cm. On obtient alors l'expression suivante pour la mesure de l'aire du triangle PMN : $\frac{1}{2} \frac{\sqrt{3}}{2} x(10-x) \text{ cm}^2$, ce qui valide *a posteriori* les conjectures C_1 et C_2 (et, par voie de conséquence, C_3).

Dans le deuxième cas, si l'on suppose que la valeur (constante) du rapport de la longueur du côté d'un triangle équilatéral à sa hauteur n'est pas connue, on peut poursuivre l'étude en mesurant (à

¹⁴ De nouveau, on produit un modèle géométrique d'un système algébrique.

l'aide de *GeoGebra*) le quotient de la hauteur $[HP]$ par x cm et en observant qu'il est indépendant de la valeur de x . En cherchant ce qui, dans le triangle MNP est aussi indépendant de la valeur de x , on peut constater que les angles du triangle sont de bons candidats. D'où la production d'une nouvelle conjecture : le rapport de la hauteur d'un triangle à la longueur d'un côté d'extrémité le sommet dont elle est issue ne dépend que des angles du triangle. Ceci peut conduire à une étude des lignes trigonométriques par exemple, et à l'établissement de la conjecture dans quelques cas particuliers où le théorème de Pythagore permet de conclure (comme dans le cas qui nous occupe). On aboutit alors à la production d'une nouvelle praxéologie mathématique (en troisième) relative au type de tâches « Calculer une longueur ». Ici, par exemple, pour calculer la longueur HP , on peut observer que c'est la longueur d'un côté d'un triangle rectangle dont on connaît la longueur d'un autre côté (le côté $[MP]$) et un angle (l'angle NMP , qui est la différence de l'angle plat \widehat{AMB} et des deux angles \widehat{AMP} et \widehat{NMB} , égaux à 60°). Dans ce cas, la technique consiste à écrire que la longueur HP est le produit de la longueur MP par le sinus de l'angle \widehat{NMP} . On obtient de nouveau le résultat attendu.

Dans tous les cas, on parvient à démontrer que l'expression, en fonction de la longueur x cm du segment $[AM]$, de l'aire du quadrilatère $ABNP$ est donnée par la formule :

$$\text{Aire}(x) = \frac{\sqrt{3}}{4}(x^2 - 10x + 100)\text{cm}^2.$$

L'établissement de cette formule a fait appel à une technique d'étude dialectique : des expérimentations (manipulation de modèles géométriques et algébriques, production et travail de modèles algébriques successifs, mais aussi, à la fin, d'un modèle géométrique pour lequel la formule $\frac{\sqrt{3}}{4}x(10-x)\text{cm}^2$ se laisse interpréter comme l'aire d'un triangle) et déductions alternent successivement, produisant une inflation, puis une contraction du nombre de conjectures non démontrées, jusqu'à parvenir à une déduction complète du modèle algébrique. Par ailleurs, cette technique dialectique d'expérimentation-déduction fait apparaître progressivement des techniques d'expérimentation particulières : production d'une simulation d'une situation géométrique sur un logiciel de géométrie dynamique, étude de courbes d'ajustement, affichage dans des précisions différentes, production de modèles algébriques de systèmes géométriques, mais aussi de modèles géométriques de systèmes algébriques, etc. Enfin, elle permet de construire le modèle algébrique de la situation étudiée sans faire appel à des connaissances mathématiques hors programme (telles que la formule¹⁵ donnant « l'aire d'un triangle dont on connaît un angle et la longueur des côtés de ce même angle »), voire en conduisant, selon le niveau d'étude considéré, à l'étude d'un thème mathématique (lignes trigonométriques) auquel elle fournit des raisons d'être (déterminer la longueur d'un segment).

