TENSION ENTRE JEU ET APPRENTISSAGE : L'EXEMPLE DE LA FRÉQUENTATION DU LOGICIEL *MATHADOR*

Isabelle LUDIER[1]

CY Cergy Paris Université, INSPE de Versailles, LDAR

Résumé. Cet article reprend certains résultats de notre travail de thèse. Les données analysées sont à la fois des données de jeu et des observations en classe. Les cadres théoriques de la double approche et de l'approche instrumentée, ainsi que des travaux portant sur le calcul mental, sont mobilisés pour ce faire. La tension inhérente au jeu *Mathador*, dans lequel l'objectif du joueur et l'objectif de l'apprenant sont différents, est développée, et les effets de cette non-convergence sur les pratiques enseignantes et sur les apprentissages des élèves sont explicités.

Mots-clés. Jeu, apprentissages, logiciel, calcul mental.

Introduction

Cet article aborde un aspect de la relation entre le jeu et l'apprentissage. Le jeu étudié est le logiciel *Mathador* qui propose aux élèves des tâches de type « le compte est bon » dans lesquelles un nombre cible doit être construit à partir de cinq nombres outils et des quatre opérations. Une addition ou une multiplication rapporte un point, une soustraction en vaut deux, et une division, trois. L'emploi des quatre opérations dans la solution est qualifié de *« coup Mathador »* et fait gagner 13 points.

La question de recherche abordée dans cet article porte sur la pertinence du jeu *Mathador* en tant que support d'apprentissage sur le calcul mental : La conception de ce jeu favorise-t-elle certains apprentissages et, le cas échéant, lesquels ? Afin de répondre à cette question, nous exposons dans la première partie une analyse didactique fine des tâches proposées lors du jeu. Cette analyse a conduit à l'élaboration de deux échelles destinées à classifier les différentes solutions d'un tirage : celle du score dans le jeu, dépendante des règles du jeu et une autre échelle basée sur les connaissances nécessaires pour construire cette solution. Dans la deuxième partie, nous confrontons cette analyse *a priori* avec les *data* (données recueillies lors du jeu en ligne provenant de 1 500 élèves du cycle 3). Une troisième échelle est obtenue, à partir cette fois des données et du pourcentage d'élèves utilisant chaque solution. La synchronisation ou non des différentes échelles nous permettra de déterminer si les règles du jeu sont en adéquation avec les apprentissages des élèves ou si une tension existe entre ces deux enjeux. Dans la troisième partie, nous analysons les pratiques des enseignants avec le jeu Mathador afin de comprendre si ces pratiques peuvent influencer les procédures des élèves, et donc les *data*.

1. Analyse *a priori* des tirages

Dans cette partie du texte, les règles du jeu et le vocabulaire lié aux solutions puis les résultats de

[1] isabelle.ludier@cyu.fr

l'analyse *a priori* des tirages sont exposés. La donnée du nombre cible et des cinq nombres outils définit le « tirage ». En combinant, à l'aide des opérations, les cinq nombres outils (chacun pouvant être utilisé une fois au plus) donnés dans l'énoncé, le joueur doit atteindre le nombre cible. Dans cet article, le tirage $1-1-4-6-7 \rightarrow 18$ est pris comme exemple et permettra de préciser les règles du jeu, d'introduire le vocabulaire, de comparer les solutions permettant de le résoudre mais aussi de hiérarchiser les solutions proposées par les élèves.

1.1. Vocabulaire et règles du jeu

Résoudre un tirage consiste à combiner tout ou une partie des nombres outils pour obtenir le nombre cible. Une combinaison des nombres outils permettant d'atteindre le nombre cible est une *solution* du tirage.

Pour résoudre le tirage $1-1-4-6-7 \rightarrow 18$, il est possible d'effectuer « $4-1=3$ » puis « $3\times6=18$ » en utilisant successivement les trois nombres outils « 4 », « 1 » et « 6 », c'est-à-dire de mobiliser la décomposition du nombre cible « 18 » sous la forme « $18=(4-1)\times6$ ». La combinaison « $(4-1)\times6$ » est un des sept chemins[2] de ce tirage.

Pour résoudre ce même tirage, il est également possible d'effectuer « $4+6=10$; $10+7=17$; $17+1=18$ », en utilisant successivement les quatre nombres outils « 4 », « 6 », « 7 » et « 1 », c'est-à-dire de mobiliser la décomposition du nombre cible « $18=4+6+7+1$ ». Cette combinaison nécessite l'utilisation de l'addition seulement.

Dans une première sous-partie, le rôle particulier joué par le nombre « 1 » est expliqué puis, dans la deuxième sous-partie, les différents types combinaisons permettant de résoudre les tirages sont définis.

Utilisation du nombre « 1 » dans une multiplication ou une division

Le nombre « 1 » est un nombre outil présent deux fois dans le tirage $1-1-4-6-7 \rightarrow 18$. À chaque étape de la solution, il peut être utilisé, comme par exemple dans une division à la dernière ligne de calcul « $(4\times6-7+1)\div\mathbf{1}$ ». Dans cette solution, les deux nombres « 1 » utilisés n'ont pas le même rôle. Celui qui n'est pas mis en gras permet de créer le nombre « 18 ». Le deuxième nombre « 1 » en gras ne modifie pas le résultat. Il permet de gagner des points dans le calcul du score en effectuant en plus une division (3 points), mais également, dans cet exemple, d'obtenir un coup *Mathador*. Il est également possible d'effectuer à la place de la division par « 1 » une multiplication par « 1 ». Ce dernier calcul permet de gagner 1 point ; dans ce cas, il est moins intéressant du point de vue du score que d'effectuer une division par « 1 ». Notons que la connaissance de la neutralité du nombre « 1 » pour la multiplication a été testée sur les élèves du projet est déjà connue par 80 % de ces élèves dès le début du CM1 et apprendre que diviser un nombre par « 1 » ne change pas ce nombre est un objectif très limité pour des élèves du cycle 3.

Combinaisons : définitions et notations

Nous n'avons pas recherché toutes les possibilités théoriques de combiner arithmétiquement les cinq nombres outils qui donnent le nombre cible (par exemple en déclinant les différentes possibilités d'utiliser les nombres outils $n_1 \pm n_2 \pm n_3 \pm n_4 \pm n_5$; $n_1 \stackrel{\times}{\div} n_2 \pm n_3 \pm n_4 \pm n_5$; …). Cette démarche peut être intéressante pour construire un solveur mais tel n'est pas notre objectif. Notre intention est de développer une classification des différentes combinaisons permettant la

[2] Il y a de nombreuses variantes mais toutes les solutions de ce tirage peuvent être regroupées selon sept chemins (définis à partir de l'opération qui les caractérise).

résolution d'un tirage. Les différents types de combinaisons exposés ci-après proviennent des décompositions différentes du nombre cible. Pour la définition des combinaisons, les éventuelles multiplications ou divisions par le nombre « 1 », destinées uniquement à augmenter le score, ne sont pas prises en compte.

Pour un tirage donné, il est possible d'utiliser une *solution par combinaison additive*, une *solution par combinaison multiplicative* (les opérations pouvant être des multiplications ou des divisions, avec ou sans ajustement), ou une *solution par combinaison mixte* qui utilise la somme de deux multiplications ou divisions (avec ou sans ajustement).

- Une solution par *combinaison additive* est une solution dans laquelle seules des additions ou des soustractions sont utilisées.

