LA MESURE ENTRE GÉOMÉTRIE ET FORMULES : L'AIRE DU RECTANGLE EN CM2 - ANALYSE DE MANUELS SCOLAIRES

Charlotte DE VARENT[1]
chercheure indépendante associée aux laboratoires CREAD et SPHERE
CREAD, Université de Rennes II
SPHERE - Université Paris Cité - CNRS, UMR 7219

Résumé. Cette recherche porte sur l'introduction de l'unité de mesure d'aire « cm^2 » dans les manuels de CM2. Elle s'appuie sur une analyse épistémologique, sur celle du contexte et des programmes ainsi que sur une synthèse de travaux en didactique concernant le savoir mathématique à transposer, pour élaborer une grille d'analyse des manuels. Nous identifions des implicites dans les choix des auteurs liés à la mobilisation de l'unité de mesure, d'abord dans le cadre géométrique et ensuite du fait de l'introduction des formules, dans les cadres numérique et algébrique, implicites pouvant engendrer des difficultés chez les élèves.

Mots-clés. Aire, unités de mesure, grandeurs, arithmétique, algèbre, transitions entre géométrie et algèbre, manuels scolaires.

Introduction

Les concepts d'unité de mesure, d'aire, de surface et de multiplication n'ont pas toujours été manipulés dans le contexte d'un système métrique faisant correspondre les unités de mesure de longueur avec les unités de mesure d'aire. Pendant des millénaires, de nombreux systèmes de mesure différents ont donné lieu à des pratiques mathématiques riches et diversifiées avec des implications sur les façons de voir les nombres, la multiplication ou encore de mobiliser le cadre géométrique. Nous montrons (de Varent, 2018) comment ces contextes de mesure ont des implications (et réciproquement) sur les concepts d'aire, de longueur, de nombre, d'unité et de multiplication. L'étude de situations historiques où les systèmes non métriques d'unités de mesure d'aire sont construits indépendamment des systèmes d'unités de mesure de longueur amène à se demander si le système métrique, du fait des relations facilitées entre unités de mesure de longueur et d'aire, peut conduire à des implicites concernant la compréhension du concept d'unité de mesure d'aire. En didactique, les travaux de recherche sont nombreux sur le sujet de l'aire comme le montre la synthèse de travaux de Perrin-Glorian (2002). Les points qui semblent avoir le plus été retenus en formation d'enseignants et dans les manuels sont les distinctions entre aire et surface, aire et périmètre. L'introduction par la mesure indirecte, puis directe est aussi traitée : d'abord avec une unité de mesure d'aire pouvant prendre une forme quelconque (comme un carré, un losange, un triangle…), puis avec l'unité de mesure cm^2 utilisée sous forme de carré. La transition vers les formules d'aire du carré et du rectangle est amenée par le dénombrement de carreaux qui conduit à faire émerger la formule par généralisation. Mais cette transition est-elle envisagée du point de vue de l'unité de mesure, qui est initialement

[1] charlotte.devarent@gmail.com
L'article porte sur des recherches menées au sein des laboratoires SPHERE & LDAR (Laboratoire de didactique André Revuz), Université Paris-Diderot.

introduite dans le cadre géométrique, et devient ensuite l'un des éléments d'une expression littérale ? Pour aborder cette question centrale, nos questions de recherche détaillées sont les suivantes :

Nous nous appuyons sur le résultat d'une analyse épistémologique (de Varent, 2018), l'analyse du contexte et des programmes ainsi que sur une synthèse de travaux en didactique concernant le savoir à transposer pour analyser les manuels. Quelles dimensions retenir de ces éléments préalables pour analyser l'introduction du concept d'unité de mesure d'aire ?

En analysant des manuels de CM2 selon les dimensions identifiées, qu'observe-t-on concernant l'introduction de l'unité de mesure d'aire conventionnelle (cm^2) dans la transition entre le cadre géométrique et les cadres numérique et algébrique ? Pour répondre à cette seconde question, nous avons analysé une sélection de manuels scolaires de CM2.

Après avoir présenté les cadres théorique et méthodologique, nous décrivons les dimensions retenues des analyses du contexte d'enseignement et du savoir de référence à transposer, puis nous décrivons les résultats d'analyse de treize manuels scolaires de CM2 du point de vue de l'unité de mesure d'aire entre géométrie et formules.

1. Cadres théorique et méthodologique

Nous présentons dans cette partie les références théoriques et méthodologiques qui nous ont servi à construire cette analyse : nous avons utilisé les analyses préalables d'une ingénierie didactique (Artigue, 1989). Les travaux de de Hosson et Schneeberger (2011) et Dorier (2000) ont notamment orienté l'analyse épistémologique qui fait partie de ces analyses préalables et dont nous utilisons les résultats pour répondre à notre première question de recherche. Par ailleurs, dans le cadre de l'introduction du « cm^2 » et des formules de l'aire du rectangle, nous nous plaçons sur une transition entre une introduction géométrique et une généralisation vers la formule de l'aire du rectangle, qui mobilise les cadres arithmétique et algébrique, nous utilisons aussi les notions de cadre et de registre. Enfin, nous présentons des caractéristiques méthodologiques liées à l'analyse de manuels scolaires.

1.1. Méthodologie de croisement des analyses épistémologiques et didactiques

Pour répondre à la première question de recherche, nous croisons le résultat d'une analyse épistémologique (de Varent, 2018), l'analyse du contexte et des programmes et une synthèse de travaux en didactique concernant le savoir à transposer pour analyser les manuels. Nous nous situons plus largement dans le cadre méthodologique de l'ingénierie didactique (Artigue, 1989)[2]. En effet, ces analyses ont servi d'analyses préalables à une expérimentation en classe[3] que nous ne rapportons pas ici.

Nous renvoyons à la thèse de de Varent (2018, pp. 230-231) pour l'ensemble de l'analyse épistémologique, définie ici comme le produit d'allers-retours constants entre textes historiques,

[2] Elle distingue quatre phases : 1) les analyses préalables, 2) la conception et l'analyse a priori des situations didactiques, 3) l'expérimentation et, enfin, 4) l'analyse a posteriori et la validation.

[3] Les analyses préalables comprennent l'analyse épistémologique des contenus visés par l'enseignement ; l'analyse de l'enseignement usuel et de ses effets, l'analyse des conceptions des élèves, difficultés et obstacles ; l'analyse du champ des contraintes dans lequel se situe la réalisation didactique en prenant en compte les objectifs spécifiques de la recherche.

travaux didactiques et manuels scolaires (de Hosson & Schneeberger, 2011, p. 11 ; Dorier, 2000, p. 29).

Ces allers-retours ont notamment débuté au prisme des travaux de Roditi (2005) qui considèrent le calcul d'aire en tant que situation multiplicative. Cette perspective qui vient de la didactique a permis une première sélection de textes historiques anciens sur des thèmes variés : la règle de trois, la multiplication ou la division, les calculs d'aires et de volumes. La sélection de textes anciens portant sur des situations multiplicatives a mené à nous interroger sur les effets du système d'unités de mesure (non métrique) adopté, sur la perception des concepts mathématiques (multiplication, nombre, aire, surface, unité de mesure…), conformément à l'approche historique du projet ERC « SAW[4] » dans lequel nous nous inscrivions en histoire, approche qui consiste à ne pas coller une approche moderne de ces concepts sur les textes anciens afin d'en comprendre les subtilités. Réciproquement, les travaux de didactique nous ont conduits à mobiliser des catégories pour penser les objets dans l'analyse épistémologique. Par exemple, les distinctions telles que « surface, aire, nombre » (Perrin-Glorian, 1989-1990, p. 32) amènent à observer dans les textes anciens les concepts, qui sont mobilisés ou non selon ces distinctions.

L'approche utilisée par les historiens du projet SAW a par ailleurs conduit à une approche algorithmique de ces situations : nous nous sommes en effet intéressés à chaque étape du calcul : quel est l'élément donné en entrée ? Qu'est-ce qui est multiplié ou additionné ? Quel est l'élément donné en sortie du calcul ?

Le croisement des analyses didactique et épistémologique a donc conduit à s'intéresser :

- à l'aire comme situation multiplicative parmi d'autres, situation dans laquelle les unités de mesure entrent en jeu de façons diverses ;
- à l'implication de cette perspective multiplicative et de l'utilisation du système métrique sur la compréhension des concepts (aire, surface, nombre, multiplication, unité de mesure) ;
- à regarder le calcul d'aire dans une perspective algorithmique.

Cela nous a permis de dégager une liste de points d'attention dans la mesure d'aire du carré et du rectangle que nous détaillons par la suite.

1.2. Cadres et registres de représentation sémiotique

Nous utilisons ici les travaux de Duval, selon lequel il est essentiel pour penser les objets mathématiques d'utiliser une diversité de registres pour mieux les appréhender. Selon Duval, la connaissance de l'objet mathématique dans plusieurs registres permet de différencier cet objet mathématique de ses représentations (Duval, 1993, p. 37). Il faut que l'élève reconnaisse un objet mathématique dans ses différentes représentations, donc dans plusieurs registres. Par exemple le symbole représente l'objet « nombre » ou le tracé représente un segment. Selon lui, les représentations sémiotiques d'un objet mathématique sont diverses et nécessaires (Duval, 1993, p. 38). Les représentations sémiotiques fonctionnent dans des systèmes de représentation (avec des contraintes qui sont propres au système). Par exemple, une figure fonctionne dans un système de représentation différent d'une formule[5]. Duval (1993) insiste sur le fait que la

[4] https://sawerc.hypotheses.org/

[5] Les systèmes ne sont pas tous des registres. Pour qu'un système de représentation sémiotique puisse être un registre de représentation sémiotique, il doit permettre trois activités cognitives : la formation d'une représentation, son traitement dans le registre donné, sa conversion (Duval, 1993, p. 41).

compréhension d'un concept repose sur la coordination de ses registres de représentation, laquelle n'est pas naturelle (pp. 51-52). Pourtant, la mobilisation des différents registres de représentation d'un concept est, d'après Duval, nécessaire pour que les connaissances des élèves sur ce concept soient mobilisables ensuite.

> *Naturellement, l'absence de coordination n'empêche pas toute compréhension. Mais cette compréhension, limitée au contexte sémiotique d'un seul registre, ne favorise guère les transferts et les apprentissages ultérieurs : elle rend les connaissances acquises peu ou pas mobilisables dans toutes les situations où elles devraient réellement être utilisées. En définitive, cette compréhension mono-registre conduit à un travail à l'aveugle, sans possibilité de contrôle du « sens » de ce qui est fait* (Duval, 1993, p. 52).

Perrin-Glorian (2004) analyse la distinction entre changement de cadre et conversion de registre de représentation sémiotique (Duval, 1995). Elle emploie le mot « cadre » pour cadre numérique ou cadre géométrique, le mot « registre » pour le registre de l'écriture des nombres ou le registre des figures. Le plus important est que l'on n'a plus affaire aux mêmes représentations des objets quand on change de cadre ou de registre. Perrin-Glorian (2004) propose d'utiliser l'expression de « changement de cadre » en fonction des connaissances des élèves : lorsqu'il y a un apport de connaissances nouvelles pour les élèves, qui n'existent pas dans l'autre cadre (pp. 68-70).

Dans le cas de l'aire du rectangle, le registre des figures, dans le cadre géométrique (avec le pavage du rectangle), est remplacé par des formules ($c \times c$ ou $\ell \times L$), dans le registre symbolique ou par le cadre numérique, quand on applique la formule. Les objets manipulés (les unités de mesure représentées par des carreaux) sont alors représentés par des symboles (comme le « cm^2 ») dans le registre symbolique quand on utilise la formule, et il faudra analyser ce qu'ils deviennent conceptuellement, dans le cadre numérique, lors de l'application de la formule à des cas concrets de calcul.

Au CM2, la généralisation de la formule dans le cadre algébrique apporte la connaissance nouvelle d'un point commun à tous les calculs d'aire du carré et du rectangle, en fonction de la mesure des longueurs. Il s'agit d'un changement de cadre, à ce stade de la scolarité, au sens qu'emploie Perrin-Glorian (c'est-à-dire en fonction des connaissances des élèves).

En résumé, nous nous intéressons ici au cadre géométrique lié au registre des figures (pavage), puis au cadre algébrique lié au registre symbolique (formule) et au cadre numérique lié au registre des nombres (application de la formule). Nous nous penchons sur la coordination des représentations des objets mathématiques liés au calcul d'aire, notamment aux unités de mesure dans la transition du cadre géométrique aux cadres numérique et algébrique. Nous nous interrogeons sur l'articulation de représentations de l'objet « unité de mesure d'aire » dans les différents registres, et l'explicitation ou non de cette articulation chez les auteurs de manuels scolaires. Duval conseille en effet d'être attentif à la capacité des élèves à différencier les objets de l'une de leurs représentations, ce qui nous engage à analyser avec précision la façon dont les manuels accompagnent la présentation de l'unité de mesure d'aire dans la transition entre ces cadres.

1.3. Articulation des travaux sur le savoir mathématique de référence à transposer

Le croisement des analyses épistémologique et didactique nous a conduits à rassembler des travaux en didactique issus de différents champs en histoire et didactique des mathématiques et de la physique : géométrie, grandeurs, bidimensionnalité, mesure, unité, découpage du plan, raisonnement à plusieurs variables En effet, le choix initial de nous centrer sur les unités de mesure dans la transition intercadres entre géométrie (pavage) et la formule de l'aire du rectangle nous a conduits à réunir des travaux sur les grandeurs en géométrie (voir Perrin-Glorian, 2002) des travaux qui abordent les liens entre aire ou volume et bidimensionnalité (Rogalski-Muret, 1984 ; Vergnaud *et al.*, 1983). Des travaux posent le problème du point de vue épistémologique : Munier et Passelaigue (2012) ou le VIM[6] (2008) abordent les différences entre mesure, mesurage, unité de mesure, valeurs numériques associées à la mesure. Chambris (2009) analyse l'articulation dans l'enseignement de la notion d'unité entre le système métrique et les unités de numération. Du point de vue du savoir à transposer, plusieurs travaux (de Courtenay *et al.*, 2019 ; Perrin-Glorian, 1989-1990 ; Pressiat, 2002) abordent les implications d'une mise en relation de l'addition de valeurs numériques issues de mesure avec le découpage du plan dans le monde physique du fait des relations de proportion entre grandeurs.

Outhred et Mitchelmore (1992, 1996) posent la question du point de vue de l'apprentissage spatial du pavage et du sens qu'il est possible de donner aux carreaux. Viennot (1992) engage enfin à penser le moment de l'introduction des règles du raisonnement sur plusieurs variables dans les formules en lien avec l'apprentissage de la dépendance fonctionnelle par des raisonnements du type « si telle grandeur augmente et si telle autre est maintenue constante, alors telle autre diminue » (pp. 139-140).