La technique dialectique illustrée ici permet de produire le modèle algébrique (ou fonctionnel) de la situation géométrique, mais elle contribue également à enrichir considérablement le milieu de l'étude de la question posée par ailleurs : on a ainsi rencontré au passage la conjecture (non utilisée pour établir le modèle) qui veut que l'aire soit minimale lorsque le point M est le milieu du segment $[AB]$, mais on dispose également d'éléments de milieu qui pourraient être proposés à l'élève de 1^{re} S imaginaire évoqué dans le sujet d'oral de CAPES. On pourrait ainsi lui suggérer

¹⁵ Formule qui apparaît désormais dans les nouveaux programmes (2019) de lycée et dont on peut penser qu'elle représente un symptôme d'une tendance à découper les mathématiques en types de tâches trop petits : si l'on conserve le type de tâches « calculer une aire », on est conduit à déterminer la hauteur d'un triangle, c'est-à-dire une longueur. Les lignes trigonométriques sont un ingrédient technique connu depuis la 3^e qui permet de réaliser ce type de tâches. Il n'est donc pas nécessaire de créer un type de tâches très étroit : « calculer l'aire d'un triangle dont on connaît un côté et la mesure d'un angle », dont la portée très réduite risque de rendre difficile la survie.

de faire tracer par un logiciel de géométrie dynamique l'aire diminuée de son minimum hypothétique en fonction de la longueur AM , pour s'assurer expérimentalement que cette quantité reste positive (ce qui renforcerait sa conjecture) ; on pourrait lui suggérer aussi d'utiliser *GeoGebra* pour déterminer une expression algébrique de cette expression, puis d'essayer de la factoriser pour déterminer son signe (par exemple, en exploitant le fait qu'elle s'annule en $x=5$), etc. Autant de possibilités d'expérimentations qui ne nécessitent pas de faire appel à du déjà su hypothétique et peuvent relancer l'étude sans « vendre la mèche ».

Le problème des triangles rectangles ayant même hypoténuse

Un « montage expérimental » pourrait consister à créer un grand nombre de variables numériques (autant de mesures de grandeurs attachées à la famille de triangles étudiée) sur *GeoGebra*, et d'étudier les courbes d'ajustement que propose *GeoGebra* pour chacun des appariements possibles entre ces variables. On pourrait ainsi faire afficher l'ajustement polynomial de degré 2 pour le nuage de points obtenu en appariant la mesure en cm du périmètre (en abscisse) et celle, en cm^2 , de l'aire (en ordonnée) du triangle. On obtient, à un bon degré d'approximation (même pour un affichage de 10 décimales et en étudiant les modèles d'ajustement de degrés supérieurs) une courbe d'équation : $y=0,25x^2+4x$. Le modèle numérique du système étudié (l'ensemble des triangles rectangles d'hypoténuse de longueur 8 cm), dûment travaillé, conduit à la production d'un nouveau modèle (algébrique) dont il convient de s'assurer de la justesse. Pour cela, on peut noter a , b et c les longueurs respectives des côtés $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$ d'un triangle d'hypoténuse $[AB]$ et déterminer si l'aire $A(ABC)$ et le périmètre $P(ABC)$ du triangle vérifient l'équation $A=0,25P^2+4P$. C'est un nouveau montage expérimental (algébrique) qui permet d'obtenir l'information suivante : ce modèle est bien correct. Partant de là, en observant (expérimentalement) la croissance de la fonction qui à x associe $0,25x^2+4x$ sur l'intervalle pertinent pour l'étude, on peut se ramener à chercher le triangle d'aire maximale. En poursuivant les appariements de variables, on peut étudier l'appariement entre l'aire et l'angle au sommet A . *GeoGebra* fournit alors un modèle d'ajustement en sinus très bon, d'équation (à de faibles erreurs près) : $y=16\sin(2x)$, où y est l'aire et x est l'angle au sommet A . On peut alors en déduire que l'aire est maximale si et seulement si le sinus est maximal, c'est-à-dire dans le cas où $2x$ vaut $\frac{\pi}{2}$ rad, c'est-à-dire lorsque x est demi-droit, ou encore lorsque ABC est isocèle rectangle en C . Bien sûr, pour cela, il faut s'assurer que ce nouveau modèle est bien correct, ce qui nécessite une nouvelle expérimentation algébrique : comme l'aire est un produit de deux facteurs variables (ici : les longueurs des deux côtés de l'angle droit ; seule l'hypoténuse est fixe), alors que 16 est constant et $\sin(2x)$ est variable, il convient de réécrire la formule $16\sin(2x)$ sous la forme d'un produit de deux facteurs variables pour faciliter l'identification avec les facteurs intervenant dans la formule de l'aire. Pour cela, on peut utiliser la formule de duplication du sinus et on obtient alors : $16\sin(2x)=32\sin(x)\cos(x)$. On peut encore l'écrire sous la forme : $\frac{1}{2}\times 64\sin(x)\cos(x)$ pour s'approcher de la forme $\frac{1}{2}AC\times BC$ qui donne l'aire. Comme le sinus de l'angle au sommet A est le rapport de la distance de B à C par la distance de A à B (qui est 8 cm), on a finalement : $8\sin(x)\text{ cm}=BC$. De même, $8\cos(x)\text{ cm}=AC$. Finalement :

