
OÙ EN SONT LES ÉLÈVES SUR L'ESTIMATION DE LA MESURE DE LONGUEURS ?

Pascal SIRIEIX¹

Conseiller Pédagogique Départemental en Mathématiques de l'Essonne

Résumé. Dans le document Éduscol « grandeurs et mesures au cycle 2 » paru en mars 2016, il est précisé que l'enseignement des grandeurs et de leurs mesures doit permettre aux élèves de comprendre le sens des mesures de grandeurs qu'ils rencontrent à l'école. Les programmes, parus en 2015 puis révisés en 2020, mettent en avant trois verbes pour cela : comparer, estimer et mesurer. Par rapport aux programmes antérieurs à 2015, la mise en avant du verbe « estimer » apparaît comme une nouveauté. Que sait-on sur l'estimation de la mesure ? Peut-on analyser de façon plus précise que les évaluations nationales où en sont les élèves sur l'estimation de la mesure ? Cet article rend compte d'une partie de travaux menés au sein du LDAR² dans le cadre d'une thèse abandonnée en 2020. Il cible l'estimation de la mesure des longueurs et présente les résultats d'un test individuel réalisé auprès de 144 élèves de CE1 au CM2 de novembre 2016 à mars 2017 visant à évaluer leurs savoirs et savoir-faire nécessaires à l'effectuation d'une tâche d'estimation de la mesure de longueurs.

Mots-clés. Grandeurs, mesures, longueur, estimation de la mesure, référent.

Introduction

Estimer est depuis 2015 l'un des trois verbes mis en avant dans les programmes. Peut-on analyser de façon plus précise que les évaluations nationales où en sont les élèves de l'école primaire sur l'estimation de la mesure ?

Après avoir défini les termes en jeu, nous dressons un état des lieux de la recherche sur l'estimation de la mesure des longueurs pour préciser les facteurs dont dépend la qualité d'une estimation, quelles sont les typologies de tâches d'estimation possible, quelles sont les stratégies d'estimation de la mesure pouvant être mises en œuvre et enseignées. Puis nous présentons les résultats d'un test individuel réalisé auprès de 144 élèves de CE1 au CM2 durant l'année scolaire 2016-2017.

Quelles images mentales les élèves ont-ils des unités usuelles de longueur ? Disposent-ils de référents ? Utilisent-ils un vocabulaire spécifique à l'estimation de la mesure ? Savent-ils choisir une unité adaptée au contexte ? Quelles stratégies d'estimation sont-ils capables de mettre en œuvre ? Sont-ils capables d'adapter leur stratégie au contexte du mesurage ?

Ce sont les questions auxquelles nous tentons de répondre dans cet article avant de proposer quelques pistes d'enseignement.

¹ pascal.sirieix@ac-versailles.fr

² Laboratoire de Didactique André Revuz.

1. Définitions préalables

Pour une meilleure compréhension de cet article, nous proposons d'en définir les termes essentiels dans cette partie.

1.1. Grandeur

Le terme « grandeur » admet de nombreuses définitions. Jean le Rond d'Alembert (1751), dans son article « grandeur » de l'Encyclopédie³, définit la grandeur comme une caractéristique selon laquelle on observe un objet et qui est susceptible d'augmentation et de diminution. À ce titre, il se rapproche du terme « quantité », comme le suggère également Margolinas (2015). À un même objet, on peut donc associer différentes grandeurs (masse, longueur...) et ces grandeurs peuvent avoir des valeurs différentes (plus ou moins importantes).

Dans cet article, nous nous intéressons uniquement à la longueur, d'une part parce que c'est la grandeur la plus souvent traitée dans les classes (l'une des grandeurs abordées dès la maternelle puis abordée en lien avec la géométrie) et, d'autre part, parce qu'elle a une étendue visible qui s'apparente à une ligne numérique mentale, comme le constate Fayol (2012). Cette similitude entre la ligne numérique mentale et la représentation linéaire d'un segment permet d'associer aisément un nombre à la distance entre le point considéré sur le segment et son origine. Notons toutefois que cette ligne de mesure mentale a des limites. En effet, pour Albaraccin (2011) ou Segovia et Castro (2009), il est difficile de se représenter des longueurs importantes.

La longueur est une grandeur « repérable », c'est-à-dire une grandeur pour laquelle on peut définir une relation d'ordre. Ainsi, lorsqu'on compare deux objets selon leur longueur, on peut, à vue, en les juxtaposant ou les superposant, ou par une comparaison indirecte, les ranger du plus petit au plus grand ou définir des classes d'équivalence.

La longueur est aussi une grandeur « mesurable » c'est-à-dire une grandeur sur laquelle on peut opérer. Ainsi, la longueur de deux objets réunis est égale à la somme des longueurs de chacun des objets (loi d'équivalence) et la longueur de n objets identiques réunis est égale à n fois la longueur de l'objet (loi d'additivité). On peut donc construire un segment dont la longueur est, par exemple, trois fois plus grande que celle d'un autre sans utiliser la mesure.

A contrario, pour les grandeurs dites « non mesurables », de telles opérations sont impossibles. Ainsi, pour la température par exemple, ajouter de l'eau à 20°C dans de l'eau à 15°C ne donne pas de l'eau à 35°C .

1.2. La mesure d'une grandeur

En mathématiques, la mesure d'une grandeur est une application (notée « *mes* ») qui associe à chaque grandeur A un nombre positif, noté $mes(A)$, appelé mesure de la grandeur en unités U de cette grandeur, où U est la grandeur de mesure 1, donc $mes(U)=1$.

La mesure est donc obtenue par le rapport entre la grandeur de l'objet et la grandeur d'un objet étalon choisi et dont la grandeur est appelée « unité ». Si on change d'étalon, on obtient une autre valeur pour la mesure. Il peut donc y avoir plusieurs mesures pour exprimer la valeur d'une même grandeur.

³ Le Rond d'Alembert, J. (1751). Grandeur. Dans L'Encyclopédie.
<http://artflsrv02.uchicago.edu/cgi-bin/philologic/getobject.pl?c.6:1391.encyclopedie0513>

En toute rigueur, un mathématicien, attaché à l'idée que la mesure d'un objet, pour une unité donnée, est un nombre, distinguera l'objet, la grandeur et sa mesure et formulera « *la longueur du segment est 16 cm* » ou encore « *la mesure en centimètres de la longueur du segment est 16* ». Dans une classe d'école élémentaire, on acceptera quelques abus de langage du style « *le segment mesure 16 cm* », lorsque la grandeur considérée, en l'occurrence la longueur, ne porte pas à confusion. Mais lorsque la grandeur peut porter à confusion, on la précisera en formulant par exemple « *cette table mesure 70 cm de haut* ».

1.3. Le mesurage

Selon la définition communément admise en métrologie (Vocabulaire International de Métrologie⁴), le mesurage est « *un processus consistant à obtenir expérimentalement une ou plusieurs valeurs que l'on peut raisonnablement attribuer à une grandeur* ».

Dans le document d'accompagnement Éduscol « grandeurs et mesures au cycle 2 » paru en 2016, on peut lire qu'au cycle 2, les mesures sont généralement déterminées à l'aide d'instruments (à l'aide d'une règle pour les longueurs) et donc de « mesurages », mais elles peuvent aussi être le résultat d'un calcul. Nous ajoutons, en référence à la définition de l'estimation de la mesure donnée dans le paragraphe suivant, que la mesure d'une grandeur s'obtient également par une estimation et qu'elle peut alors s'exprimer à l'aide d'un nombre et d'une unité (celle choisie comme étalon) ou d'un encadrement.

1.4. L'estimation

Définition de l'estimation

Georges Morlat, dans l'article « statistique » de l'Encyclopaedia Universalis⁵, propose la définition de l'estimation suivante :

L'estimation conduit à rechercher pour un paramètre, non pas une valeur estimée mais un ensemble de valeurs, un intervalle, dans lequel « il y ait de bonnes chances » que se trouve le paramètre inconnu.

En mathématiques, estimer implique donc d'indiquer non pas une valeur mais un ensemble de valeurs, un intervalle raisonnable de valeurs, soit au résultat d'un calcul, soit à une grandeur.

La précision de l'estimation peut être définie comme l'étendue de l'intervalle par rapport à la « valeur exacte » attribuée à une grandeur.

Définition de l'estimation de la mesure

Pour Pizarro *et al.* (2015), l'estimation de la mesure s'appuie sur trois éléments :

- 1. l'attribution, à une grandeur, d'une valeur numérique qui utilise des nombres les plus simples possibles ;
- 2. l'exécution de la tâche de façon perceptive ;
- 3. le lien de la perception à une connaissance précédente ou à l'image mentale d'un objet.

En appui sur cette définition nous apportons, pour chacun de trois éléments les précisions suivantes :

⁴ Mesurage. Dans Le Vocabulaire international de métrologie (VIM) - concepts fondamentaux et généraux et termes associés (JCGM).

⁵ Morlat, G. Statistique. Dans l'Encyclopædia Universalis numérique.

- 1. les nombres les plus simples possibles peuvent être considérés comme ceux arrondis à une puissance de 10 qui dépend du contexte (ex. la hauteur de cette porte est d'environ $2 \times 10^0 m = 2 m$). Conformément à la définition donnée par Morlat, nous considérons qu'il est également possible de donner une estimation de la mesure à l'aide d'un encadrement (ex. la longueur d'un stylo est comprise entre 13 cm et 18 cm) ;
- 2. on n'utilise donc aucun instrument pour estimer la mesure d'une grandeur ;
- 3. Marchand (2006) définit la visualisation comme un processus qui permet de créer et de mobiliser des images mentales (représentations mentales d'un objet ou d'un événement qui n'est pas physiquement présent). Bright (1979) considère lui que la visualisation peut s'effectuer à partir d'objets absents ou d'objets présents, ce qui facilite alors la tâche d'estimation.