  Par exemple, avec le tirage $1-1-4-6-7 \rightarrow 18$, la solution « $4+6+7+1$ » (quatre nombres outils et trois opérations sont utilisés) est une solution par combinaison additive (des nombres outils). La solution « $(4+6+7+1) \div 1$ » est également qualifiée de combinaison additive.

- Une solution par *combinaison multiplicative* avec (ou sans) ajustement $M(A)$[3] est une solution qui correspond à une décomposition du nombre cible C de la forme $C = X \overset{\times}{\div} Y \pm A$ avec X et Y qui peuvent être des nombres outils, ou des nombres construits à partir des nombres outils, A est un nombre outil ou un nombre construit à partir des nombres outils par combinaison additive de nombres outils, A est nommé ajustement. Le symbole « $\overset{\times}{\div}$ » représente une multiplication ou une division. La précision portant sur l'ajustement est importante car elle permet de distinguer parmi les combinaisons multiplicatives celles qui proviennent des décompositions multiplicatives du nombre cible.

  Par exemple, avec le tirage $1-1-4-6-7 \rightarrow 18$, la solution « $4 \times 6-7+1$ » est une solution par combinaison multiplicative avec ajustement avec trois opérations. X et Y sont des nombres outils : $X=4$ et $Y=6$, $A=7-1$ est l'ajustement (combinaison additive avec une opération).

  Parmi les combinaisons multiplicatives, nous distinguons :

  - Les *combinaisons multiplicatives simples* $MS(A)$: un produit ou quotient de deux nombres outils avec éventuellement un ajustement (d'où le A).

    Par exemple, avec le tirage $1-1-4-6-7 \rightarrow 18$, la solution « $4 \times 6-7+1$ » obtenue par une combinaison multiplicative est qualifiée de « simple » car X et Y sont deux nombres outils, et d'un ajustement additif « $-7+1$ » elle est notée MSA.

  - Les *combinaisons multiplicatives complexes* $MC1(A)$ (avec un nombre créé) qui comprennent :

    - les produits ou quotients de plus de deux nombres outils (ce type de solution n'existe pas pour le tirage étudié).

    - les combinaisons pour lesquelles un terme du produit ou quotient est créé autrement que par une multiplication ou division.

    Par exemple, avec le tirage $1-1-4-6-7 \rightarrow 18$, la solution « $(4-1) \times 6$ » est une combinaison multiplicative complexe sans ajustement $MC1$ avec la création d'un terme $X=4-1$ par une soustraction, et $Y=6$ est un nombre outil.

  - Les *combinaisons multiplicatives complexes* $MC2(A)$ avec deux nombres créés.

    Par exemple, avec le tirage $1-1-4-6-7 \rightarrow 18$, la solution « $(6-4) \times (1+1+7)$ » est une

[3] $M(A)$: combinaison Multiplicative avec ajustement (*MA*) ou sans Ajustement (*M*).

combinaison multiplicative complexe sans ajustement $MC2$ avec la création des deux facteurs par addition ou soustraction, combinaison multiplicative du type $X \overset{\times}{\div} Y$ avec $X=6-4$ et $Y=1+1+7$.

- Une solution par *combinaison mixte MI* ou *MIA* (lorsqu'il y a ajustement) est une solution qui correspond à une décomposition du nombre cible *C* en *une somme ou différence de produits ou quotients* de la forme $C=X \overset{\times}{\div} Y \pm Z \overset{\times}{\div} V \pm A$; « $\overset{\times}{\div}$ » est une multiplication ou une division et *A* est un nombre outil, *X*, *Y*, *Z* et *V* sont des nombres outils ou des nombres obtenus par des combinaisons additives ou multiplicatives. *A* est l'*ajustement*.

  Parmi les combinaisons mixtes, nous distinguons les *solutions par combinaisons mixtes simples MIS* avec la somme ou la différence de deux produits ou quotients de deux nombres outils des *solutions par combinaisons mixtes complexes MIC* si l'un des produits est composé de trois termes ou si l'un des termes a été créé.

  Ce dernier type de solution n'existe pas pour le tirage étudié.

  Nous donnons un exemple de ce type de combinaison avec le tirage $2-8-3-12-5 \rightarrow 8$, la solution « $8\div2+12\div3$ » est une solution par combinaison mixte simple (sans ajustement). *X*, *Y*, *Z* et *V* sont des nombres outils.

  Avec cinq nombres outils et quatre opérations, il n'est pas possible d'obtenir une combinaison mixte complexe *MIC* avec ajustement, qui demanderait au minimum cinq lignes de calcul.

Nous avons montré dans notre thèse (Ludier, 2022), en effectuant une démonstration par exhaustivité des cas, que toutes les solutions possibles pour les tirages avec cinq nombres outils et les quatre opérations relèvent de ces trois types de combinaisons.

1.2. Outils théoriques relatifs aux connaissances

Notre questionnement concerne les connaissances utilisées par les élèves lors de la fréquentation du jeu. Deux interrogations se posent alors : quels types de connaissances sont mises en jeu, et comment ces connaissances sont-elles exploitées ?

Les connaissances utilisées vont influer sur la mémorisation de faits numériques rencontrés. Or l'acquisition et la mémorisation des faits numériques additifs et multiplicatifs sont des éléments essentiels des programmes scolaires des cycles 2 et 3 et le lien entre la connaissance des nombres et celle des techniques opératoires a été prouvé par Butlen (2007). Fischer (1987) a montré la difficulté d'obtenir l'automatisation de ces faits numériques, en particulier multiplicatifs. Ces constatations ont été corroborées par des études ultérieures (Chesné, 2014) mais également pour les élèves impliqués dans le projet *Mathador* (Ludier, 2022), ce qui nous a amenée à rechercher si les connaissances utilisées par les élèves relèvent des structures additives ou multiplicatives.

Cependant, cette approche s'est avérée insuffisante lors de solutions impliquant des combinaisons additives ou multiplicatives simples car l'ordinateur fournit les résultats des opérations. Lorsqu'un élève propose une solution basée sur une combinaison complexe, une partie du travail repose sur lui, notamment la mise en relation entre la décomposition du nombre cible et les nombres disponibles.

Nous avons donc adapté la typologie de Robert (1998) qui a défini pour le lycée trois niveaux de mise en fonctionnement des connaissances : le niveau technique, pour lequel seule une utilisation simple sans reconnaissance de la notion et sans adaptation est demandée ; le niveau des connaissances mobilisables : le savoir *« est bien identifié, […] bien utilisé par l'élève, même s'il* *y a eu lieu de s'adapter au contexte particulier »* (Robert,1998) et le niveau des connaissances disponibles où l'exercice doit être résolu sans indication, l'élève doit être en mesure de repérer quelle est la connaissance à utiliser.

Dans le cadre du jeu *Mathador*,

- une connaissance est *activée* lorsque l'élève est amené à la fréquenter, et ceci qu'elle fasse ou non partie de ses connaissances préalables.

  Par exemple, si l'élève choisit le produit « 7×8 », le résultat « 56 » s'affiche. L'élève peut ainsi associer le produit « 7×8 » avec son résultat, *activant* le fait numérique « 7×8=56 ». C'est le seul niveau de mise en fonctionnement recherché dans le jeu pour le champ additif. Les deux autres niveaux concernent le champ multiplicatif.
- une connaissance est *convoquée* lorsqu'un indice implicite permet de l'inciter à l'utiliser.