$$16\sin(2x)\text{ cm}^2=\frac{1}{2}\times 8\sin(x)\text{ cm}\times 8\cos(x)\text{ cm}=\frac{1}{2}BC\times AC,$$

et on obtient bien la validation du modèle suggéré par l'expérimentation sur *GeoGebra*.

On peut chercher une validation supplémentaire du raisonnement complet : si l'aire est donnée

par la formule $0,25 P^2 + 4 P$, où P est le périmètre, et si elle est aussi égale à $16 \sin(2\widehat{BAC}) \text{ cm}^2$, alors on doit avoir : $0,25 P^2 + 4 P = 16 \sin(2\widehat{BAC}) \text{ cm}^2$. On peut résoudre cette équation en P et obtenir une expression du périmètre en fonction de la mesure de l'angle au sommet A , expression que l'on peut ensuite vérifier sur le modèle numérique de départ, sur *GeoGebra*.

La technique expérimentale que nous avons évoquée au début de ce paragraphe, qui consiste à étudier de nombreux appariements de variables, peut se justifier. Dans notre perspective, il s'agit d'*expliquer* dans quelle mesure « *un tel ingrédient technique permet de favoriser l'adéquation de l'expérimentation au travail de déduction* » (Boero, Garuti & Lemut, 2007), c'est-à-dire de garantir que l'expérimentation pourra offrir des « *éléments susceptibles d'être utilisés dans le processus de preuve* » (Bartolini Bussi, 2010, p. 229). Si l'on reprend les propositions d'expérimentation et de déduction produites par les étudiants, on est frappé par l'existence d'une distance parfois importante entre les variables utilisées dans l'expérimentation et celles retenues pour le travail déductif. On peut comprendre que la déduction ait d'autant plus de chances d'aboutir que les choix des variables dans la « phase déductive » soit guidée par le travail expérimental, travail dont on doit reconnaître qu'il comporte une part importante d'argumentation, notamment pour justifier les choix expérimentaux (ici : choix de variables) :

[...] il y a unité cognitive [...] si on peut retrouver pendant la construction de la démonstration des mots, des expressions, des phrases utilisées pendant l'argumentation. La continuité est observable aussi à partir de la manipulation du dessin faite par le sujet (par exemple dans Cabri-géomètre). On peut observer si les éléments désignés comme variables et ceux qui sont maintenus fixes sont les mêmes dans les deux phases de construction de la conjecture et de production de la démonstration (Pedemonte, 2006, p. 319, je souligne).

