LES NEUROSCIENCES COGNITIVES ET L'ENSEIGNEMENT DES NOMBRES À L'ÉCOLE - RÉFLEXIONS DIDACTIQUES

Éric RODITI[1]
Université Paris Cité, EDA, F-75006 Paris, France

Résumé. Les neurosciences cognitives occupent une place croissante dans les médias et les instances éducatives. Afin d'éclairer les enseignants et leurs formateurs, nous présentons quelques fondements majeurs des recherches en sciences et neurosciences cognitives sur les apprentissages mathématiques, et nous présentons ensuite deux d'entre elles qui débouchent sur des préconisations pour l'enseignement. Nous discutons ces deux recherches en montrant leurs finalités et en apportant un regard critique sur leurs méthodes et leurs conclusions. En conclusion, nous nous interrogeons sur les apports de la recherche à l'enseignement et à la formation.

Mots-clés. Neurosciences cognitives, didactique des mathématiques, nombres entiers, nombres rationnels, nombres décimaux, triple code, recyclage neuronal, inhibition cognitive.

Introduction

Les neurosciences cognitives occupent en France une part de plus en plus importante de l'espace médiatique dédié à l'éducation et à l'enseignement. Des neuroscientifiques sont régulièrement invités à participer à diverses institutions éducatives du pays, dont le conseil scientifique de l'Éducation nationale. Il semble important alors de questionner ce que ces chercheurs apportent, non à leur discipline scientifique mais bien à l'éducation. C'est ce qui nous conduit à nous pencher sur le contenu de leurs travaux, à en examiner les fondements théoriques, les méthodes mises en œuvre, les résultats apportés, mais aussi les recommandations qui en sont déduites pour l'enseignement comme pour la formation des professeurs. Dans cet article, nous nous pencherons sur des travaux concernant les nombres entiers, les fractions et les décimaux.

Nous commençons par présenter le modèle du « triple code » et le concept de « recyclage neuronal » qui font référence dans de nombreux travaux en sciences et neurosciences cognitives sur les connaissances numériques. Nous indiquons quelques conséquences qui en sont tirées et quelques critiques qui sont émises, notamment à propos de la connaissance et de l'apprentissage des nombres entiers. Dans les deux parties suivantes, avec un point de vue didactique, nous analysons deux recherches récentes, coordonnées respectivement par Dehaene et Houdé sur l'apprentissage du nombre. Les analyses proposées mettent en discussion, pour ces deux exemples bien précis, des apports scientifiques produits sur la connaissance numérique, sur la construction de cette connaissance ainsi que sur l'enseignement des nombres.

Nous concluons enfin sur la nécessité de la didactique en tant que champ de recherches sur les liens entre les enseignements et les apprentissages, en tant qu'outil pour lire les écrits des scientifiques qui tirent de leurs travaux des conseils et recommandations pour les enseignants et leurs formateurs, mais aussi en tant que discipline partenaire pour des recherches

[1] eric.roditi@u-paris.fr

interdisciplinaires.

1. Les nombres entiers, le « triple code » et le « recyclage neuronal »

Le modèle du triple code et l'hypothèse du recyclage neuronal ont été conçus par Dehaene, neuroscientifique, et Cohen, neurologue, pour caractériser la connaissance et l'apprentissage du nombre d'un point de vue fonctionnel et neurologique.

1.1. Le « triple code »

Le modèle du triple code a été élaboré pour rendre compte de la connaissance des nombres entiers et des activités cérébrales en jeu dans l'effectuation de certaines tâches numériques.

Un modèle anatomo-fonctionnel de la connaissance numérique

Dehaene et Cohen ont modélisé les traitements cognitifs impliqués dans la réalisation de tâches numériques à partir d'un système comportant trois représentations des nombres, trois « codes », dont ils ont proposé une implantation anatomique en s'appuyant sur des techniques d'imagerie médicale (Dehaene, 1992 ; Dehaene & Cohen, 1995). À l'origine, ce modèle concerne les nombres entiers (Roditi, 2005) et les activités numériques associées de transcodage (activités où le sujet doit passer d'une représentation des nombres à une autre), de comparaison ou de calcul. Son succès scientifique tient à l'utilisation de l'imagerie médicale pour associer une implantation neuro-anatomique à chaque représentation fonctionnelle des nombres : trois zones cérébrales pour trois représentations.

Dehaene (2010) présente ce modèle aux enseignants de mathématiques dans un article du bulletin de l'APMEP. Il y explique que le « code des quantités » est impliqué dans la perception exacte ou approximative de la quantité, par exemple lorsqu'on observe un ensemble d'objets, quand on compare deux nombres[2] ou quand on estime une somme ou une différence ; il est situé dans la région intrapariétale droite (figure 1). Le « code verbal » associe des mots de la langue aux nombres, il est en jeu par exemple lorsque nous envisageons une quantité précise après avoir vu ou entendu le mot trois ou bien lorsque nous associons cinquante-six au produit sept fois huit ; il est localisé dans les régions du système langagier de l'hémisphère gauche. Le « code arabe » est celui des symboles, il nous permet d'associer une quantité bien précise à l'écriture chiffrée 3, ou à traiter les chiffres impliqués dans des opérations portant sur des nombres ; il correspond aux aires visuelles qui sont localisées dans différentes zones du cerveau, y compris dans le sillon intrapariétal.

Dans cet article, il indique aussi des conséquences que l'on peut tirer du modèle quant à l'apprentissage :

> *Cette organisation à triple code a des conséquences essentielles pour notre compréhension du développement numérique. Il y a des indices que le système de la quantité approximative est présent très tôt, particulièrement dans la région intrapariétale droite où même des bébés de 3 mois présentent une activation au cours de tests numériques simples.*

---

[2] Des recherches ont montré que la comparaison de deux nombres est d'autant plus rapide que ces nombres sont éloignés, même si le travail sur les chiffres est analogue. On compare ainsi plus rapidement 92 à 55 que 62 à 55 alors que les nombres 92 et 62 ont tous les deux un chiffre des dizaines différent de 5 (Hinrichs, Yurko & Hu, 1981). Une interprétation de ce résultat est que, quand on compare des nombres, nous pensons à leur grandeur — à leur magnitude disent certains auteurs en utilisant un terme hérité de l'anglais — et que la tâche est de ce fait d'autant plus aisée que les nombres sont de valeurs très différentes.

Ces indices confortent l'idée que le sens du nombre ne repose pas sur un lent processus d'induction ou le constructivisme piagétien[3], mais est en grande partie défini sur une base génétique. Cependant, les systèmes relatifs à la numération verbale ou arabe ne peuvent manifestement pas être hérités ; ce sont des inventions culturelles récentes, spécifiques de notre monde occidental, qui nécessitent un apprentissage. (Dehaene, 2010, pp. 318-319).

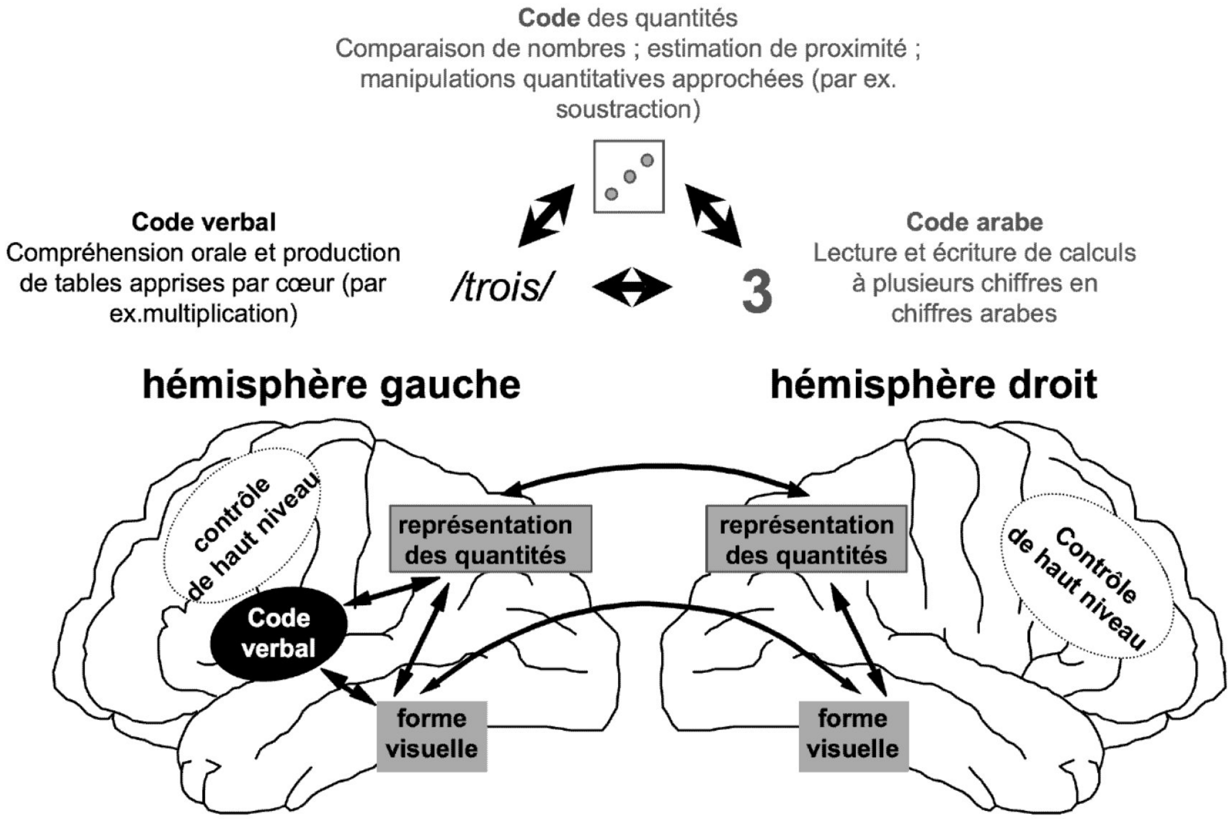

Figure 1 *: Schématisation du triple code (Dehaene, 2010, p. 319).*

On le comprend, par ce modèle, Dehaene contribue également à une lignée de travaux scientifiques visant à identifier des compétences numériques précoces chez les enfants. Cela le conduit à affirmer que le « sens du nombre » est en grande partie inné, contrairement au code verbal et au code arabe (dit aussi symbolique) dont le développement nécessite un apprentissage.