Ainsi, les tâches « donner un ordre de grandeur », « donner une approximation », « donner une valeur approchée », « apprécier une longueur ou une distance » sont à considérer comme des tâches d'estimation de la mesure puisqu'elles répondent aux trois éléments cités.

Rôle de l'estimation de la mesure

De nombreuses études citées par Castillo (2012) montrent que l'estimation est utile dans la vie quotidienne. Dans certaines professions (ex. agriculteur, menuisier), dans la vie quotidienne (ex. adapter sa distance de freinage) ou dans certains loisirs (ex. tir à l'arc), savoir estimer la mesure d'une longueur est une compétence essentielle qui permet un gain de temps et une meilleure efficacité.

Il y a aussi une composante culturelle dans l'estimation, des références que chacun doit connaître (ex. la longueur d'un grand pas d'un adulte est environ 1 mètre / la taille moyenne d'un homme adulte est 180 cm / la mesure de la hauteur d'une porte est environ 2,10 m...). Ces références constituent alors « *un répertoire de certaines grandeurs auxquelles les élèves peuvent se référer pour estimer de nouvelles mesures* » comme on peut le lire dans le document d'accompagnement des programmes « grandeurs et mesures au cycle 2 » paru en 2016.

Enfin, savoir estimer permet d'anticiper un résultat et de prendre du recul par rapport à un résultat obtenu, comme l'indique le document d'accompagnement des programmes « grandeurs et mesures au cycle 2 » paru en 2016, où on peut lire :

Ce travail sur les estimations doit permettre aux élèves, lors de la résolution de problèmes, d'avoir une idée a priori d'un ordre de grandeur du résultat attendu et de pouvoir avoir un regard critique devant un résultat incohérent.

1.5. Le référent

Dans le document Éduscol « Grandeurs et mesures au cycle 3 » paru en 2016, on évoque un « *répertoire de références utiles pour estimer d'autres mesures* ». Le référent (ou la référence) est donc une connaissance préalable s'appuyant sur une information mémorisée.

Dans cet article, nous appellerons « référent » un « objet » auquel on associe la mesure d'une longueur. Nous précisons que ce référent peut être présent ou absent durant la tâche d'estimation de la mesure.

2. État des lieux de la recherche sur l'estimation de la mesure

Dans cette partie, nous nous appuyons sur une revue de littérature pour déterminer quels sont les

facteurs dont dépend la qualité d'une estimation de la mesure de longueur, quelles sont les typologies de tâches d'estimation possibles, quelles sont les stratégies d'estimation de la mesure pouvant être enseignées et mises en œuvre et comment on peut déterminer si une estimation de la mesure est valide.

2.1. De quels facteurs dépend la qualité de l'estimation ?

Elle dépend de facteurs liés aux individus

Callis *et al.* (2006) signalent que le degré de développement de la pensée logique des individus favorise ou entrave la qualité de l'estimation.

Castillo (2012) relève que Paul (1971) a démontré qu'il existe une corrélation significative entre la capacité à estimer et l'habileté à résoudre des problèmes par la méthode essais/erreurs.

L'âge et la pratique de l'estimation influent également sur sa qualité, comme le relève Castillo (2012).

Le genre est par contre une variable qui ne semble pas influencer sur la qualité de l'estimation selon Hildreth (1983) ou encore Callis *et al.* (2006).

Elle dépend du contexte des tâches d'estimation

Castillo *et al.* (2011) relèvent l'influence du type de grandeur considérée sur la qualité de l'estimation et constatent une tendance à sous-estimer pour la perception de la longueur et de l'aire et une tendance à surestimer pour la perception du volume et de la masse.

Pour la longueur, d'autres facteurs rentrent en ligne de compte. Ainsi, Crollen *et al.* (2013) observent une sous-estimation généralisée dans les tâches de perception (ex. estimer la mesure de la longueur d'un segment donné) et une surestimation généralisée dans les tâches de production (ex. tracer à main levée un segment d'une mesure de longueur donnée).

Le type d'unité utilisé pour estimer a également de l'importance. Joram *et al.* (2005) montrent qu'il est plus facile d'estimer avec des unités non conventionnelles, par exemple en prenant la longueur d'un *Lego* comme étalon, ou avec des unités corporelles qu'avec des unités conventionnelles.

Par ailleurs, l'encombrement, par des objets, de la distance à estimer conduit, selon Joram *et al.* (2005), les individus à surestimer et à une augmentation du temps d'estimation.

Callis *et al.* (2006) montrent que la longueur d'un objet rectiligne est plus facile à estimer que celle d'un objet curviligne qui nécessite d'être rectifié (rendu droit) mentalement.

Enfin, Hildreth (1983) constate que comparer un objet à un référent présent est une procédure plus efficace que lorsque le référent est absent.

2.2. Quelles sont les typologies de tâches d'estimation de la mesure ?

Nous nous sommes appuyés notamment sur les travaux de Bright (1979) pour identifier les typologies de tâches d'estimation possibles. Dans le tableau ci-dessous, nous reprenons et illustrons les huit typologies identifiées par Bright et classées en deux cas :

- les cas A : où il s'agit d'estimer la mesure d'une grandeur d'un objet en utilisant une unité de mesure qui sert de référence ;

- les cas B : où il s'agit de déterminer de quel objet il s'agit lorsqu'on connaît la mesure d'une de ses grandeurs.

Cas	Objet présent		Objet absent	
	Unité présente	Unité absente	Unité présente	Unité absente
A	A1. Voici une règle d'un mètre. Sans l'utiliser donne la mesure de la distance séparant les 2 plots jaunes.	A2. À combien de mètres de toi se situe ton camarade ? Quelle est la hauteur de cette table ? Estime en mètre la longueur du tableau.	A3. Voici une règle d'un mètre. Combien mesure la longueur d'un bus en mètres ?	A4. Combien mesure la hauteur d'une maison en mètres ?
B	B1. Voici une règle d'un mètre. Sans l'utiliser peux-tu dire lequel de ces cinq plots se situe à 3 mètres du plot vert.	B2. Parmi ces cinq segments lequel mesure 20 centimètres de long ? Voici un livre et une mesure : 20 cm. Cette mesure correspond-elle à sa longueur, sa largeur ou son épaisseur ?	B3. Voici une réglette de 20 cm. Ferme les yeux et cite un objet de la classe qui peut mesurer 20 cm de long (ou de haut).	B4. Montre-moi un écart de 80 centimètres entre tes deux mains. Trace, à main levée, un segment de 15 cm de long.

Figure 1 : Typologie des tâches d'estimation.

Il est à noter que, pour les tâches de cas A, en perception, il est possible de donner une estimation sous la forme d'une approximation ou d'un encadrement.

En référence à cette typologie, nous avons effectué une analyse des exercices d'estimation de la mesure de longueur proposés dans quatre collections de manuels édités entre 2015 et 2017⁶. Cette analyse nous a permis de mettre en évidence deux points saillants. Le premier est que les tâches d'estimation les plus fréquemment proposées dans les manuels sont, à 58 % de typologie A4. Elles consistent essentiellement à choisir, parmi plusieurs propositions, l'unité de mesure qui convient ou à compléter avec l'unité qui convient une estimation dont la valeur numérique est fournie. Les tâches de typologie A2 sont les secondes tâches les plus fréquentes (18,8 %) alors que les tâches de typologie A3 et B1 ne sont jamais proposées.

Le second point est que les tâches d'estimation de la mesure de longueur sont quasi absentes au CP et au CM2. Nous expliquons cela par le fait qu'au CP, les élèves travaillent surtout sur les grandeurs (comparaisons directes ou indirectes) et ne disposent pas encore de référents pour pouvoir estimer. Au CM2, d'autres grandeurs sont à étudier (aire, angle, volume) et le travail sur la mesure de longueur se fait surtout par le calcul (ex. formule de calcul du périmètre).

2.3. Quelles stratégies d'estimation de la mesure peut-on mettre en œuvre ?

Joram *et al.* (2005) constatent que la qualité de l'estimation est corrélée aux stratégies utilisées. Castillo (2012) précise que la diversité des stratégies contribue à une amélioration de la qualité de l'estimation car, de fait, on peut adapter la stratégie au contexte. Voici un inventaire des stratégies d'estimation de la mesure relevées dans notre revue de littérature :

- la comparaison de la quantité à estimer à un référent. Pour Joram *et al.* (2005), c'est la stratégie la plus efficace mais elle nécessite d'avoir mémorisé un nombre important de référents, ce qui est très coûteux ;
- le report mental d'un référent. C'est, comme le relèvent notamment Joram *et al.* (1998), la stratégie la plus fréquemment utilisée. Toutefois, elle s'avère peu fiable lorsque le

⁶ *J'aime les maths* (Belin) ; *Pour comprendre les maths* (Hachette) ; *J'apprends les maths* (Retz) ; *Cap maths* (Hatier).

nombre de reports mentaux est important. Lehrer (2003) ou encore Curry *et al.* (2006) indiquent que la difficulté du report mental est de dénombrer correctement les étalons utilisés pour déterminer la mesure. En effet, il faut « visualiser » les endroits où doivent se faire les reports et reporter mentalement l'étalon sans espace ni chevauchement. Elle incite à choisir des référents aussi longs que possible afin d'éviter des erreurs de reports et de calcul. C'est ce que constate Hartono (2015) ;

- le fractionnement mental de la quantité à estimer en parties égales pour obtenir une partie dont la longueur est proche d'un référent. Il faut alors multiplier mentalement la mesure du référent par le nombre de parties obtenues. Cette stratégie est évoquée notamment par Hildreth (1983).
- le fractionnement mental de la quantité à estimer en parties inégales dont l'une correspondra à la longueur d'un référent et l'autre sera estimée puis ajoutée.

Ces deux dernières stratégies sont plus complexes et plus exigeantes cognitivement car elles mobilisent simultanément des capacités de visualisation et de calcul mental.