Conclusion

Sans prétendre bien sûr à une quelconque exhaustivité, les productions que nous avons analysées exposent une certaine vision de l'expérimentation : la faveur donnée à des *dispositifs et des méthodes expérimentales très simples* (quand elles ne se limitent pas à une approche par tâtonnements successifs) dont la vocation est de *produire rapidement une conjecture*. *A contrario*, un certain nombre d'ingrédients de techniques expérimentales n'apparaissent pas dans ces productions ni, croyons-nous, dans l'étude scolaire quotidienne des mathématiques : l'usage de techniques mixtes, mettant à contribution le raisonnement mathématique (calculs, etc.) et l'emploi de logiciels (de géométrie, tableurs, etc.) ; l'usage des TICE non seulement pour *conjecturer* (fonction d'anticipation), mais aussi pour *vérifier* la qualité d'un modèle (fonction de vérification) ; la production d'une pluralité de modèles d'un même système (par exemple en jouant sur les différents couples de grandeurs que l'on peut attacher à une famille d'objets) afin de déterminer un modèle particulièrement simple ; la production de modèles géométriques de systèmes algébriques, beaucoup moins commune que la production de modèles algébriques de systèmes géométriques ; etc.

Comment rendre compte de la visibilité de certaines techniques et de l'invisibilité d'autres ? Le *logos* a pour fonction, rappelons-le, d'expliquer, de justifier, mais aussi de *produire* de la *praxis* : on a dégagé certains éléments de *logos* qui permettent de produire les techniques expérimentales observées, mais on peut également s'interroger sur *ce qui permettrait* de produire d'autres techniques expérimentales que celles que l'on observe, et aussi sur *ce qui rend difficile* cette production.

L'émergence d'une *praxis* qui autorise, par exemple, un métissage de techniques mathématiques

et de techniques instrumentées par les TICE, repose pour une part sur l'idée que le travail mathématique comporte une dimension expérimentale (Chevallard, 1992) qui se manifeste notamment dans le *travail des modèles* : une factorisation est, *en droit*, une expérimentation, une *manipulation* d'un modèle, manipulation, expérimentation dont on attend qu'elle produise une nouvelle connaissance sur le modèle et sur le système qu'il représente, comme on l'attend d'une manipulation portant sur un modèle graphique ou numérique du même système, produit par le moyen d'un logiciel de géométrie ou d'un tableur. Le caractère « rigoureux » ou « déductif » de la factorisation, pour conserver le même exemple, ne doit pas l'exclure du champ des techniques que l'on peut mettre en œuvre pour expérimenter. C'est la condition, plus généralement, pour que puissent se construire des techniques mixtes comme celle que nous avons illustrée à propos du calcul de l'aire du quadrilatère dans la section 3 — le refus de considérer le *calcul* (par exemple) comme un type de *manipulation expérimentale* fait courir le risque de le confiner à la *déduction*. Précisément, il est essentiel de ne pas chercher à séparer, à distinguer trop étroitement déduction et expérimentation : il s'agit de deux pôles que l'on doit convoquer dans une technique dialectique.

Ces premiers éléments de *logos* permettent d'en produire un autre : l'expérimentation n'est pas seulement *utile*, elle est *nécessaire* à la déduction — qui doit être distinguée, en revanche, de la *formalisation* (la rédaction) de la preuve.

La mise en branle d'un processus dialectique de ce type n'est possible que pour autant que l'on pense qu'il peut avoir une efficacité : l'attitude rétrocognitive, en restreignant l'étude aux problèmes pour la résolution desquels on dispose déjà d'outils, condamne de fait l'expérimentation en la confinant à un rôle ancillaire de production de conjecture. À l'inverse, l'attitude procognitive invite à considérer que ce que l'étude produira aura plus d'importance pour la construction d'une réponse à la question posée que ce qui peut être déjà connu : on voit toute l'importance que peut prendre l'expérimentation d'un tel point de vue.

Un dernier élément de *logos*, relatif à la mésogenèse, nous paraît devoir conditionner la production d'une *praxis* différente de celle que l'on observe habituellement. Bartolini Bussi insiste à bon droit sur le fait que :

when conjecture production is too fast, it might offer no element to be used in the proving process. Hence it is useful to look for strategies that slow down the conjecture production and encourage effective exploration of the problem (Bartolini Bussi, 2010, p. 229).