Deux significations du terme « représentation »

Avant d'aller plus loin, remarquons que le terme « représentation » est utilisé par les neuroscientifiques comme synonyme du terme « code » ; c'est le cas par exemple dans la schématisation présentée ci-dessus (figure 1) où « représentation des quantités » remplace « code des quantités ». En neurosciences, le terme « représentation » désigne des représentations cérébrales, internes aux sujets ; il ne s'agit pas, comme en didactique, de représentations sémiotiques, externes aux sujets. Il est important de différencier ces deux significations, et cela d'autant plus que les formateurs expliquent aux (futurs) enseignants du premier degré que trois représentations des quantités sont à distinguer : les représentations analogiques (une collection de traits équipotente à une collection d'objets par exemple), les représentations langagières (mots-nombres ou combinaisons de mots-nombres) et les représentations symboliques (écritures

[3] Nous indiquons au lecteur que les premiers psychologues à s'être opposés à la thèse constructiviste de Piaget sont Mehler et Bever (1967), et que Mehler a été le professeur qui a dirigé la thèse de Dehaene.

chiffrées). Malgré l'analogie, ces représentations (sémiotiques et non cérébrales) ne sont pas celles du triple code…

Ne pas distinguer ces significations du terme représentation risque d'engendrer des confusions. Nous nous proposons de l'illustrer en reprenant l'analyse de la classique « situation des voyageurs » (Briand, Loubet & Salin, 2004). Dans cette situation, les élèves doivent apporter des voyageurs pour que toutes les places libres d'un autobus soient occupées. Les formateurs expliquent que l'activité des élèves doit conduire ces derniers à comprendre que le nombre est un moyen de conserver la mémoire de la quantité, ici celle des sièges disponibles, de la désigner et de la communiquer. Si l'utilisation du papier est autorisée, l'élève pourra tracer un bâton par siège vide et conserver ainsi la mémoire de leur quantité, sans même avoir besoin de les dénombrer. Il pourra même prendre un voyageur par bâton et réussir la tâche sans jamais savoir combien de places libres il y avait, ni combien de voyageurs les occupent à présent. La collection de bâtons dessinée par l'élève, équipotente à celle des sièges, sera donc bien, pour l'élève, une représentation de la quantité de sièges libres et non leur nombre, puisque justement, ce nombre, il ne connaît absolument pas. Le professeur modifiera alors les contraintes de la situation pour conduire à l'utilisation du nombre : l'élève n'aura plus le droit de prendre lui-même les voyageurs mais devra les commander oralement à un autre élève. On le comprend, du point de vue didactique, la représentation analogique de la quantité (par une collection équipotente de bâtons) n'en est absolument pas une représentation numérique ; elle n'est pas une représentation sémiotique du nombre de voyageurs. *A contrario*, selon la terminologie utilisée à propos du triple code, la représentation analogique de la quantité est précisément l'une des trois représentations du nombre, la représentation innée, celle qui n'est ni langagière ni symbolique. La différence est donc profonde…

Selon Dehaene, les représentations langagières et symboliques du triple code ne sont pas innées mais acquises ; le recyclage neuronal est une théorie qui explique le passage de capacités innées à des capacités plus élaborées nécessitant un apprentissage.

1.2. Le « recyclage neuronal »

Cette hypothèse théorique intéresse l'enseignant et le formateur car elle développe une relation de codétermination entre l'apprentissage et la conformation du cerveau. Elle contribue ainsi à réfuter l'opposition entre l'inné et l'acquis, en assumant les deux partis à la fois par une articulation entre ce qui est une conséquence de l'hérédité et ce qui est une conséquence de l'apprentissage.

Apprentissage et transformation cérébrale

Pour présenter cette théorie, appuyons-nous à nouveau sur un article publié à l'attention des enseignants, dont les auteurs sont Dehaene et deux chercheurs montréalais :

> *La capacité à comprendre les nombres et à réaliser des calculs représente […] un apprentissage culturel qui exige que le cerveau se recycle. En effet, […] la représentation symbolique des quantités par les chiffres arabes (1, 2, 3, etc.) représente une invention relativement récente dans l'histoire de l'humanité. Le cerveau ne possède donc pas, de manière innée, une région dont la fonction est de réaliser des calculs exacts à l'aide de symboles mathématiques. Cependant, le cerveau possède, dès la naissance, la capacité d'évaluer approximativement des quantités, ce que l'on appelle généralement le « sens du nombre » […] Plusieurs recherches menées auprès d'adultes montrent que lors de la réalisation de calculs complexes avec des nombres écrits en chiffres arabes, la région associée au sens du nombre demeure activée. Cela laisse entendre que cette région du cerveau, le sillon intrapariétal, s'est recyclée pour répondre aux symboles des*

> *chiffres. Au cours de l'apprentissage, sa fonction se modifie et se raffine afin d'associer l'intuition innée de la quantité aux symboles mathématiques* (Brault Foisy *et al.*, 2016, pp. 58-59).

Proposée par Dehaene et Cohen (2007), cette hypothèse théorique permet d'expliquer, au niveau cérébral, pourquoi il est possible d'apprendre — par l'éducation — certaines notions culturelles aussi complexes que celle de nombre, alors que le cerveau ne dispose pas, de manière innée, de la capacité de lire ou de compter. L'hypothèse est, d'une part, que l'appréhension analogique du nombre entier et la capacité d'effectuer des calculs élémentaires sur des tout petits nombres sont innées, du fait d'une évolution du cerveau pour s'adapter aux activités humaines très anciennes. Elle est aussi, d'autre part, que les systèmes de verbalisation et d'écriture des nombres étant très récents dans l'histoire de l'humanité, le cerveau ne possède pas, à la naissance, de régions cérébrales dédiées à la désignation orale ou écrite du nombre. C'est l'apprentissage qui serait à l'origine de ces deux représentations cérébrales (code verbal et code symbolique), c'est lui qui conduirait au développement du code analogique pour permettre le calcul, grâce à des liens avec le code symbolique. Apprendre à dire, lire et écrire les nombres, apprendre à calculer, impliquerait un recyclage de la région cérébrale dédiée de manière innée au sens des nombres, c'est-à-dire un recyclage des réseaux neuronaux des sillons intrapariétaux.

Dehaene et ses co-auteurs en tirent alors des conséquences pour l'enseignement.

De l'architecture du cerveau à l'enseignement des nombres

Selon Dehaene, l'apprentissage — essentiellement issu de l'enseignement — constitue le levier de la transformation cérébrale conduisant à l'acquisition de connaissances mathématiques nouvelles. Et, pour être le plus efficace, l'enseignement devrait aussi prendre en compte l'architecture du cerveau. Par exemple, en ce qui concerne l'enseignement du domaine numérique, Dehaene et ses collègues montréalais indiquent :

> *L'enseignement ne peut donc pas faire fi des caractéristiques initiales du cerveau et des contraintes qui leur sont associées. […] En ce qui concerne l'apprentissage du calcul, il devient pertinent de réfléchir à des stratégies permettant de solidifier le sens du nombre et de l'associer aux symboles mathématiques, en proposant des exercices visant à mettre en relation ces deux types de représentation. Bien qu'il soit essentiel de tenir compte des compétences de chaque apprenant et de différencier l'enseignement en fonction de ses forces ou de ses faiblesses, il apparaît également primordial de planifier l'enseignement afin qu'il soit adapté le mieux possible à l'architecture du cerveau des élèves, qui présente, somme toute, des similarités non négligeables d'une personne à l'autre* (*op. cit.*, p. 59).

Autrement dit, le système symbolique des nombres (un prérequis essentiel au calcul exact) se développerait à partir des neurones associés au sens du nombre par un processus de recyclage neuronal qu'il conviendrait de stimuler dans l'enseignement par l'activation simultanée du code des quantités et du code symbolique.