  Par exemple, lorsqu'un nombre outil est un diviseur du nombre cible, la mise en relation suggérée de ces deux nombres permet de penser à une solution utilisant cette décomposition multiplicative : si le nombre cible est « 12 » et que « 6 » est un nombre outil (l'élève est incité à utiliser la décomposition « 12=2×6 »), « 2 » devient un nouveau nombre cible à atteindre en utilisant les quatre nombres outils restants, une sous-tâche est ainsi créée.
- une connaissance est *disponible* lorsqu'elle est utilisée spontanément.

  Par exemple, avec le nombre cible « 56 », l'élève utilise la décomposition multiplicative « 56=7×8 », en l'absence des nombres « 7 » et « 8 » parmi les nombres outils.

Pour tenir compte de ces différents facteurs, chaque solution est analysée selon les connaissances mises en jeu ainsi que leur niveau de mise en fonctionnement. Afin d'affiner la classification, des chemins ont été définis à partir de la ou des opérations qui le caractérisent. Identifier les chemins permet de classer et hiérarchiser les solutions ; l'échelle retenue repose sur le coût en connaissances : leur nature (en distinguant les additions et soustractions d'une part et les multiplications et divisions d'autre part) et leur mode de restitution (mise en fonctionnement de type activation, convocation ou disponibilité).

Une analyse *a priori* plus détaillée du tirage $1-1-4-6-7 \rightarrow 18$ est effectuée en précisant les chemins possibles et pour chacun, les connaissances nécessaires pour les emprunter.

1.3. Analyse *a priori* du tirage $1-1-4-6-7 \rightarrow 18$

Hiérarchisation des chemins selon leur coût en connaissances

Nous explicitons l'échelle décrite dans le paragraphe précédent avec les solutions du tirage $1-1-4-6-7 \rightarrow 18$.

Considérons la solution de type combinaison additive « $6+4+7+1$ » qui peut se décliner sous plusieurs formes en utilisant en plus une multiplication ou une division par « 1 » (nombre outil encore disponible), opération dont il n'est pas tenu compte pour la classification des solutions. Cette solution demande la connaissance de l'addition, éventuellement en utilisant les compléments à 10 ici présents. Ces solutions sont qualifiées de chemin additif (c'est également le cas lorsque l'élève utilise des soustractions, par exemple pour le tirage $2-6-6-11-11 \rightarrow 18$ la solution « $11+11-6+2$ » relève du chemin additif).

Considérons la solution « $6\times4-7+1$ ». C'est une combinaison multiplicative simple car les nombres « 6 » et « 4 » sont des nombres outils. Elle relève du chemin en « 6×4 ». Ce chemin permet d'obtenir un coup *Mathador* en effectuant une division à n'importe quelle étape des calculs, par exemple : « $(6\times4-7+1)\div1$ ». Il nécessite l'utilisation des additions et soustractions et active le produit « 6×4 ». Dans ce cas, l'élève peut utiliser les nombres outils « 6 » et « 4 » pour effectuer le produit et le résultat « 24 » s'affiche.

Considérons la solution « $(4-1)\times6$ », c'est une combinaison de type $MC\,1$ dénommée « chemin en 3×6 ». Cette solution nécessite l'utilisation des additions et soustractions. « 6 » est un nombre outil mais le nombre « 3 » est créé par différence. Le fait numérique « $18=3\times6$ » est convoqué. L'élève peut faire le lien entre le nombre « 6 » présent parmi les nombres outils et le nombre cible « 18 ». Il est donc incité à envisager la création du nombre « 3 ».

Considérons enfin la solution « $(6-4)\times(7+1+1)$ » c'est une combinaison de type $MC\,2$ dénommée « chemin en 2×9 ». Cette solution nécessite l'utilisation des additions et soustractions. Ni le nombre « 2 » ni le nombre « 9 » ne sont des nombres outils. La disponibilité de la décomposition « $18=2\times9$ » est requise, l'élève doit créer à la fois le nombre « 2 » et le nombre « 9 ».

Le tableau ci-dessous expose les différents chemins permettant la résolution du tirage $1-1-4-6-7\rightarrow18$, ainsi que les connaissances nécessaires pour emprunter chacun de ses chemins.

Type de combinaison	A	MSA	MC	MCA	MC2	MC2A	
Chemin	Additif	6×4	3×6	2×7	2×9	5×5	3×8
Solution	$6+4+7+1$	$6\times4-7+1$	$6\times(4-1)$	$(1+1)\times7+4$	$(6-4)\times(7+1+1)$	$(4+1)\times(6-1)-7$	$(4-1)\times(7+1)-6$
Connaissances à mobiliser							
Addition / soustraction	oui	oui	oui	oui	oui	oui	oui
Tables de multiplication (activation des produits utilisés)		oui	oui	oui	oui	oui	oui
Décomposition multiplicative (convocation évoquée par un nombre outil)			oui	oui			
Décomposition multiplicative (disponibilité)					oui	oui	oui
Décomposition avec ajustement				oui		oui	oui

Tableau 1 *: Les différents chemins correspondant aux différentes solutions du tirage $1-1-4-6-7\rightarrow18$.*

Cette analyse met en évidence que, pour un même tirage, il existe plusieurs approches possibles pour sa résolution. Ces diverses solutions découlent de combinaisons variées qui ne nécessitent pas les mêmes connaissances.

La mise en œuvre de chaque chemin active des connaissances sollicitant des faits numériques additifs mais seuls les chemins en « 2×7 », « 5×5 » et « 3×8 » nécessitent la disponibilité de (dé)compositions mixtes nécessitant une multiplication et un ajustement additif.

Le coût en connaissances est le critère de hiérarchisation de la première échelle considérée. Cette qualité est déterminée en fonction des combinaisons qui renvoient à des (dé)compositions. Le chemin additif est celui qui est le moins coûteux en connaissances : il active des connaissances sur l'addition et/ou la soustraction. Le chemin en « 6×4 » relevant d'une combinaison *MSA* active des connaissances sur la multiplication et l'addition. Les chemins en « 3×6 » et en « 2×7 » relevant de combinaisons *MC* ou *MCA* convoquent des connaissances sur la multiplication et en active sur l'addition et la soustraction, mais l'ajustement dans le chemin en « 2×7 » crée une difficulté non présente dans le chemin en « 3×6 ». Les trois chemins en « 2×9 », « 3×8 » et « 5×5 » relevant de combinaisons $MC2$ ou $MC2A$ demandent la disponibilité de certains faits numériques. Cette échelle serait à affiner car la nature des faits numériques en jeu serait à prendre en compte : la convocation du fait numérique « $2\times3=6$ » n'est pas équivalente à celle du fait numérique « $3\times17=51$ ». Pour être en mesure d'obtenir cette précision, il faudrait au préalable avoir classifié les faits numériques selon leur « difficulté » : relevant ou non du répertoire des faits numériques d'un élève du cycle 3 (mais il y aurait encore à affiner car tous les faits numériques ne sont pas connus de façon identique par les élèves). Dans le cas de ce tirage, tous les faits numériques multiplicatifs sont issus des tables de multiplication. Le classement suivant selon le coût en connaissance pour le tirage $1-1-4-6-7\rightarrow18$ est le suivant :

Chemin additif ; chemin en « 6×4 » ; chemin en « 3×6 » ; chemin en « 2×7 » ; chemin en « 2×9 » ; chemins en « 5×5 » et en « 3×8 ».