Notons que seuls le report mental d'un référent (pour la largeur de la table) et le fractionnement mental de la quantité en parties inégales (pour la longueur de la trousse) sont évoqués dans le document Éduscol « Grandeurs et mesures au cycle 3 » paru en 2016, et ce, de façon non explicite :

Je peux déterminer un ordre de grandeur de la largeur de ma table si je sais que la largeur d'une feuille de papier mesure 21 cm, ou bien sachant qu'un stylo mesure environ 15 cm, je peux estimer la longueur de la trousse le contenant.

2.4. Comment déterminer si une estimation est valide ?

Pour déterminer si une estimation est valide (acceptable) ou pas, de nombreux chercheurs, cités par Castillo (2012), ont pour critère la proximité de la valeur considérée comme exacte. Dans notre test, en référence aux travaux de Clayton (1992) cités par Castillo (2012), nous considérerons, valide toute estimation de la mesure dans la marge d'erreur est inférieure ou égale à $\pm 20\%$ de la valeur exacte de la mesure d'un objet. Nous choisissons de nous appuyer sur ce chercheur car ses travaux sont effectués auprès d'élèves d'école primaire.

Nous avons conscience de l'impossibilité de déterminer la valeur exacte avec des instruments de mesure, mais, comme le souligne Muir (2005), l'estimation n'a pas à être plus exacte mais doit seulement être raisonnable et en lien avec le contexte.

2.5. Questionnement

Notre analyse de manuels s'est accompagnée d'une analyse des exercices proposés dans les évaluations nationales⁷. Cette analyse nous a permis de déterminer que peu de tâches d'estimation de la mesure étaient proposées lors des évaluations (seulement 25 items sur toutes les évaluations compulsées), que les tâches de typologie A4 étaient surreprésentées (72 % des exercices) et que les tâches de cas B étaient quasi absentes (4 % des exercices).

Que ce soit dans les manuels ou dans les évaluations nationales, il existe donc peu de tâches répondant à notre définition de l'estimation de la mesure. En effet, dans les exercices proposés, il est généralement demandé non pas d'attribuer une valeur numérique à une grandeur, mais de choisir parmi plusieurs réponses soit l'unité qui convient (ex. la hauteur d'une table est 75 m /

⁷ CE1 (de 2009 à 2013) / CE2 (de 1997 à 2006) / CM2 (de 2007 à 2012) / 6^e (de 1998 à 2007).

75 cm / 75 mm), soit la donnée numérique qui convient (ex. la largeur d'une salle de classe est 2 m / 8 m / 30 m).

De même, les exercices proposés ne permettent pas d'évaluer finement la maîtrise de certains savoirs et savoir-faire des élèves français nécessaires à l'effectuation d'une tâche d'estimation de la mesure.

Comment faire pour analyser plus finement les savoirs et savoir-faire des élèves sur l'estimation de la mesure de longueur ?

3. Méthodologie

3.1. Précision du questionnement

Identification des savoirs et savoir-faire nécessaires à l'effectuation d'une tâche d'estimation de la mesure

Pour pouvoir les évaluer, nous devons identifier les savoirs et savoir-faire nécessaires à l'effectuation d'une tâche d'estimation de la mesure. Castillo *et al.* (2011) écrivent que pour estimer correctement la mesure d'une grandeur, une personne doit mettre en œuvre les savoirs ou savoir-faire suivants :

1. comprendre la grandeur en jeu ;
2. percevoir ce qui doit être mesuré ou estimé ;
3. comprendre le concept d'unité de mesure ;
4. avoir une image mentale de l'unité de mesure à utiliser dans la tâche d'estimation ;
5. disposer de référents à utiliser pour estimer ;
6. savoir adapter l'unité de mesure ou l'instrument à ce qui doit être mesuré ou estimé ;
7. connaître des termes appropriés de l'estimation de la mesure ;
8. choisir et utiliser des procédures appropriées pour faire des estimations ;
9. vérifier l'adéquation de l'estimation.

Identification des questions que nous nous posons

Nous ne souhaitons pas vérifier les constats établis sur l'estimation de la mesure de longueur exposés plus haut mais en établir de nouveaux, en appui sur les travaux de Castillo *et al.* (2011).

Ainsi, nous ne proposerons aucun exercice en lien avec les savoirs 1 et 2 car, au vu des itinéraires d'apprentissages actuellement proposés, ces savoirs devraient être maîtrisés par la quasi-totalité des élèves scolarisés à partir du CE1. C'est ce que confirment de nombreuses études, dont notamment celle de Clements et Stephan (2004) citée par Macdonald (2011) qui indique que ces savoirs sont généralement acquis vers 4 ou 5 ans.

Pour le savoir 3, de nombreux chercheurs s'accordent à dire que la compréhension de concept d'unité est difficile à acquérir de par sa complexité. Kamii (2006), entre autres, constate que le report de l'unité est une notion qui n'est pas acquise par la majorité des élèves avant le CM1. Il faut en effet comprendre que le report de l'unité se fait avec une unité constante et sans espace ni chevauchement. Compte tenu de la difficulté à évaluer la compréhension de ce concept, nous n'évaluerons pas spécifiquement la maîtrise de ce savoir, bien que cette notion soit nécessaire à l'effectuation de nombreuses tâches proposées.

Le savoir-faire 9, qui nécessite des mesurages instrumentés pour valider les estimations, ne sera pas testé non plus. D'une part parce que cela aurait été trop coûteux en temps lors du test et d'autre part parce que, comme le révèle l'exercice GM0301 du livret d'évaluation diagnostique début CE2 publié par Éduscol en 2015 (cf. figure 4 de l'annexe 1), au moins 80 % des élèves savent, à leur entrée au CE2, utiliser une règle graduée pour mesurer la longueur d'un segment. C'est ce pourcentage de réussite qui a déterminé, à partir des résultats observés lors des évaluations des années précédentes, le classement de cet exercice en niveau de difficulté 1 (niveau qui correspond à plus de 80 % de réussite).

Par contre, nous souhaitons recueillir des réponses aux questions suivantes :

- en lien avec le savoir 4 : Les élèves ont-ils une image mentale des unités usuelles de mesure de longueur ?
- en lien avec le savoir 5 : De quels référents les élèves disposent-ils pour effectuer une estimation de la mesure ?
- en lien avec savoir-faire 6 : Les élèves sont-ils capables d'adapter l'unité au contexte ?
- en lien avec le savoir 7 : Les élèves connaissent-ils et utilisent-ils des termes appropriés à l'estimation de la mesure ?
- en lien avec le savoir-faire 8 : Quelles stratégies d'estimation les élèves sont-ils capables de mettre en œuvre pour estimer une mesure ? Adaptent-ils leur stratégie au contexte ?

Pour chacune de ces questions, des exercices ont été conçus. La description de ces exercices figure en annexe. Nous précisons, dans le tableau ci-dessous, comment s'articulent les exercices avec les questions que nous nous posons et les typologies de tâches d'estimation.

Lien avec les savoirs	Questions	Exercices				
		1. La porte	2. Les référents	3. Les réglettes	4. Les bandes	5. Les segments
	Typologie de tâche	A2	B2 ou B4	A2 et B2	A1	B4
4. Avoir une image mentale de l'unité de mesure à utiliser dans la tâche d'estimation	Les élèves ont-ils une image mentale des unités usuelles de mesure de longueur ?			X		
5. Disposer de référents à utiliser pour estimer	De quels référents les élèves disposent-ils pour effectuer une estimation de la mesure ?		X			
6. Savoir adapter l'unité de mesure ou l'instrument à ce qui doit être mesuré ou estimé	Les élèves sont-ils capables d'adapter l'unité au contexte ?	X 1/A		X 3/A		
7. Connaître des termes appropriés de l'estimation de la mesure	Les élèves connaissent-ils et utilisent-ils des termes appropriés à l'estimation de la mesure ?	X 1/A		X 3/A		
8. Choisir et utiliser des procédures appropriées pour faire des estimations	Quelles stratégies d'estimation les élèves sont-ils capables de mettre en œuvre pour estimer une mesure ? Adaptent-ils leur stratégie au contexte ?	X 1/B			X 4/B et 4/D	X

Figure 2 : Liens entre les questions que nous nous posons et les exercices proposés aux élèves.

3.2. Le contexte

Le panel

Au total, 144 élèves (cf. figure 5 de l'annexe 2) ont été questionnés un à un pendant une durée approximative de vingt à trente minutes.

Les élèves de CE2, CM1 et CM2 ont été questionnés entre le 9 novembre et le 11 décembre

2016. Les élèves de CE1 ont, eux, été testés du 22 février au 29 mars 2017. Nous avons en effet souhaité attendre qu'ils aient abordé les grandeurs et mesures de longueur en classe afin qu'ils aient intégré les notions d'unité, de report d'unité et d'unités usuelles de grandeur qui sont au cœur du protocole que nous avons élaboré.

Pour avoir un panel le plus varié possible, un tiers des élèves testés étaient scolarisés en REP, un tiers en milieu urbain ordinaire et un tiers en milieu rural (Regroupement Pédagogique Intercommunal). De même, il a été demandé à chaque enseignant de sélectionner un tiers d'élèves performants, un tiers d'élèves moyens, un tiers d'élèves en difficulté et de veiller à une équité des genres, bien qu'il soit admis que le genre n'influe pas sur la qualité d'une estimation.

Les classes sont identifiées par des lettres. Seul le paramètre « niveau scolaire » sera systématiquement analysé ici.

Le protocole

L'élève est assis à une table à côté du chercheur. Le matériel est déposé devant lui au fur et à mesure des besoins et des questions du test. Les questions sont posées oralement.

Les réponses des élèves données oralement sont notées par le chercheur au fur et à mesure sur une fiche individuelle.