Le didacticien s'interroge : l'enseignement doit-il avoir pour objectif de développer des connexions neuronales dans le cerveau des élèves, ou bien de faire entrer ces derniers dans une culture mathématique en les conduisant à apprendre le nombre et son utilisation pour résoudre des problèmes ? Barallobres, didacticien des mathématiques de l'Université du Québec à Montréal, conteste cette redéfinition des objectifs de l'enseignement proposée par Dehaene et ses collègues :

> *[…] la fonction de l'enseignant n'est plus celle d'aider les élèves à participer d'une pratique socialement partagée (par exemple, les pratiques mathématiciennes), mais de les aider à développer des connexions neuronales pour apprendre n'importe quel concept. La structuration des environnements d'apprentissage (objectif déclaré de la neuroéducation) n'a pas comme finalité*

de préserver la signification des pratiques scientifiques dans le contexte scolaire (ce qui requiert une analyse épistémologique du savoir), mais celle d'améliorer le fonctionnement du cerveau (Barallobres, 2018, p. 171).

Comme le code des quantités, siège des connaissances numériques précoces, constitue la pierre angulaire de l'argumentation sous-jacente aux préconisations des neuroscientifiques pour l'enseignement du nombre, il est important de revenir sur ces connaissances déclarées innées, et de comprendre comment les neuroscientifiques ont conclu à leur existence.

1.3. À propos des connaissances numériques précoces

La recherche la plus connue de mise en évidence de connaissances numériques précoces est sans doute celle de Wynn (1992) qu'elle publie dans un article de la revue scientifique de référence *Nature* et dans lequel, non seulement elle renforce le résultat selon lequel des bébés de moins de six mois auraient déjà une connaissance des tout premiers nombres, mais elle prétend montrer en outre qu'ils possèdent aussi quelques rudiments de calcul. C'est ce qu'explique Dehaene (1997) dans son ouvrage *La bosse des maths* dans lequel il cherche à convaincre le lecteur que les compétences mathématiques ne sont pas sans racines biologiques.

Dans l'expérimentation de Wynn, un bébé est placé devant un théâtre de marionnettes. Le théâtre est vide puis la main d'un expérimentateur apparaît, apportant un Mickey sur la scène. La scène est ensuite partiellement cachée par un écran qui empêche de voir le Mickey, mais le bébé peut voir la main de l'expérimentateur apporter un autre Mickey et peut-être deviner que cette deuxième marionnette a été placée à côté de la première. Ce que montre Wynn, c'est que quand l'écran disparaît pour laisser toute la scène visible, l'attention du bébé est significativement plus courte lorsqu'il voit bien les deux Mickey ($1+1=2$) que lorsque la scène donne à voir seulement un Mickey ou bien trois Mickey[4] ($1+1=1$ ou $1+1=3$). Cette différence d'attention — plus longue lorsque le résultat n'est pas celui attendu — est interprétée comme la connaissance innée du calcul : « un plus un égale deux ».

Parmi les questions que posent les scientifiques qui émettent un avis critique sur les interprétations apportées, la plus importante est la suivante : ce qui est mis au jour relève-t-il de connaissances numériques et arithmétiques précoces, relatives au nombre, ou plutôt de compétences perceptives relatives à l'espace occupé ou à la quantité ? Signalons à ce sujet que la confusion semble entretenue par certains auteurs comme Dehaene qui désignent indistinctement la perception du nombre et celle de la quantité. La différence est ténue mais fondamentale : cette confusion, on l'a vu précédemment, conduit — à tort — à prendre une collection de bâtons équipotente à une collection de sièges vides pour une représentation du nombre de sièges alors qu'elle ne représente peut-être seulement que leur quantité). Keller (2016) souligne que cette confusion relève d'un préjugé nuisible à la recherche, dans la mesure où il détourne de l'élucidation des mécanismes perceptifs à l'œuvre, chez les bébés comme chez les animaux :

> *En se fiant à l'expérience en question, rien, absolument rien, ne justifie la croyance à un intermédiaire, que ce soit une marque, un calcul ou un sens du nombre ; quand les auteurs prennent parti et assurent que leurs résultats sont la preuve que chez les enfants de six mois, il existe un système de représentation du nombre, c'est pur préjugé au sens propre du terme, préjugé probablement nuisible à la recherche dans la mesure où il détourne l'attention du vrai problème, celui de l'élucidation du mécanisme perceptif à l'œuvre. Dans le même ordre d'idées, lorsque*

[4] Dans l'expérimentation de 1992, Wynn n'avait pas testé $1+1=3$. Elle l'a fait pour répondre à des détracteurs indiquant que ce qui a été prouvé est seulement que les bébés savent que $1+1$ ne peut pas être égal à seulement 1, mais doit être égal à plus que 1, pas forcément 2.

Stanislas Dehaene dit : « Par exemple, sans aucun entraînement, des lions sauvages qui en rencontrent un autre groupe évaluent immédiatement combien ils sont, et ils décident d'attaquer ou de se replier en comparant ces deux nombres » on ne peut croire qu'il pense sérieusement ce qu'il écrit. Il est clair que les animaux comparent des collections, des étendues et des volumes, il y va certainement de leur survie. Mais encore une fois l'hypothèse la plus simple, la première qui devrait donc orienter les recherches, est la comparaison directe, et non la comparaison indirecte par le nombre et la mesure : le sujet doté d'un cerveau voit deux collections d'objets concrets, deux étendues ou deux volumes concrets, et superpose les images qu'il en a gardé (Keller, 2016, p. 287).

La recherche renouvelée de compétences numériques précoces possède indéniablement des visées scientifiques sur la connaissance des bases neuronales en lien avec des savoirs à forte dimension culturelle, comme c'est le cas des savoirs numériques.

Il apparaît donc important que les enseignants, et leurs formateurs en premier lieu, soient à même d'accéder à une lecture critique de ces travaux sur lesquels se fondent de telles préconisations. Les deux parties suivantes proposent d'analyser, principalement pour leurs aspects méthodologiques, deux recherches conduites respectivement par Dehaene et Houdé. Le choix de ces deux auteurs est lié à leur audience dans la sphère de l'enseignement pour les liens qu'ils font entre la compréhension du cerveau et les apprentissages numériques (Deshaies, Miron & Masson, 2015).

2. Une recherche sur l'apprentissage des rationnels

En partenariat avec le ministère de l'Éducation nationale, Dehaene a conduit une recherche qui vise à montrer le caractère fondamental et déterminant du placement des nombres rationnels sur la droite numérique pour leur apprentissage. Elle a donné lieu, en 2022, à la publication d'une note du Conseil scientifique de l'Éducation nationale (CSEN) dans le but de documenter les enseignants et les formateurs (Dehaene *et al.*, 2022). Avec Hirsch, nous avons déjà analysé cette note (Hirsch & Roditi, 2022), nous nous concentrons ici sur les éléments en lien avec le triple code, le recyclage neuronal et les préconisations qui en découlent pour l'enseignement des fractions à l'école.

2.1. Le « test de la ligne numérique »

La recherche en question repose sur une évaluation menée en 2020 auprès de 1 274 élèves à l'entrée en 6e. Cette évaluation est nommée « test de la ligne numérique » par les auteurs, elle les conduit à rendre compte de certaines carences des connaissances des élèves en fin d'école primaire et à effectuer des suggestions pour les combler au vu des résultats.

Description du test

Ce test est un questionnaire proposé sur ordinateur et dans lequel chaque question est posée de manière analogue : un nombre est proposé à l'écran sous forme symbolique ($\frac{4}{2}$, $\frac{1}{2}$, $2+\frac{1}{5}$, etc.), les élèves disposent alors de 10 secondes pour le placer sur une droite graduée à l'aide de la souris (les nombres figurant sur la droite graduée étant des entiers écrits avec la notation usuelle). Les auteurs expliquent aux professeurs que le fait de savoir placer les nombres sur la droite graduée atteste de la compréhension de ces nombres par les élèves.

D'un point de vue didactique, le fait de placer les nombres sur la droite numérique constitue bien un critère de la connaissance des nombres, mais seulement un critère parmi d'autres. À propos des fractions, cinq conceptions sont couramment distinguées qui font depuis plusieurs décennies l'objet de recherches en didactique : partie-tout, rapport, opérateur, quotient et mesure (Martinez & Roditi, 2017). Parmi les auteurs français qui conduisent ou ont conduit des travaux sur ces questions, citons : Douady et Perrin-Glorian (1986), Perrin-Glorian (1986), Brousseau et Brousseau (1987), Bolon (1996), Adjiage (2007) et plus récemment Allard (2015), Chambris, Tempier et Allard (2017), Coulange et Train (2018) et Margolinas (2021).