Il faudrait néanmoins se garder de ne voir là qu'une question de *temps*, de *durée* de l'« *exploration of the problem* » : comme l'indique Bartolini Bussi, c'est aussi une question de construction du milieu (« *offer [...] element[s] to be used in the proving process* »). Le temps ne suffit pas, il faut des praxéologies d'expérimentations qui permettent de *produire* de nouveaux éléments du milieu : questions, réponses partielles, nouvelles conjectures, etc. C'est toute une vision de l'expérimentation qui est ici engagée : l'expérimentation « à mains nues », par tâtonnements, ne favorise pas une mésogénèse adéquate. L'idée que l'expérimentation mathématique ne nécessite aucune connaissance de dispositifs expérimentaux ou de types de manipulation découle pour une part de l'opposition habituelle que l'on fait entre mathématiques et sciences naturelles (ou « expérimentales ») : les mathématiques ne seraient pas expérimentales.

En particulier, l'une des conditions essentielles du développement d'un *logos* professionnel incluant l'idée que le travail de mathématisation repose (entre autres) sur la mise en œuvre de techniques dialectiques (notamment la dialectique de l'expérimentation et de la mathématisation)

est l'intégration préalable à ce *logos* du fait suivant : on *fait* des mathématiques pour *produire* des mathématiques, et on produit des mathématiques pour faire des mathématiques. Autrement dit, il y a une dialectique de la production et de l'utilisation des mathématiques qui s'exprime notamment dans le fait que l'expérimentation sollicite des praxéologies mathématiques qu'elle contribue dialectiquement à produire. L'attitude rétrocognitive est donc un obstacle majeur à la mise en œuvre d'un travail mathématique dans les classes : une condition de la réalisation de techniques dialectiques en classe est que les professeurs organisent l'étude de sorte que l'expérimentation mette à profit les fruits des productions antérieures tout en conduisant à de nouvelles productions qui viennent combler les manques des précédentes — ce qui revient à adopter une attitude procognitive.

Nous concluons ce travail en mettant en évidence quelques éléments de *logos* qui, pour leur part, risquent fort de rendre difficile l'émergence de nouvelles formes de *praxis* expérimentale.

L'intégration, dans l'équipement praxéologique de l'élève, de praxéologies d'expérimentation est rendu difficile par la « frontière topogénétique » qui fait que, dans les organisations de l'étude traditionnelles, la réalisation des fonctions d'anticipation et, surtout, de contrôle que peuvent remplir notamment les TICE, rentre pour l'essentiel dans le *topos* du professeur ; l'intégration de ces fonctions dans les praxéologies mathématiques, suivant une proposition de Michèle Artaud (Artaud, 2003) permettrait de contribuer à une renégociation de cette frontière topogénétique.

Par ailleurs, nous avons déjà rencontré et commenté l'idée que l'expérimentation servirait *seulement* à produire des conjectures. Une version moins forte consiste à considérer que l'expérimentation *sert* à produire des conjectures, *et* que le processus de production de la preuve ne repose pas sur la production de conjectures, *ou bien* qu'il peut être largement séparé du processus d'expérimentation lui-même : c'est une position qu'illustre assez bien l'article de Perrin (2007). À cela vient s'ajouter une difficulté si l'expérimentation est conçue d'un point de vue structurel plutôt que fonctionnel :

je propose une méthode d'investigation systématique, que je n'hésite pas à désigner sous le nom de méthode expérimentale. Elle comprend plusieurs étapes, à répéter éventuellement :

expérience,

observation de l'expérience,

formulation de conjectures,

tentative de preuve,

contre-expérience, production éventuelle de contre-exemples, formulation de nouvelles conjectures,

nouvelle tentative de preuve, etc. (Perrin, 2007, p. 10).

Un tel point de vue, s'il présente l'intérêt de souligner l'importance de l'expérimentation, la maintient néanmoins dans une position auxiliaire. L'« *expérience* » et son « *observation* » conduisent à la « *formulation de conjectures* », à quoi fait suite une « *tentative de preuve* » : il y a solution de continuité de la production de conjectures à celle de preuves. L'expérimentation ne peut remplir une fonction d'*enrichissement du milieu de l'étude* que pour autant qu'elle est étroitement reliée (c'est-à-dire, dialectiquement) au processus déductif. La présentation *structurelle*, sous la forme d'une énumération d'étapes « éventuellement répétées », ne rend pas justice à cette dimension dialectique : elle cache le fait que l'expérimentation est, en réalité, essentiellement intriquée au travail déductif.