Dans notre test, toutes les mesures de longueur des objets proposés à l'estimation des élèves sont comprises entre 1 mm et $2,20\text{ m}$. Nous faisons ce choix car, comme le signalent Albaraccin (2011) ou Segovia et Castro (2009), il est difficile de se représenter des longueurs importantes.

4. Analyse des données

4.1. Les élèves de l'école élémentaire ont-ils une image mentale des unités usuelles de mesure de longueur ?

Analyse a priori de la tâche 3/A

Pour répondre à notre question, nous cherchons à savoir si les élèves sont capables de donner une estimation acceptable des longueurs de trois réglettes présentées (*cf.* figure 15 de l'annexe 5). Cette tâche est de typologie A2.

La réglette de 1 cm est une réglette *Cuisenaire* blanche, donc un cube de 1 cm^3 . Cette valeur de grandeur est choisie parce qu'elle correspond à la longueur matérialisée par une unité de mesure usuelle (le centimètre). La valeur de cette unité est généralement matérialisée par une graduation présente sur le double décimètre ou le mètre de l'enseignant. Pour donner une estimation de la mesure de la longueur de cette réglette, l'élève peut comparer mentalement sa longueur à celle qu'il fréquente quotidiennement et dont il a pu se construire une image mentale.

La réglette de 20 cm est un morceau de plinthe de $20\text{ cm} \times 5\text{ cm} \times 2\text{ mm}$. Elle ressemble, dans ses dimensions, à un double décimètre, ce qui pourrait faciliter la tâche d'estimation à condition que les élèves fassent abstraction de sa largeur importante. La réglette d'un mètre est un tasseau de $1\text{ m} \times 3\text{ cm} \times 1,7\text{ cm}$. Ces deux réglettes sont choisies parce qu'elles correspondent à la longueur matérialisée par les instruments usuels de la classe (le mètre de l'enseignant et double décimètre de l'élève). Pour donner une estimation de la mesure de la longueur de ces réglettes, l'élève peut comparer mentalement leur longueur à celles des instruments usuels qu'il fréquente quotidiennement et dont il a pu se construire une image mentale.

Quelques résultats relatifs à la tâche 3/A

Malgré leur fréquentation quotidienne, seulement 7 % des élèves sont capables de donner une estimation acceptable des longueurs de chacune des trois réglettes présentées (mètre, centimètre et double-décimètre). Les élèves de l'école élémentaire n'ont donc pas une image mentale des longueurs qui correspondent aux unités usuelles (centimètre et mètre) et ne semblent pas associer le double décimètre à un étalon représentant 20 cm (cf. figure 17 de l'annexe 5). Il semble qu'il existe une corrélation positive entre le niveau scolaire des élèves et la construction d'images mentales relatives à la longueur de ces unités usuelles.

Le centimètre est l'unité usuelle pour laquelle les élèves construisent le plus aisément une image mentale (50,7 % de réussite), probablement parce que c'est le centimètre qui est utilisé pour des tracés géométriques sur le cahier. Pour le mètre, ils ne sont que 40,3 % à donner une estimation acceptable (en mètres ou en centimètres) et 25 % pour la réglette de 20 centimètres (cf. figure 17 de l'annexe 5).

Analyse a priori de la tâche 3/B

Dans l'exercice 3/B, nous cherchons à savoir si les élèves sont capables d'associer une mesure de longueur à la longueur matérialisée par une réglette. Cette tâche est de typologie B2 et semble plus simple que la précédente puisque la mesure est fournie à l'élève.

Aux trois réglettes précédentes sont ajoutées une réglette de 10 cm et une réglette de 2 m. La réglette de 10 cm est une réglette *Cuisenaire* orange de 10 cm × 1 cm × 1 cm. Elle est choisie car elle matérialise un décimètre. Celle de 2 m est un tasseau de 2 m × 3 cm × 1,7 cm. Elle est choisie parce qu'elle correspond à un multiple du mètre et que cette valeur peut être associée à la taille d'un homme ou la hauteur d'une porte, deux référents culturels possiblement connus des élèves.

Dans nos demandes successives figurent des biais puisque toutes les demandes effectuées le sont dans la même unité (le centimètre) sauf la dernière (2 m) pour laquelle la demande est effectuée en mètres. De plus, pour la réglette de 1 m, nous demandons de montrer la réglette qui mesure 100 cm. C'est un grand nombre que les élèves peuvent associer à la plus longue réglette (celle de 2 m).

Pour répondre les élèves peuvent :

- comparer la mesure donnée à celle d'un référent mémorisé puis associer l'image mentale de ce référent à la longueur d'une réglette ;
- s'appuyer sur leur(s) réponse(s) précédente(s) ;
- rechercher parmi les cinq réglettes présentées celle qui leur semble convenir le mieux en comparant à vue les longueurs des réglettes.

Quelques résultats relatifs à la tâche 3/B

Les données relevées (cf. figure 20 de l'annexe 5) montrent qu'aucun élève n'a su désigner correctement les cinq réglettes correspondant aux mesures données. Environ un tiers des élèves (36,1 %) ont su désigner au moins quatre des cinq réglettes correspondant aux mesures données. Et 40,9 % (27+11,1+2,8) des élèves n'ont su désigner que deux réglettes maximum parmi les cinq.

On constate également une corrélation positive entre le niveau scolaire des élèves et le nombre de bonnes réponses, ce qui permet de penser qu'au fur et à mesure de leur scolarité les élèves améliorent leurs images mentales des unités usuelles.

Les données repérées en bleu dans la figure 21 de l'annexe 5 montrent que la règle correspondant à la mesure demandée a toujours été celle qui a été le plus montrée. Seule exception : lorsqu'il s'agissait de montrer la règle de 100 cm, les élèves ont montré en majorité la règle la plus longue (celle de 2 m), probablement parce qu'ils ont associé le plus grand nombre (cent) à la plus longue règle. Notre demande (100 cm au lieu d'1 m) a pu constituer un biais.

92,4 % des élèves (soit 133 sur 144) savent montrer la règle de 1 cm parmi les cinq règles présentées. Le centimètre étant généralement la première unité usuelle introduite à l'école et la plus manipulée (en géométrie...), il semble donc qu'une fréquentation plus soutenue d'une unité favorise sa reconnaissance et donc possiblement la construction de son image mentale.

Bien que la tâche proposée soit d'apparence plus simple que la tâche 3/A, les résultats pour les autres règles montrent que les élèves ont peu construit d'images mentales des unités usuelles de mesure de longueur. La règle de 10 cm n'est désignée que par un élève sur deux environ (54,2 %). La règle de 20 cm n'est désignée que par deux tiers des élèves (63,4 %) et celle d'un mètre que par 38,9 % des élèves.

Les résultats relevés par niveau de classe montrent qu'il existe une corrélation positive entre la capacité à reconnaître une unité de mesure usuelle donnée et le niveau scolaire des élèves et donc, confirment les constats de Castillo (2012) sur l'âge. Cette corrélation est moins évidente pour la règle de 20 cm.

4.2. De quels référents les élèves de l'école élémentaire disposent-ils pour effectuer une estimation ?

Analyse a priori de la tâche 2

Pour répondre à cette question, nous demandons aux élèves de citer des référents pour des mesures données allant d'un millimètre à cinq mètres (*cf.* annexe 4). Nous n'avons pas demandé de se représenter des longueurs plus importantes conformément aux conclusions relevées par Albaraccin (2011) ou Segovia et Castro (2009). Les réponses apportées par les élèves doivent nous permettre de savoir s'ils ont construit des référents et quels sont ces référents. Cette tâche est de typologie B4.

Les valeurs choisies sont les unités de mesure usuelles (millimètre, centimètre, décimètre, mètre) et quelques multiples de celles-ci (5 cm, 5 m, 70 cm). Ces valeurs sont proposées car elles peuvent correspondre à des objets du quotidien dont nous avons anticipé une liste (*cf.* figure 10 de l'annexe 4). Par ailleurs, nous avons demandé deux fois les mêmes valeurs exprimées dans des unités différentes (1 cm et 10 mm / 1 m et 100 cm) pour voir si les élèves mettaient en relation ces égalités en proposant le même référent, par exemple ou en proposant des référents valides à chaque fois. Ce point ne sera pas abordé dans cet article.

Pour déterminer si un référent est valide, nous attribuons une valeur exacte moyenne aux « objets » cités par les élèves au moyen d'un mesurage instrumenté ou d'une recherche sur Internet puis calculons les valeurs acceptables en fonction de l'écart à la valeur exacte en référence aux travaux de Clayton (1992) cités par Castillo (2012).

Par ailleurs, nous recherchons si un type de référent est plus utilisé qu'un autre en nous appuyant sur la typologie de référents proposée par Bright (1979). Pour cela, nous effectuerons une analyse plus fine de la nature des référents présents (référents présents dans la salle de classe / référents corporels) et des référents absents évoqués (« objets » non scolaires / objets scolaires). *A priori*, si les élèves ont bénéficié d'un enseignement d'un répertoire de référents, les référents

qui devraient être les plus souvent cités devraient être des référents corporels ou des objets scolaires non présents dans la salle sur lesquels les élèves auraient pu effectuer des mesurages instrumentés. Une prédominance de référents d'objets non scolaires et absents (ex. taille d'animaux, longueur d'un bus, hauteur d'une maison...) démontrerait le contraire. L'utilisation d'objets présents dans la salle du test comme référents, montrerait la nécessité pour les élèves d'un appui visuel facilitant l'estimation et donc possiblement des référents en cours de construction.

Quelques résultats relatifs à la tâche 2

Nous avons eu du mal à déterminer objectivement la validité des propositions des élèves car de nombreux objets ou animaux peuvent avoir des tailles bien différentes. Par ailleurs, les élèves précisent rarement le type de grandeur prise en compte (largeur, hauteur, longueur) et il a fallu souvent leur demander de l'indiquer.