Dehaene et ses co-auteurs de la note du CSEN affirment que savoir placer un nombre est prédicteur de sa compréhension, mais il n'y a pas, dans leur test de la droite numérique, d'évaluation explicite du lien entre cette connaissance et celle des cinq conceptions des nombres rationnels citées plus haut. Au contraire, en s'appuyant sur ces conceptions et à la suite de Martinez (2018), Hirsch (2022) a distingué trois dimensions de la connaissance des nombres rationnels qualifiées respectivement d'ordinale, de cardinale et de calculatoire. Dans sa recherche, la connaissance de la dimension ordinale est attestée par la capacité à comparer des fractions ou à les placer sur une droite graduée. En soumettant des élèves de fin de collège (classes de 4^e^ et de 3^e^) à une évaluation de leurs connaissances des fractions, Hirsch a montré que ceux qui obtiennent de bons résultats aux items relevant de la dimension ordinale obtiennent en général aussi de bons résultats aux items relevant des deux autres dimensions. Elle a toutefois aussi montré que de nombreux élèves qui obtiennent des résultats faibles aux items relevant de la dimension ordinale obtiennent cependant des résultats bons ou moyens aux items relevant des dimensions cardinale ou calculatoire. Le placement des fractions sur une droite graduée ne constitue donc pas à lui seul l'indicateur de la connaissance des nombres rationnels…

Revenons à la description du test de la ligne numérique. Le test n'est pas qu'une évaluation, c'est aussi un entraînement où : si l'élève positionne correctement le nombre affiché, il reçoit un message de félicitations, sinon, il reçoit un message indiquant que sa réponse est fausse et la bonne réponse est affichée. Un objectif de la recherche était en effet de montrer que le fait de faire travailler intensément le « sens des nombres » et de le mettre en relation avec le « code symbolique » améliore l'apprentissage des fractions. Il faut donc bien comprendre que ce test correspond à l'objectif d'asseoir, par une recherche sur les nombres rationnels, le modèle du triple code et la théorie du recyclage neuronal, et cela plutôt que d'enquêter finement sur la connaissance des différentes composantes de la compréhension des fractions. Bien que cela ne soit pas explicité dans la note, Dehaene (1996) admet en effet une autre hypothèse selon laquelle, si les fractions sont difficiles à apprendre, c'est parce qu'elles ne correspondent à aucun des systèmes innés de perception, de représentation et de traitement des nombres.

> *[…] la ligne numérique qui nous sert à représenter les quantités ne supporte qu'une forme très limitée d'intuition des nombres. Elle ne code que les nombres entiers positifs et leurs relations de proximité. Je pense qu'il faut voir dans cette limitation l'explication, non seulement de la compréhension intuitive que nous avons des nombres entiers, mais également notre absence totale d'intuition concernant d'autres types de nombres. […] Je voudrais suggérer que, si ces entités mathématiques sont si difficiles à accepter par le cerveau humain, si elles défient tant l'intuition, c'est parce qu'elles n'entrent en correspondance avec aucune catégorie préexistante de notre esprit. Les nombres entiers entrent naturellement en résonnance avec la représentation mentale innée des quantités numériques, ce qui fait qu'un enfant de quatre ans peut les comprendre. Les autres sortes de nombres, par contre, n'ont pas d'analogue direct dans le cerveau* (Dehaene, 1996, pp. 98-99).

Il faut savoir que cette affirmation n'est bien qu'une hypothèse : Parnika (2021) explique que d'autres chercheurs postulent au contraire l'existence d'un système similaire à l'*Approximate Number System* qui serait dédié à la perception des quantités relatives, et non des quantités absolues discrètes, le *Ratio Processing System*. Les difficultés d'apprentissage des fractions ne relèveraient alors pas d'une contrainte cérébrale, mais seraient imputable à l'enseignement.

Nous avons jugé nécessaire de commencer par préciser l'orientation scientifique dans laquelle s'inscrit la recherche décrite dans la note car, comme l'indique Fayol (2015) :

> *L'idée selon laquelle les quantités et les grandeurs (ou encore les magnitudes) peuvent être représentées selon une ligne mentale orientée de gauche à droite n'est pas récente. Toutefois, son exploitation systématique récente repose sur la théorie anatomo-fonctionnelle du triple code, élaborée par Stanislas Dehaene et Laurent Cohen* (Fayol, 2015, p. 44).

Avant d'analyser quelques questions du test, les réponses des élèves et les interprétations faites par les auteurs, indiquons brièvement les conclusions qui sont tirées et notre point de vue à leur sujet.

Des recommandations s'appuyant sur des conclusions douteuses

De leur recherche, Dehaene et ses collègues tirent deux conclusions majeures :

> *Le premier enseignement de cette recherche est que les élèves de sixième n'ont pas encore bien compris comment les différents types de nombres se relient entre eux et s'intègrent dans un seul système. […]*
>
> *Le second enseignement est que la notion de ligne numérique peut aider à comprendre les décimaux et les fractions. En effet, des revues récentes de la littérature sur les interventions pédagogiques indiquent qu'il est efficace de pratiquer des activités qui consistent à ancrer dans le concret la connaissance de la grandeur des décimaux et des fractions à travers des activités de comparaison, de mise en ordre et de positionnement de ces nombres sur des lignes numériques* (Dehaene *et al.*, 2022, pp. 6-7).

Concentrons-nous sur la seconde conclusion, la première n'apportant rien de nouveau et étant à notre avis très critiquable dans sa formulation. Les auteurs évoquent en effet différents types de nombres qui s'intègrent en un seul système au lieu de distinguer les différents ensembles de nombres qui sont en relation inclusive $\mathbb{N}\subset\mathbb{D}\subset\mathbb{Q}$, et les différentes écritures possibles (fractionnaire pour tous les rationnels donc aussi pour les décimaux et les entiers, et décimale pour tous les décimaux qu'ils soient entiers ou non). Pour cette première conclusion, les auteurs ajoutent qu'elle s'explique peut-être par le fait que *« les décimaux et les fractions sont souvent enseignées presque conjointement en CM2 »*. Une hypothèse qui apparaît bien faible eu égard aux résultats produits par les didacticiens précédemment cités…

La seconde conclusion correspond à l'objectif de la recherche : montrer que le travail sur le code analogique (ici par la droite graduée) en lien avec le code symbolique (par les écritures chiffrées) améliore l'apprentissage des fractions. La méthode utilisée pour aboutir à cette conclusion peut toutefois laisser dubitatif le lecteur de la note ; citons les auteurs à ce sujet :

> *[…] certains élèves recevaient du feedback sur leurs réponses […], et d'autres non […]. Les résultats indiquent que ce paramètre a un effet significatif : les résultats sur les fractions sont un peu meilleurs dans le groupe avec feedback, auquel on indiquait la bonne réponse lorsqu'ils se trompaient. C'est un résultat intéressant […] il montre que l'évaluation peut aussi être un moment d'apprentissage : se tester permet d'apprendre. Le feedback aide les élèves en les corrigeant, et cet effet positif se voit en quelques minutes seulement. Ce résultat laisse penser que la pratique régulière du placement des nombres sur la ligne numérique, avec le feedback d'un logiciel ou de l'enseignant, pourrait améliorer la compréhension de la grandeur des fractions, donc de leur sens* (Dehaene *et al.*, 2022, pp. 4-5).

Les auteurs jouent sur le vocabulaire statistique en indiquant un *« effet significatif »* alors que *« les résultats […] sont un peu meilleurs »*. Ils annoncent comme un *« résultat intéressant »* le fait que l'évaluation puisse aussi être un moment d'apprentissage, ce qui risque de ne pas surprendre les enseignants et formateurs... Attardons-nous davantage sur la nature du résultat. Nous le verrons dans la section suivante, la plupart des réponses des élèves se concentrent sur quelques positions du segment gradué qui correspondent aux stratégies de réponses possibles. Le feedback indique la bonne réponse en cas d'erreur. Comme le test propose plusieurs questions analogues (aucun changement des variables didactiques), les élèves qui reçoivent le feedback à la première réponse fausse peuvent déduire la stratégie à utiliser pour obtenir la bonne réponse indiquée dans le feedback. Une telle adaptation peut-elle être qualifiée apprentissage ? Il nous semble permis d'en douter, d'autant plus que les résultats sont seulement un peu meilleurs. Nous nous étonnons même de la satisfaction liée au fait que *« cet effet positif se voit en quelques minutes seulement »* et qu'elle conduise à une recommandation pédagogique d'entraînement régulier au *« placement des nombres sur la ligne numérique »*.

Examinons à présent, sur quelques exemples, comment Dehaene et ses co-auteurs analysent les données que constituent les réponses des élèves au test de la ligne numérique.

2.2. L'analyse des réponses des élèves par Dehaene et ses co-auteurs

Dans le test de la ligne numérique, le segment sur lequel les élèves doivent positionner les fractions est gradué en dixièmes, de 0 à 5, et les entiers seulement sont indiqués (*cf.* figure 2). Chaque nombre est donné soit par l'une de ses représentations symboliques ($\frac{1}{2}$ par exemple) soit comme le résultat d'un calcul ($1+\frac{1}{5}$ par exemple).

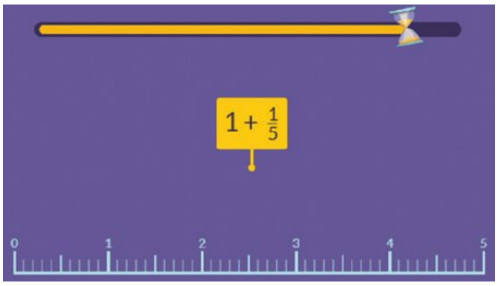

Figure 2 *: Modèle de question du test.*

À travers l'analyse des réponses données par les élèves, nous interrogeons les résultats construits par les auteurs.

Positionner $\frac{4}{2}$ sur la ligne numérique

Une des questions posées était de placer $\frac{4}{2}$ sur la ligne numérique. Nous nous interrogeons sur la connaissance évaluée par cette question, autrement dit, nous procédons à une brève analyse *a priori* des connaissances qui peuvent être mises en œuvre par les élèves pour y répondre. Il apparaît que trois conceptions différentes peuvent être à l'origine d'une bonne réponse.