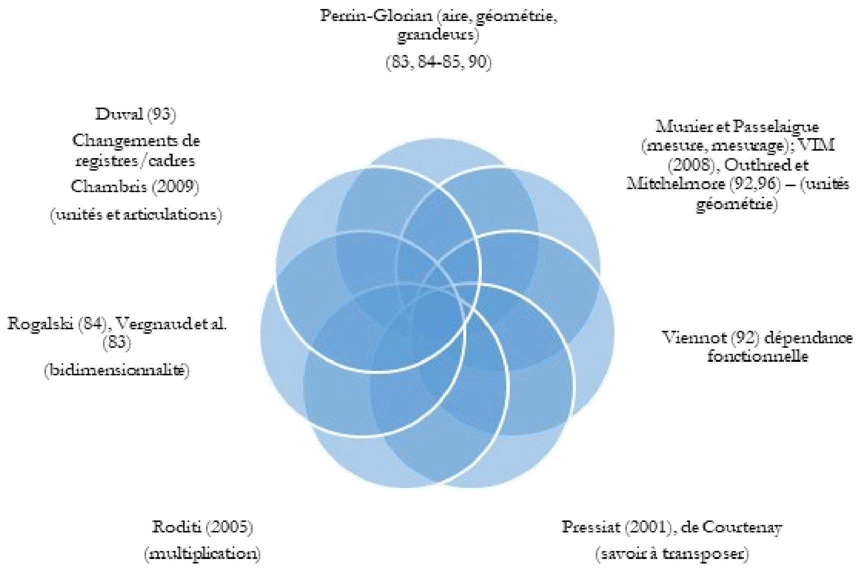


Figure 1 *: Les unités de mesure à la croisée des travaux.*

Ces travaux mis ensemble illustrent plus généralement la difficulté de l'enseignement dans un contexte de transition entre géométrie et formules lorsque la mesure est impliquée. De plus, ils mettent en valeur le fait que le système métrique actuel permet de mettre en relation les unités de mesure de longueur et d'aire, ce qui implique que les unités de mesure d'aire sont représentables par un carré dont la longueur du côté est l'unité de mesure de longueur standard. Cela permet d'associer facilement l'addition au découpage du plan, c'est-à-dire de construire un parallèle entre les relations de proportions entre grandeurs et les opérations sur les nombres. Nous nous demandons si cela peut créer des implicites dans la représentation de l'unité de mesure d'aire dans la transition entre géométrie et formules, qui soient observables dans les manuels.

[6] International vocabulary of metrology.

1.4. Méthodologie d'analyse des manuels scolaires de 2008

Précautions initiales

Premièrement, l'analyse de manuels scolaires ne donne pas accès directement aux pratiques réelles des enseignants (Gueudet & Trouche, 2010). Il est aussi possible que les enseignants aient trouvé leur propre façon de combler ou modifier l'information auprès des élèves pour remédier à des informations incomplètes ou par une attitude critique devant les choix de certains manuels. Nous utilisons cette analyse pour soulever des hypothèses qui pourraient donc dans un deuxième temps être confrontées aux pratiques.

Par ailleurs, les choix des manuels sont significatifs d'une pratique de l'institutionnalisation (Chaachoua, s. d.), il nous semble donc qu'il est important de connaître la façon dont les auteurs envisagent la notion d'unité de mesure et la transition entre géométrie et formules.

Deuxièmement, nous utilisons pour l'analyse une méthode venant des historiens, qui consiste à reconstituer les étapes du calcul (que nous appelons algorithme) à chaque étape, et ce que l'élève utilise comme variables de l'algorithme. Par exemple, lorsqu'il s'agit de mesurer l'aire d'un carré dans le cadre géométrique avec un pavage carré, les consignes du manuel peuvent impliquer pour l'élève :

- le compte du nombre de carreaux sur une ligne ;
- la multiplication du nombre obtenu par lui-même ;
- l'exposé du résultat de la multiplication aux côtés d'une unité de mesure (à déterminer ou non par l'élève en fonction de l'explicitation donnée en énoncé).

Dans le cadre de l'application d'une formule, si la mesure de la longueur du côté du carré est donnée à l'élève dans l'énoncé, les consignes du manuel peuvent impliquer pour l'élève :

- la multiplication par lui-même du nombre issu de la mesure de la longueur ;
- l'exposé du résultat de la multiplication aux côtés d'une unité de mesure d'aire (à déterminer par l'élève).

Ainsi, les deux algorithmes impliquent des tâches différentes et une conception des objets mathématiques qui peut être différente. L'algorithme que nous tâchons de reconstituer est donc implicite, et donne lieu dans les manuels à des traces seulement. Ces traces sont par exemple un énoncé, un diagramme, ou un résultat d'exercice. Notre analyse repose donc sur les éléments qui sont portés à la connaissance de l'élève, et ce qu'il peut en comprendre théoriquement. Là encore, entre cette reconstitution et la pratique réelle il y a un écart qui provient de la lecture que fait réellement l'élève de ces traces, ou des indications complémentaires apportées par l'enseignant. Cependant, connaître cette lecture que peut théoriquement faire un élève selon les manuels nous permet déjà de relever si, dans ce cadre « idéal », des malentendus sont déjà possibles, ou si au contraire, l'explicitation est maximale.

Les manuels scolaires analysés

Les 13 manuels de CM2 sélectionnés pour l'analyse constituent l'intégralité des manuels de la bibliothèque de l'INSPÉ Bretagne (sur la base de la collection complète), site de Rennes en 2014, donc mis à la disposition des futurs enseignants, et sur la base des programmes de 2008. Le choix de l'année 2008 vient du fait qu'une expérimentation a ensuite été menée au lycée auprès d'élèves de seconde ayant suivi ces programmes (qui étaient encore en vigueur au début de l'expérimentation). La séance analysée est celle qui permet d'introduire le « cm^2 » et les formules d'aire du carré et du rectangle. Lorsque le « cm^2 » était introduit dans une séance précédente indépendante, nous avons analysé les deux séances. Le choix de nous centrer sur l'aire du rectangle vient de la volonté de regarder la façon dont l'unité de mesure (ici le « cm^2 ») est enseignée, dans le cadre géométrique puis dans le cadre algébrique (formules) et arithmétique (application des formules). Ainsi l'aire du rectangle se situe entre les cadres.

La méthodologie d'analyse adoptée a consisté en l'utilisation des dimensions à retenir, après les analyses préalables ; ces dimensions sont précisées en partie 2.4. Pour cela, nous avons procédé : à une reconstruction de ce qu'il est attendu de l'élève, lors de trois étapes : l'étape de calcul du nombre de centimètres-carrés dans un rectangle pavé, l'étape de la généralisation qui permet de dégager la formule, et l'étape de l'application de la formule.

Lors de l'utilisation de la mesure du côté du rectangle, nous avons analysé si les manuels font expliciter par l'élève (ou explicitent eux-mêmes directement) le lien entre le nombre d'unités de mesure de longueur sur un côté et le nombre de carreaux cm^2 sur une ligne ou colonne.

Pour cela, nous avons étudié les exercices donnés du début de la séance impliquant le pavage du carré (dans le cadre géométrique) jusqu'à l'institutionnalisation de la formule dans le cadre algébrique. Parfois, le premier exercice de la séance n'était pas sur la page du manuel mais il était présent dans le livre du maître sous la forme d'une activité de découverte ; nous l'avons inclus dans la reconstitution. Nous avons enfin pris en compte la phase d'institutionnalisation dans le manuel et le livre du maître.

Ainsi, comme le décrit Chaachoua (s. d.), nous nous sommes intéressés :

- aux tâches données et aux techniques pour les réaliser,
- aux technologies, dans la perspective de reconstituer ce qui, selon l'intention des auteurs, arriverait idéalement jusqu'à l'élève (pp. 6-7).

2. Dimensions à retenir pour l'analyse

2.1. Contexte institutionnel : programmes et séances

Nous présentons les programmes. Pour que ce soit plus concret, nous donnons un aperçu d'application des programmes à travers les séances préalables à celle que nous analysons (portant sur l'introduction de l'unité de mesure d'aire « cm^2 »). Nous choisissons le manuel *Pour comprendre les maths* (Hachette, 2008), car il est représentatif de la majorité des manuels.

Les programmes

Au cycle 1, les élèves sont amenés à distinguer certaines grandeurs : longueur, masse ou contenance, par des observations directes et des tris. Au cycle 2, ils travaillent sur la taille des collections, la longueur, la masse, la capacité, la durée, le prix. Il s'agit de prendre conscience qu'un objet peut être considéré selon plusieurs grandeurs. Quelques unités usuelles sont introduites par report d'unité puis à l'aide d'instruments (Éduscol, 2016, p. 3).

Du point de vue de l'aire, dans les programmes (Éduscol, 2008, 2016)[7], il est demandé de faire un premier travail sur le concept indépendamment de sa mesure, via des comparaisons directes (par exemple, l'aire de deux surfaces par découpage-recollement), puis indirectes à l'aide d'un outil intermédiaire (par exemple, une unité de mesure arbitraire). Dans un deuxième temps, il est préconisé d'introduire la mesure de la grandeur à l'aide d'unités de mesure standard (Éduscol,

[7] On retrouve la même approche en 2016 qu'en 2008.

2016, pp. 2-3). Ces recommandations se basent sur une distinction entre la grandeur, la mesure de la grandeur et l'objet dont elle est une caractéristique, en accord avec les préconisations de Perrin-Glorian (1989-1990), comme pour les autres grandeurs.

Objet	**Grandeur** (concept, propriété, caractéristique)	**Mesure**[8] (mesure de la grandeur dans une unité de mesure choisie : le nombre dépend de l'unité de mesure choisie)
Surface	Aire	$3\,cm^2$ (nombre)
Segment	Longueur	$3\,cm$ (ou $30\,mm$ ou $0{,}3\,dm$, etc.)
Solide	Volume	$3\,cm^3$

Tableau 1 *: Distinctions dans le vocabulaire concernant les grandeurs aire, longueur, volume.*

Du découpage-recollement à l'unité de forme quelconque

Nous présentons l'application de ces préconisations à travers l'exemple du manuel *Pour comprendre les maths* (Hachette, 2008) afin de donner un aperçu, que l'on trouve classiquement dans les manuels, des séances préalables à la séance qui sera analysée (l'introduction de l'unité de mesure « cm^2 » et des formules). Le manuel propose un découpage en cinq périodes[9]. Conformément aux recommandations des programmes, des activités permettent d'introduire progressivement la mesure à l'aide de l'unité de mesure standard :

- les auteurs proposent d'abord en période 1 des activités de découpage-recollement pour comparer des aires directement ;
- puis la mesure est introduite en période 2, d'abord avec une unité de mesure d'aire de forme quelconque, comme ici le losange.

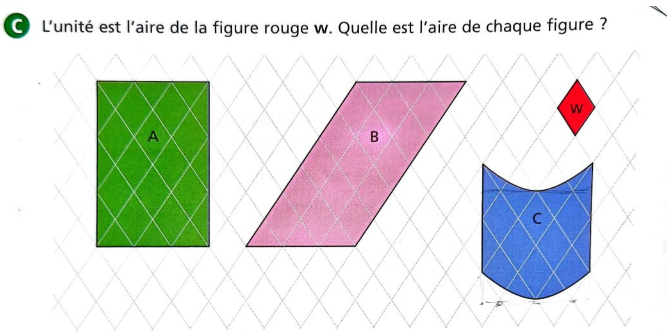


Figure 2 *:* Pour comprendre les maths CM2 *(Hachette, 2008, p. 138)*[10]

La mesure d'aire est liée à l'addition dans un cadre unidimensionnel. L'action de mesurage est

[8] Il faudrait aussi traiter le décalage avec une « mesure physicienne » comportant une indication de l'incertitude sur cette valeur mesurée et des indications sur la manière d'obtenir cette valeur mesurée et son incertitude.

[9] Période 1 : De la rentrée aux vacances de la Toussaint ;
période 2 : Des vacances de la Toussaint aux vacances de Noël ;
période 3 : Des vacances de Noël aux vacances d'Hiver ;
période 4 : Des vacances d'Hiver aux vacances de Printemps ;
période 5 : Des vacances de Printemps aux vacances d'été.

[10] L'étalon est ici coupé en deux (figures A et B). Pour la figure C, il faut effectuer un découpage-recollement et obtenir un carré afin de mesurer l'aire à l'aide de l'unité « w ».

explicite (par report d'un étalon, ici le losange). À ce stade, il n'est pas associé de nombre à l'unité de mesure d'aire elle-même. Celle-ci existe dans le registre des figures et dans le registre symbolique, à travers le nom qui lui est donné, souvent « u ».

Le calcul de l'aire d'une même surface avec deux unités de mesure différentes est proposé aux élèves et permet explicitement la distinction du concept d'aire indépendamment du nombre (Perrin-Glorian, 1989-1990) ; la valeur numérique de l'aire dépend d'un choix (arbitraire) d'unité d'aire : par exemple pour l'unité de mesure « u », la mesure d'aire peut-être « $3u$ » alors qu'elle sera différente pour une unité de mesure « u' », par exemple « $300u'$ »La valeur numérique (ici « 3 » ou « 300 ») peut différer pour une même aire.

Le manuel propose aussi des activités en période 3 concernant la distinction entre surface et aire avec :

- l'introduction de figures de même aire, ayant différentes formes ;
- un travail de mesure d'aire par encadrement ;
- des travaux visant la distinction entre aire et périmètre.

L'unité de mesure d'aire carrée

En période 4, l'unité de mesure d'aire prend la forme d'un carré, souvent un carreau du quadrillage dessiné en arrière-plan. On appellera ici « pavage » cette représentation qui permet le compte de carrés sur la surface pour en mesurer l'aire. Là encore, il est demandé d'exprimer le nombre d'unités de mesure d'aire (de forme carrée) que l'on peut compter sur la figure (*cf.* figure 3). La mesure d'aire est donc toujours liée à l'addition, dans un cadre unidimensionnel. L'action de mesurage est toujours perceptible (pour l'élève, il faut déduire qu'il y a report d'un étalon).

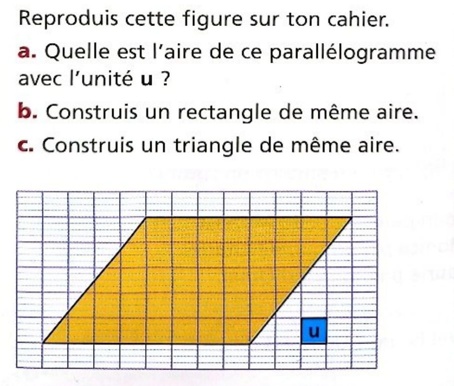
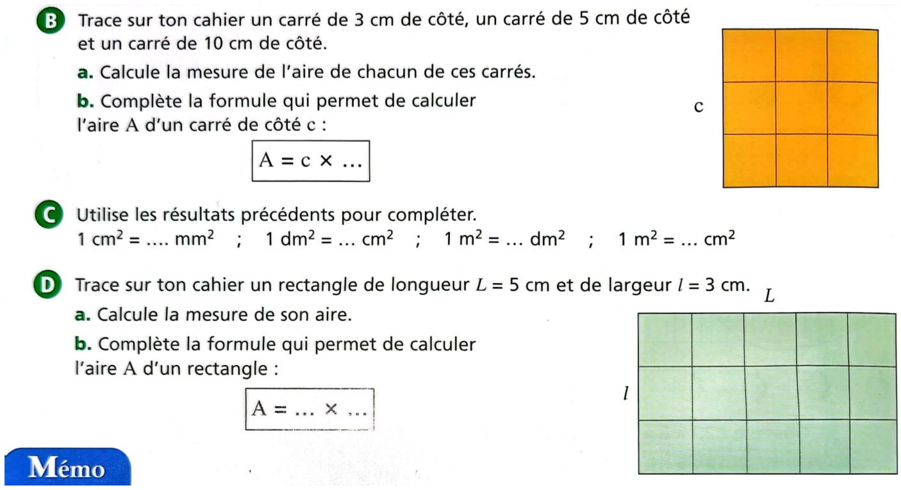


***Figure 3** :* Pour comprendre les maths CM2 *(Hachette, 2008, p. 54).*

L'unité de mesure d'aire centimètre carré

Dans ce manuel, le centimètre carré (cm^2) est introduit comme l'aire d'un carré d'un centimètre de côté (ici en période 4). L'élève doit compter les unités de mesure d'aire reportables sur la figure (des carrés) comme il le faisait juste avant, mais le carré a une aire fixe : $1\,cm^2$. L'unité de mesure reste associée à l'addition itérée, dans le cadre géométrique. Les additions qui portent sur les nombres sont encore associées à la juxtaposition de figures.