Hiérarchisation des chemins selon le score attribué dans le jeu

Une deuxième échelle concernant le classement et la hiérarchisation de ces solutions est donnée par le score qui leur est attribué dans le jeu. Pour un même chemin, des scores différents peuvent être attribués aux solutions selon le degré de sophistication, par exemple le chemin en « 6×4 » minimal correspond à la solution « $6\times4-7+1$ » et permet de gagner 4 points. À partir du même chemin une division par « 1 » à n'importe quelle ligne[4] permet de réaliser le coup *Mathador* et fait gagner 13 points. En tenant compte de ce critère, nous pouvons classer et hiérarchiser les chemins de la manière suivante en partant du score le moins élevé vers le score le plus élevé.

- *3 points* : chemin en « 2×7 »,
  chemin additif (minimal),
  chemin en « 3×6 » (minimal) ;
- *4 points* : chemin en « 6×4 » (minimal) ;
- *5 points* : chemins en « 2×9 » et en « 5×5 » ;
- *6 points* : chemin additif et chemin en « 3×8 » ;
- *9 points* : chemin en « 3×6 » ;
- *13 points* : chemin en « 6×4 ».

Comparaison des deux échelles

Nous confrontons dans ce paragraphe les deux échelles précédentes qui donnent un classement différent. La tension entre le jeu et l'apprentissage prend sa source dans cette différence. Les élèves obtiennent un score moindre lors de la résolution de ce tirage s'ils utilisent des connaissances portant sur les (dé)compositions multiplicatives. L'utilisation de connaissances plus riches : chemin en « 5×5 » et chemin en « 3×8 » ne permet pas d'obtenir un score élevé. C'est une variante du chemin en « 6×4 » (combinaison *MS*) qui permet d'obtenir un « coup *Mathador* », celui qui, après le chemin additif, a le coût en connaissances le plus faible.

---

[4] Une ligne correspond à une opération : par exemple la solution « $6\times4-7+1$ » est composée de 3 lignes : « $6\times4=24$ », « $24-7=17$ » et « $17+1=18$ ». La solution minimale pour un chemin est celle qui demande le moins de lignes (et procure le score minimal).

Le tableau ci-dessous montre le classement des chemins selon les deux échelles retenues : à gauche, celle établie à partir de la valeur du score et à droite, celle établie à partir de la détermination du coût en connaissances.

Connaissances (du chemin qui en demande le moins vers celui qui en demande le plus)	**Score (du plus petit au plus grand)**	
Chemin additif	Chemin en « 2×7 »	3 points
	Chemin additif (minimal)	
	Chemin en « 3×6 » (minimal)	
Chemin en « 6×4 »	Chemin en « 6×4 » (minimal)	4 points
Chemin en « 6×3 »	Chemin en « 2×9 » et chemin en « 5×5 »	5 points
Chemin en « 2×7 »	Chemin additif et chemin en « 3×8 »	6 points
Chemin en « 2×9 »	Chemin en « 3×6 »	9 points
Chemin en « 5×5 » et chemin en « 3×8 »	Chemin en « 6×4 »	13 points

***Tableau 2** : Classement et hiérarchisation des chemins selon les deux échelles précitées.*

Nous observons que les deux échelles ne coïncident pas. Par exemple, le chemin en « 6×4 » qui est celui qui demande le moins de connaissances après le chemin additif est celui qui permet le coup *Mathador*.

1.4. Conclusion de l'analyse *a priori*

L'analyse *a priori* montre que, pour un même tirage, les connaissances en jeu permettant de le résoudre sont différentes selon les chemins choisis par les élèves. Les moins coûteux en connaissances sont les chemins additifs, ne nécessitant que l'addition, la soustraction et la multiplication ou division par « 1 ». Selon les nombres proposés (nombres outils et nombre cible), les différents types de combinaisons ne sont pas toujours réalisables ; notamment lorsque le nombre cible augmente, la somme des nombres outils peut être inférieure au nombre cible, dans ce cas, il n'y a pas de chemin additif pour le tirage considéré.

Par ordre de coût en connaissances, nous trouvons ensuite les chemins relevant des combinaisons $MS(A)$. Ces solutions demandent d'avoir repéré la proximité du résultat du calcul choisi avec le nombre cible, ce résultat étant donné par le calculateur. Ensuite il y a les chemins relevant des combinaisons complexes (avec une multiplication) pour lesquelles un facteur est créé ; un produit doit être convoqué si un facteur est créé. Dans le cas où les deux facteurs sont créés, c'est la disponibilité de la décomposition multiplicative qui est requise.

Certains chemins (non présents pour le tirage étudié ici) prennent appui sur des multiples du nombre cible : ils sont également coûteux en connaissances, nécessitant de calculer ce multiple puis d'effectuer une division. C'est également le cas de tous les chemins pour lesquels une division (autre que par « 1 ») est requise : cette opération est plus coûteuse en connaissances que la multiplication.

Pour un chemin donné, à partir d'une solution minimale, plusieurs stratégies peuvent permettre d'obtenir un score plus important Par exemple, il est parfois possible de sophistiquer une combinaison additive : à la place d'effectuer « $a-b$ » puis « $(a-b)+c$ » (3 points), il est possible de faire « $b-c$ » puis « $a-(b-c)$ » qui apporte 4 points.

En présence d'un nombre « 1 » non utilisé, effectuer à n'importe quelle ligne une multiplication par « 1 » permet de gagner 1 point ; effectuer une division par « 1 » permet de gagner 3 points. Si un nombre outil est présent deux fois, effectuer « $a \div a$ » et diviser par ce nombre « 1 » ainsi créé permet de gagner 6 points. Il est aussi envisageable, avec ces deux nombres outils, d'effectuer « $a - a$ » et d'ajouter ce « 0 » (3 points) ou de le retrancher à une étape (4 points). Cette deuxième utilisation rapporte moins de points pour le calcul du score, elle est donc moins intéressante que la précédente sauf si elle permet de réaliser un « coup *Mathador* ».

En présence de deux nombres successifs, un nombre « 1 » peut être créé par soustraction puis multiplié (3 points) ou divisé (4 points) à n'importe quelle étape du calcul.

Ces diverses sophistications permettent d'obtenir un score plus élevé en utilisant seulement des connaissances sur la neutralité de « 1 » pour la multiplication et la division ou sur l'effet de l'ajout ou du retrait de zéro. Nous les désignons sous le nom de « stratégies de surface ». À partir d'une solution (souvent la solution minimale) trouvée par l'élève, une stratégie de surface consiste à la sophistiquer afin de gagner plus de points dans le jeu. Cette sophistication de la solution ne mobilise généralement pas de connaissances riches : à partir du moment où la multiplication et la division par « 1 » sont connues, effectuer une ligne supplémentaire en multipliant ou en divisant par « 1 » permet seulement d'obtenir un score meilleur. Par exemple effectuer une division par « 1 » à partir du chemin minimal en « 6×4 » est une stratégie de surface qui permet de réaliser le « coup *Mathador* ».

Nous mettons donc en parallèle deux échelles ayant un statut différent : celle qui provient du calcul du score découlant du jeu et celle construite à partir de l'analyse *a priori* s'appuyant sur le coût des connaissances à mettre en œuvre par les élèves. Cette double échelle est un premier résultat mais nous semble également être un point de vigilance important quant à l'utilisation du jeu en classe : *le but du joueur et le but de l'apprenant ne sont pas identiques*. L'utilisation de connaissances riches n'est pas favorisée par le calcul du score et, pour un chemin donné, l'obtention d'un score meilleur relève d'artifices de calcul. Ce qui nous amène à nous questionner sur les connaissances réellement utilisées par les élèves lors de la fréquentation du jeu mais également sur les choix des enseignants : favorisent-ils une utilisation ludique ou pédagogique du jeu ?