Un élève peut associer $\frac{4}{2}$ à la position 2 en activant une conception « quotient », c'est-à-dire en divisant 4 par 2 et en obtenant la valeur 2 comme résultat. Un autre élève peut activer une conception « rapport » de la fraction $\frac{4}{2}$ et l'associer à la valeur 2 car, comme pour toutes les fractions équivalentes à 2, le numérateur est le double du dénominateur[5]. Un troisième élève pourra associer la division de 4 par 2 en cliquant sur le milieu du segment [0 ; 4] de longueur 4.

[5] Rappelons que si les fractions $\frac{3}{4}$, $\frac{6}{8}$ et $\frac{75}{100}$ sont équivalentes, c'est aussi parce que le rapport entre leur numérateur et leur dénominateur est précisément le nombre $\frac{3}{4}$. Autrement dit, ces fractions sont équivalentes parce que 3 est égal à $\frac{3}{4}$ de 4, comme 6 est égal à $\frac{3}{4}$ de 8, ou comme 75 est égal à $\frac{3}{4}$ de 100.

Un autre encore pourra activer une conception « mesure » de la fraction et placer $\frac{4}{2}$ en effectuant 4 bonds de longueur $\frac{1}{2}$ à partir de l'origine. Coulange et Train (2018) proposent d'ailleurs de mener en classe un travail spécifique sur la relation entre mesure et position. Les conceptions « partie-tout » et « opérateurs » ne sont pas évaluées à travers cette question, ni d'ailleurs par aucune question du test de la ligne numérique puisque toutes les questions sont bâties sur le même modèle. Bien que le titre de la note du CSEN soit *« Évaluer la compréhension des fractions et des nombres décimaux »*, différentes conceptions qui participent pourtant à la compréhension des fractions ne sont donc pas évaluées…

Positionner $\frac{1}{2}$ sur la ligne numérique

Les élèves devaient aussi positionner le nombre $\frac{1}{2}$ entre 0 et 5. La figure 3 indique les effectifs des réponses données par les élèves. Avoir placé la fraction sur la graduation 0,5 correspond à la bonne réponse et à la réponse la plus fréquente ; elle ne représente toutefois que 22 % des réponses puisque les auteurs signalent 78 % d'erreurs. Les auteurs remarquent notamment les réponses correspondant aux positions 1, 2 et 1,2. Au vu des réponses des élèves à cette question comme à d'autres où une fraction est donnée, Dehaene et ses collègues indiquent (p. 6) :

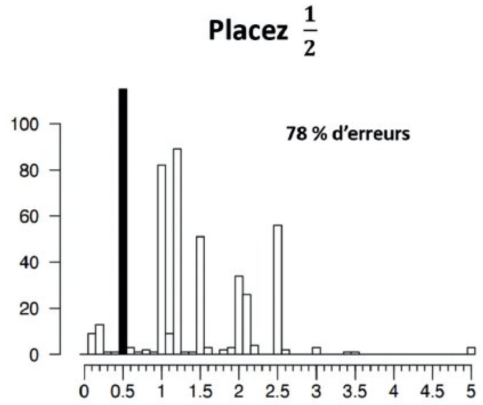

Figure 3 *: Réponses pour la fraction $\frac{1}{2}$.*

« Beaucoup d'élèves n'ont pas compris qu'une fraction représente une seule quantité, un seul nombre, et ils choisissent donc comme réponse l'un ou l'autre des entiers indiqués. D'autres élèves confondent les fractions et les décimaux, et confondent ainsi $\frac{4}{8}$ avec 4,8 ou $\frac{3}{6}$ avec 3,6 ».

Ce commentaire des auteurs nous inspire trois réflexions.

Premièrement, de nombreuses recherches en didactique — déjà anciennes — comme celles de Perrin-Glorian (1986) ont effectivement montré que de nombreux élèves ont une conception « couple de deux entiers » des fractions et des nombres décimaux. Brousseau et Brousseau (1987) pensent même, pour les nombres décimaux, que cette conception est issue d'un enseignement où la partie entière et la partie décimale sont considérées comme deux entiers affectés d'unités différentes. Le commentaire de Dehaene et ses co-auteurs à ce sujet n'est donc pas faux, mais ne correspond pas à une lecture des réponses des élèves qui n'avaient pas les moyens de répondre avec deux emplacements. On voit d'ailleurs que la position 1 apparaît bien plus fréquemment que la position 2. Parmi les réponses erronées, la réponse 1,2 est la plus fréquente, c'est ce qui explique la deuxième partie du commentaire des auteurs et qui appelle notre deuxième réflexion.

La formulation qui assimile la non-compréhension du sens de la virgule et de la barre de fractions à une confusion entre fractions et décimaux ne manquera pas de surprendre les didacticiens ainsi que les formateurs et les enseignants bien au clair avec les concepts mathématiques en jeu. Elle est en effet mathématiquement regrettable dans un texte adressé aux professeurs et à leurs formateurs. Il n'est sans doute pas utile dans la revue *Grand N* d'expliquer pourquoi les nombres décimaux sont des rationnels. Il est important en revanche de rappeler que c'est bien le défaut de conceptualisation des fractions et des décimaux — et pas leur confusion — qui conduit certains élèves à accorder un sens vague aux deux signes que sont la virgule et la barre de fraction. On peut même penser que c'est parce qu'ils travaillent sur des graduations que ces élèves attribuent, à une fraction de numérateur 1 et de dénominateur 2, une position correspondant à un trait de graduation correspondant à une (1) graduation principale et à deux (2) graduations secondaires.

Notre troisième réflexion porte sur deux réponses erronées qui ne sont pas commentées dans la note du CSEN. La première est la réponse correspondant à la graduation 1,5. Cette réponse ne correspond pas aux interprétations des auteurs. Il semble en effet que les élèves qui ont ainsi répondu aient confondu un demi et un-et-demi ; ils ne prennent alors pas la fraction $\frac{1}{2}$ pour un couple de deux entiers et ne confondent pas non plus $\frac{1}{2}$ et 1,2. La deuxième réponse est la troisième erreur la plus fréquente après 1 et 1,2 : de nombreux élèves ont positionné $\frac{1}{2}$ sur la graduation correspondant à 2,5. Il est probable que cette erreur s'explique par le fait que le segment était gradué de 0 à 5. Les élèves qui ont commis cette erreur ont vraisemblablement associé la fraction $\frac{1}{2}$ au milieu du segment, soit en pensant seulement à la moitié et en cliquant sur le milieu, soit en calculant la moitié de 5. Cette réponse erronée — et fréquente — mobilise bien la fraction $\frac{1}{2}$ comme un seul nombre, une « fraction opérateur » appliquée à la longueur 5. Il est possible d'ailleurs que des élèves ayant obtenu la bonne réponse aient aussi considéré $\frac{1}{2}$ comme une fraction opérateur appliquée à la longueur unité.

Positionner $2+\frac{1}{5}$ *sur la ligne numérique*

Les élèves devaient aussi positionner le nombre $2+\frac{1}{5}$ entre 0 et 5. La figure 4 indique les fréquences des réponses données par les élèves. La bonne réponse (avoir placé la fraction sur la graduation 2,2) est loin d'être la réponse la plus fréquente : elle ne représente que 3 % des réponses, les auteurs signalant 97 % d'erreurs. Aucune des erreurs n'est analysée dans la note, même les trois les plus fréquentes qui, cumulées, représentent environ les deux tiers des réponses produites. Les deux réponses les plus fréquentes sont d'avoir positionné $2+\frac{1}{5}$ au niveau de la graduation correspondant à 2,5 ou à 2,1.

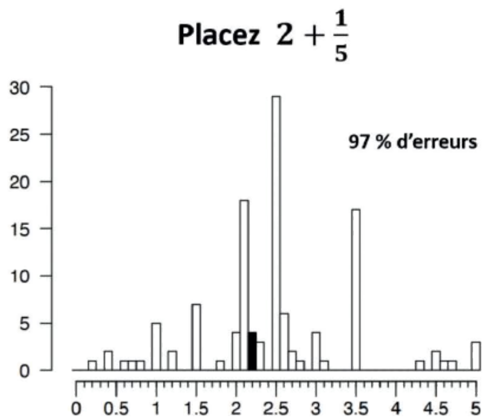

Figure 4 *: Réponses pour la fraction* $2+\frac{1}{5}$.

Pour ces deux réponses, il apparaît que les élèves tentent de positionner le nombre après 2 mais ne savent pas où le faire pour que cela corresponde à $\frac{1}{5}$. Certains se fient sans doute au dénominateur 5 et placent le nombre à la graduation 2,5 ; d'autres se fient plutôt au numérateur et comptent une petite graduation après 2 et trouvent 2,1.

La difficulté majeure ici pour les élèves semble bien de comprendre que la longueur $\frac{1}{5}$ correspond à deux graduations puisque la droite est graduée en dixièmes. Si l'absence d'une telle connaissance, considérée comme basique par Dehaene et son équipe, peut leur apparaître étonnante, il reste que, compte tenu des programmes français et du niveau de mise en fonctionnement des connaissances requises, les didacticiens ne seront pas surpris par la faiblesse du score. Les élèves de fin d'école primaire sont entraînés à placer 2,2 sur une droite graduée en dixièmes, et ils le sont également à écrire des fractions décimales équivalentes à $\frac{1}{5}$. Dans la question posée, il revient toutefois à l'élève de percevoir que la droite est graduée en dixièmes et de prendre l'initiative de convertir $\frac{1}{5}$ en $\frac{2}{10}$ pour penser $2+\frac{1}{5}$ comme $2+\frac{2}{10}$ afin de le positionner sur la graduation 2,2.