Références bibliographiques

- Artaud, M. (2003). Analyser des praxéologies mathématiques et didactiques « à calculatrice » et leur écologie. In *Actes du Colloque Intégration des Technologies dans l'Enseignement des Mathématiques - Ecole, Collège, Lycée, Université, IUFM. Reims*, 20, 21, 22 juin 2003.
- Balacheff, N. (1987), Processus de preuve et situations de validation. *Educational Studies in Mathematics*, 18, 147-176.
- Bartolini Bussi, M. G. (2010). Experimental mathematics and the teaching and learning of proof. In *Sixth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 1-10).
- Boero, P., Garuti, R. & Lemut, E. (2007). Approaching theorems in grade VIII: some mental processes underlying producing and proving conjectures, and conditions suitable to enhance them, in P. Boero (ed.), *Theorems in schools: From history, epistemology and cognition to classroom practice*, 247-262. Rotterdam: Sense Publishers.
- Boero P., Garuti R. & Mariotti M. A. (1996). Some dynamic mental processes underlying producing and proving conjectures. *Proceedings of the 20th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education PME-XX*, 2, 121-128. Valencia.
- Chevallard, Y. (1991). *La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné* (2^e éd.). Grenoble : La Pensée sauvage.
- Chevallard, Y. (1992). Le caractère expérimental de l'activité mathématique. *Petit x*, 30, 5-15.
<https://irem.univ-grenoble-alpes.fr/revues/petit-x/consultation/numero-30-petit-x/1-le-caractere-experimental-de-l-activite-mathematique--567194.kjsp>
- Chevallard, Y. (2007). Passé et présent de la théorie anthropologique du didactique. Dans L. Ruiz Higuera, A. Estepa, A., F. J. García (Éds.) *Matemáticas, escuela y sociedad. Aportaciones de la Teoría Antropológica de lo Didáctico* (pp. 705-746). Jaén: Publicaciones de la Diputación de Jaén.
- Duval, R. (1991). Structure du raisonnement déductif et apprentissage de la démonstration. *Educational studies in mathematics*, 22(3), 233-261.
- Duval, R. (1993). Argumenter, démontrer, expliquer : continuité ou rupture cognitive ? *Petit x*, 31, 37-61.
- Garuti, R., Boero, P. & Lemut, E. (1998). Cognitive Unity of Theorems and Difficulty of Proof. *Proceedings of the international group for the psychology of mathematics education PME-XXII*, vol. 2 (pp. 345-352). Stellenbosch.
- Julia, G. (2008). *Réussir l'épreuve sur dossier du Capes de Mathématiques*. Paris : Dunod.
- Julia, G. (2017). *ESD 2016_07 : Optimisation*.
http://gjmaths.pagesperso-orange.fr/contenu/esd2016_07.pdf
- Ladage, C. & Chevallard, Y. (2011). Enquêter avec l'internet : études pour une didactique de l'enquête. *Éducation et didactique*, 5.2, 85-116.

- Laur, A. (2006). Démontrer par les aires. *Le bulletin vert de l'APMEP*, 463, 201-211.
- Pedemonte, B. (2006). Quelques outils pour l'analyse cognitive du rapport entre argumentation et démonstration. *Recherches en didactique des mathématiques*, 25(75), 313.
- Perrin, D. (2005). *Mathématiques d'École*. Paris : Cassini.
- Perrin, D. (2007). L'expérimentation en mathématiques. *Petit x*, 73, 6-34.
- Jury du CAPES de mathématiques (2016). CAPES externe de mathématiques : épreuve sur dossier.
https://www4.ac-nancy-metz.fr/capesmath/data/uploads/Sujets_Oral2_CAPES2016.pdf