Après avoir effectué l'analyse *a priori* des tirages, nous analysons dans la partie suivante les data de jeu des élèves afin de répondre à la première de ces interrogations qui concerne les connaissances utilisées par les élèves lors du jeu.

2. Résultats de l'analyse des data de jeu

1 483 élèves du cycle 3 ont contribué à la base de résultats (jeu en ligne). Leurs enseignants ont reçu une formation centrée sur le logiciel *Mathador* et le calcul mental. Ils devaient faire jouer leur classe 15 minutes par semaine au logiciel *Mathador* de novembre à juin. Dans la première partie, des résultats généraux portant sur le jeu en ligne sont présentés, et dans la deuxième partie, les résultats du tirage analysé précédemment sont exposés. Afin de déterminer s'il y une influence des modalités sur les solutions proposées, ces résultats sont ensuite comparés avec ceux fournis par les réponses au concours « *Mathador* », qui est un concours « papier » dans lequel les élèves disposent de trois minutes pour résoudre un tirage. Ce concours est proposé par les enseignants et ce sont eux qui collectent et renseignent les solutions des élèves. Les données utilisées sont celles d'élèves du cycle 3 n'ayant pas contribué au jeu en ligne.

2.1. Synthèse des analyses des *data* de jeu

Les *data* de jeu ont été recueillies durant deux années. La première année, les tirages proposés aux élèves étaient aléatoires ; en conséquence, un même tirage n'était rencontré que par très peu d'élèves. L'analyse effectuée a porté sur la totalité des tirages résolus par les élèves. Les résultats de ces *data* portant sur les opérations et les combinaisons utilisées sont exposés dans cette partie. Nous avons affiné les combinaisons multiplicatives en séparant les opérations de multiplication et de division afin d'obtenir des précisions sur les connaissances utilisées.

Opérations utilisées

Plus de 70 % des opérations utilisées sont des additions ou des soustractions. Les multiplications autres que par « 1 » — désignées sous le terme de multiplications signifiantes — représentent 17 % des solutions et les divisions signifiantes (autres que par « 1 » ou de type « $N \div N$ »), 2 % des solutions. 1 % des opérations sont des divisions de type « $N \div N$ ». Les calculs du type « $N+0$ » et « $N-0$ » n'ont pas été mis à part car d'une part, « 0 » n'est pas un nombre outil et d'autre part, ils représentent respectivement 1 % et 0,1 % des opérations.

Les *data* de la première année montrent que les élèves choisissent préférentiellement diviser par « 1 » plutôt que multiplier par « 1 », ce qui leur fait gagner 2 points (la multiplication donnant 1 point et la division 3 points).

Si nous observons plus précisément les divisions utilisées par les élèves :

Les divisions les plus utilisées sont les divisions par le nombre « 1 » : elles représentent 61 % des divisions, puis les divisions de type « $N \div N$ » afin de créer le nombre « 1 » : elles représentent 16 % des divisions. Les divisions par le nombre « 2 » (nombre outil, ou nombre créé) représentent 11 % des divisions. Les autres divisions représentent 8 % des divisions.

Cette analyse indique donc que les élèves utilisent de manière importante des « stratégies de surface » impliquant des divisions par « 1 ».

Combinaisons utilisées

En considérant la totalité des 200 370 tirages résolus la première année de l'étude, nous obtenons les résultats suivants :

- 50 % des tirages sont résolus par une combinaison additive ;
- 33 % par une combinaison multiplicative simple $MS(A)$;
- 8 % par une combinaison multiplicative complexe $MC(A)$;
- 4 % par une combinaison comprenant une division $MD(A)$;
- 1 % par une combinaison mixte $MI(A)$;
- 4 % par une combinaison « autre », correspondant à des cas non codés par l'équipe informatique (en particulier l'utilisation de plusieurs multiplications ou divisions par « 1 » dans une même solution).

Une troisième échelle, basée sur le pourcentage d'utilisation par les élèves des différents types de combinaisons est obtenue.

Combinaison additive → combinaison multiplicative simple → combinaison multiplicative complexe → combinaison comprenant une division → combinaison mixte.

Les élèves les plus performants mobilisent plusieurs types de combinaisons, alors que d'autres élèves utilisent exclusivement les combinaisons additives et multiplicatives simples. Les (dé)compositions multiplicatives du nombre cible sont peu recherchées par les élèves qui les utilisent pour 5 % des épreuves (pour la totalité des épreuves de l'année une).

Ce classement est effectué de manière statistique en regroupant tous les tirages. Afin de comprendre précisément les connaissances utilisées par les élèves au regard de celles offertes par un tirage, nous analysons dans la partie suivante les résultats des *data* de jeu du tirage $1-1-4-6-7 \rightarrow 18$ pour lequel une analyse *a priori* a été effectuée.

2.2. Synthèse des analyses des *data* pour le tirage $1-1-4-6-7 \rightarrow 18$

Pour le tirage $1-1-4-6-7 \rightarrow 18$, il est possible de comparer deux modalités : d'une part les résultats d'un tirage « papier » proposé en classe par l'enseignant dans le cadre du concours *Mathador* et pour lequel l'élève dispose d'un temps de 3 minutes de recherche (plus 1 minute pour recopier sa solution) sans instrument calculatoire (8 507 élèves) et d'autre part les *data* de jeu issues des tirages proposés par le logiciel (753 élèves). Ces deux modalités se distinguent de plusieurs manières. Dans le cadre du concours, les élèves disposent de 3 minutes pour résoudre le tirage, ils ont une feuille réponse et peuvent faire plusieurs propositions, seule celle procurant le meilleur score sera retenue. Dans le cadre du jeu en ligne, le temps est un enjeu : par exemple, pour le jeu chrono en 3 minutes, il faut réaliser le meilleur score possible et donc résoudre plusieurs tirages mais le calculateur effectue les calculs demandés et l'élève peut reprendre tout ou partie de son calcul, voire passer au tirage suivant. Il est donc intéressant de comparer ces deux modalités pour repérer les points communs et les différences qu'elles engendrent.

Le tableau suivant permet de comparer les solutions des élèves selon ces deux modalités :

Chemins possibles	**Connaissances**	**Pourcentage d'élèves ayant utilisé le chemin (tirage papier)** **8 507 élèves**	**Pourcentage d'élèves ayant utilisé le chemin (jeu en ligne)** **753 élèves**
Chemin additif.	Addition-soustraction : activation.	46 %	68,4 %
Chemin en « 6×4 » : combinaison multiplicative simple avec ajustement.	Addition-soustraction - multiplication : activation.	43 %	25,9 %
Chemin en « 6×3 » : combinaison multiplicative complexe sans ajustement.	Addition-soustraction : activation. Multiplication : convocation.	7,7 %	3,2 %
Chemin en « 2×7 » : combinaison multiplicative complexe avec ajustement, facteur créé « 2 » par « $1+1$ ».	Addition-soustraction : activation. Multiplication : convocation.	2,8 %	2,1 %
Chemin en « 2×9 » : combinaison multiplicative complexe sans ajustement (deux facteurs créés par une combinaison additive).	Addition-soustraction : activation. Multiplication : disponibilité.	0,4 %	0,3 %
Chemin en « 5×5 » et chemin en « 3×8 » : combinaison multiplicative complexe avec ajustement (deux facteurs créés par une combinaison additive).	Addition-soustraction : activation. Multiplication : disponibilité.	Inférieur à 0,04 %	0 % (aucune réponse)