Compter des carreaux : de l'addition vers la multiplication



B Trace sur ton cahier un carré de 3 cm de côté, un carré de 5 cm de côté et un carré de 10 cm de côté.

a. Calcule la mesure de l'aire de chacun de ces carrés.

b. Complète la formule qui permet de calculer l'aire A d'un carré de côté c :

A = c × …

C Utilise les résultats précédents pour compléter.

1 cm² = …. mm² ; 1 dm² = … cm² ; 1 m² = … dm² ; 1 m² = … cm²

D Trace sur ton cahier un rectangle de longueur *L* = 5 cm et de largeur *l* = 3 cm.

a. Calcule la mesure de son aire.

b. Complète la formule qui permet de calculer l'aire A d'un rectangle :

A = … × …

Figure 4 *:* Pour comprendre les maths CM2 *(Hachette, 2008, p. 138).*

Généralisation et formule

Compter ces carreaux amène théoriquement l'élève à utiliser la multiplication « *côté*×*côté* » pour le carré et « *longueur*×*largeur* » pour le rectangle, et lui permet là encore théoriquement, de dégager la formule. Nous analyserons par la suite comment les manuels amènent la multiplication et la généralisation et la place que prend l'unité de mesure « cm^2 » dans ces étapes.

2.2. Résultats de l'analyse épistémologique

L'analyse épistémologique a conduit à dégager une liste de points d'attention dans le calcul d'aire du carré et du rectangle. Cette perspective issue des textes historiques amène en effet à considérer :

- la formule comme un algorithme avec des étapes de résolution, et des éléments en entrée et en sortie ;
- la conception du nombre à chaque étape de cet algorithme ;
- la conception de l'unité de mesure à chaque étape ;
- le recours éventuel au cadre géométrique, et à quelle étape du calcul d'aire ;
- le lien entre opération sur des objets géométriques et opération sur les nombres (par exemple, le fait d'associer un nombre de carreaux à un découpage du plan ou d'associer un nombre de reports d'étalon à un nombre) ;
- les implications du système non métrique sur la conception de ces objets (par exemple, les effets du choix d'une unité de mesure d'aire comme le cm^2, de forme toujours carrée, liée à l'unité de mesure de longueur) ;
- la place donnée à la bidimensionnalité, les éventuels implicites qui en découlent ;
- la place donnée au mesurage (par exemple, l'action explicite de report d'un étalon ou, au contraire, la présence unique d'une multiplication).

Ce sont donc des dimensions à retenir pour analyser l'introduction du concept d'unité de mesure d'aire dans les manuels scolaires, à travers les tâches proposées par les auteurs des manuels.

2.3. Résultats de la synthèse de travaux en didactique

Modélisation du réel et implicites du système métrique

Il n'est en rien évident d'associer l'addition des aires à la partition du plan (Pressiat, 2002, pp. 283-284). Dans le cadre de l'aire du rectangle, on fait appel à l'addition des aires de sous-figures qui composent une figure (les carreaux par exemple) pour trouver son aire, ou au découpage-recollement pour calculer l'aire d'une figure connaissant l'aire d'une autre.

> *Le concept d'aire tel qu'il est enseigné dans le secondaire se place dans le cadre d'une géométrie dans laquelle on dispose d'une notion de nombre. On est assez proche de la caractérisation axiomatique [...] La seule différence réside dans le fait que cette dernière démontre l'existence et l'unicité d'une telle fonction, alors que dans le cadre scolaire, ces propriétés sont considérées comme des résultats de l'expérience dont on n'a alors à prouver ni l'existence, ni l'unicité* (Pressiat, 2002, p. 287).

La justification du calcul prend pour acquis implicite une relation entre le cadre géométrique et le cadre numérique, entre les opérations sur les figures et celle sur les nombres et les propriétés de la fonction mesure.

Perrin-Glorian (1989-1990) pose le problème mathématique lié à la mesure. Elle explique que la mesure d'aire associe un nombre à une *« place occupée »*. La question mathématique est donc celle de la définition d'une fonction mesure μ de l'ensemble des surfaces planes dans $\mathbb{R}_+$ (auquel on ajoute éventuellement une valeur infinie si on ne se limite pas aux surfaces bornées) qui vérifie *« de bonnes propriétés »* d'additivité et d'invariance par déplacement (Perrin-Glorian, 1989-1990, p. 7). μ ne sera pas définie partout mais sur un certain ensemble de surfaces, l'ensemble des surfaces mesurables pour μ, et cet ensemble dépendra des exigences qu'on met sur la fonction mesure. Dans toutes ces présentations, l'aire est soit un nombre, soit l'application mesure elle-même ; elle dépend du choix de l'unité.

Perrin-Glorian (1989-1990) lui donne un sens indépendant de l'unité choisie, en termes de classes d'équivalence obtenues (p. 10). Ainsi, même s'il faut définir la mesure pour le faire, la grandeur aire a sa représentation mathématique propre. On peut cependant, d'un point de vue mathématique, donner un autre sens au mot « aire », indépendant de l'unité : si on a choisi une surface unité A et défini l'application μ_A correspondante, on peut définir une relation d'équivalence $\mathcal{R}_A$ par $S\,\mathcal{R}_A\,S'$, si et seulement si : $\mu_A(S)=\mu_A(S')$.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{S} \arrow[rr, "\mu_A"] \arrow[dr, "\chi"'] & & \mathbb{R}_+ \\ & \mathcal{A} \arrow[ur, "m_A"'] & \end{tikzcd}$$

pour B dans $\mathcal{S}$

$\chi(B)=\beta$

$m_A(\beta)=\mu_A(B)$

***Figure 5** : Diagramme commutatif (Perrin-Glorian, 1989-1990, p. 10).*

Les classes d'équivalence obtenues ne dépendent pas du choix de A. On peut alors appeler aire β de B la classe d'équivalence de B pour n'importe laquelle des relations $\mathcal{R}_A$ et définir la mesure de l'aire β comme la mesure de n'importe laquelle des surfaces de β. On a un diagramme commutatif. Ainsi, on peut *« donner un fondement mathématique à la notion d'aire en tant que grandeur, même s'il faut définir au préalable la mesure pour lui donner ce fondement »* (Perrin-Glorian, 1989-1990, p. 10). L'auteur explique que ce qui intéresse les mathématiques est l'application entre surfaces et nombres (μ_A) : les comparaisons de surfaces se ramènent à des comparaisons de nombres, les juxtapositions de surfaces à des additions de nombres, et dans ces conditions, la considération des autres flèches peut apparaître comme un détour inutile.

Les implicites ainsi soulevés par ces auteurs sur la relation entre le plan et la mesure pourraient avoir deux conséquences au moins :

- une assimilation de certains objets mathématiques par les auteurs de manuels et *a fortiori* les élèves, faute d'explicitation de ce qui entre en jeu dans chaque cadre ; par exemple aire et mesure d'aire, nombre, aire et surface ;
- une relation à la justification qui soit sur ce point « mal entamée » s'il n'est pas précisé aux élèves par les auteurs de manuels que des propriétés sont utilisées pour relier l'addition des aires à la partition du plan (et pour le moment acceptées comme vraies puisque la démonstration n'est pas facile).

Synthèse de travaux sur le sens donné au pavage

Outhred et Mitchelmore (1992) montrent que construire un pavage est une activité problématique du point de vue cognitif. Or les élèves qui ne se représentent pas le pavage comme constitué de lignes et colonnes ne déterminent pas, ou rarement, le nombre de carreaux par multiplication, étape clé de la généralisation de la formule. L'étude porte sur les années 1 à 4 (6-7, 7-8, 8-9, 9-10 ans). Aucun des élèves ayant fabriqué un pavage en dessinant des carreaux « un par un » n'avait utilisé la multiplication, alors que la majorité des élèves qui avaient dessiné des pavages « structurés » l'avaient utilisée (ou ont fait des regroupements). Le passage de l'addition itérée à la multiplication n'est donc pas automatique pour tous les élèves.

De plus, seuls les élèves ayant dessiné des pavages structurés avaient mesuré les côtés du rectangle. Mais pour autant, et cela est important, certains des élèves ayant réalisé de tels pavages n'avaient pas utilisé la mesure de la longueur du côté pour déterminer le nombre de carreaux sur un côté du rectangle. Le lien entre nombre de centimètres et nombres de carreaux (cm^2) ne sera donc pas automatique.

> *[...] de nombreux élèves à ce niveau, et même au niveau 4, n'ont pu appliquer leur multiplication et connaissances en mesure linéaire, pour déterminer l'aire du rectangle. [...] Il est évident, par ces résultats, que les jeunes enfants n'interprètent pas automatiquement les quadrillages par carreaux en termes de lignes et colonnes, et que cela pourrait entraver leur apprentissage de la mesure d'aire utilisant des diagrammes* (Outhred & Mitchelmore, 1992, pp. 200-201).

Outhred et Mitchelmore (1996) s'attachent à la compréhension intuitive de la mesure d'aire avant son enseignement. Ils réalisent leur étude sur 155 élèves de quatre écoles d'un milieu socio-économique moyen de Sydney, sur les années 1 à 4. Ils font ressortir quatre principes fondamentaux pour l'acquisition de la mesure d'aire :

- le rectangle doit pouvoir être couvert sans trous ni chevauchement ;
- il doit pouvoir être couvert par pavage de carrés ;
- le nombre d'unités selon chaque côté doit pouvoir être trouvé (spontanément) en mesurant les longueurs ;
- le nombre d'unités dans une grille rectangulaire doit être vu comme le produit du nombre d'unités de chaque ligne et colonne.

Ils classent les stratégies des élèves en niveaux :

- niveau 1 : l'élève ne se rend pas compte que toute la surface doit être couverte avec des unités identiques (trous, chevauchements, taille de l'unité changeante) ;

- niveau 2 : l'élève se rend compte que toute la surface doit être couverte, mais il a des difficultés à assurer la systématisation du recouvrement et la congruence des unités ;
- niveau 3 : la grille est construite, les unités estimées, mais l'élève ne voit pas la relation entre la taille de la grille et les longueurs des côtés du rectangle ;
- niveau 4 : l'élève voit la relation entre la taille de la grille et les longueurs de l'un des côtés du rectangle, mais s'étant focalisé sur une dimension, il a des difficultés à construire une grille correcte ;
- niveau 5 : la grille est construite, les deux côtés sont mesurés.

L'étude rappelle qu'un tiers seulement des élèves d'année 3 (8-9 ans) et trois quarts seulement des élèves d'année 4 (9-10 ans) sont de niveau 4 ou 5. Outhred et Mitchelmore (1996) notent que la recherche a mis l'accent sur les principes 1 et 4 et souhaitent souligner l'importance du principe 3 : le nombre d'unités selon chaque côté doit pouvoir être trouvé (spontanément) en mesurant les longueurs, principe

> *qui apparaît avoir été complètement négligé par la littérature. Il peut sembler évident aux adultes que les nombres dans la grille dépendent des mesures du côté, mais ce n'est clairement pas évident pour les élèves* (Outhred & Mitchelmore, 1996, p. 94).

Ils font enfin le lien entre cette capacité et celle de mesurer à la règle. Ils montrent que la mesure à la règle n'est pas automatiquement vue comme le compte d'un nombre d'espaces de taille 1 *cm* (donnée par le nombre écrit sur la règle). Or il s'agit d'un aspect essentiel pour permettre de relier le nombre d'unités carrées à la longueur du côté (d'autant plus si le carré ne fait pas 1 *cm* de côté). L'implication pour l'enseignement est que la mesure à la règle ne devrait pas être enseignée simplement comme une habilité mécanique. La règle devrait plutôt être vue comme l'une des nombreuses façons de résoudre ce problème général : *« comment trouver combien de telles unités de longueur se trouvent sur une longueur donnée ? »* (Outhred & Mitchelmore, 1996, p. 95).

Ainsi, plusieurs points clés sont à retenir : tous les élèves ne déterminent pas automatiquement le nombre de carreaux d'un pavage par multiplication, le lien entre le pavage et la mesure du côté du rectangle n'est pas automatique, la longueur elle-même n'est pas forcément perçue comme le report d'une unité de longueur, et le nombre d'unités de mesure d'aire selon chaque côté n'est pas automatiquement trouvé en mesurant les longueurs.

2.4. Premier résultat : dimensions retenues pour l'analyse

Premièrement, la perspective épistémologique a conduit à s'interroger sur les unités de mesure dans la transition entre géométrie, algèbre et arithmétique. Du point de vue des registres, Duval met en garde quant à la capacité des élèves à différencier les objets de l'une de leurs représentations, ce qui nous engage à analyser avec précision la façon dont les manuels accompagnent la transition entre les cadres géométrique, arithmétique et algébrique du point de vue de la compréhension des concepts comme l'unité de mesure d'aire. La perspective épistémologique liée à l'histoire engage à regarder le calcul d'aire comme un algorithme et à analyser la façon dont le manuel facilite la compréhension de l'utilisation des concepts comme l'unité de mesure d'aire à chaque étape de l'algorithme de calcul et dans quel cadre se situe le calcul (géométrique avec une manipulation de figures, arithmétique avec des opérations sur les nombres).

Deuxièmement, l'analyse épistémologique a amené à réunir des travaux issus de différents champs en didactique (cadres et registres, grandeurs, multiplication, bidimensionnalité, dépendance fonctionnelle, notions d'unité, concepts liés à la mesure, pavage). Du point de vue du savoir de référence, nous avons souligné dans la réponse à la première question de recherche que des implicites peuvent être liés au raccourci qui consiste à s'intéresser assez directement à l'application entre surfaces et nombres, et à assimiler sans explicitation la somme des aires des sous-surfaces qui permettent la décomposition du rectangle (carreaux) et l'aire totale de la figure, afin de pouvoir se ramener à des comparaisons de nombres plutôt qu'à des juxtapositions. Ceci comporte le risque de passer sous silence l'existence d'une démontrabilité (la possibilité de relier addition et juxtaposition) et d'induire éventuellement chez les enseignants et les élèves l'idée que la question ne se pose pas, En outre, si la question ne se pose pas, le risque est l'assimilation de certains objets comme le nombre, l'aire et la surface ; le carreau, l'unité de mesure d'aire et son aire ; le nombre de carreaux, le nombre 3 dans $3\,cm^2$ et la mesure d'aire ($3\,cm^2$, $300\,mm^2$). Ainsi, il faudra analyser comment les manuels précisent ou non les objets mathématiques qui entrent en jeu et ce que devient la notion d'unité de mesure d'aire, notamment dans la perspective du mesurage (le report explicite d'un étalon choisi pour mesurer).