La troisième réponse erronée la plus fréquente est 3,5. Elle s'explique à n'en pas douter par le fait que la question induit une addition. Les élèves ajoutent 2 et 1, obtiennent 3 puis, ne sachant calculer mentalement la valeur décimale de $\frac{3}{5}$ en moins de dix secondes, ou bien ne sachant interpréter la barre de fraction, cliquent sur la graduation correspondant à 3 graduations principales et 5 graduations secondaire (peut-être aussi à la graduation correspondant au nombre 3,5). Ces élèves qui additionnent les numérateurs n'ont pas acquis les règles de priorité opératoire, mais rappelons que ces règles sont purement conventionnelles et que, selon les programmes en vigueur, elles ne font pas l'objet d'un enseignement à l'école primaire.

Avant d'aborder le deuxième exemple de recherche menée par des neuroscientifiques sur des questions d'apprentissage mathématique, soulignons notre étonnement et notre regret : alors que le CSEN indique l'*evidence-based education* comme étant la voie à emprunter pour aider les pratiques pédagogiques à progresser, cette note qu'il publie s'appuie sur une recherche dont les conclusions reposent sur des analyses fragiles, elle recommande des stratégies d'enseignement qui ne prennent pas en compte la littérature scientifique didactique, et qui n'ont fait ni l'objet d'expérimentations dans des classes, ni d'évaluation par des méthodes rigoureuses de leurs effets sur les apprentissages en fonction des contextes et des publics scolaires comme des pratiques d'enseignement des professeurs.

3. Une recherche sur la comparaison des décimaux

Le deuxième exemple que nous développons ici est celui d'une recherche coordonnée par Houdé et dont l'objectif est d'apporter une compréhension nouvelle, neuroscientifique, aux difficultés que pose la comparaison des nombres décimaux. Cette recherche a donné lieu à plusieurs publications ; pour nos analyses, nous nous appuyons sur l'article le plus complet produit par les auteurs (Roell *et al.*, 2019). Ces derniers émettent une hypothèse qu'ils cherchent à valider, celle d'un biais visuo-spatial dans la comparaison des nombres décimaux.

Ce biais serait causé par une assimilation entre la longueur de l'écriture des nombres et leur valeur ; l'origine de cette assimilation tiendrait au fait que la région du cerveau dédiée de façon innée à la comparaison des longueurs (celle que Dehaene appelle le « code analogique ») se serait recyclée et s'activerait lors de comparaison des nombres donnés sous forme symbolique (par recyclage neuronal). L'hypothèse que les auteurs cherchent à valider est que la comparaison de deux décimaux repose sur l'inhibition de la comparaison des longueurs de leurs parties décimales, le mot longueur devant donc ici être compris au sens de la mesure, au sens géométrique. Autrement dit, pour affirmer que 3,14 est inférieur à 3,5, nous inhiberions le fait que la partie décimale 14 est plus longue que la partie décimale 5, cette comparaison de longueur induisant une erreur : penser que 3,14 est supérieur à 3,5.

Examinons le dispositif méthodologique mis en œuvre, puis les résultats qu'en tirent les auteurs. Comme précédemment, dans cet article, nous focalisons sur les points essentiels ; un développement plus complet a été publié par Roditi et Noûs (2021).

3.1. Validation d'un biais visuo-spatial dans la comparaison des décimaux

La recherche repose sur un questionnaire élaboré par les auteurs qui s'inspire des expérimentations dédiées à l'étude de l'inhibition cognitive et plus précisément des « effets d'amorçage négatif » (Tipper, 1985). Pour comprendre ce que représente un amorçage négatif, illustrons-le par un exemple issu des travaux de Tipper lui-même. Imaginons un sujet qui doit effectuer la tâche suivante : deux lettres sont affichées, une lettre en rouge (R par exemple) et une lettre en vert (V par exemple), le sujet doit lire à haute voix la lettre affichée en rouge. Le sujet lira la lettre R et il aura perçu la lettre V, en vert, qui constitue du point de vue psychologique un stimulus à ne pas traiter. Par des mesures de temps de réponse et d'erreur, Tipper a montré que la performance à cette tâche est altérée si, juste avant d'effectuer la tâche avec ce stimulus, un autre stimulus — dit d'amorçage — était proposé où, justement, la lettre R apparaissait en vert. La lettre à lire est celle qu'il fallait ne pas lire juste avant… Le stimulus d'amorçage avec la lettre R en vert est qualifié de négatif puisqu'il va à l'encontre du stimulus qui suit ; le sujet doit inhiber l'amorçage négatif pour réussir la tâche.

L'hypothèse mise à l'épreuve par les chercheurs peut alors s'exprimer ainsi : si un traitement de longueur doit être inhibé pour comparer deux décimaux, alors son inhibition affectera une activité de comparaison de longueur devant être effectuée immédiatement après. Les auteurs ont élaboré un questionnaire informatisé de 60 items (deux comparaisons par item) ; pour chacun d'eux, le sujet doit d'abord comparer deux nombres décimaux de même partie entière, puis, après une pause d'une demi-seconde, comparer deux segments de longueur différente. Trois cas se distinguent suivant la valeur et la longueur de la partie décimale. Dans le premier cas, le nombre le plus grand a la partie décimale la plus courte (0,9 contre 0,476 par exemple) ; ce cas relève de la « condition expérimentale » puisqu'il correspond au cas où une inhibition de la comparaison des longueurs des parties décimales serait nécessaire (amorçage négatif). Dans le deuxième cas, les deux nombres décimaux ont des parties décimales de même longueur (0,981 contre 0,444 par exemple) ; ce cas relève d'une « condition de contrôle » puisqu'il n'y a pas de comparaison de longueur des parties décimales à inhiber pour comparer les deux nombres décimaux (amorçage neutre). Dans le troisième cas, le plus grand des deux nombres décimaux a la partie décimale la plus longue (0,18 contre 0,642 par exemple) ; ce cas relève d'une condition que les auteurs qualifient de « complémentaire » car la comparaison des longueurs des parties décimales n'a pas à être inhibée pour comparer les deux décimaux, elle va dans le même sens que la comparaison des longueurs des segments (amorçage positif). Les deux premiers cas sont résumés dans la figure 5.

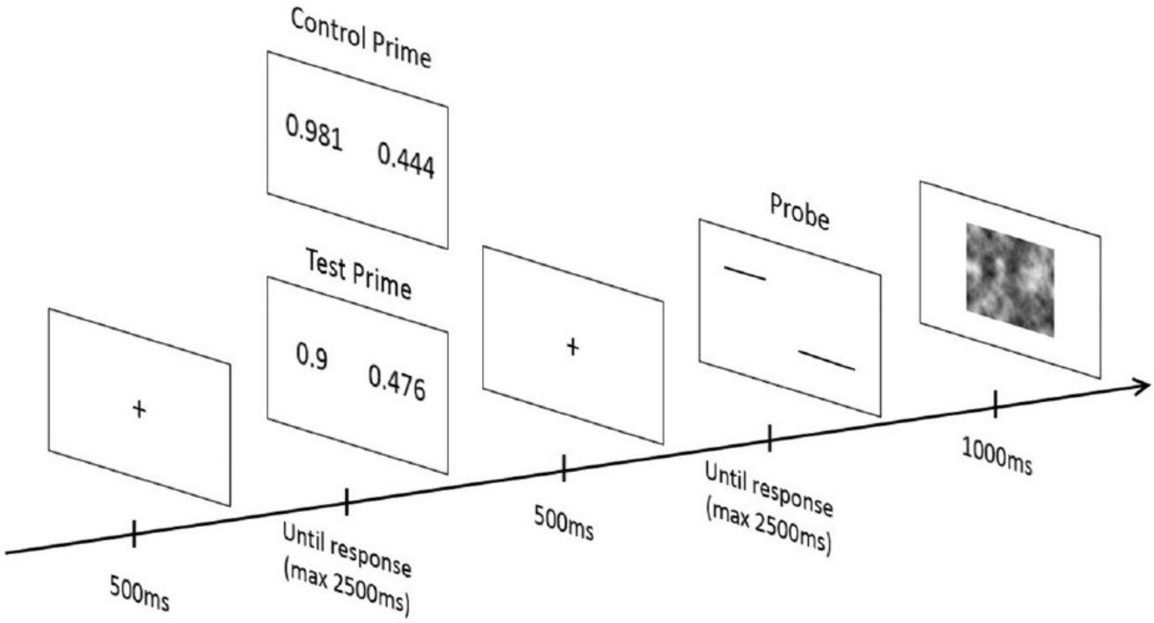

***Figure 5** : Expérimentation pour la mise en évidence d'un effet d'amorçage négatif.*

Le questionnaire a été soumis à 99 personnes sachant comparer des nombres décimaux. Les résultats obtenus sont synthétisés dans le tableau 1 où la performance est indiquée pour les comparaisons de nombres et pour les comparaisons de longueur des segments. Deux indicateurs de performance ont été retenus : le temps de réaction (TR) et le pourcentage de réussite (PR).