Tableau 3 *: Mise en relation de l'échelle relative au coût en connaissance avec les pourcentages d'utilisation de chaque chemin d'une part avec le jeu en ligne, d'autre part avec le concours papier.*

Comme montré lors de l'analyse *a priori*, les solutions ne sont pas ordonnées de la même manière selon que le critère retenu est le score obtenu ou la nature et le niveau de mise en fonctionnement des connaissances. En revanche, pour ce tirage, les solutions sont ordonnées de manière presque identique que le critère soit celui du coût en connaissances de la solution ou celui du pourcentage d'utilisation de cette solution par les élèves. La modalité n'influe pas sur le classement. Ce dernier critère permet de préciser que le chemin en « 3×8 » est moins utilisé que le chemin en « 5×5 » dans le cadre du concours papier, aucun élève n'a résolu ce tirage par l'un de ces chemins dans le cadre du jeu en ligne. Le chemin le plus emprunté est le chemin additif qui est celui qui requiert le moins de connaissances. Dans l'ordre d'utilisation, il y a ensuite le chemin en « 6×4 » qui amène au « coup *Mathador* » grâce à des artifices de jeu. C'est celui qui requiert le moins de connaissances, le chemin additif excepté.

Le chemin en « 3×8 », qui est le moins emprunté et le plus coûteux en connaissances, avec le chemin en « 5×5 », procure le même score que le chemin additif qui est le moins coûteux en connaissances et le plus emprunté par les élèves. Donc il est possible de conclure que le coût en connaissances impacte le taux d'utilisation d'un chemin.

Dans le cadre du jeu, les élèves utilisent une combinaison additive pour 68,4 % d'entre eux contre 46 % pour le concours papier. Le chemin en « 6×4 » est emprunté par 25,9 % des élèves dans le jeu en ligne et par 43 % dans le concours papier. Plusieurs facteurs peuvent être évoqués. En premier lieu, ce ne sont pas les résultats des mêmes élèves qui ont été analysés mais le nombre d'élèves est important, nous permettant de penser qu'ils sont représentatifs des élèves du cycle 3. Le deuxième facteur est le fait que l'ordinateur fournit les résultats des calculs. Ceci devrait au contraire permettre aux élèves d'envisager de faire des calculs plus complexes dont ils ne connaissent pas le résultat. Nous pouvons supposer que cette différence importante est en partie due au temps : les élèves disposent de 3 minutes pour le concours, dans le cadre du jeu, ils essaient de résoudre un maximum de tirages durant ces trois minutes. Les décompositions multiplicatives « 2×9 » et « 3×6 » du nombre cible « 18 » sont utilisées par 3,5 % des élèves dans le jeu en ligne et par 8 % dans le concours.

Dans le jeu en ligne, ce tirage est très majoritairement résolu par une combinaison additive. Le pourcentage des combinaisons additives et des combinaisons multiplicatives simples représente plus de 90 % des combinaisons utilisées. Les (dé)compositions multiplicatives de « 18 » (combinaisons *MC*) sont peu utilisées (par moins de 7 % des élèves) et le chemin en « 2×9 », qui demande la création des deux facteurs, l'est par moins de 1 % des élèves. Le pourcentage d'élèves empruntant un chemin est dépendant, non du score auquel il peut amener, mais des connaissances nécessaires pour l'emprunter : les chemins ne sont pas classés de la même manière selon que l'on considère l'échelle liée au score ou celle liée aux connaissances, mais ils sont classés de la même manière si l'on considère l'échelle des connaissances et celle d'utilisation de ce chemin par les élèves.

2.3. Résultats de l'analyse des *data* de jeu

L'analyse des *data* montre que les stratégies de surface sont utilisées par les élèves avec une utilisation importante des divisions par « 1 ». De plus, le jeu *Mathador* ne favorise pas l'utilisation de connaissances riches. Le jeu en ligne semble conforter les élèves sur leurs combinaisons habituelles alors que le concours papier leur permet d'envisager de nouvelles combinaisons. Notre hypothèse est que la pression du temps lors du jeu en ligne incite les élèves à jouer sur des procédures plus ou moins automatisées qui « fonctionnent » sur les premiers niveaux[5] de jeu.

[5] Ces niveaux sont déterminés dans le jeu à partir de caractéristiques sur la valeur des nombres cibles et du nombre outil (mais non sur leur relation).

La tension entre jeu et apprentissage (choisir entre obtenir un bon score ou utiliser des connaissances mathématiques riches) est donc accentuée lorsque les élèves jouent en ligne. La prochaine partie expose comment cette tension peut être accrue par certaines pratiques des enseignants.

3. Pratiques enseignantes

9 enseignants du cycle 3 ont été observés, certains sur deux années, d'autres sur une seule et ceci sur plusieurs types de séances : des séances de calcul mental sans référence au jeu *Mathador*, des séances de jeu avec le logiciel *Mathador*, et en particulier la première séance, et enfin, pour certains enseignants, des séances créées pour faire le lien entre le jeu et le calcul mental. Les analyses effectuées nous ont amenée à distinguer trois grands types de logiques sous-jacentes aux pratiques observées : une logique privilégiant l'aspect ludique du logiciel (avec une importance accordée au score et aux stratégies de surface), une logique privilégiant les apprentissages des élèves et les aspects didactiques (avec une mise en relation des tâches proposées par le logiciel et des décompositions du nombre cible), une logique basée sur une confiance très forte dans le numérique (interactions uniquement techniques avec les élèves). Ces trois logiques découlent des particularités du logiciel, qui a une composante numérique, une composante jeu et une composante d'apprentissage. Nous développons dans ce texte la logique privilégiant l'aspect ludique, afin d'illustrer comment la tension entre jeu et apprentissage se retrouve dans les pratiques des enseignants, en prenant l'exemple de l'enseignant Dominique (classe de sixième), dont la pratique s'inscrit principalement dans cette logique avec une incitation à obtenir des scores cibles et une explicitation de différentes stratégies de surface.

Quatre séances de Dominique ont été analysées : deux SRM (séances régulières avec le logiciel *Mathador*) et deux SIMP (séances d'intégration d'une pratique de *Mathador* dans le projet global d'enseignement du calcul mental). Des indicateurs de cette logique sont présents lors de ces deux types de séances.

3.1. Séances SRM (séances régulières avec le logiciel *Mathador*)

Les SRM sont les séances régulières (une fois par semaine) durant lesquelles les élèves jouent avec le logiciel *Mathador*. Durant ces séances, nous relevons l'un des critères de la logique ludique : une part importante des interactions de Dominique avec ses élèves (qu'elles s'adressent au collectif ou à des élèves en particulier) porte sur les règles du jeu et notamment sur l'obtention d'un score élevé.

Il incite les élèves à jouer en réseau et à entrer ainsi en compétition. Cela l'amène à souligner l'intérêt d'amorces de stratégies de calculs, comme le fait de choisir deux nombres outils « grands » pour les multiplier, ou repérer les « 1 » ou deux nombres outils identiques pour créer un « 1 ». L'analyse des *data* a montré que lorsque les élèves utilisent une combinaison multiplicative simple, la multiplication est dans plus de 90 % des cas en première opération. Ainsi les élèves commencent fréquemment leurs calculs en utilisant un « grand nombre ».