Plus de la moitié des élèves (55,6 %) n'est capable de donner au maximum que deux référents acceptables, valides sur les neuf demandés (cf. figure 11 de l'annexe 4). Aucun élève n'a été en mesure de citer 8 ou 9 référents valides et à partir de 6 référents valides ils sont une minorité. Nous constatons donc que les élèves disposent de peu de référents.

Par ailleurs, il semble exister une corrélation positive entre le nombre de référents valides que les élèves sont capables de citer et leur niveau scolaire (cf. figure 12 de l'annexe 4), ce qui semble logique pour le millimètre qui est abordé plus tardivement dans les programmes. Ces résultats rejoignent ceux de Castillo (2012) et s'expliquent par le fait que les élèves acquièrent davantage d'expériences au fur et à mesure de leur scolarité. Les élèves qui citent le plus de référents valides (5, 6 ou 7) sont en CM2.

Les référents les plus souvent cités par les élèves (cf. figure 13 de l'annexe 4) sont présents dans la salle (32,8 % des référents cités). Dans la majorité des cas, les élèves les citent après avoir regardé autour d'eux, ce qui nous amène à penser que ces référents sont en cours de construction (table, règle, crayon, tableau, fenêtre, chaise, feuille...). Toutefois, la règle de la maîtresse semble être le seul objet scolaire présent dont les élèves qui le citent connaissent pratiquement tous (à 95,2 %) la longueur qu'elle représente. C'est donc le seul référent qui semble véritablement construit. Au regard de ce qui a été écrit précédemment, nous constatons que même si les élèves savent que la règle de la maîtresse mesure un mètre de long, ils n'ont pas nécessairement construit d'image mentale pour ce référent.

Seuls 3,2 % des référents cités sont des référents corporels (leur taille, la longueur de leur bras, de leur doigt, de leur main, d'un grand pas ou de leur jambe...). Bien sûr, il n'était pas toujours possible d'en utiliser pour tous les items proposés (ex. pour 5 m). Toutefois, le faible pourcentage semble indiquer que ce type de référent est peu enseigné. De plus, quand ils sont cités, ils constituent des référents peu fiables (à 35,7 %), bien que nous ayons été tolérant sur la précision donnée (cf. figure 14 de l'annexe 4). En effet, les élèves ne disent pas s'ils parlent, par exemple, de la largeur ou de la longueur de leur main, de leur ongle...

Parmi les « objets absents » cités pouvant constituer des référents construits, on trouve majoritairement (à 54,5 %) des êtres vivants (fourmi, chien, girafe...), pour 37 % des objets du quotidien (maison, arbre, dé à jouer, voiture, verre...) et pour 8,5 % des tailles d'êtres humains considérées à différents âges. Ces « objets absents », difficilement manipulables en classe, constituent (cf. figure 14 de l'annexe 4) les référents les plus fiables (à 42,8 %). Cela pourrait indiquer que des référents s'acquièrent autrement que par un enseignement spécifique (ex. tailles

des animaux relevées et mémorisées au cours de lectures documentaires).

Des objets absents scolaires (gomme, trousse, taille-crayon, dictionnaire, craie, colle...) sont également cités par 10,3 % des élèves mais seuls la gomme ou le bâton de colle constituent des référents fiables. Cela semble indiquer que les enseignants fournissent peu à leurs élèves d'occasions d'enrichir leur répertoire de référents à partir d'objets de la classe.

4.3. Les élèves de l'école élémentaire choisissent-ils une unité adaptée au contexte de l'estimation ?

Deux questions du test (les questions 1/A et 3/A) doivent nous permettre de recueillir les informations souhaitées. Les tâches proposées sont de typologie A2.

Dans le cadre de notre test, et en appui sur la définition de l'estimation de la mesure proposée par Pizarro *et al.* (2015), nous considérons que l'unité de mesure est adaptée au contexte lorsque les élèves expriment la valeur de la grandeur en utilisant une seule unité et que la valeur numérique de cette unité est la plus petite possible. Nous regarderons donc, parmi les estimations valides, la part des unités adaptées au contexte de l'estimation.

Analyse a priori des tâches 1/A et 3/A

Nous choisissons la porte de la classe (*cf.* figure 6 de l'annexe 3) car sa hauteur est proche d'un nombre entier de mètres (2 en l'occurrence). Il est possible que les élèves proposent un encadrement de la mesure ou un nombre suivi d'une unité. Nous considérons qu'une réponse du type « 2 m » ou « entre 2 mètres et 3 mètres » est plus adaptée que « 2 m et 20 cm » ou « 2 m 20 » ou « 220 cm » ou « 200 cm », ou « entre 2 m 10 et 2 m 40 » même si toutes ces réponses sont valides. Nous regarderons donc, parmi les réponses données celles qui sont correctes et exprimées en mètres seulement.

Nous choisissons ces trois réglettes (*cf.* figure 15 de l'annexe 5) parce que leurs longueurs respectives permettent de varier les unités exprimées : le mètre et le centimètre. Pour la réglette de 20 cm de long, nous considérons comme adaptée la réponse « 2 dm » mais nous doutons qu'elle soit proposée car le décimètre n'est pas une unité usuelle. Nous considérons donc que la réponse « 20 cm » est la plus adaptée.

Pour les deux autres réglettes, les réponses « 1 cm » et « 1 m » sont les réponses attendues permettant de considérer que l'unité choisie pour estimer est adaptée au contexte même si d'autres réponses (« 10 mm », « 100 cm », « 10 dm ») sont valides.

Quelques résultats relatifs aux tâches 1/A et 3/A

À noter que, pour toutes les tâches 1/A et 3/A, 5 élèves seulement, ont donné un encadrement de la mesure lors d'une de leurs estimations. Et parmi ceux-ci, 4 élèves l'ont fait pour la hauteur de la porte et pas pour les réglettes. On peut donc dire que l'encadrement de la mesure est peu utilisé pour estimer, donc probablement peu enseigné.

En ce qui concerne l'estimation de la mesure de la hauteur de la porte, nous pensons que l'important pourcentage de réponses « je ne sais pas » (30,6 %) pour les CE1 (*cf.* figure 7 de l'annexe 3) peut s'expliquer par le fait que c'était la première question qui leur était posée durant le test et que, probablement les élèves se demandaient s'ils avaient le droit de se tromper (contrat didactique nouveau avec un adulte inconnu).

Près d'un élève sur deux (45,1 %) a su donner une estimation correcte de la mesure de la hauteur

de la porte et 78,5 % d'entre eux (les 34,4 % repérés dans le tableau) ont utilisé l'unité que nous avons considérée comme la plus appropriée au contexte, le mètre.

En ce qui concerne l'estimation de la mesure des réglettes (*cf.* figure 18 de l'annexe 5), là encore, près d'un élève sur deux (40,3 % pour la longueur de la réglette de 1 m et 50,7 % pour la longueur de la réglette de 1 cm) a su donner une estimation correcte de la mesure. Cela n'est pas le cas pour la réglette de 20 cm.

Dans tous les cas, une grande majorité des élèves qui donnent une estimation correcte de la longueur des réglettes utilisent l'unité que nous avons considérée comme la plus appropriée au contexte (80,9 % pour la règle de 1 m, 100 % pour la réglette de 20 cm et 94,5 % pour la réglette de 1 cm).

Le choix d'une unité adaptée au contexte ne semble pas être corrélé au niveau scolaire des élèves. En effet, nous observons peu de variation des pourcentages de réussite selon le niveau scolaire des élèves et pas de progression constante des pourcentages entre le CE1 et le CM2, sauf, peut-être, en ce qui concerne la réglette de 20 cm.

Peu d'élèves utilisent un système d'unités (ex. mètres et centimètres) pour estimer la mesure d'une longueur, que leur estimation soit valide ou non. Ils sont 15,3 % pour la porte, 3,5 % pour la règle d'un mètre, 0,7 % pour la réglette de 20 cm et 0 % pour la réglette de 1 cm (*cf.* figure 7 de l'annexe 3 et figure 18 de l'annexe 5). Le fait que les élèves n'utilisent qu'une seule unité lors d'une tâche d'estimation pourrait indiquer qu'ils donnent du sens à ce qu'est une estimation.

Nous pouvons expliquer la relative bonne maîtrise de cette compétence par le fait qu'un enseignement du choix d'une unité adaptée est déjà proposé dans les classes. On trouve en effet dans de nombreux manuels des exercices qui proposent de choisir, parmi 2, 3 ou 4 unités données, celle qui convient pour exprimer la longueur d'un objet nommé ou représenté (ex. la longueur d'un crayon est 14 mm, 14 cm ou 14 m ?).

4.4. Les élèves de l'école élémentaire connaissent-ils et utilisent-ils des termes appropriés à l'estimation de la mesure ?

Analyse a priori des tâches 1/A et 3/A

Lorsqu'on estime la mesure d'une grandeur, on ne détermine pas une valeur exacte mais une approximation avec un intervalle d'erreur raisonnable, comme l'a souligné Castillo (2012).

Nous avons recherché des indicateurs nous permettant de déterminer si les élèves comprennent ce qu'est une estimation de la mesure. La production d'un encadrement de la mesure lors d'une estimation et/ou l'utilisation d'un vocabulaire actif spécifique à l'estimation en production d'une estimation ont été retenus.

Nous avons vu, dans la partie 4.3, que très peu d'élèves testés utilisent un encadrement de la mesure lors de leurs estimations.

Les questions 1/A et 3/A du test doivent nous permettre de recueillir le vocabulaire de l'estimation utilisé par les élèves en situation. Toutefois, nous avons conscience que, pour y répondre, les élèves n'ont pas l'obligation de faire une phrase complète. Ils peuvent se contenter de donner une réponse contenant le nombre d'unités de mesure et l'unité de mesure (ex. « elle mesure 2 m »), ce qui constitue un biais important.