Troisièmement, la perspective épistémologique interroge sur les implications de l'utilisation du système métrique, notamment dans ce cadre d'une situation de bidimensionnalité qui implique une relation entre unités de mesure de longueur et d'aire, facilitée par le système métrique. Or les travaux de didactique montrent que tous les élèves ne déterminent pas automatiquement le nombre de carreaux d'un pavage par multiplication, que le lien entre le pavage et la mesure du côté du rectangle n'est pas automatique, que la longueur elle-même n'est pas forcément perçue comme le report d'une unité de longueur, et surtout que le nombre d'unités de mesure d'aire selon chaque côté n'est pas automatiquement trouvé en mesurant les longueurs. Les résultats de didactique (Outhred & Mitchelmore 1994, 1996) rapportent en effet des difficultés : le lien entre le compte des carreaux et la formule n'est pas évident, ni pour les élèves, ni pour les futurs enseignants. La formule de l'aire du rectangle tend à être appliquée à d'autres figures, ce qui pourrait s'expliquer par une difficulté à lui donner du sens. L'aire serait ainsi considérée comme « $longueur \times largeur$ » sans y associer de compréhension géométrique. La relation entre la mesure d'aire par compte de carreaux et la mesure du côté avec une unité de mesure de longueur n'est pas évidente ; en particulier, l'étape qui consiste à associer la mesure de longueur à un « nombre de carreaux sur une ligne » n'est pas explicite, pour les élèves comme pour les futurs enseignants.

Pour récapituler, voici la liste des changements imposés par l'introduction de la formule :

	Calcul d'aire avec l'unité « u », ayant une forme quelconque. (losange, triangle, carré…)	**Calcul d'aire avec l'unité « u », ayant la forme d'un carré.**	**Calcul d'aire avec l'unité « cm^2 », ayant la forme d'un carré.**
Opération	Addition itérée.	Addition itérée ou multiplication pour trouver le nombre de carrés si la surface s'y prête (pavage en lignes et colonnes).	Addition itérée ou multiplication pour trouver le nombre de carrés si la surface s'y prête (pavage en lignes et colonnes).
Symbolisme	« u », « + »	« u », « + » ou « $\times$ ».	« cm^2 », « c », ou « ℓ » et « L ».
Besoin de prendre en compte la mesure du côté ou de la longueur/largeur. (bidimensionnalité)	NON	NON	OUI si si le pavage est dessiné et que c'est demandé explicitement, NON si l'élève choisit quand même l'addition itérée pour calculer le nombre de carreaux. NON, si le pavage n'est pas dessiné, l'élève est amené à utiliser les dimensions des côtés.

***Tableau 2** : Changements imposés par l'introduction de la formule.*

Nous analysons comment ces transitions et ces distinctions sont abordées dans les manuels et si cela donne lieu à des étapes et à des éléments d'institutionnalisation explicites.

L'introduction des formules d'aire du carré et du rectangle est donc un défi sur plusieurs points : elle nécessite d'utiliser la multiplication plutôt que l'addition itérée. Par ailleurs, le contexte qui était unidimensionnel (avec l'unité de mesure d'aire liée à la surface dans le cadre géométrique) devient bidimensionnel avec le rectangle, puisqu'il mobilise la prise en compte de la mesure de longueur sur un côté, pour obtenir le nombre d'unités de mesure d'aire sur une ligne ou colonne du pavage. Ceci est possible grâce aux spécificités de notre système métrique. De plus, la lettre est introduite : la lettre « *c* » pour le carré, les lettres « ℓ » et « *L* » pour la largeur et la longueur.

Dimensions retenues pour l'analyse en réponse à la première question de recherche :

Les dimensions analysées seront les suivantes, afin de s'intéresser à l'enseignement de l'unité de mesure d'aire entre le cadre géométrique et les cadres arithmétique et algébrique :

- Les étapes de l'algorithme de calcul d'aire seront analysées à travers une reconstruction de ce qu'il est attendu de l'élève, lors de trois étapes : l'étape de calcul du nombre de centimètres-carrés dans un rectangle pavé, l'étape de la généralisation qui permet de dégager la formule, et l'étape de l'application de la formule.
- À chaque étape du calcul, nous nous demandons, suivant les traces écrites laissées par les manuels, comment l'élève peut interpréter l'objet mathématique qui entre en jeu selon les choix des manuels (surface, unité de mesure, nombre, longueur, aire) et quelle est l'opération associée (addition, multiplication). Lorsque cela n'est pas explicité par le manuel, nous le précisons également. Nous analysons particulièrement comment l'élève peut se représenter l'unité de mesure d'aire à chaque étape, et si elle est reliée à la notion de mesurage par report d'un étalon.
- Lors de l'utilisation de la mesure du côté du rectangle, nous analysons si les manuels font expliciter par l'élève (ou explicitent eux-mêmes directement) le lien entre le nombre d'unités de mesure de longueur sur un côté et le nombre de carreaux cm^2 sur une ligne ou colonne.

3. L'unité de mesure d'aire dans les manuels scolaires entre géométrie et formules

3.1. Analyse de manuels scolaires

Nous analysons dans les manuels la séance d'introduction du « cm^2 » et la séance d'introduction de formules. Il s'agit d'une seule et même séance pour ces notions, et l'introduction du « cm^2 » précède toujours l'introduction des formules. Les tableaux d'analyse détaillés sont présentés en annexes 1 et 2. Nous présentons ici une synthèse de ces analyses. Il s'agit de documenter objectivement les solutions adoptées par les manuels et les difficultés qu'ils rencontrent dans un cadre transmissif qui est difficile puisque l'introduction de la formule concilie le passage d'un contexte unidimensionnel additif dans le registre des figures à un contexte bidimensionnel multiplicatif dans les registres numérique et symbolique, le tout en un temps limité par les besoins des programmes.

Introduction de l'unité de mesure d'aire cm^2

Dans la séance d'introduction du « cm^2 », l'unité de mesure d'aire est associée au dessin d'une surface de forme carrée dans tous les manuels. L'unité de mesure est aussi institutionnalisée comme *« l'aire d'un carré d'un centimètre de côté »* dans 12 manuels sur les 13 analysés. Le manuel *La clé des maths*, lui, choisit de l'associer à une surface (le carré) plutôt qu'à une aire, d'où un choix de formulation différent : *« lorsque le carré choisi a un côté de 1 cm, on l'appelle* cm^2 *»*. Un dessin accompagne cette courte institutionnalisation. Il s'agit d'un carré dont l'intérieur est coloré et qui indique « $1\,cm^2$ ». Seul le manuel *Maths tout terrain* choisit d'insister sur le « 2 » (en exposant) dans le livre du maître (p. 91). Ceci pourrait être compris comme une tentative de faire un lien, qui reste implicite, avec le centimètre.

Trois manuels seulement proposent des surfaces de formes variées à associer à la mesure d'aire $1\,cm^2$. Un seul manuel utilise alors ces formes explicitement pour mesurer une aire par report d'étalon (ce n'est pas uniquement une présentation formelle de surfaces associables à $1\,cm^2$). Ainsi, ils font une distinction entre la mesure d'aire $1\,cm^2$ et la surface (puisque plusieurs surfaces peuvent correspondre à cette mesure d'aire).

Le manuel *J'apprends les maths* propose même d'adapter la forme de l'unité de mesure à la surface à mesurer, afin de couvrir toute la surface.

Dans l'institutionnalisation, l'unité de mesure cm^2 est donc principalement associée à une aire dans les manuels, mais aussi à une surface (carrée) puisque seul trois manuels explorent d'autres formes associées à « $1\,cm^2$ ». Ainsi, l'unité de mesure d'aire est associée le plus souvent à la fois à une aire fixe et une surface fixe. L'unité de mesure existe dans le registre des figures, et dans le registre symbolique à travers la dénomination « $1\,cm^2$ ». Un seul manuel essaie d'expliquer l'introduction de ce nouveau symbole, le « cm^2 ».

Autres distinctions : cm^2 et pavage, unités de mesure de longueur et d'aire

Un travail sur la distinction entre le carreau du pavage et l'unité de mesure a été ajouté dans 4 manuels sur les 13 manuels analysés. Par exemple, un cm^2 vaut 4 carreaux du pavage. Ceci permet de se poser la question de l'expression du résultat de la mesure en fonction de l'unité de mesure choisie. Par ailleurs, au moins 2 manuels sur 13 présentent dans cette séance un travail sur le rectangle ayant une dimension (largeur) donnée dans une unité de mesure, et l'autre dimension (longueur) dans une autre unité de mesure. Ceci permet de se poser la question de la relation entre unité de mesure de longueur et unité de mesure d'aire, qui n'est alors pas automatique.

Relations entre unités

Dans la séance étudiée, il est parfois proposé (10 manuels sur 13) un travail sur les relations entre unités de mesure d'aire dans le cadre géométrique. Il s'agit de se représenter le cm^2 comme « $100\,mm^2$ ». Ce type de pavage est alors représenté géométriquement dans les dix manuels mentionnés.

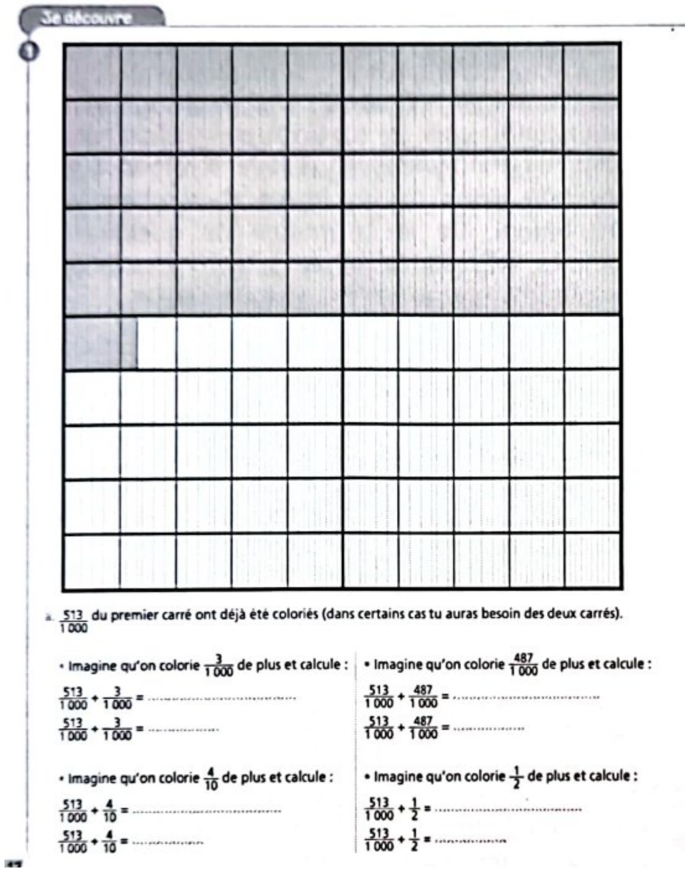


Figure 6 *:* J'apprends les maths CM2 *(Retz, 2008, cahier d'activités p. 12, cité p. 72 du manuel).*

Le manuel *J'apprends les maths*, 2008, p. 84 propose par ailleurs une séance spécifique de travail sur les relations entre unités de mesure d'aire avec accompagnement géométrique : par exemple une explicitation de la relation entre cm^2, mm^2 et fractions décimales ; ou encore des relations entre cm^2, mm^2, dm^2 et m^2.

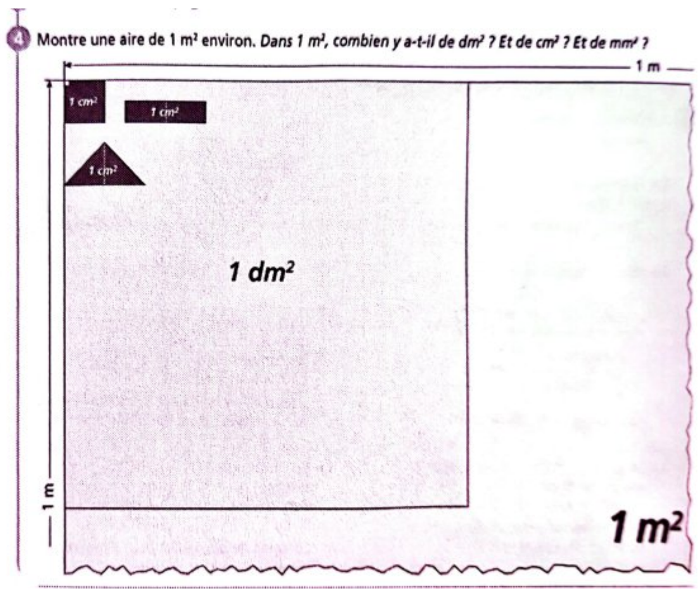


Figure *7 :* J'apprends les maths CM2 *(Retz, 2008, p. 84).*

Le manuel *Les maths à la découverte des sciences* rend explicite la possibilité d'exprimer des fractions colorées de « cm^2 » en « mm^2 » et ainsi d'exprimer l'aire avec des « cm^2 » et des « mm^2 » lorsque le « cm^2 » devient trop grand pour tout couvrir Ainsi, le changement d'échelle est justifié par le besoin de s'adapter à la surface à mesurer.

Contexte de mesure et ordres de grandeur

Seuls 3 manuels proposent dans cette séance un lien entre les unités de mesure d'aire et un contexte concret de mesure (maison, pré, poumons…). Ils proposent aussi un travail sur le choix des ordres de grandeur à ce stade. Les auteurs du manuel *Les maths à la découverte des sciences* sont par ailleurs les seuls à proposer de mesurer une aire pour répondre à un problème concret : avoir une idée de l'étendue de la surface des poumons. Ce manuel présente également une mesure d'aire exprimée avec une unité de mesure d'aire et des sous-unités de mesure d'aire lorsque la première devient trop grande pour couvrir la surface donnée (par exemple des « cm^2 » et des « mm^2 » : $3\,cm^2 + 4\,mm^2$).

Dans cette séance, l'unité de mesure d'aire « cm^2 » est donc liée au pavage d'une surface, presque toujours rectangulaire, mais plus rarement à un contexte concret de mesure. Les autres unités de mesure d'aire sont mentionnées, notamment $100\,mm^2$, mais les relations sont peu exploitées dans le cadre géométrique. Le choix d'une unité de mesure en fonction de l'ordre de grandeur, ou le besoin d'une unité de mesure d'aire plus petite ou plus grande pour compléter une mesure, sont rarement abordés à ce stade. Le mesurage et la notion de report d'un étalon sont donc assez absents de cette séance d'introduction en général. Par ailleurs, la distinction entre le carré du pavage et l'unité de mesure « cm^2 » n'est que rarement proposée.

Transition entre pavage et formule

Utilisation du pavage

Dans la séance d'introduction des formules d'aire pour le carré et le rectangle, le pavage est représenté dans tous les manuels analysés. Un manuel demande à l'élève d'imaginer le pavage sans qu'il ne soit déjà dessiné.