Il va inciter les élèves à obtenir des scores élevés au moyen de stratégies qui le permettent : « faire des multiplications et divisions notamment des divisions par « 1 » ». En faisant référence à sa propre pratique du jeu, il fixe même des objectifs en termes de valeur du score comme le montre l'extrait suivant :

Dominique : *Alors, il y a eu des scores sur chrono ou pas ?*

Élèves : *Oui !*

E1 : *73.*

E2 : *86.*

E3 : *Monsieur, 81.*

E4 : *78.*

Dominique : *C'est excellent, toi, je l'ai pas vu. […] Bon, qui arrive autour de cent là ? C'est très bien en trois minutes, faire cent points, c'est très bien. Allez, il reste dix minutes…*

Dominique : *Pendant trois minutes, tu fais un maximum de points, si tu dépasses 50, c'est bien ; et si tu arrives autour de 100, c'est vraiment super, c'est rare, moi je n'y arrive pas toujours.*

Dominique n'hésite pas à proposer une technique pour augmenter le score grâce à une production de « 1 » à un élève qui pensait davantage à des calculs additifs ; proposition qu'il reprend ensuite pour l'ensemble des élèves.

Dominique : *Attends, attends, tu as trouvé ton chiffre, là d'accord, tu n'as pas moyen de faire un peu plus de points là ? Tu as ton « 56 », mais avec tes deux « 8 », qu'est-ce que tu pourrais faire ?*

Élève : *Plus 8 moins 8.*

Dominique : *Par exemple « plus 8 moins 8 », c'est ce que t'avais fait ? tu peux même faire mieux. Qu'est ce qui rapporte le plus de points ? les divisions, qu'est ce qui se passe si tu fais « 8 divisé par 8 » ? ça fait combien « 8 divisé par 8 » ?*

Élève : *Je ne sais pas.*

Dominique : *Eh bien essaie, « 8 divisé par 8 » ; ça fait « 1 », et avec ce « 1 » et ton « 56 », tu ne peux pas faire des points, au lieu de tout de suite valider ?*

Dominique : *Non, reviens en arrière, qu'est ce qui va rien changer avec ton « 1 » et ton « 56 » ?*

Élève : *56 multiplié par 1.*

Dominique : *Ouais, même mieux, parce que ça rapporte le plus de points « 56 divisé par 1 ».*

Élève : *Oui.*

Dominique : *Alors, si tu arrives à avoir des « 1 », tu peux faire des points.*

Cet extrait illustre l'un des indicateurs de la logique ludique. L'enseignant explique à ses élèves comment sophistiquer une solution afin de gagner plus de points dans le jeu. Nous relevons également des incitations spécifiques :

Dominique : *Allez, essayez de penser à diviser par « 1 », multiplier par « 1 ».*

Un autre indicateur de cette logique est de proposer aux élèves d'abandonner des calculs engagés, calculs qui risquent de déboucher sur des impasses et de préférer des calculs plus faciles :

Dominique : *Au pire, on passe et on fait plus facile, si l'on n'a pas tout de suite d'idée.*

Ce choix n'est pas pertinent dans le cadre des apprentissages mais peut permettre d'obtenir un meilleur score. L'enseignant incite les élèves à prendre en considération le score :

Dominique : *Pensez à faire des points, à « chrono », il faut faire des points.*

Cette logique de joueur, de recherche d'un score élevé, est elle-même génératrice d'une tension entre un jeu rapide pour sommer beaucoup de petits scores et un jeu qui permet d'obtenir un score plus élevé pour chaque tirage. Automatiser des stratégies de surface est donc un bon choix dans le cadre du jeu mais cette logique peut aussi amener l'élève à ne pas explorer certains calculs pourtant porteurs d'apprentissages mais dont la complexité peut ralentir le jeu.

3.2. Séances SIMP (séances d'intégration d'une pratique de *Mathador* dans le projet global d'enseignement du calcul mental)

Description de la séance

Dans ces séances (SIMP) Dominique fait le lien avec le calcul mental, il propose des tirages à résoudre en classe. Lors de première séance observée (celle que nous détaillons ici), Dominique propose deux tirages à ses élèves de sixième : $14-7-8-1-1 \rightarrow 14$ et $3-1-5-4-8 \rightarrow 11$.

La première observation concerne le peu d'intérêt mathématique de ces deux tirages. Dans le premier le nombre cible est également un nombre outil. Dans le jeu il est nécessaire de faire au moins une opération, une multiplication ou division par « 1 » est donc nécessaire ; il est également possible d'obtenir le nombre cible « 14 » à partir de la décomposition multiplicative « $14=2\times7$ ». Le deuxième tirage a pour cible un nombre premier, l'utilisation d'une décomposition multiplicative n'est donc pas l'objectif. Nous observons deux nombres « 1 » présents parmi les nombres outils du premier tirage, un nombre « 1 » présent dans le deuxième ainsi que la possibilité d'en créer un autre par différence « $5-4$ ». Le choix de ces tirages s'inscrit donc dans une logique de joueur. Ceci est accentué par la méthodologie de recherche proposée aux élèves : dans un premier temps (très court) ils doivent proposer une solution puis dans un deuxième temps réfléchir en groupe à une autre solution ayant un score plus important.

Nous développons le travail effectué durant le deuxième tirage : $3-1-5-4-8 \rightarrow 11$.

Dans un premier temps, la solution de type combinaison additive est proposée, sous la forme la plus simple « $8+3$ » puis en divisant par « 1 » : « $(8+3)\div1$ ». Dans un deuxième temps, deux « coups *Mathador* » sont exposés : le chemin en « 3×5 » avec une division par « 1 » : conduisant à une solution de type combinaison MSA « $(3\times5+4-8)\div1$ » et une solution de type combinaison $MC2$, sophistication du chemin additif, dans laquelle un nombre « 1 » est créé par soustraction et utilisé dans une multiplication, puis une autre division par « 1 ». Ceci permet de réaliser un « coup *Mathador* » : « $(8+3)\times(5-4)\div1$ ». Les différentes procédures sont inscrites au tableau comme le montre la figure 1.

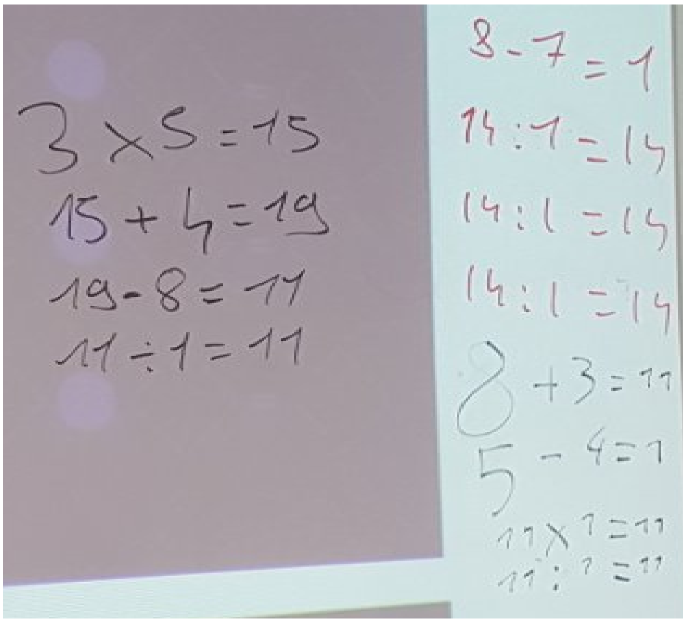

***Figure 1** : Indications laissées au tableau concernant le tirage : $3-1-5-4-8 \rightarrow 11$.*

Les modalités de travail sont un des critères relevant de cette logique avec un premier temps rapide et un deuxième temps permettant de sophistiquer la solution trouvée pour gagner des points, ou d'en trouver une autre. Les interactions sont centrées presque exclusivement sur le score obtenu et l'utilisation de « 1 » est privilégiée. L'enseignant félicite les élèves qui pensent à diviser par « 1 » plutôt que multiplier par « 1 », ce qui fait gagner deux points dans le jeu. L'objectif de l'enseignant est, à partir de cette première solution, de trouver des « stratégies de surface » permettant de gagner des points : recréer un nombre outil existant par division, diviser par « 1 »… La hiérarchisation des solutions s'effectue sur la base du score obtenu pour chaque solution et un score minimum est attendu par l'enseignant.