Les termes de vocabulaire actif attendus, montrant une compréhension du fait que les élèves sont

en train de réaliser une approximation sont les suivants : environ, à peu près, entre... et ..., un peu plus de, un peu moins de, ...

Nous souhaitons également observer si le milieu de scolarisation (RPI, ville, REP) et/ou le milieu « classe » ont une influence sur l'emploi de ce vocabulaire. Pour cela nous relèverons la classe et le milieu scolaire des élèves ayant utilisé des termes relatifs à l'estimation.

Quelques résultats relatifs aux tâches 1/A et 3/A

Une minorité d'élèves (14,6 %) utilisent des termes relatifs à l'estimation lorsqu'on leur demande de donner une estimation de la hauteur de la porte qui est devant eux (cf. figure 8 de l'annexe 3). Ils sont encore plus rares (4,2 %) à utiliser de tels termes lorsqu'ils donnent une estimation de la longueur des réglettes montrées (cf. figure 19 de l'annexe 5).

En comparant les résultats selon le niveau de classe, nous constatons qu'il existe une corrélation positive entre le niveau scolaire et l'utilisation de termes relatifs à l'estimation.

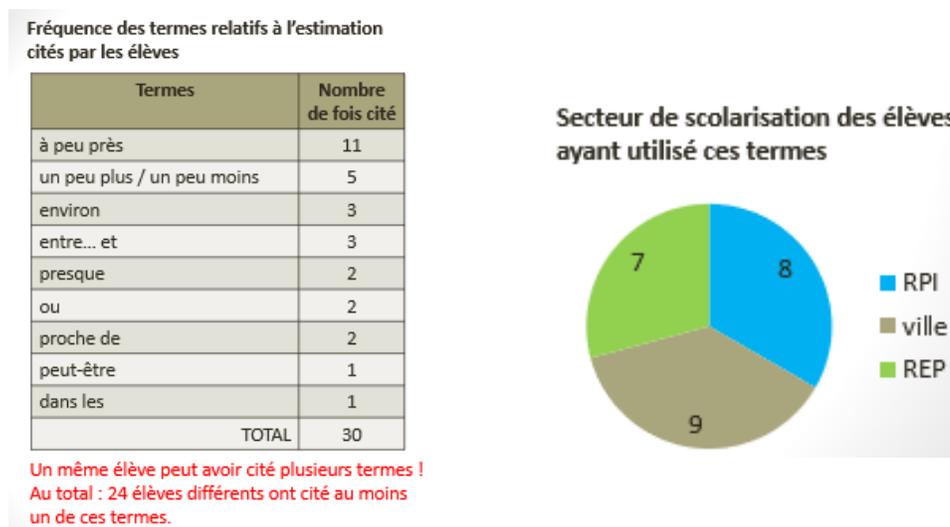


Figure 3 : Les termes relevés et leur répartition par secteur de scolarisation.

La locution « à peu près » est la plus utilisée (11 fois). Puis viennent les locutions « un peu plus/un peu moins de » (5 fois), « environ » et « entre ... et ... » (3 fois), et « presque », « ou » et « proche de » (2 fois).

En comparant les résultats selon le secteur scolaire, nous ne relevons pas d'influence significative du secteur scolaire sur l'utilisation de ces termes. Même si, comme nous l'envisagions, ce sont les élèves scolarisés en REP qui ont été les moins nombreux à utiliser des termes relatifs à l'estimation, le faible nombre de réponses ne nous permet pas de tirer des conclusions.

Nous avons toutefois pu relever une fréquence plus importante de l'utilisation de ces termes dans trois classes :

- I (4 élèves de CM2 en RPI),
- M (5 élèves de CM2 en ville),
- N (5 élèves de CM2 en REP).

Il est possible que, dans ces trois classes, l'enseignant(e) utilise en actes des termes relatifs à

l'approximation et que ces termes aient été repris par certains de ses élèves lors du test.

En relevant uniquement le vocabulaire actif, utilisé en actes, nous n'avons pas pu recueillir suffisamment d'éléments nous permettant de répondre à la question que nous nous posions.

4.5. Quelles stratégies les élèves de l'école élémentaire sont-ils capables de mettre en œuvre pour estimer la mesure d'une longueur ? Adaptent-ils leur stratégie au contexte ?

Trois exercices ont servi pour déterminer quelles stratégies les élèves mettent en œuvre pour estimer et s'ils sont capables de mobiliser des stratégies différentes, adaptées au contexte.

En référence à la typologie de Bright (1979), nous proposerons aux élèves des tâches en perception (cas A) et une tâche en production (cas B).

Par ailleurs, nous regarderons si les quatre stratégies, identifiées dans notre revue de littérature de la partie 2.3, sont utilisées et si d'autres stratégies apparaissent en fonction du contexte.

Estimation de la mesure de la hauteur de la porte

Analyse a priori de la tâche 1/B

La porte est un objet familier et la hauteur d'une porte peut être un référent social, culturel. Les élèves doivent en estimer sa hauteur. Il s'agit d'une tâche de typologie A2, en perception.

Il est possible que certains élèves répondent connaître la hauteur moyenne d'une porte, ce qui ne constitue pas une stratégie mais démontre que la porte constitue un référent.

Si ce n'est pas le cas, des stratégies peuvent être mises en œuvre pour en déterminer la hauteur : la comparaison de la hauteur à estimer à un référent (ex. taille d'un homme), le fractionnement mental de la porte en parties égales jusqu'à obtenir un référent (ex. fractionnement en 2 parties pour obtenir une partie ayant une longueur proche de celle de la règle de la classe) ou inégales (ex. fractionnement en une partie ayant une longueur proche de celle de la taille moyenne d'un homme puis estimation de la longueur de la partie restante).

Il est possible que la poignée, généralement positionnée à mi-hauteur de la porte, sauf dans la salle « RPI a », (cf. figure 6 de l'annexe 3), serve de repère pour favoriser la stratégie de fractionnement mental en deux parties égales.

Il est à noter que la validité de l'estimation n'est pas prise en compte dans notre analyse. Seule la stratégie utilisée est prise en compte.

Quelques résultats relatifs à la tâche 1/B

Près d'un élève sur deux (46,6 %) ne sait pas expliciter sa stratégie en répondant « *je ne sais pas* » ou justifie son choix en répondant « *parce que ça se voit* » ou « *parce que la porte est grande* », réponses que nous avons qualifiées de « non justifiées » (cf. figure 9 de l'annexe 3). Notons que plus les élèves sont âgés, plus ils sont capables d'expliquer leur stratégie.

Seulement 4,9 % des élèves déclarent avoir mémorisé la mesure de la hauteur d'une porte, ce qui montre un faible enseignement de référents dans les classes. Cette réponse n'est pas à considérer comme une stratégie mais comme un référent mémorisé.

Ils sont 11,1 % à déclarer comparer la hauteur de la porte à un référent (la taille d'un adulte) et à considérer que ces dimensions sont égales. Cette stratégie nous semble être adaptée au contexte

mais montre à nouveau un faible enseignement de référents.

Certains élèves (19,3 %) utilisent une stratégie complexe mais adaptée au contexte. Ils fractionnent mentalement la porte en deux parties inégales. L'une correspond à un référent (taille d'un adulte ou leur taille) alors que l'autre voit la mesure de sa longueur estimée puis ajoutée mentalement.

Ils sont 18,1 % à déclarer reporter mentalement une unité absente (la règle de la maîtresse, leur pas, leur règle de 20 cm). Toutefois, si le report mental de la règle de la maîtresse semble être une stratégie pertinente et adaptée au contexte, ce n'est pas le cas pour les autres unités proposées qui nécessitent de trop nombreux reports et donc rendent l'estimation difficile, comme l'ont souligné Lehrer (2003) ou Cury *et al.* (2006).

Les résultats relevés par niveau de classe montrent qu'il n'existe pas de corrélation entre la stratégie mobilisée et le niveau scolaire des élèves.

Estimation de la mesure de la longueur des bandes

Analyse a priori des tâches 4/B et 4/D

Nous présentons aux élèves successivement deux bandes plastiques (*cf.* figure 22 de l'annexe 6). Nous leur proposons deux unités qu'ils ne peuvent pas manipuler et leur précisons que l'unité blanche vaut 10 unités orange (nous reportons 10 fois l'unité orange sur l'unité blanche devant eux). Puis, nous leur demandons de donner l'estimation de la mesure de la longueur de chaque bande plastique dans la ou les unités de leur choix. Les bandes et les unités ne sont pas posées dans le même champ visuel car la table n'est pas assez large pour que ces deux « objets » puissent être orientés de façon très différente, ce qui permettrait une comparaison de grandeur directe, notamment pour la bande B. Cette tâche est de typologie A1 en perception.

Compte tenu du rapport existant entre les deux longueurs considérées (3/2), pour la bande A, le report mental d'une unité est l'une des stratégies attendues pour estimer la mesure de la longueur de la bande plastique A (1,50 m). Mais, si les élèves reportent mentalement l'unité orange, la tâche est fastidieuse et les risques d'erreur sont importants, comme le soulignent Lehrer (2003) ou Curry *et al.* (2006). Pour faciliter la tâche de reports, nous proposons un système d'unités, une unité blanche (1 m) et une unité orange (10 cm). Nous souhaitons déterminer si les élèves utilisent ce système pour se faciliter les reports et donc s'ils adaptent leur stratégie au contexte.

Compte tenu du rapport existant entre les deux longueurs considérées (11/10), pour la bande plastique B, les élèves devraient être incités à utiliser la comparaison au référent (règle d'1 m de long) comme stratégie.

Pour déterminer si les élèves utilisent une stratégie adaptée au contexte, nous regarderons aussi s'ils changent de stratégie en fonction de la bande considérée et s'ils utilisent les deux unités fournies pour la bande A, ce qui peut les conduire à exprimer la mesure avec deux unités (ex. la bande plastique A mesure 1 u blanche + 5 u orange de long).