De l'addition à la multiplication

6 manuels sur 13 explicitent le passage de l'addition itérée avec le décompte de carreaux à la multiplication, passage nécessaire pour assurer l'introduction de la formule. Il faut noter que dans les manuels, le pavage a été utilisé (sans la notion d'aire) lors de l'introduction de la multiplication en CE2 (qui bénéficie d'un accompagnement par le dessin d'un rectangle pavé 5×2 par exemple, pour la multiplication de 5 par 2) et que cela nécessite de quitter l'addition itérée pour la multiplication des lignes par les colonnes. Cela est retravaillé ensuite chaque année. Ce contexte explique peut-être pourquoi certains manuels ne choisissent pas d'expliciter la nécessité d'utiliser la multiplication ici. Malgré tout, Outhred et Mitchelmore (1992) ont montré que la multiplication n'était pas utilisée automatiquement par tous les élèves, certains préférant l'addition itérée. Or il est nécessaire de s'assurer que les élèves aient fait le lien avec la multiplication, dans ce contexte précis, pour que l'étape de la généralisation qui permet de dégager la formule ait un sens (l'élève se rend compte qu'il peut multiplier le nombre de carreaux sur la longueur et la largeur à chaque fois). Parfois, le choix de grandes dimensions pour le rectangle induit le passage à la multiplication, l'addition des carreaux devenant laborieuse. Tel est le cas dans 9 manuels sur les 13 analysés.

Nombre de carreaux - nombre de centimètres

Outhred et Mitchelmore (1996) soulignent le fait que les élèves ne font pas tous automatiquement le lien entre le nombre de centimètres sur la longueur et le nombre de centimètres carrés. L'explicitation de la relation entre le nombre de centimètres carrés et le nombre de centimètres n'est assurée que dans 1 manuel sur les 13 analysés (*J'apprends les maths*). Dans ce manuel, l'utilisation d'un « pavage semi-effacé » assure le besoin pour l'élève de recourir à la règle et de mesurer la longueur pour obtenir le nombre de carreaux sur une ligne. L'élève va en effet mesurer la largeur, imaginer qu'il y a 16 carreaux du pavage sur une ligne, mesurer la longueur, en déduire qu'il y a 12 carreaux sur une colonne, et multiplier les deux nombres obtenus pour obtenir le nombre de carreaux qui sont des cm^2. On lui demande ensuite d'exprimer l'aire en cm^2. Dans cette phase, l'élève peut donc comprendre explicitement pourquoi il est possible d'utiliser la formule, qui ici apparait plus clairement comme un raccourci : je peux multiplier « $longueur \times largeur$ » parce que le nombre de centimètres me donne le nombre de cm^2 sur une ligne ou colonne.

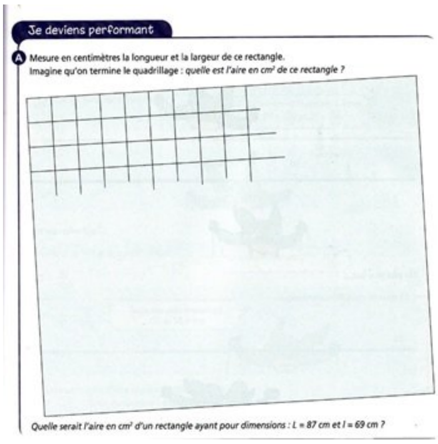


Figure 8 *: La grille effacée dans* J'apprends les maths *(2008, p. 75).*

D'autres manuels se rapprochent cependant de ce travail sur le lien entre « nombre de carreaux » à « nombre de centimètres » : il s'agit de *Vivre les maths* et d'*EuroMaths*. Ces manuels proposent une phase de prédictions, qui nécessite l'utilisation de la formule pour connaître l'aire, puis une phase de vérification des prédictions sur papier quadrillé, qui passe par le compte des carreaux. Ainsi, les élèves qui auront utilisé la multiplication sur les valeurs données dans l'énoncé seront ensuite ramenés au comptage du nombre de carreaux. Mais le passage par le nombre d'unités de mesure de longueur n'est pas aussi explicite ici que dans le « pavage semi-effacé » puisque le lien entre les centimètres et le nombre de « cm^2 » sur une ligne ou colonne n'est pas demandé.

Le manuel *Cap Maths* propose à l'élève dans l'activité découverte du livre du maître de donner, pour une même mesure d'aire, toutes les décompositions multiplicatives possibles ; ainsi, l'élève peut se rendre compte de l'effet des mesures de longueurs sur la mesure d'aire, le lien entre mesure du côté et mesure d'aire est donc en partie explicité, même s'il n'est pas précisé dans ce cas pourquoi la mesure du côté intervient dans la formule.

Bidimensionnalité

On constate que 2 manuels sur 13 font travailler les élèves autour des caractéristiques propres à la bidimensionnalité à ce stade. L'exercice cité ci-dessus de *Cap Maths* constitue une explicitation auprès de l'élève des caractéristiques bidimensionnelles propres aux cas du rectangle et du carré. Un autre manuel (*La clé des maths*) propose un double classement de l'aire et du périmètre pour plusieurs rectangles, et met en valeur la distinction aire et périmètre. Dans les autres manuels, la distinction aire/périmètre est proposée mais en amont, avant l'introduction du cm^2, et pas en lien avec le rectangle et la bidimensionnalité comme c'est le cas dans ces deux manuels. Par exemple, il s'agit de vérifier si deux figures de périmètre différent peuvent avoir même aire.

Pavage et unité de mesure

Lorsque le pavage ne correspond pas à l'unité de mesure d'aire (par exemple, un « cm^2 » correspond à 4 carreaux du quadrillage) il y a une distinction entre unité de mesure d'aire et pavage.

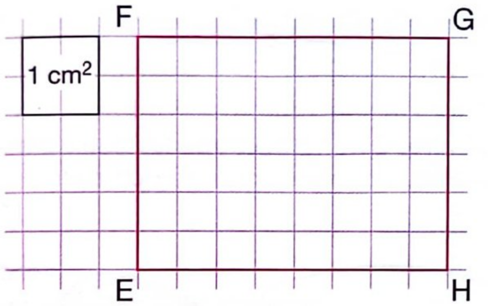


Figure 9 *: Unité de mesure et quadrillage,* Euromaths *(2008, p. 113).*

Lorsque l'unité de mesure d'aire n'est pas dessinée sur le pavage par les concepteurs du manuel (*EuroMaths*), l'élève est obligé de passer lui-même par le quadrillage, et d'y dessiner ou visualiser l'unité de mesure d'aire plusieurs fois. Ceci pourrait peut-être renforcer l'idée de reporter, donc l'acte de mesurage, qui passe davantage inaperçu lorsque l'élève se trouve face à un quadrillage et compte des carreaux. Le manuel *À portée de maths* prend le parti de proposer un pavage sur lequel sont représentées plusieurs tailles de carreaux, il faut donc choisir ce que l'on retient comme unité de mesure d'aire. Il est probable qu'il s'agisse de faire travailler l'élève sur le choix explicite d'une unité de mesure d'aire, ce qui là encore, permettrait d'éviter que l'idée de report soit oubliée au profit d'un seul compte de carreaux.

Un seul manuel (*Compagnon maths*) propose, lors de cette séance, que l'élève fasse un report effectif de l'unité de mesure d'aire (*« Cherchons ensemble »*), n'ayant pas proposé de pavage déjà dessiné. Le manuel *Au rythme des maths* propose de recouvrir la surface (*« Pour démarrer »*) dans une mosaïque mobilisant des carreaux mesurant « $1\,cm^2$ » et d'assembler des carrés grâce à des « cm^2 » représentés sous forme de carreaux (*« Réactivation »*).

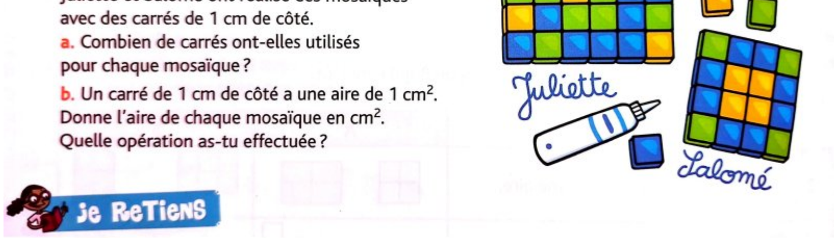


Figure 10 *: Les unités de mesure à la croisée des travaux.*

Concepts associés au nombre, à la lettre et au mesurage

On constate une absence globale dans les manuels d'explicitation pour l'élève de la transition entre les registres, puisque le lien entre nombre de carreaux cm^2 et nombre de centimètres sur un côté n'est pas demandé. Ceci pourrait constituer une difficulté importante.

Seul le manuel *J'apprends les maths* semble avoir permis une transition complète dans la conceptualisation des objets, puisque le nombre de carreaux est explicitement lié au nombre de segments mesurant 1 cm. Plutôt que d'introduire la formule, l'étape d'institutionnalisation insiste sur la transition, probablement pour favoriser un rappel de la situation de mesure :

- *J'ai appris :*
  Quand je cherche l'aire d'un rectangle, plutôt que de le quadriller, je peux mesurer sa longueur et sa largeur et multiplier les deux nombres obtenus. […] (*J'apprends les maths*, 2008).

Dans les autres manuels, lorsque l'introduction de la lettre, avec « $c \times c$ » ou « $\ell \times L$ » ne s'appuie pas sur un lien explicite entre nombre de carreaux cm^2 et nombre de centimètres sur un côté, il n'y a donc pas de proposition de transition entre les cadres géométrique et numérique ou algébrique. La lettre « c » de la formule « $c \times c$ » est-elle liée pour l'élève au nombre de carreaux sur une ligne, ou bien au nombre d'unités de mesure de longueur (centimètres), ou encore au « côté » en général sans que ce soit clair pour l'élève ? La lettre désigne-t-elle pour lui la valeur numérique issue de la longueur (« 3 » de « 3 cm » par exemple), ou la mesure entière de la longueur (« 3 cm » par exemple), ou encore un nombre de carreaux (3 par exemple) ?

De plus, dans les manuels, les trois formes suivantes ont été observées dans le cadre (arithmétique) de l'application de la formule :

- $3\,cm \times 3\,cm = 9\,cm^2$;
- $3 \times 3 = 9\,cm^2$;
- $3 \times 3 = 9$, donc l'aire est $9\,cm^2$.

Ainsi, l'unité de mesure peut se retrouver incluse dans une notation multiplicative. On peut se demander ce que les élèves se représentent derrière le « 3 », le « 3 cm », et la multiplication. Par exemple, dans le premier cas, imaginent-ils que l'on peut « multiplier des centimètres par des centimètres » ?

Outhred et Mitchelmore (1996) montrent que le lien entre le dénombrement des carreaux et la formule n'est pas évident. La formule de l'aire du rectangle tend à être appliquée par les élèves à d'autres figures, ce qui pourrait s'expliquer par une difficulté à lui donner du sens. L'aire serait ainsi considérée comme « $longueur \times largeur$ » sans y associer de compréhension géométrique, notamment l'idée de report d'une unité de mesure d'aire.

La relation entre la mesure d'aire qui consiste à dénombrer le nombre de « cm^2 » et la mesure du côté avec une unité de mesure de longueur comme le centimètre n'est pas évidente. En particulier l'étape qui consiste à associer la mesure de longueur à un nombre de carreaux sur une ligne n'est pas explicitée pour les élèves. Nous faisons l'hypothèse qu'il s'agit d'une étape clé pour que les élèves puissent donner un sens à la formule et se souvenir de l'explication géométrique.

De plus, les auteurs de manuels scolaires semblent contraints à concilier en deux séances l'introduction de la formule, avec le passage d'un contexte unidimensionnel additif dans le cadre géométrique et un contexte bidimensionnel multiplicatif dans les cadres numérique et algébrique.

3.2. Résultats : conclusions de l'analyse

Conclusion concernant l'introduction des cm² dans les manuels

Les conceptions associées à l'unité de mesure pour chacune de ces étapes sont récapitulées ci-dessous. Au début, l'unité de mesure d'aire existe comme un étalon (unité de mesure que l'on reporte dans le cadre géométrique), par sa forme dans le registre des figures et, dans le registre symbolique, à travers le nom qui lui est donné, souvent « u ». Le « cm^2 » est généralement amené ensuite sous la forme du carré, qui correspond généralement au carreau du pavage. Au départ, le carré étalon porte le nom « u » pour faire une transition avec le travail précédent sur le choix d'une unité de mesure quelconque. Là encore, il est demandé d'exprimer le nombre d'unités d'aire (carreaux) que l'on peut dénombrer sur la figure. La mesure d'aire est donc toujours liée à l'addition dans un cadre unidimensionnel. L'action de mesurage est toujours explicite (report d'un étalon). Enfin, le « cm^2 » est introduit et associé à l'addition itérée. L'élève peut ainsi exprimer « 3 u » ou « $3\,cm^2$ » pour une mesure d'aire. Il existe un parallèle possible pour l'élève entre le report d'un carré cm^2 dans le registre géométrique et l'addition.

Cette addition est par ailleurs associée, dans le registre symbolique, au fait d'apposer « cm^2 » à côté du chiffre (« 3 » ici). Ainsi, plusieurs raccourcis se produisent ici. De plus, l'unité de mesure étant représentée par le carré étalon de côté « 1 cm », le système métrique entre en jeu implicitement dans sa conception.

	Calcul d'aire avec l'unité « u » ayant une forme quelconque.	**Calcul d'aire avec l'unité « u » ayant la forme d'un carré.**	**Calcul d'aire avec l'unité « cm^2 » ayant la forme d'un carré.**
Surface, forme.	Peut en avoir plusieurs.	Forme fixe.	Forme fixe Dans certains cas, une autre forme est aussi introduite, puis abandonnée. Généralement, elle ne sert pas de report effectif.
Aire.	N'a pas besoin d'être prise en compte par l'élève, mais implique généralement une forme fixe.	N'a pas besoin d'être prise en compte par l'élève, mais implique généralement une forme fixe.	Prise en compte.
Nombre associé à l'unité de mesure.	Non donné.	Non donné.	Imposé ($1\,cm^2$).
Opération associée (registre numérique).	Addition.	Addition ou multiplication.	Addition puis multiplication.
Opération dans le registre des figures.	Juxtaposition, dénombrement de surfaces de forme donnée.	Juxtaposition, dénombrement de surfaces de forme donnée.	Dénombrement de surfaces de forme donnée, puis dénombrement des unités de mesure de longueur.
Bidimensionnalité de l'unité de mesure.	Non prise en compte par les élèves (*a priori*).	Non prise en compte par les élèves (*a priori*).	Prise en compte implicitement (le carré de côté 1 cm).

Tableau 3 *: Changements conceptuels liés à l'unité de mesure.*

Lorsque l'unité de mesure d'aire conventionnelle (le cm^2) est introduite, les efforts faits sur l'apprentissage de l'aire indépendamment de la surface et du nombre dans le contexte de la mesure semblent un peu mis de côté puisque la formule remplace petit à petit l'usage de la géométrie, et qu'il n'est pas généralement proposé d'explicitation du lien entre la multiplication des longueurs et le pavage qui est lié au décompte d'unités de mesure cm^2.

Par ailleurs, le « cm^2 » est associé au carré dans tous les manuels et présenté comme une aire dans 12 manuels sur les 13 analysés. Il n'est généralement pas proposé de travail spécifique pour distinguer les notions de surface/aire/nombre pour l'unité de mesure, ni pour adapter la forme de l'unité pour mesurer (trois manuels proposent des formes variées pour représenter la mesure d'aire $1\,cm^2$, un seul manuel utilise alors ces formes explicitement pour mesurer).