Pour les deux tirages de cette séance, les combinaisons rencontrées sont additives et multiplicatives simples ; les combinaisons multiplicatives complexes ne sont présentes que pour créer un nombre « 1 », afin d'augmenter le score. Les divisions par « 1 » sont systématiquement présentes dans le deuxième temps et fréquentes dès la mise en commun intermédiaire. C'est une procédure automatisée par les élèves : diviser par « 1 » (lorsqu'il est présent parmi les nombres outils non utilisés) permet de gagner des points.

Le professeur met l'accent sur l'utilisation du nombre « 1 ». Cette utilisation a fait l'objet d'un apprentissage comme le montre l'extrait suivant :

Dominique : *Ah, excellent ! Il aurait pu me dire quoi ? Il n'y a pas longtemps il m'aurait dit 14 fois 1, il a pensé à diviser, ah beh c'est bien.*

Il en est de même pour le nombre « 0 » qui permet d'augmenter le score (notamment par une soustraction) et permet de produire un « coup *Mathador* », ce que confirme le professeur à la suite d'une demande d'un élève :

Élève : *Est-ce qu'on peut faire zéro ?*

Dominique : *Oui. Un moins un, zéro et le rajouter après, ça va marcher, par contre, si tu divises par zéro, c'est compliqué.*

Dominique conduit le moment d'explicitation qui suit le premier tirage avec l'objectif de montrer comment le joueur peut augmenter son score.

Il décrit les stratégies de surface :

Dominique : *Souvent on part de la même base et puis après on modifie la fin.*

Logique de joueur et logique d'enseignement/apprentissage

Dans ce type de séances, d'autres indicateurs complètent ce qui a été relevé lors des séances SRM. Tout d'abord par le choix des tirages dans lesquels le nombre « 1 » est présent au moins une fois et pour le premier de ces tirages le nombre cible est un nombre outil. Les modalités de travail accentuent cette logique avec un premier temps rapide et un deuxième temps permettant de sophistiquer la solution trouvée pour gagner des points. Les interactions sont centrées presque exclusivement sur le score et sur l'utilisation de « 1 ». L'enseignant félicite les élèves qui pensent à diviser par « 1 » plutôt que multiplier par « 1 », ce qui fait gagner deux points dans le jeu.

Les seules institutionnalisations effectuées relèvent des règles du jeu ; toutefois cela l'amène à étudier et faire illustrer certaines stratégies de calcul (diviser par « 1 », voire construire un « 1 » pour l'utiliser dans une division) mais toujours finalisées par le score obtenu. Il nous semble que l'objectif visé par l'enseignant est une certaine automatisation des stratégies de surface permettant à l'élève d'être plus performant dans le cadre du jeu.

3.3. Conclusion à propos des pratiques de Dominique

Comme signalé à plusieurs reprises, les pratiques de Dominique sont sous-tendues par une logique ludique. Il semble prendre pour hypothèse que la recherche de l'obtention d'un score élevé provoque un enrichissement des connaissances.

Il y a donc une confiance dans le logiciel pour la réalisation de l'apprentissage du calcul mental. Des scores à atteindre sont donnés comme objectif lors de séances de jeu. Lors des SIMP, c'est principalement le développement de stratégies de surface qui est visé avec des tirages, choisis dans des niveaux peu élevés permettant l'utilisation du nombre « 1 ». Les tests pratiqués sur les élèves impliqués dans le projet montrent que ceux-ci, en CM1, connaissent déjà la neutralité de « 1 » pour la multiplication, cet objectif n'est donc pas en accord avec des objectifs d'apprentissage de la fin du cycle 3.

Conclusion

L'analyse *a priori*, les résultats des *data* et l'analyse des pratiques des enseignants convergent pour montrer un décalage entre les possibilités offertes lors de la résolution d'un tirage et l'exploitation en termes de connaissances qui en est faite par les élèves et les enseignants.

Ce décalage découle d'une tension intrinsèque entre le jeu et l'apprentissage, comme le montre l'analyse *a priori*. La confrontation de l'échelle des connaissances avec celle du score fait apparaître que l'obtention d'un score élevé ne correspond pas nécessairement à l'utilisation de connaissances riches. Les *data* montrent que les élèves privilégient souvent des connaissances liées aux structures additives ou à des niveaux de connaissances relevant de l'activation, négligeant les décompositions multiplicatives.

De plus, l'analyse des données démontre que les modalités de jeu exercent une influence sur cette tension. Les comparaisons entre une même tâche présentée sous deux formes (jeu en ligne et tirage papier) révèlent que les combinaisons utilisées dans le premier cas sont moins porteuses de connaissances que celles du tirage papier. La contrainte temporelle dans le jeu en ligne accentue l'aspect ludique au détriment de l'aspect éducatif. Cette dynamique peut être accrue par certaines pratiques enseignantes qui, en faisant confiance à la ludification, incitent les élèves à adopter des stratégies superficielles visant à maximiser leur score ce qui accentue encore cette tension en renforçant le côté joueur au détriment du volet apprentissages. L'enseignant lui-même y est donc aussi soumis et peut orienter ses pratiques vers le volet apprentissage ou vers le volet ludique du logiciel. Cet article ouvre, pour la suite de nos recherches, un questionnement plus général sur les pratiques des enseignants qui utilisent des jeux dans une visée pédagogique et sur l'influence des règles sur les apprentissages.

Références bibliographiques

Butlen, D. (2007). *Le calcul mental entre sens et technique*. Presses Universitaires de Franche-Comté.

Fischer, J.-P. (1987). L'automatisation des calculs élémentaires à l'école. *Revue française de pédagogie, 80*(1), 17-24.

Chesné, J.-F. (2014). *D'une évaluation à l'autre : des acquis des élèves sur les nombres en sixième à l'élaboration et à l'analyse d'une formation d'enseignants centrée sur le calcul* *mental*. [Thèse de doctorat, Université Paris 7-Denis Diderot].

Ludier, I. (2022). *Évolution des connaissances en calcul mental des élèves du cycle trois et influence d'une pratique régulière du logiciel Mathador sur les apprentissages*. [Thèse de doctorat, CY Cergy Paris Université].

Robert, A. (1998). Outils d'analyse des contenus mathématiques à enseigner au lycée et à l'université. *Recherche en Didactique des Mathématiques, 18*(2), 139-190.

https://revue-rdm.com/1998/outils-d-analyse-des-contenus/