Quelques résultats pour les tâches 4/B et 4/D

Environ un élève sur trois (29,2 % pour A et 33,3 % pour B) utilise la comparaison au référent (unité blanche) comme stratégie pour donner une estimation de la mesure de la longueur des bandes plastiques (*cf.* figure 23 de l'annexe 6). Si pour la bande plastique B, cette stratégie est efficace et la plus adaptée au contexte, ce n'est pas le cas pour la bande A. Nous sommes surpris par le fait que tant d'élèves (29,2%) estiment ces objets comme étant de longueurs équivalentes

même s'il est possible que le fait de ne pas avoir dans le même champ de vision les deux longueurs à comparer peut expliquer ce résultat.

Le report mental de l'unité orange pour estimer la longueur de la bande plastique B est utilisé par plus d'un tiers des élèves (34 %). Compte tenu du système d'unités proposé, cette stratégie n'est pas adaptée au contexte et contredit les résultats relevés par Hartono (2015) qui constatait que les élèves choisissaient généralement le référent le plus long pour les reports mentaux.

Nous constatons que 44,4 % des élèves utilisent le système proposé pour estimer la mesure de la bande A, ce qui correspond à notre attente en tant que stratégie la plus adaptée au contexte. Cela semble montrer une certaine capacité des élèves à adapter leur stratégie au contexte.

À la marge, certains élèves (6,9 % pour la bande B) s'appuient sur le fractionnement visible sur la bande plastique et estiment que chaque fragment (segment coloré de la bande plastique) a une longueur équivalente à celle de l'unité orange (soit 10 cm) pour déterminer, en les comptant, le nombre d'unités orange. Cette stratégie, bien qu'adaptée au contexte matériel (non anticipé) est peu adaptée compte tenu de sa complexité.

Pour la bande A (cf. figure 24 de l'annexe 6), on constate une corrélation positive entre le niveau scolaire des élèves et l'utilisation du système d'unités fourni qui se traduit par des additions plus simples à gérer mentalement, voire, pour quelques élèves de C3 à des soustractions (ex. 2 u blanches – 4 u orange). Les compétences en calcul mental semblent donc pouvoir influencer sur le choix des stratégies mobilisées.

Pour la bande B (cf. figure 25 de l'annexe 6), on constate la même corrélation en ce qui concerne la mise en œuvre de la stratégie la plus pertinente : la comparaison à un référent.

Tracé à main levée des segments de longueurs données

Analyse a priori des tâches de l'exercice 5

Cette tâche peut être assimilée à une tâche de typologie B3 en production. Le report mental d'un des étalons proposés est l'une des stratégies attendues. Pour faciliter la tâche de reports, nous proposons un système d'unités. Devant l'élève, nous reportons 10 fois l'unité orange sur l'unité blanche pour lui montrer l'égalité « 10 u orange = 1 u blanche », égalité que nous formulons également. Nous souhaitons déterminer si les élèves utilisent ce système décimal pour se faciliter la tâche d'estimation et donc s'ils adaptent leur stratégie au contexte, en tâche de production.

Le premier tracé demandé (11 u blanches) devrait favoriser la stratégie de comparaison au référent/unité orange car 11 est proche de 10. Le deuxième tracé (15 u blanches) devrait favoriser l'utilisation du système proposé (report mental d'1 u orange + report mental de 5 u blanches ou report mental d'1 u orange + report mental de la moitié de celle-ci). Le dernier tracé (27 u blanches) ouvre une autre stratégie basée sur le calcul : reporter mentalement 27 u orange, cela revient à reporter mentalement 3 u orange et enlever mentalement le report de 3 u blanches.

Ainsi, chaque tracé demandé devrait favoriser une stratégie efficace et différente, ce qui devrait nous permettre de déterminer si les élèves adaptent leur stratégie au contexte d'estimation.

Par ailleurs, la demande d'effectuer les différents tracés sur la même feuille pourrait inciter les élèves à « s'appuyer » sur le tracé précédent pour tracer le segment suivant. Il suffit alors d'ajouter mentalement la longueur de quelques unités blanches à celle déjà tracée. Cela s'apparenterait alors à un fractionnement mental du segment à tracer en deux parties inégales dont l'une est déjà tracée.

Quelques résultats relatifs aux tâches de l'exercice 5

Pour la tâche 5/A (cf. figure 27 de l'annexe 7), deux stratégies ont été utilisées par 93,1 % des élèves : le report mental de onze fois l'unité blanche (par 61,8 % d'entre eux), stratégie peu fiable compte tenu du nombre de reports mentaux à effectuer, et le report mental d'une unité orange puis d'1 *u* blanche (par 31,3 %) qui constitue une stratégie plus sûre, comme l'indiquent notamment Hildreth (1983) ou Joram *et al.* (1998) dans leurs travaux. On constate une évolution qui tend vers un équilibre de l'utilisation de ces deux stratégies au CM2, ce qui tend à montrer que les élèves sont enclins tardivement à utiliser un système d'unités pour limiter le nombre de reports mentaux.

Pour la tâche 5/B (cf. figure 28 de l'annexe 7), trois stratégies ont été utilisées par 95,1 % des élèves : le report mental de 15 *u* blanches (52,8 %), le report mental d'1 *u* orange puis de 5 *u* blanches (20,1 %) et une nouvelle stratégie consistant à s'appuyer sur le tracé précédent puis à reporter mentalement 4 *u* blanches (22,2 %). Nous constatons qu'au fur et à mesure de leur scolarité, les élèves abandonnent peu à peu le report mental d'une unité pour mettre en œuvre de nouvelles stratégies plus adaptées au contexte.

Pour la tâche 5/C (cf. figure 29 de l'annexe 7), on retrouve les trois mêmes stratégies : report mental de 27 *u* blanches (47,2 %), utilisation du système d'unités proposé par report mental de 2 *u* orange puis de 7 *u* blanches (26,6 %) et l'appui sur le tracé précédent (13,9 %). À la marge apparaît une stratégie mobilisant la soustraction (report mental de 3 *u* orange puis retrait mental de 3 *u* blanches). Citons également une stratégie très pertinente mise en œuvre par un seul élève mais non anticipée. Celui-ci s'appuie sur un référent (connaissance de la dimension de la longueur d'une feuille A4 : 29,7 *cm*) pour stopper son tracé peu avant le bord de la feuille.

Enfin, nous notons (cf. figure 30 de l'annexe 7) que seulement 8 élèves (soit 5,6 % des élèves) ont utilisé trois stratégies différentes et donc ont su adapter leur stratégie au contexte. Ces 8 élèves sont tous au cycle 3. Par ailleurs, 59,7 % des élèves déclarent n'utiliser qu'une seule et même stratégie (le report mental de l'unité blanche) quel que soit le tracé demandé.

Nous relevons également une corrélation positive entre la variété des stratégies utilisées et le niveau scolaire des élèves.

5. Propositions pour l'enseignement

Suite à notre analyse des données recueillies, nous suggérons, ci-dessous, quelques pistes d'enseignement pouvant répondre aux besoins des élèves.

5.1. Pour permettre aux élèves de construire des images mentales des unités usuelles de mesure de longueur

Nous avons constaté que les élèves n'ont pas une image mentale des longueurs qui correspondent aux unités usuelles, à l'exception peut-être du centimètre.

Pour permettre aux élèves de construire des images mentales des unités de mesure, on peut leur proposer de rechercher dans la classe des objets référents pour environ 1 *cm* (ex. épaisseur d'une gomme, largeur d'une touche de clavier d'ordinateur), environ 1 *dm* (ex. hauteur du tube de colle, longueur d'une éponge), environ 1 *m* (largeur d'un pan du tableau, longueur de la règle de la maîtresse). Ces recherches se valident par des mesurages instrumentés et débouchent sur des traces écrites (affichages).

Nous ajoutons qu'il serait judicieux que les enseignants nomment plus précisément les instruments utilisés en classe. Nous avons en effet constaté que, bien souvent, les instruments utilisés sont nommés « règle » par les enseignants au lieu de « mètre » ou de « double-décimètre », ce qui aurait l'avantage d'associer une mesure à un objet et donc de favoriser la construction d'images mentales pour ces unités.

5.2. Pour permettre aux élèves d'enrichir leur répertoire de référents

Nous avons constaté que les élèves disposent de peu de référents et que les référents présents dans la classe semblent peu exploités.

Pour enrichir le répertoire de référents des élèves, on peut leur proposer des activités ritualisées d'estimation en perception (ex. devine puis vérifie à l'aide d'un instrument la mesure de la hauteur de la table, de la largeur de la classe, de la longueur de ton tour de tête...). Cette procédure « devine/vérifie » est préconisée par de nombreux chercheurs tels que Hildreth (1983) ou Joram *et al.* (1998) qui constatent que cela permet d'améliorer rapidement la qualité de l'estimation. Des activités d'estimation en production (ex. montre-moi un écart de 50 cm entre tes deux mains, trace à main levée un segment qui mesure 10 cm, pose un plot à 10 m du mur...) sont également à proposer. Cette piste est évoquée dans les travaux de Gentaz *et al.* (2010) qui montrent l'impact sur la précision de l'estimation des distances lorsqu'on utilise des indices kinesthésiques, c'est-à-dire lorsqu'on utilise son corps pour « matérialiser » des distances.

Comme le souligne Hartono (2015), il est intéressant de permettre aux élèves de se construire des référents corporels, qui ont l'avantage d'être toujours mobilisables, en les utilisant pour déterminer la valeur d'une grandeur.