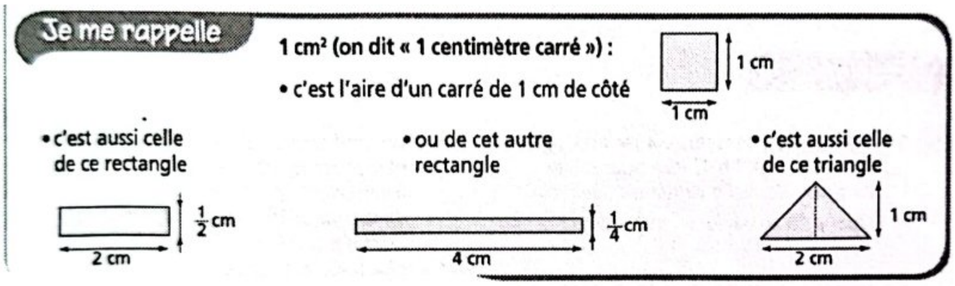


Figure 11 *:* J'apprends les maths CM2 *(Retz, 2008, p. 69).*

Les diverses introductions du « cm^2 » posent de nouvelles questions :

- Faut-il enseigner la relation de l'unité de mesure aux dimensions de la figure ou bien la relation de l'unité aux sous-unités ? En effet, au moins 11 manuels sur 13 l'abordent, mais seulement pour la relation entre cm^2 et $100\,mm^2$. Un manuel propose un travail spécifique sur les relations entre unités dans le cadre géométrique.
- Faut-il aborder l'utilisation de l'unité d'aire indépendamment de l'unité de longueur pour mesurer des surfaces réelles (par exemple la surface de la cour, avec un drap) ?
- Est-il intéressant de traiter le cas de l'aire dont la valeur serait comprise entre deux unités/sous-unités standard ?

Il est manifeste que l'unité de mesure d'aire conventionnelle doive, lors de son introduction, être considérée comme un objet d'apprentissage. Cet apprentissage a, de fait, été l'objet de décisions diverses dans les manuels (comme par exemple le fait d'aborder la distinction entre unité de mesure d'aire cm^2 et quadrillage, dans 4 manuels sur 13), et rares sont les manuels qui s'attardent sur cette question du cm^2, alors que des efforts importants sont faits pour construire la notion d'aire indépendamment de la mesure et distinguer surface, aire et périmètre, dans les séances et années précédentes.

Conclusions concernant l'algorithme, le mesurage et la transition vers le symbolisme dans les manuels

L'introduction des formules d'aire du carré et du rectangle se fait dans un cadre nouveau. Il s'agit en effet de dénombrer le nombre d'unités de mesure de *longueur* (sur un côté) et d'utiliser la multiplication. Le cadre qui était unidimensionnel (avec l'utilisation de l'unité de mesure d'aire comme surface en deux dimensions (2D)) devient bidimensionnel (avec la prise en compte de la mesure de longueur qui permet d'obtenir une mesure d'aire). L'addition itérée, liée à un dénombrement de surfaces étalon de forme fixe choisie, est remplacée par la multiplication pour obtenir le nombre de cm^2 sur une ligne du pavage.

De plus, la lettre est introduite : la lettre « c » pour le côté du carré, les lettres « ℓ » et « L » pour la largeur et la longueur du rectangle. Voici les points sur lesquels les manuels se sont positionnés ou, à l'inverse, sont restés dans l'implicite.

L’opération dans l’algorithme de calcul et la transition intercadres

Le passage du dénombrement de carreaux (par addition itérée) à la multiplication, dans le cadre géométrique, peut être plus ou moins explicite (6 manuels sur 13). Le choix des dimensions du rectangle (entières ou non) a des effets sur les procédures adoptées par les élèves (9 manuels sur 13).

L’objet sur lequel l’algorithme opère

Le nombre (ou la lettre) peut représenter : le carré du pavage, le centimètre, le segment, le côté… Cet aspect est généralement implicite.

La transition : pourquoi mesurer la longueur du côté du rectangle (ou du carré) ?

L’explicitation de la relation entre le nombre de carreaux et le nombre de centimètres peut être faite, notamment avec la « grille effacée » (1 manuel sur 13). Seuls 4 manuels sur 13 proposent en effet de travailler sur la relation entre mesure d’aire et mesure des dimensions du rectangle ou du carré. Or si la transition n’est pas accompagnée, il est possible que l’idée de report d’un « cm^2 » pour mesurer dans le cadre géométrique (pavage), soit remplacée par l’idée erronée d’une construction du « cm^2 » par la « multiplication du centimètre » ($cm \times cm = cm^2$) qui n’a pas de réalité géométrique.

La place du mesurage

Si la transition entre addition et multiplication est favorisée, il est probable que l’élève retienne qu’au lieu d’additionner les unités de mesure d’aire « u », il soit possible, dans le cas du carré et du rectangle, de multiplier directement pour en connaitre le nombre total. Ensuite, si le lien entre le nombre de « cm^2 » sur un côté et la mesure de la longueur du côté n’est pas favorisé, il est probable que l’élève remplace la conception du mesurage par report d’un étalon par un théorème en acte du type « la multiplication $longueur \times largeur$ permet de fabriquer le rectangle » (par addition de lignes qui feraient une surface), qui n’a pas ici de réalité géométrique. La place qu’aura le mesurage pour l’élève à l’issue de l’introduction des formules dépend donc surement de l’explicitation de ces deux étapes.

Interprétation des difficultés connues au regard des ces analyses

Perrin-Glorian (1989-1990) mentionne quelques erreurs fréquentes des élèves :

- la difficulté à exprimer l’aire d’une surface qui ne peut être pavée par des carrés ;
- les difficultés à distinguer aire et surface, aire et périmètre ;
- l’utilisation de formules inadaptées sur des surfaces comme le parallélogramme ou le triangle (p. 31 ; voir aussi Rogalski-Muret, 1984, p. 14).

Outhred et Mitchelmore (1996) font un état des lieux de plusieurs erreurs courantes. Ils rappellent que le concept d’aire est mal compris entre sept et onze ans (D. Bell *et al.*, 1975), de même que dans l’enseignement secondaire (Clements & Ellerton, 1995). Ils citent :

- Simon et Blume (1994) qui ont indiqué que bien que les futurs enseignants dans leur étude aient répondu aux problèmes de l’aire en multipliant, leur choix d’opération était souvent le résultat de l’apprentissage d’une procédure ou d’une formule pour l’aire d’un rectangle plutôt que le résultat d’un solide lien conceptuel entre leurs compréhensions de la relation entre l’aire et la mesure de longueur du côté ;
- Tierney *et al.* (1990), qui ont observé que de nombreux futurs enseignants confondent l’aire et le périmètre, appliquent la formule pour trouver l’aire du rectangle aux figures

planes autres que les rectangles, considèrent l'aire comme « *longueur*×*largeur* », utilisent des lignes pour le report, plutôt que des carrés, et assimilent les changements relatifs aux dimensions linéaires à des changements d'aire (par exemple, de nombreux étudiants pensaient que si les longueurs des côtés d'un carré étaient doublées, cela pourrait être le cas de son aire).

Les difficultés à faire des liens entre les cadres sont confirmées par des travaux :

> *On s'entend généralement à dire que les difficultés des enfants à l'égard des concepts d'aire de surfaces rectangulaires sont attribuables, en partie, à l'accent mis sur la formule, et que si les enfants ne comprennent pas la signification de partitionner des surfaces en carrés unité (carreaux), toute tentative d'enseigner des procédures pour calculer des zones sera au mieux apprise par cœur* (Carpenter *et al.*, 1975).

Des études montrent que les élèves ne saisissaient pas la relation entre les activités concrètes consistant à couvrir des figures rectangulaires et la formule de l'aire du rectangle (Hart, 1987). Les élèves peuvent aussi se montrer capables de trouver le nombre de carrés qui couvrent une forme, mais ne réalisent pas qu'ils en calculent l'aire (Bell *et al.*, 1983). Simon et Blume (1994) ont enfin indiqué que le lien entre les dimensions linéaires et la surface rectangulaire était difficile pour les futurs enseignants. Ils disent que s'il est effectivement possible pour eux :

1) de mobiliser la grille,
2) de voir le total de carreaux comme le résultat à obtenir pour mesurer l'aire,

l'étape 3), qui consiste à comprendre comment les mesures linéaires déterminent la taille de la grille, leur est nécessaire et difficile.

Nous avons mentionné deux étapes pour que les élèves puissent donner du sens aux formules de calcul d'aire du carré et du rectangle et qu'ils fassent potentiellement moins d'erreurs :

1. expliciter la transition entre addition itérée et multiplication dans le dénombrement des cm^2 dans le cadre géométrique (pavage) ;
2. expliciter le lien entre la mesure du côté et le nombre de cm^2 sur une ligne.

L'enseignement des formules d'aire du carré et du rectangle, en lien avec l'introduction de l'unité de mesure d'aire standard cm^2, combine un ensemble de concepts complexes (notion d'aire, notion d'unité de mesure d'aire quelconque, introduction du cm^2, passage de l'addition à la multiplication, généralisation, introduction de la lettre, transition entre géométrie et formules et transition entre un cadre unidimensionnel et un cadre bidimensionnel) que les manuels réalisent en deux à trois séances, un temps qui semble bien trop restreint et reflète probablement les contraintes institutionnelles liées aux programmes. Par ailleurs, les relations du système métrique pour les unités d'aire sont aussi abordées.

Les élèves qui savent utiliser la formule ont-ils pour autant acquis une représentation correcte des objets mathématiques concernés dans tous les registres ? Si ce n'est pas le cas, il faudra se demander si le *contrôle du sens* présenté par Duval, qui pourrait être favorisé par l'introduction de la formule par un compte des carreaux, est possible pour les élèves.

Voici quelques éléments à retenir dans la perspective d'une future ingénierie :

- la grille effacée (*J'apprends les maths*) semble être un élément de choix pour favoriser la transition intercadres et assurer une cohérence dans la représentation des objets mathématiques en jeu ;
- il serait probablement intéressant de travailler davantage avec les élèves sur la

construction de l'unité de mesure d'aire indépendamment de l'unité de mesure de longueur[11], peut-être même sur les distinctions surface/aire/nombre pour l'unité de mesure elle-même[12] et sur les relations métriques entre unités de mesure dans le cadre géométrique ;

- il semble ici important de continuer à pousser l'enseignement des unités de mesure de longueur par report, dans la construction à la règle au cycle 2. C'est une étape qui semble clé pour pouvoir donner du sens à la mesure d'aire du rectangle. En effet, il est nécessaire que les élèves perçoivent la possibilité de reporter les unités de mesure de longueur pour pouvoir imaginer les reports successifs de centimètres et ainsi les associer aux reports successifs de cm^2 sur un côté du pavage.

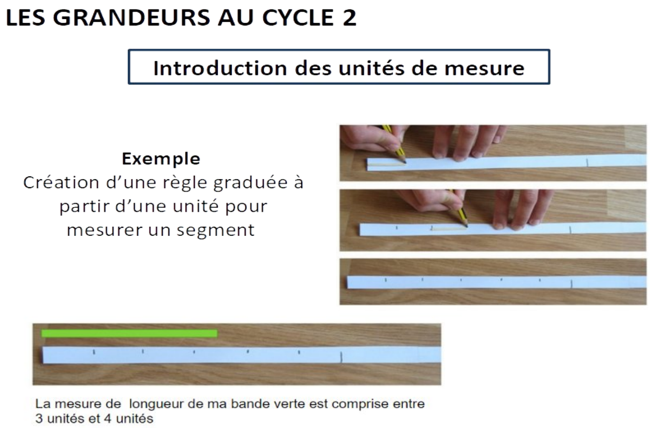


***Figure 12** : Extrait d'une présentation de formation de l'Inspé de Paris.*

- Enfin, nombreuses sont les propositions de Perrin-Glorian (1989-1990) qui n'ont pas été retrouvées dans les manuels scolaires et nous semblent contribuer à donner du sens au mesurage et au cm^2, prendre conscience des effets de la bidimensionnalité et faire du lien entre géométrie et formules, comme par exemple :
  - détacher la mesure du pavage, travailler sur différents pavages possibles pour une même surface ;
  - utiliser un tableau permettant d'exprimer le fait que toute aire mesurée avec une unité « u » peut être exprimée avec n'importe quelle unité en relation avec « u » ;
  - travailler la relation entre aire et dimensions des côtés en fonction du pavage mis à disposition, et la variation de l'aire du rectangle en fonction des côtés ;
  - pointer les différences et les relations entre aires et longueurs, travailler la relation entre dimensions du rectangle et aire, l'agrandissement du rectangle ;
  - donner des consignes visant à éviter l'erreur « un carré de côté $\frac{1}{2}\,cm$ est un demi centimètre carré » ; et « un parallélogramme d'aire $1\,cm^2$ a tous ses côtés de longueur 1 cm ».

L'analyse épistémologique nous a conduits à rapprocher plusieurs champs de travaux en didactique autour de l'unité de mesure dans les situations multiplicatives. Il semble qu'étudier

[11] Par exemple, avec le report effectif d'unités de mesure d'aire (par exemple un drap dans la cour), un travail sur les contextes pratiques de calcul d'aire (voir *Les maths à la découverte des sciences*) ainsi que sur les ordres de grandeur.

[12] Par exemple, utiliser les différentes formes de l'unité de mesure standard pour mesurer, introduire un vocabulaire spécifique : étalon (pour la forme)/unité d'aire (pour l'aire standard choisie qui peut prendre plusieurs formes)/unité de mesure pour le nombre $1\,cm^2$ qui peut être aussi exprimé différemment, par exemple $100\,mm^2$.

l'unité de mesure en tant qu'objet central en didactique, dans les différents cadres et dans l'optique de favoriser les transitions, est une perspective particulièrement intéressante. Les travaux sur le savoir de référence à transposer concernant la mesure et le choix du système métrique soulignent de plus à quel point l'assimilation des objets est possible et créatrice d'implicites pour l'enseignement. Par ailleurs, la question de l'enseignement des unités de mesure peut être mise en lien plus généralement avec l'enseignement de la dépendance fonctionnelle (c'est-à-dire des relations de dépendance des variables impliquées dans une formule) et de réductionnisme dimensionnel (Viennot, 1992, 1996). Elle engage en effet à penser le moment de l'introduction des règles du raisonnement sur plusieurs variables, en lien avec un angle d'étude fonctionnel et non uniquement numérique (Viennot, 1992).

> *À propos de quel chapitre va-t-on décider de prendre du temps pour expliciter et travailler les règles du raisonnement sur plusieurs variables ? Quand rassemblera-t-on les principes qui président à l'analyse quasi-statique des systèmes, lorsque ceux-ci sont étudiés ici ou là selon les concepts qu'ils mettent en jeu ? Plus simplement, quand développera-t-on l'aptitude à considérer un résultat sous l'angle fonctionnel et non seulement sous l'angle numérique ? Cela suppose une détermination explicite et à longue échéance, puisque ce sont principalement des contenus spécifiques qui sont mentionnés dans nos livres d'enseignement, et qu'un objectif en termes d'aptitude de raisonnement peut sembler* a priori *décourageant, et d'une efficacité diffuse. Mais, pour qui adopte ces objectifs, des pistes d'action existent, même à propos de contenus tout à fait élémentaires : on peut commencer à travailler les dépendances multifonctionnelles dès qu'on connaît l'expression de la surface d'un rectangle. Et les enjeux correspondants sont d'une importance qui se passe de commentaires* (Viennot, 1992, pp. 139-140).