Conditions	**Nombre d'épreuves**	**Performances nombres**	**Performances segmenst**
Expérimentale (0,9 contre 0,476).	24	$TR = 1\,193\,ms$ $PR = 94{,}5\,\%$	$TR = 828\,ms$ $PR = 99{,}0\,\%$
Contrôle (0,981 contre 0,444).	24	$TR = 1\,082\,ms$ $PR = 98{,}8\,\%$	$TR = 802\,ms$ $PR = 98{,}7\,\%$
Complémentaire (0,642 contre 0,18).	12	Pas de résultats indiqués.	Pas de résultats indiqués.

***Tableau 1** : Comparaisons de nombres décimaux et effet sur la comparaison de longueurs.*

Les résultats montrent que, pour la comparaison des décimaux, les personnes interrogées sont moins efficaces (temps de réaction plus long et pourcentage de réussite plus faible) en condition expérimentale qu'en condition de contrôle. Ils montrent également un effet sur la comparaison des segments : la performance est altérée en condition expérimentale (temps de réaction plus long et pourcentage de réussite analogue).

Les résultats en condition complémentaire ne sont pas indiqués. Finalement, puisque la comparaison des longueurs de deux segments est altérée par la comparaison de deux décimaux quand le plus petit est celui dont la partie décimale est la plus longue, les auteurs déclarent avoir prouvé la présence d'un phénomène d'inhibition de l'attention à la longueur de l'écriture numérique. Ils en déduisent avoir apporté la preuve d'un biais visuo-spatial dans la comparaison des nombres décimaux. Proposons une analyse critique de cette recherche.

3.2. Analyse critique de la méthode et des interprétations

Revenons dans un premier temps sur le fait que les données concernant la condition complémentaire ne sont pas publiées. Nous ne savons pas si la comparaison de 0,642 avec 0,18 altère ou non la comparaison des longueurs des segments. À supposer que cela soit le cas, et de la même façon que la comparaison de 0,9 avec 0,476, la cause de l'altération de la comparaison des longueurs ne serait pas l'inhibition d'un biais visuo-spatial conduisant à penser que le nombre décimal le plus grand est celui dont la partie décimale est la plus longue. Cela pourrait être, plus simplement, que la comparaison de deux décimaux dont les parties entières sont égales est plus coûteuse cognitivement lorsque les parties décimales ne possèdent pas le même nombre de chiffres. Autrement dit, sans différence significative entre les résultats obtenus en condition expérimentale (amorçage négatif) et en condition complémentaire (amorçage positif), la conclusion en faveur d'un effet Tipper de l'inhibition de la longueur de la partie décimale est entièrement à réviser. Il faut donc bien le constater, le silence des auteurs sur les résultats relatifs à la condition complémentaire est éminemment regrettable.

Attardons-nous dans un deuxième temps sur l'interprétation que les auteurs font des résultats obtenus. Un élève qui affirme que 0,9 est inférieur 0,476 pense-t-il que l'écriture du nombre 9 est plus courte que celle du nombre 476 ? que le nombre 9 s'écrit avec moins de chiffres que le nombre 476 ? ou encore que le nombre 9 est inférieur au nombre 476 ? Ces trois interprétations relèvent de trois processus mentaux absolument différents ; pourtant, les auteurs ne retiennent pas le troisième, et cela contrairement à toute la littérature francophone sur cette question, y compris l'article en anglais de Grisvard et Leonard (1985) qui figure pourtant en bibliographie et dans lequel les auteurs français montrent que la première cause d'erreur dans la comparaison des nombres décimaux est celle d'un défaut de conceptualisation qui conduit à traiter la partie décimale comme un nombre entier, sans la rapporter à l'unité de numération qui lui correspond. Une telle omission dans un article scientifique a de quoi étonner. Toutefois, l'article ayant été publié en langue anglaise, cette omission peut passer inaperçue. Dans cette langue, en effet, la partie décimale n'est pas prononcée comme un nombre entier, mais chiffre après chiffre : le nombre 2,131 s'écrit 2.131 et se prononce « *two point one three one* ». Rien dans l'article des neuroscientifiques français n'étant expliqué quant à la lecture des nombres décimaux en français, il est à craindre que le lecteur anglophone ait été exposé à un biais linguistique et culturel.

L'omission de ce processus mental fragilise grandement les résultats issus de l'interprétation des données expérimentales. C'est une question de logique. Les auteurs expliquent que s'il existe un traitement visuel des longueurs des parties décimales dans la comparaison des décimaux, alors toute comparaison de longueurs sera altérée. Le travail effectué par les auteurs montre une altération de la comparaison de longueur après comparaison des deux décimaux où la partie décimale du plus grand possède moins de chiffres que celle du plus petit. Mais différentes causes pouvant avoir le même effet, le travail des auteurs n'aboutit pas à l'existence d'un traitement visuel des longueurs des parties décimales, il aboutit seulement au fait qu'il ne peut être écarté. L'assimilation de la partie décimale à un nombre entier pourrait avoir le même effet sur la comparaison de longueurs, surtout si l'on admet, comme les auteurs et avec Dehaene, que les représentations mentales numériques et spatiales ne sont pas sans lien, du fait même qu'elles correspondent au code analogique. Pour écarter la prise en compte de la *valeur* au profit de la *longueur*, les auteurs auraient dû proposer des comparaisons différentes où l'écriture la plus longue ne correspond pas à la valeur la plus grande : celles d'entiers en numération romaine où par exemple VIII est plus long que X bien que huit soit inférieur à dix ; celles de décimaux différents comme 0,0003 et 0,62 où 0003 est plus long que 62, bien que 0003 soit inférieur à 62 ; des nombres décimaux affichés avec des caractères différents comme 0,62 et 0,711 où « 62 » est plus long que « 711 » bien que 62 soit inférieur à 711 ; etc. Cela, hélas, n'a pas été fait…

L'absence cumulée de certains résultats, de certaines hypothèses interprétatives et de certaines modalités expérimentales donne au didacticien l'impression que tout ce qui ne concourt pas à l'hypothèse des auteurs a été omis de cette recherche scientifique. Selon les termes de la psychologie[6], les auteurs semblent avoir cédé à un biais de confirmation…

Mais comme précédemment, cela n'a pas empêché les auteurs de s'appuyer sur leur recherche pour adresser des préconisations aux enseignants.

3.3. Des préconisations d'enseignement sans recherche en classe

À la fin de l'article de Roell *et al.* (2019), Houdé et des collègues indiquent en effet que les professeurs doivent être informés du biais visuo-spatial qu'ils ont mis au jour afin de leur éviter d'interpréter à tort les erreurs commises par les élèves. Il ne s'agirait pas d'un défaut de conceptualisation, mais d'une décision instinctive, dictée par le cerveau qui assimile la longueur de l'écriture d'un nombre et la valeur de ce nombre…

Les auteurs suggèrent en conséquence qu'un enseignement fondé entièrement sur l'apprentissage des mathématiques ne suffirait pas, et qu'il faudrait entraîner les élèves à utiliser des alarmes exécutives (*« attention, il y a un piège ! »*) et à inhiber les biais de raisonnement (*« activer un bloqueur de piège »*). En dissociant ainsi l'intervention méta-exécutive de l'intervention mathématique, ils conduisent à penser les mathématiques comme un univers parsemé de pièges à éviter, plutôt qu'à faire comprendre que toute règle mathématique est fondée par la rationalité, qu'elle possède à la fois un domaine de validité et une justification relative à ce domaine.

Il faut l'admettre, les conseils donnés aux enseignants par ces chercheurs comme par les précédents ne sont ni plus ni moins qu'une transposition directe de leurs résultats, et plus exactement seulement de leurs hypothèses. Les auteurs des deux recherches ne mentionnent aucun dispositif expérimental d'enseignement évalué en milieu scolaire, aucune analyse de travail d'élèves ou de professeurs en classe, de projet pédagogique d'enseignement, d'interactions de professeurs avec leur classe, d'explicitation par des élèves ou encore de la nature des justifications ou explications par des professeurs, etc. Dans cette recherche comme dans la précédente, les auteurs n'ont effectué aucune étude ni de l'enseignement dispensé ni de l'apprentissage en tant que processus qui modifie l'état de connaissance. Ils ont monté un dispositif de recherche — respectivement un test avec feedback, et une expérimentation pour montrer un effet Tipper — avec l'objectif de renforcer une théorie — celle du recyclage neuronal et celle de l'inhibition cognitive.

Conclusion

Comme en témoigne l'histoire de leur construction, les nombres entiers, rationnels et décimaux sont des concepts mathématiques qui relèvent d'un haut niveau d'abstraction et d'élaboration des représentations symboliques. Dans les deux recherches analysées ici, les auteurs ne s'appuient pas sur la signification profonde de ces concepts, ni sur celle des pratiques mathématiques associées. Ces recherches véhiculent plutôt des mathématiques considérées comme un ensemble d'objets et de règles que les élèves auraient à voir, à comprendre et à mémoriser, sans que la perception et la compréhension s'appuient sur une pratique scientifique authentique transposée

[6] En psychologie, on appelle « biais de confirmation » le biais cognitif qui consiste à privilégier les informations confirmant ses idées préconçues ou ses hypothèses, et à négliger celles qui les mettraient en défaut.

en classe, sans associer la mémorisation à la construction intellectuelle issue de réorganisations ou de bouleversements des connaissances anciennes.