Il semble donc particulièrement important d'engager une réflexion collective sur l'enseignement progressif de l'unité de mesure et de ses notations lorsque celle-ci est impliquée dans le cadre des équations aux dimensions, sur plusieurs niveaux d'enseignement, tout en favorisant les transitions intercadres entre géométrie, arithmétique et algèbre.

Conclusion

Nous avons analysé la façon dont le « cm^2 » est introduit dans les manuels de CM2. Nous nous sommes pour cela appuyés sur une analyse épistémologique d'exercices mathématiques historiques mobilisant des systèmes non métriques, sur une analyse des programmes actuels ainsi que sur une synthèse de travaux en didactique concernant le savoir à transposer. Nous avons ainsi constitué une grille d'analyse des manuels, ce qui constitue la réponse à notre première question de recherche.

En analysant des manuels de CM2 selon ces dimensions identifiées, nous avons observé qu'il existe une certaine homogénéité dans l'introduction générale de la notion d'aire, qui répond aux demandes de plusieurs travaux en didactique, notamment autour des distinctions entre surface, aire et périmètre. Les recommandations institutionnelles d'introduire d'abord l'aire sans la mesure sont aussi respectées. En revanche, l'introduction de l'unité de mesure d'aire conventionnelle (le cm^2) semble moins uniformisée.

Premièrement, la transition entre addition itérée et multiplication pour le compte des cm^2 du pavage du rectangle n'est pas toujours explicitement demandée. La multiplication est pourtant nécessaire pour la généralisation et l'introduction de la formule. Deuxièmement, l'unité de mesure cm^2 est généralement présentée comme l'aire d'un carré d'un centimètre de côté. On constate alors une grande inhomogénéité : certains manuels vont insister sur des aspects comme la présentation d'autres formes possibles pour le cm^2 (en faisant ainsi une distinction aire et surface pour l'unité de mesure elle-même), le calcul avec des sous-unités de mesure ou l'utilisation du calcul d'aire dans une situation de problème de la vie courante, alors que d'autres ne mentionnent que le pavage du rectangle dont les dimensions sont elles aussi, inhomogènes.

Seuls trois manuels amènent l'élève à faire le lien entre le nombre de cm^2 du côté du rectangle et le nombre de centimètres, explicitant ainsi le lien entre la mesure du côté et le pavage, ce qui permet de comprendre la formule. Ce résultat nous amène à faire l'hypothèse que les élèves risquent de ne pas donner du sens à la lettre dans la formule ou d'oublier la notion de mesurage liée au pavage, au profit de représentations géométriques erronées. Cela rejoint le constat de difficultés d'élèves à donner du sens aux formules d'aire du rectangle et du carré et à ne pas généraliser leur utilisation sur d'autres figures comme le triangle.

L'étude réalisée montre ainsi que la question de l'unité de mesure dans les transitions entre géométrie et formules est un enjeu important de l'enseignement à tous les niveaux. De nouvelles questions se posent sur l'articulation des recherches en didactique autour de l'unité de mesure, dans la perspective d'une progression multiniveaux et intercadres, favorisant les liens entre l'enseignement des mathématiques et de la physique.

Références bibliographiques

Artigue, M. (1989). Ingénierie didactique. *Recherches en didactique des mathématiques, 9*(3), 281-308.

Bell, A., Costello, J. & Kichemann, D. (1983). *Research on Learning and Teaching. Part A*. London: NFER - Nelson.

Bell, D., Hughes, R. & Rogers, J. (1975). *Area, weight, and volume*. Nelson.

Carpenter, T., Coburn, T., Reys, R. & Wilson, J. (1975). Notes from National Assessment: Basic concepts of area and volume. *The Arithmetic Teacher, 22*, 501-507.

Chaachoua, H. (s. d.). *Le rôle de l'analyse des manuels dans la théorie anthropologique du didactique*. https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01519339

Chambris, C. (2009). Contribution de l'étude des grandeurs à l'étude de la numération de position avant la réforme des mathématiques modernes, en France, au cours élémentaire (2ème et 3ème années de primaire). Dans C. Ouvrier-Buffet & M.-J. Perrin-Glorian (dir.), *Approches plurielles en didactique des mathématiques. Apprendre à faire des mathématiques du primaire au supérieur : quoi de neuf ?* (pp. 211-222). Laboratoire de didactique André Revuz.

Clements, M. A. & Ellerton, N. (1995). Assessing the effectiveness of paper-and-pencil tests for school mathematics. Dans B. Atweh & S. Flavel (dir.), *Eighteenth Annual Conference of the Mathematics Education Group of Australasia* (vol. 1, pp. 184-188). Mathematics Education Group of Australasia.

Comité commun pour les guides en métrologie. (2012). *Vocabulaire international de métrologie : concepts fondamentaux et généraux et termes associés (VIM)* (3e éd.). https://www.bipm.org/utils/common/documents/jcgm/JCGM_200_2012.pdf

de Courtenay, N., Darrigol, O. & Schlaudt, O. (dir.). (2019). *The reform of the International System of Units (SI): Philosophical, historical and sociological issues*. Routledge.

de Hosson, C. & Schneeberger, P. (2011). Orientations récentes du dialogue entre recherche en didactique et histoire des sciences. *Recherches en didactique des sciences et des technologies, 3*, 9-20.
https://doi.org/10.4000/rdst.363

de Varent, C. (2018). *Pluralité des concepts liés aux unités de mesure : liens entre histoire des sciences et didactique, le cas de l'aire du carré dans une sélection de textes anciens*. [Thèse de doctorat, Université Sorbonne Paris Cité].
https://www.theses.fr/2018USPCC106

Dorier, J.-L. (2000). Recherches en histoire et en didactique des mathématiques sur l'algèbre linéaire : perspective théorique sur leurs interactions. *Les cahiers du laboratoire Leibniz, 12*.

Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de didactique et de sciences cognitives, 5*, 37-65.

Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine : registres sémiotiques et apprentissage intellectuels*. Berne : Peter Lang.

Gueudet, G. & Trouche, L. (dir.). (2010). *Ressources vives : le travail documentaire des professeurs en mathématiques*. Presses universitaires de Rennes, INRP.

Hart, K. (1987). Practical work and formalisation: Too great a gap. Dans J. Bergeron, N. Herscovics & C. Kieren (dir.), *Actes de la 11e conférence PME* (vol. 2, pp. 408-415). Montreal: The University of Montreal.

Munier, V. & Passelaigue, D. (2012). Réflexions sur l'articulation entre didactique et épistémologie dans le domaine des grandeurs et mesures dans l'enseignement primaire et secondaire. *Tréma, 38*, 106-147.
https://doi.org/10.4000/trema.2840

Outhred, L. & Mitchelmore, M. (1992). Representation of area: A pictorial perspective. Dans W. Geeslin & K. Graham (dir.), *Actes de la 16e conférence PME* (vol. 2, pp. 194-201). University of New Hampshire ; International Group for the Psychology of Mathematics Education.

Outhred, L. & Mitchelmore, M. (1996). Children's intuitive understanding of area measurement. Dans L. Puig & A. Gutiérrez (dir.), *Actes de la 21e conférence PME* (vol. 3, pp. 91-98). International Group for the Psychology of Mathematics Education.

Perrin-Glorian, M.-J. (1989-1990). L'aire et la mesure. *Petit x, 24*, 5-36.
https://irem.univ-grenoble-alpes.fr/medias/fichier/24x1_1570438041435-pdf

Perrin-Glorian, M.-J. (2002). Problèmes didactiques liés à l'enseignement des grandeurs. Le cas des aires. Dans J.-L. Dorier, M. Artaud, M. Artigue, R. Berthelot & R. Floris (dir.), *Actes de la 11e école d'été de didactique des mathématiques* (pp. 299-315). La pensée sauvage.

Perrin-Glorian, M.-J. (2004). Éclairages et questions pour la didactique des mathématiques : cadres et registres en jeu dans la résolution de problèmes en lien avec les connaissances des élèves et recherches sur l'action des enseignants en classe. *Revue internationale de didactique des mathématiques, 9*, 67-82.

Pressiat, A. (2002). Grandeurs et mesures : évolution des organisations mathématiques de référence et problèmes de transposition. Dans J.-L. Dorier, M. Artaud, M. Artigue, R. Berthelot & R. Floris (dir.), *Actes de la 11e école d'été de didactique des mathématiques* (pp. 283-293). La pensée sauvage.

Roditi, E. (2005). *Les pratiques enseignantes en mathématiques : entre contraintes et liberté pédagogique*. Paris: Editions L'Harmattan.

Rogalski-Muret, J. (1984). *Acquisition de la bidimensionalité (combinatoire, espace, mesure) chez les élèves d'âge scolaire et préscolaire* [Thèse de doctorat, Université Paris 7]. HAL Thèses.
https://bib.umontreal.ca/citer/styles-bibliographiques/apa?tab=5248896

Simon, M. A. & Blume, G. W. (1994). Building and understanding multiplicative relationships: A study of prospective elementary teachers. *Journal for Research in Mathematics Education, 25*(5), 472-494.
https://doi.org/10.2307/749486

Tierney, C., Boyd, C. & Davis, G. (1990). Prospective primary teachers' conceptions of area. Dans G. Booker, P. Cobb & T. Mendicuti (dir.), *Actes de la 14e International Conference on the Psychology of Mathematics Education* (vol. 2, pp. 307-14). Program Committee.

Vergnaud, G. (dir.). (1983). Didactique et acquisition du concept de volume. *Recherches en didactique des mathématiques, 4*(1).

Viennot, L. (1992). Raisonnement à plusieurs variables : tendances de la pensée commune. *Aster, 14*, 127-141.
https://doi.org/10.4267/2042/9088

Viennot, L. (1996). *Raisonner en physique : la part du sens commun*. De Boeck Université.

MENSR. (2016). Eduscol : *Grandeurs et mesures au cycle 3* (Publication n° 609168). http://cache.media.eduscol.education.fr/file/Mathematiques/16/8/RA16_C3_MATH_grand_mesur_N.D_609168.pdf.

Manuels de CM2 analysés

Pour comprendre les mathématiques CM2

• Manuel de l'élève :

Nouvelle édition programmes 2008, Hachette Éducation.

Auteurs : J.-P. Blanc, P. Bramand, P. Debû, J. Gély, E. Lafont, D. Peynichou & A. Vargas.

Édition n° 4, dépôt : 2012, Hachette livre 2008.

- Livre du maître :

  « Guide pédagogique », nouvelle édition programmes 2008, Hachette Éducation.

  Édition n° 2, dépôt : 2011, Hachette livre 2008.

Euro Maths CM2

- Manuel de l'élève + aide-mémoire :

  Nouvelle édition programmes 2008, Hatier.

  Auteurs : M-L. Peltier, J. Briand, B. Ngono & D. Vergnes.

  Édition n° 1, dépôt : 2012, Hatier 2009.

- Livre du maître :

  « Livre du professeur », nouvelle édition programmes 2008, Hatier.

  Édition n° 1, dépôt : 2012, Hatier 2009.

J'apprends les maths CM2

- Manuel de l'élève :

  Nouvelle édition programmes 2008, Retz.

  Auteurs : R. Brissiaud (dir.), P. Clerc, F. Lelièvre & A. Ouzoulias.

  Édition n° 3, dépôt : 2010 (présente édition), Retz 2007 (première édition).

- Livre du maître :

  « Livre du maître », nouvelle édition programmes 2008, Retz.

  Édition n° 3, dépôt : 2010 (présente édition).

Vivre les maths CM2

- Manuel de l'élève :

  Nouvelle édition programmes 2008, Nathan.

  Auteurs : L. Corrieu (dir.), J. Jardy, L. Rouy.

  Nathan 2009.

- Livre du maître :

  « Livre du maître », nouvelle édition programmes 2008, Nathan.

  Dépôt : 2010, Nathan 2009.

La clé des maths CM2

- Manuel de l'élève :

  Nouvelle édition programmes 2008, Belin.

  Auteurs : G. Champeyrache (dir.) & C. Evanno.

  Belin 2011.

- Livre du maître :

  « Guide pédagogique », nouvelle édition programmes 2008.

  Belin, dépôt : 2012, Belin 2011.

Compagnon Maths CM2

- Manuel de l'élève :

  Nouvelle édition programmes 2008, Sedrap.

Auteurs : S. Boëche (dir.), R. Delpeuch (dir.), G. Vinrich (conseil scientifique), C. Hermardinquer, L. Doublein & A. Galy (illustrateur).

Édition n° 1, dépôt : 2008, Sedrap 2008.

• Livre du maître :

« Le guide de l'enseignant », Sedrap.

Auteur : Y. Mole.

Dépôt : 2008, Sedrap 2008.

Au rythme des maths CM2

• Manuel de l'élève :

Nouvelle édition programmes 2008, Bordas.

Auteurs : J. Hélayel & C. Fournié.

Bordas 2010.

• Livre du maître :

« Livre du maître », nouvelle édition programmes 2008, Bordas.

Bordas 2010.

Maths tout terrain CM2

• Manuel de l'élève :

Nouvelle édition programmes 2008, Bordas.

Auteurs : A. Errera (dir.) & X. Amouyal.

• Livre du maître :

« Livre du maître », nouvelle édition programmes 2008, Bordas.

Dépôt : 2012, Bordas 2012.

Maths collection Thévenet CM2

• Manuel de l'élève :

Nouvelle édition programmes 2008, Bordas.

Auteurs : S. Thévenet (dir.), F. Bourhis-Laîné, A. Debailleul, J. Hélayel, E. Lenoir, G. Trève & J.-F. Vincent.

• Livre du maître :

« Livre du maître », nouvelle édition programmes 2008, Bordas.

Dépôt : 2011, Bordas 2009.

À portée de maths CM2

• Manuel de l'élève :

Nouvelle édition programmes 2008, Hachette Éducation.

Auteurs : R. Meunier, A. Caloudis, J. Leclec'h-Lucas, J.-C. Lucas, L. Meunier.

Hachette Livre 2008.

• Livre du maître :

« Guide pédagogique », nouvelle édition programmes 2008, Hachette Éducation.

Hachette Livre 2009.

Petit phare CM2

• Manuel de l'élève :

Nouvelle édition programmes 2008, Hachette Éducation.

Auteur : R. Brault, C. Ribanier & N.Roques.

• Livre du maître :

« Guide du professeur », nouvelle édition programmes 2008, Hachette Éducation.
Hachette Livre 2010.

Cap Maths CM2

• Manuel de l'élève :

Nouvelle édition programmes 2008, Hatier.
Auteur : R. Charnay (dir.), G. Combier, M.-P. Dussuc & D. Madier.

• Livre du maître :

« Guide de l'enseignant », nouvelle édition programmes 2008, Hatier.
Hatier 2010.

Les maths à la découverte des sciences CM2

• Manuel de l'élève :

Nouvelle édition programmes 2008, Hachette Éducation - les ateliers hachette.
Auteurs : M. Antoine, O. Burger, S. Conneau, J. Guichard.
Hachette Livre 2008.

• Livre du maître :

« Guide pédagogique », Hachette Éducation, Hachette Livre 2009.

Annexes
Tableaux d'analyse des manuels

1. Présentation de l'unité de mesure d'aire *cm*²

Manuel	Carré	Aire d'un carré de 1 *cm* de côté	Autre forme	Autre association
Compagnon maths	X	X (un carré de côté 1 *cm* a une aire de 1 cm^2).		
Petit phare	X	X		Surface colorée.
Vivre les maths	X	X	Tétris.	Travail sur le cm^2 (grille de mm^2). Travail sur le dm^2 (grille de cm^2).
Maths tout terrain	X	X		Surface colorée en rose bordée de bleu. La maison.
Au rythme des maths	X	X (un carré de côté 1 *cm* a une aire1 cm^2 de).		Travail sur le dm^2 : « on peut faire dessiner ce carré en matérialisant les *cm* ».
La clé des maths	X (Lorsque le carré choisi a un côté de 1 *cm*, on l'appelle cm^2).			Surface colorée (mais le carré et le rectangle le sont aussi). Travail sur le dm^2 (grille de cm^2).
Pour comprendre les maths	X	X		Travail sur le cm^2 (grille de mm^2). Mesure de surface pour : maison, logement, terrain, pays.
EuroMaths	X	X		1 cm^2 vaut 4 carreaux du quadrillage. Travail sur le dm^2 (grille de cm^2) et explicitation en terme de fraction de dm^2. Lien découpage-recollement et mesure en cm^2.
J'apprends les maths	X	L'aire de plusieurs figures (dont l'aire mesure 1 cm^2).	Adaptation à la figure dont l'aire est à mesurer (p. 69, p. 72). Divers rectangles, triangle, tétris.	Travail explicite sur le mm^2 (avec une transition entre cadre géométrique et numérique), de même pour d'autres conversions (p. 84). 1 cm^2 vaut 4 carreaux du quadrillage.
Maths Thévenet	X	X		1 cm^2 vaut 4 carreaux du quadrillage. Relation (figures) cm^2/dm^2 et m^2/dm^2.
Maths-Sciences	X	X	Fractions de cm^2 exprimées en nombre de mm^2.	Le cm^2 est lui -même décomposé en mm^2. Expression de mesures d'aire en mm^2 et en cm^2. Expression d'une mesure d'aire composée en mm^2 et en cm^2. La peau du ver de terre, le pré, les parois des poumons. Rectangle exprimé en centimètres (largeur) et décimètres (longueur).
Cap Maths	X Le carré de côté 1 *cm* et d'aire 1 cm^2 est pris pour unité d'aire.	X (2e étape).	L'élève construit 4 surfaces d'aire 1 cm^2.	Rectangle exprimé en centimètres (largeur) et mètres (longueur). Relations avec le mm^2 travaillées plus tard (p. 116).
À portée de maths	X	X L'aire d'un carré d'1 *cm* de côté mesure 1 cm^2.		100 mm^2.

Tableau 4 *: Introduction de l'unité de mesure d'aire cm² dans les manuels.*

2. Introduction de la formule

Compagnon maths

Il est demandé (« Cherchons ensemble ») de découper un carré d'un centimètre de côté et de compter le nombre de carrés qui permettent de recouvrir « entièrement la figure ». Le carré, le rectangle et le triangle rectangle sont donnés (non remplis). Le livre du maître ne donne pas d'indications supplémentaires. Il est possible qu'il soit attendu de l'élève de faire des marques. Peut-être est-il attendu, au contraire, l'utilisation de la multiplication après avoir reporté l'étalon sur un côté.

Petit phare

Il est demandé de donner l'aire du rectangle qui a été quadrillé par l'élève (« Je revois »). Ensuite, un rectangle de dimensions $9\,cm$ de longueur et $6{,}5\,cm$ de largeur est donné (« Je découvre »). Le produit est demandé dans un second temps. L'élève doit remarquer qu'il a trouvé « la même chose ».

Vivre les maths

Il est demandé dans l'activité préparatoire du livre du maître de mesurer l'aire de rectangles et de carrés dans l'unité carreau. Il est demandé d'expliciter les stratégies :

- de dénombrement ;
- de multiplication.

À ce stade, il est demandé de commencer à dégager les formules.

Ensuite, un rectangle de dimensions $18\,cm \times 8\,cm$ est donné sur papier non quadrillé. Les procédures sont confrontées, puis il est proposé de superposer du papier quadrillé pour vérifier.

Maths tout terrain

Il est demandé à l'élève (« Je comprends » et « je m'entraîne ») de compter les carreaux d'une rangée. La multiplication et la formule sont ainsi introduites. En haut de la page suivante (« Je comprends »), est introduite l'unité de mesure d'aire. Il est écrit six fois la mention « $1\,cm^2$ » dans un rectangle ayant pour mesure d'aire $6\,cm^2$. Dans le livre du maître (« Séquence 1 »), l'accent est mis sur la multiplication par rapport à l'addition itérée.

Au rythme des maths

Il est demandé dans l'activité préparatoire (« Activités préliminaires ») du livre du maître de paver des figures à l'aide de pièces de 1cm2. Ensuite, des assemblages de 2, 3, 12 carrés ayant une aire d'1cm2 font l'objet d'un calcul d'aire.

La clé des maths

Il est demandé dans l'activité préparatoire du livre du maître de classer des rectangles. Un travail sur la distinction aire/périmètre est proposé (classement par aire, classement par périmètre).

Pour comprendre les maths

Il est demandé (« Chercher », B) de donner l'aire de différents carrés et d'en déduire la formule.

EuroMaths

Il est demandé dans un premier temps (question 5, p. 113) de donner l'aire d'un rectangle et d'un carré sur papier quadrillé. Le carré d'un cm^2 fait 4 carreaux du quadrillage ; il est donc nécessaire pour l'élève de savoir ce qu'il reporte. Ensuite, il doit prévoir l'aire d'un rectangle et d'un carré et vérifier en construisant sur papier quadrillé. Cette phase de vérification peut permettre l'explicitation du lien entre nombre de centimètres et nombre de carreaux. Ensuite, la formule est proposée et doit être approuvée ou non par l'élève.

J'apprends les maths

Il est demandé (« Je deviens performant », A, p. 25 séq. 47) de trouver l'aire d'un rectangle dont seul le coin gauche est quadrillé. Le pavage n'étant pas terminé, l'élève doit explicitement mesurer à la règle pour avoir le nombre de centimètres sur une ligne, et pouvoir en déduirele nombre de carrés cm^2 du côté du pavage afin de procéder à la multiplication. Plutôt que la formule, le manuel propose ensuite :

> J'ai appris
>
> Quand je cherche l'aire d'un rectangle, plutôt que de le quadriller, je peux mesurer sa longueur et sa largeur et multiplier les deux nombres obtenus. […].

Maths Thévenet

Il est demandé (exercice 1) de trouver l'aire de carrés et de rectangles dessinés sur du papier quadrillé en cm^2 (qui sont des carrés mesurant 4 carreaux du quadrillage, déjà tous dessinés), de calculer le produit $côté \times côté$ (ou $longueur \times largeur$) et de conclure. Dans le livre du maître, il est suggéré de faire confronter les procédures.

Les maths à la découverte des sciences

Il est demandé (« Cherchons ensemble ») de calculer l'aire d'un rectangle de 20 mètres de longueur et 10 mètres de largeur, qui est associé à une situation de problème de la vie réelle : le rectangle correspond aux parois des poumons que l'on aurait découpées en un rectangle, donc aplaties, et dont il faut calculer la surface. Le rectangle est quadrillé. Il est explicité que le fait de compter est inutile ; la multiplication est possible pour trouver le nombre de carreaux. Ensuite, il est demandé de trouver un rectangle différent ayant même aire, puis de convertir en décimètres la longueur et la largeur et d'exprimer l'aire obtenue en m^2.

Cap Maths

Dans le cahier de géométrie et de mesure préconisé en introduction de la séance par le livre du maître, il est demandé de trouver les aires d'un carré, d'un rectangle et d'un triangle rectangle à l'aide d'un quadrillage en cm^2. Ensuite, il faut construire différentes surfaces d'aire $1\,cm^2$. Enfin, il est demandé de construire sur le quadrillage deux rectangles ayant pour aire $18\,cm^2$.

À portée de maths

Il est demandé (« Cherchons ensemble ») d'exprimer des mesures d'aire à l'aide d'un quadrillage qui présente plusieurs unités de mesure d'aire possibles. Il faut « sélectionner » celle qui est demandée par le manuel.

Manuel	Grille	Dimensions choisies en cm pour le rectangle ou carré	Report fait par l'élève	Passage explicite de l'addition à la multiplication	Passage explicite du nombre de carreaux à un nombre de cm^2	Autre transition
Compagnon maths	À imaginer.	5×8 4×4.	Oui.	Pourrait être induit par la procédure, mais c'est implicite (pas de précisions dans le livre du maître). L'élève peut s'en passer.	Pourrait être induit par la procédure mais c'est implicite (pas de précisions dans le livre du maître). L'élève peut s'en passer.	
Petit phare	Oui, construite par l'élève.	7×5 9×6,5.	Non.	Pourrait avoir été rencontré p. 87 (non demandé explicitement).	Non.	L'élève doit remarquer qu'il a trouvé la même chose en comptant et par produit pour le rectangle ayant des valeurs non entières.
Vivre les maths	Oui.	À choisir, puis 18×8. Dans le manuel, 5×8 2×10.	Non.	Oui.	Oui.	Le rectangle n'est pas quadrillé, certains vont mesurer le côté. Les procédures sont confrontées. Ensuite, on vérifie avec du papier quadrillé superposé.
Maths tout terrain	Oui.	4×4 5×3 2×3 etc. jusqu'à 8×8.	Non.	Oui institutionnalisé.	Non.	Transition implicite[13].
Au rythme des maths	Oui : • une grille (multicolore) ; • une grille effectuée par l'élève (couvrir la surface avec des carreaux).	4×4 6×3 et 2, 3, 12 cm^2.	Assemblage (autant de carreaux que nécessaire pour couvrir).	Non.	Non.	
La clé des maths	Oui : papier quadrillé en cm^2.	de 20 à 27 cm^2.	Non	Oui : par la mise en commun des procédures.	Non.	Apprentissage par le classement visant la distinction aire et périmètre.
Pour comprendre les maths	Oui.	3×3 5×5 10×10 5×3.	Non	Non, mais incité par le choix des valeurs (10×10).	Non.	
EuroMaths	Oui.	10×10 4×3 3×3 5×7 5×5.	Oui : pour voir le report d'un cm^2 alors que le quadrillage n'est pas en cm^2.	Non, mais il est mentionné que les deux sont possibles + incité par le choix des valeurs.	Oui : « prévois » puis « vérifie ».	
J'apprends les maths	Oui.	6×4 10×2,5 6×6,5 9,5×4 16×13 (pavage semi-effacé).	Non.	Oui, par la grille effacée.	Oui : grille effacée.	
Maths Thévenet	Oui.	3×3 3×6 16×4 À trouver sur papier quadrillé : 8×8.	Non.	Oui, par confrontation des procédures.	Non.	Trouver le carré d'aire donnée.

[13] Il est répété six fois « 1 cm^2 » sur le dessin du rectangle à mesurer. Comme le dénombrement des carreaux d'une rangée a été institutionnalisé comme permettant d'avoir le nombre de carreaux, le lien est mis en valeur sur le dessin du carreau de côté 1 *cm*. Mais il n'est pas prévu d'activité pour expliciter ce point.

Maths-Sciences	Oui.	20×10 (en m^2) Calcul de l'aire des poumons 25×44 (en mm^2) 3×3 (en cm^2) 5×40 (en mm^2).	Non.	Oui : « inutile de compter ».	Non.	Trouver un autre rectangle ayant cette aire donnée. Conversion en *dm*. « en quelle unité l'aire est-elle alors exprimée ? »
Cap Maths	Oui.	3×3 5×2	Non.	Oui : passage par les diverses décompositions multiplicatives possibles + explicitation des procédures avec les élèves.	Non, mais il y a un dessin p. 76 qui fait correspondre règle (graduée en demi-centimètres) et quadrillage.	Trouver deux rectangles ayant pour aire $18cm^2$ (et autres options). Puis passage par toutes les décompositions multiplicatives possibles (recherche d'exhaustivité).
À portée de maths	Oui, la « grille » choisie permet de compter selon plusieurs unités de mesure différentes, il faut sélectionner « la bonne ».	3×3 5×3	Non.	Non.	Non.	Sélection de l'unité de mesure à faire par l'élève (plusieurs possibilités).

Tableau 5 *: Introduction de la formule dans les manuels.*

Questions issues de l'analyse historico-épistémologique	**Trouvé dans les manuels (en majorité)**	**Solutions trouvées par certains manuels (de façon ponctuelle)**	**Points à retenir**
Accompagnement de l'unité de mesure lors du changement vers les nombres et symboles.	Majoritairement absent : • pas de travail sur l'explicitation de l'unité de mesure centimètre dans son lien au cm^2. • pas d'explicitation du caractère arbitraire de la notation multiplicative sur les unités de mesure, le cas échéant.	Travail sur la transition : « nombre de carreaux » à « nombre de centimètres ».	Confusions à attendre dans la représentation que les élèves se font de l'unité de mesure (multiplication de centimètres). Remplacement probable de la grille par des représentations géométriques erronées, perte de l'idée de mesurage (report d'un étalon).
Rôle donné au nombre et à la lettre après la transition entre registres.	Majoritairement flou : Pas de travail sur la transition : « nombre de carreaux » à « nombre de centimètres ».	Travail sur la transition : « nombre de carreaux » à « nombre de centimètres ». + Attention particulière lors de l'introduction de la formule (*J'apprends les maths*).	Confusions à attendre dans la représentation que les élèves se font des objets sur lesquels opère l'algorithme multiplicatif.
Accompagnement de l'opération multiplication dans le changement de registre. Relation entre construction d'un carré et multiplication.	Non travaillé.	Non travaillé.	Confusions à attendre dans la représentation que les élèves se font de la multiplication qui est alors associée à la construction d'un carré de côté donné dans le cadre géométrique / avec des implications possibles sur ce qu'est le cm^2 pour eux.
Possibilité pour l'élève de faire un lien entre les deux algorithmes rencontrés.	• travail sur le passage de l'addition itérée à la multiplication dans le cadre unidimensionnel (souvent). • pas de travail sur la transition : « nombre de carreaux » à « nombre de centimètres ». • pas d'explicitation du caractère démontrable de la relation entre addition d'aires et juxtaposition de surfaces unité.	Travail sur la transition : « nombre de carreaux » à « nombre de centimètres ».	Oubli attendu du premier algorithme qui n'était pas compatible avec le second.

Conceptualisation de l'unité de mesure d'aire. • indépendamment de la longueur. • distinction surface/aire-nombre pour l'unité de mesure d'aire. • accompagnement conceptuel dans le changement de registre.	Travail sur différentes formes de l'unité de mesure d'aire (souvent), mais pas dans un contexte de report. Majoritairement absent.	Travail sur le cm^2 dans un contexte de report (mesurage). Travail sur le besoin de recourir à une sous-unité (changement d'échelle). Travail sur la transition : « nombre de carreaux » à « nombre de centimètres ».	Unité de mesure d'aire qui n'a pas une existence propre dans un contexte de mesurage.
Accompagnement de la place du mesurage dans le changement de registre.	Majoritairement absente. Le mesurage n'est généralement pas motivé par un besoin de la vie courante.	Travail sur la transition : « nombre de carreaux » à « nombre de centimètres ». Lien entre mesure de surface des poumons et mesurage.	Abandon du mesurage (incompatibilité des algorithmes).

***Tableau 6** : Récapitulatif des solutions trouvées par les manuels et points à retenir.*