Dans la note du CSEN, Dehaene et ses collègues écrivent, par exemple, que la bande numérique aide à comprendre que les entiers sont ordonnés et régulièrement espacés, ou que la ligne graduée permet de comprendre qu'à chaque nombre correspond une position précise et vice versa, comme si ces représentations du domaine numérique n'étaient pas elles-mêmes des constructions intellectuelles à élucider, comme si les mathématiques étaient à découvrir dans ces objets du monde. De la même manière, le biais visuo-spatial dont il est question dans la recherche coordonnée par Houdé n'est jamais relié à la nature de ce qui est vu : des écritures numériques dans un système décimal organisé par des unités de numération liées les unes aux autres par des facteurs multiplicatifs égaux à des puissances de dix.

Les préconisations formulées par ces chercheurs pour l'enseignement découlent de cette conception des mathématiques. L'analyse critique effectuée, nourrie par une culture en didactique, laisse à penser que cette incursion dans le domaine de l'éducation permet de revendiquer une utilité sociale à leurs travaux, et de les promouvoir en défendant des pratiques d'enseignement fondées par la recherche, des « *evidence based practices* » sans que ces pratiques soient testées.

L'enseignement et l'apprentissage sont des phénomènes complexes inscrits dans des contextes culturels, sociaux, institutionnels, politiques et économiques. La complexité de ces phénomènes explique la diversité des orientations scientifiques des chercheurs qui les étudient. Les didacticiens des mathématiques les étudient à l'aune d'un système dynamique tripartite composé des savoirs, des élèves et des enseignants, et plongé dans un contexte scolaire particulier. Leurs recherches montrent des variabilités selon les savoirs, l'enseignement dispensé, les pratiques enseignantes, et bien sûr selon les élèves. Les neurosciences cognitives étudient les mécanismes neurobiologiques qui sous-tendent la cognition d'où, quand il s'agit d'apprentissage mathématique, un intérêt pour la mémoire, la perception, le langage, le raisonnement, etc. Ces recherches intéressent la didactique des mathématiques qui collabore déjà avec d'autres disciplines, les mathématiques bien sûr, mais aussi l'histoire et l'épistémologie, la psychologie, la linguistique, et plus récemment la sociologie.

Dans les deux recherches en neurosciences que nous venons d'analyser, nous regrettons le manque de prise en compte de la littérature scientifique didactique pour problématiser les questions qui touchent à l'apprentissage des mathématiques. Nous n'admettons pas que les auteurs prescrivent des méthodes aux enseignants sans avoir auparavant effectué des expérimentations dans des classes, et donc sans évaluer de façon rigoureuse les effets de ces méthodes sur les apprentissages en fonction des contextes, des publics scolaires et des pratiques d'enseignement des professeurs. La didactique des mathématiques pourrait donc interagir de façon fructueuse avec les neurosciences cognitives. Il suffirait pour cela de réunir des scientifiques convaincus par l'intérêt de l'interdisciplinarité, conscients de la portée et des limites de leurs approches. De telles interactions conduiraient à l'accroissement des savoirs sur les conditions d'enseignement et d'apprentissage des mathématiques, et contribueraient, à terme, à l'amélioration des apprentissages des élèves.

Références bibliographiques

Adjiage, R. (2007). Rationnels et proportionnalité : complexité et enseignement au début du collège. *Petit x, 74*, 5-33.

Allard, C. (2015). *Étude du processus d'institutionnalisation dans les pratiques de fin d'école primaire : le cas de l'enseignement des fractions*. [Thèse de doctorat de didactique des mathématiques, Université Denis Diderot (Paris 7)].

Barallobres, G. (2018). Réflexions sur les liens entre neurosciences, mathématiques et éducation. *McGill Journal of Education, 53*(1), 169-188.

Bolon, J. (1996). *Comment les enseignants tirent-ils parti des recherches faites en didactique des mathématiques ? Le cas de l'enseignement des décimaux à la charnière École-Collège*. [Thèse de doctorat de didactique des mathématiques, Université René Descartes (Paris 5)].

Brault Foisy, L.-M., Masson, S. & Dehaene, S. (2016). Quand le cerveau se « recycle » pour apprendre à lire et à compter. *Vivre le primaire, 29*(3), 57-59.

Briand, J., Loubet, M. & Salin, M.-H. (2004). *Mathématiques en maternelle*. CDROM, Hatier.

Brousseau, G. & Brousseau, N. (1987). *Rationnels et décimaux dans le cadre de la scolarité obligatoire : compte rendus d'observations de situations et de processus didactiques à l'école Jules Michelet de Talence*. [Thèse de doctorat de didactique des mathématiques, Université Bordeaux I].

Chambris, C., Tempier, F. & Allard, C. (2017). Un regard sur les nombres à la transition école-collège. *Repères IREM, 108*, 63-91.

Coulange, L. & Train, G. (2018). Enseigner les nombres décimaux et les fractions, transitions (ou ruptures ?) primaire-secondaire. Dans M. Abboud (dir.). *Mathématiques en scènes, des ponts entre les disciplines - Actes du colloque EMF 2018* (pp. 1490-1499).

Dehaene, S. (1992). Varieties of Numerical Abilities. *Cognition, 44*, 1-42.

Dehaene, S. (1997). *La bosse des maths*. Paris : Odile Jacob.

Dehaene, S. (2010). Le cerveau calculateur. *Bulletin de l'APMEP, 488*, 312-326

Dehaene, S. & Cohen, L. (1995). Towards an anatomical and functional model of number processing. *Mathematical Cognition, 1*, 83-120.

Dehaene, S. & Cohen, L. (2007). Cultural Recycling of Cortical Maps. *Neuron, 56*(2), 384-398.

Dehaene, S., Potier-Watkins, C., Xi He, C. & Lubineau, M. (2022). Évaluer la compréhension des nombres décimaux et des fractions : Le test de la ligne numérique. *Note du CSEN, 5*.

Deshaies, I., Miron, J.-M. & Masson, S. (2015). Comprendre le cerveau des élèves pour mieux les préparer aux apprentissages en arithmétique dès le préscolaire. *ANAE, 134*, 39-45.

Douady, R. & Perrin-Glorian, M.-J. (1986). *Liaison école-collège : Nombres décimaux*. Paris : IREM de Paris VII.

Fayol, M. (2015). *Nombres et opérations : premiers apprentissages à l'école primaire. Un bilan scientifique*. Paris : Cnesco.

Grisvard, C. & Leonard, F. (1985). Intermediate Cognitive Organizations in the Process of

Learning a Mathematical Concept: The Order of Positive Decimal Numbers. *Cognition and instruction, 2*(2), 157-174.

Hinrichs, J. V., Yurko, D. S. & Hu, J.-M. (1981). Two-digit number comparison: Use of place information. *Journal of Experimental Psychology: Human Perception and Performance, 7*(4), 890-901.

Hirsch, M. (2022). *Pluralité des savoirs relatifs aux fractions : une analyse des connaissances des élèves en fin de collège*. [Mémoire de master de recherche, Université Paris Cité].

Hirsch, M. & Roditi, E. (2022). Neurosciences cognitives et apprentissage des nombres rationnels : un point de vue didactique. *Petit x, 116*, 51-74.

Keller, O. (2016). *L'invention du nombre. Des mythes de création aux Éléments d'Euclide*. Paris : Classiques Garnier.

Margolinas, C. (2021). Enseigner les nombres rationnels au cycle 3 ? Une proposition didactique. *Grand N, 106*, 5-30.

Martinez, S. (2018). *Transposition didactique externe et acquisition du concept de fraction : une comparaison internationale entre onze participants aux évaluations TIMSS*. [Thèse de doctorat, Université Sorbonne Paris Cité].

Martinez, S. & Roditi, E. (2017). Programmes scolaires et apprentissage de la notion de fraction à l'école élémentaire. Quelques enseignements tirés de TIMSS. *Éducation & Formations, 94*, 23-40.

Mehler, J. & Bever, T. (1967). Cognitive Capacity of Very Young Children. *Science, 158*, 141-142.

Parnika, B. (2021). *The neurocognitive bases of fraction processing in the learning brain. Neuroscience*. [Thèse de doctorat, Université de Lyon].

Perrin-Glorian, M.-J. (1986), Représentations des fractions et des nombres décimaux chez des élèves de CM2 et de collège. *Petit x, 10*, 5-29.

Roditi, E. (2005). L'éducation face aux théories de la construction du nombre chez l'enfant. *Spirale - Revue de recherches en éducation, 36*, 37-52.

Roditi, E. (2007). La comparaison des nombres décimaux, conception et expérimentation d'une aide aux élèves en difficulté. *Annales de didactique et de sciences cognitives, 12*, 55-81.

Roditi, E. & Noûs, C. (2021). Didactique des mathématiques et neurosciences cognitives : une analyse des contributions à la recherche sur l'apprentissage d'un contenu scolaire. *Revue française de pédagogie, 211*, 103-115.

Roell, M., Viarouge, A., Hilscher, E., Houdé, O. & Borst, G. (2019). Evidence for a visuospatial bias in decimal number comparison in adolescents and in adults. *Scientific Reports, 9*.

Tipper, S. P. (1985). The negative priming effect: inhibition priming par ignored objects. *Quarterly Journal of Experimental Psychologie, 37A*(4), 571-590.