5.3. Pour permettre aux élèves de progresser dans le choix d'une unité adaptée au contexte d'estimation

Ce savoir-faire est le mieux réussi par les élèves lors du test proposé. Toutefois, pour permettre aux élèves de progresser dans le choix d'une unité adaptée au contexte, il nous semble important de les faire travailler d'abord à partir d'objets réels. En effet, lorsqu'ils sont représentés dans les manuels, les objets sont rarement à l'échelle, ce qui nous semble dommageable pour aider les élèves à construire des images mentales. On peut également leur proposer des exercices consistant à choisir parmi 3 objets celui dont la valeur donnée avec une unité donnée peut convenir (ex. Quel objet a pour hauteur 1 m, l'école, la maison, le tableau de la classe, le bureau de la maîtresse ?) ou consistant à dire si la valeur donnée est possible ou non pour un mesurande donné (ex. vrai ou faux, la hauteur d'une maison est 10 km ?).

5.4. Pour permettre aux élèves d'enrichir leur lexique relatif à l'estimation

Nous avons constaté que peu d'élèves utilisent un vocabulaire relatif à l'estimation. Pour permettre à davantage d'élèves d'utiliser un tel vocabulaire et de l'enrichir, les enseignants doivent utiliser davantage ce vocabulaire en situation, ce qui implique de proposer de véritables situations permettant aux élèves d'estimer et de verbaliser leurs réponses. Cela permettrait un enseignement plus explicite de ce qu'est une estimation.

Lorsqu'on estime la mesure d'une grandeur, on ne détermine pas une valeur exacte mais une approximation avec un intervalle d'erreur raisonnable. Il serait souhaitable que les enseignants proposent davantage de tâches où il serait explicitement demandé aux élèves de donner une estimation de la mesure à l'aide d'un encadrement.

Un mesurage de longueur à l'aide d'étalons corporels (pied, empan, envergure, pas) suivi d'un mesurage instrumenté pourrait permettre aux élèves de comprendre que parfois, il n'est pas nécessaire d'obtenir une mesure très précise et de donner du sens à l'approximation, donc à l'estimation.

5.5. Pour permettre aux élèves d'enrichir leur répertoire de stratégies d'estimation

Nous avons constaté que les élèves utilisent peu de stratégies différentes. En effet, quels que soient les contextes proposés, le report mental d'une seule unité est souvent privilégié. La comparaison à un référent dont on a mémorisé la mesure, le fractionnement mental du mesurande en deux parties inégales (l'une étant comparable à un référent dont on a mémorisé la mesure), le fractionnement mental en parties égales dont on peut comparer la mesure d'une de ces parties à un référent sont d'autres stratégies à faire vivre en classe.

Par ailleurs, certains élèves proposent des stratégies originales et pertinentes. Pour enrichir le répertoire de stratégies d'estimation de la mesure, un enseignement de celles-ci semble nécessaire, à condition que les enseignants les connaissent et créent des situations d'estimation variées. Il faut alors qu'ils pensent, lors de mises en commun, à s'appuyer sur l'ingéniosité de certains de leurs élèves pour inventorier les différentes stratégies des élèves afin d'enrichir le répertoire de chacun.

Discussion et conclusion

Les résultats obtenus au test proposé et décrit dans cet article montrent que de nombreux savoirs et savoir-faire utiles à l'estimation de la mesure ne sont pas maîtrisés par les élèves de l'école élémentaire. Ainsi, les élèves testés n'ont pas une image mentale des longueurs qui correspondent aux unités usuelles (à l'exception peut-être du centimètre), ils disposent de peu de référents, mobilisent peu de vocabulaire spécifique lors d'une tâche d'estimation et adaptent peu leur stratégie au contexte de l'estimation. Toutefois, le savoir-faire le mieux maîtrisé par les élèves semble être le choix d'une unité adaptée au contexte. Par ailleurs, nous relevons la richesse des stratégies d'estimation mises en œuvre par quelques élèves durant ce test qui pourrait constituer un levier intéressant pour enseigner l'estimation.

Si ces résultats interrogent sur l'état actuel des connaissances des élèves et de leurs enseignants sur l'estimation de la mesure, ils sont à relativiser. En effet, l'échantillon testé est peu important en nombre (36 élèves par niveaux et 144 au total). Par ailleurs, l'ordre dans lequel les élèves ont passé les exercices a pu avoir de l'importance. De plus, certains exercices étaient porteurs de biais méthodologiques importants (ex. relever des expressions mobilisées en actes pour déterminer si les élèves connaissent des termes spécifiques de l'estimation / apprécier la validité des estimations pour des « objets » pouvant avoir des dimensions bien différentes). D'autre part, nous avons conscience qu'évaluer la maîtrise d'un savoir ou d'un savoir-faire par la passation d'un seul exercice ne saurait suffire d'autant plus que notre revue de littérature anglosaxonne et hispanique nous a permis de relever qu'il existe un consensus sur la difficulté d'acquérir une compétence d'estimation tant elle semble instable et évoluer selon les contextes proposés. Pour affiner nos conclusions sur les connaissances des élèves sur l'estimation de la mesure de longueur d'autres contextes (ex. tâches de typologies A3 ou B3) pourraient être proposés.

Dans cet article, nous avons peu regardé l'influence du secteur scolaire ou du genre des élèves sur leurs résultats. Si pour le genre, cela a déjà été traité notamment par Hildreth (1983) ou Callis *et al.* (2006), il n'existe pas, à notre connaissance, d'étude sur l'influence du secteur scolaire.

Dans cet article, nous avons traité de la grandeur « longueur » que nous avons choisie parce qu'elle s'apparente à une ligne numérique mentale, ce qui contribue probablement à en faire la grandeur pour laquelle il est le plus facile d'en estimer sa mesure. Des recherches sur d'autres grandeurs pourraient être proposées.

Cette faible réussite au test pourrait être liée à un enseignement insuffisant de l'estimation de la mesure, peu présente dans les manuels. Toutefois, on peut penser qu'en formant les Professeurs des Écoles à l'enseignement de l'estimation de la mesure, la compréhension du sens des unités de mesure et des relations qui les lient peuvent être améliorées. En effet, certaines des pistes d'enseignement proposées dans cet article ont fait l'objet d'une expérimentation dans quatre classes de CM2, avec prétest, intervention dans deux classes expérimentales et post-test. Dans les classes expérimentales quatre séances d'enseignement ont été menées. Durant ces séances, des activités rituelles d'estimation étaient proposées et suivies de situations ou de jeux nécessitant une estimation de la mesure et un mesurage instrumenté. Cette expérimentation, dont l'une des situations est mentionnée par Sirieix (2019), semble permettre une meilleure construction des liens qui unissent les unités de mesure de longueur usuelles, tout du moins tant que l'on n'aborde pas les nombres décimaux.

Références bibliographiques

- Albarracín, L. (2011). *Sobre les estratègies de resolució de problemes d'estimació de magnituds no abastables*. [Thèse de doctorat, Université de Barcelone].
<https://www.researchgate.net/publication/311734477>
- Bright, G. W. (1979). Estimating physical measurements. *School science and mathematics*, 79(7), 581-586.
- Callis, J., Fiol, L., De Luca, C. & Callis, C. (2006). *Estimación métrica longitudinal en la educación primaria. Factores implícitos en la capacidad estimativa métrica*. version électronique.
https://www.researchgate.net/publication/279749787_Estimacion_metrica_longitudinal_en_la_educacion_primariaFactores_implicitos_en_la_capacidad_estimativa_metrica/link/572b2a5c08ae057b0a0949f5/download
- Castillo, J. J., Segovia, I., Castro, E. & Molina, M. (2011). Estudio sobre la estimación de cantidades continuas: longitud y superficie. Dans J.-L. Lupiáñez, M.-C. Cañadas, M. Molina, M. Palarea & A. Maz (éds.), *Investigaciones en Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de la Matemática y Educación Matemática*. Dpto. Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada (pp. 165-172).
- Castillo, J. J. (2012). *Estimación de cantidades continuas: longitud y superficie*. [Thèse de doctorat, Université de Grenade].
<https://dialnet.unirioja.es/servlet/tesis?codigo=59166>
- Crollen, V., Grade, S., Pesenti, M. & Dormal, V. (2013). A common metric magnitude system for the perception and production of numerosity, length and duration. *Frontiers in Psychology*, 4:449 (2013).
<http://www.ncbi.nlm.nih.gov/pmc/articles/PMC3717486/>
- Curry, M., Mitchelmore, M. & Outhred, L. (2006). Development of children's understanding of

- length, area and volume measurement principles. Dans J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká & N. Stehlíková (éds.), *Proceedings 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. PME vol. 2* (pp. 377-384).
<http://www.eric.ed.gov/PDFS/ED496932.pdf>
- Fayol, Michel (2012). Chapitre 2 Quantifier. *L'acquisition du nombre. Que sais-je ?* PUF (pp. 40-72).
- Gentaz, E., Faineteau, H., Gilet, E., Bluteau, J., Palluel-Germain, R. & Diard, J. (2010). L'estimation kinesthésique des distances : études comportementales et analyse probabiliste. *L'Année psychologique*, 110(3), 453-492. Centre Henri Pieron.
<https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00530363>
- Hartono, R. (2015). *Promoting the development of student's individual frame of reference to support length approximation/estimation skills*. [Thèse de master , Université de Sriwijata].
https://www.fi.uu.nl/en/impome/theses_group_2014/thesis_Rudi.pdf
- Hildreth, D. J. (1983). The use of strategies in estimating measurement. *The Arithmetic Teacher*, 30(5), 50-54.
- Joram, E., Subrahmanyam, K. & Gelman, R. (1998). Measurement estimation : learning to map the route from number to quantity and back. *Review of educational research winter 1998*, 68(4), 413-449.
<https://journals.sagepub.com/doi/abs/10.3102/00346543068004413?journalCode=rera>
- Joram, E., Gabriele, A. J., Bertheau, M., Gelman, R. & Subrahmanyam, K. (2005). Children's use the reference point strategy for measurement estimation. *Journal for Research in Mathematics Education*, 36(1), 4-23.
 DOI: 10.2307/30034918
- Kamii, C. (2006). Measurement of length: How can we teach it better. *Teaching Children Mathematics*, 13(3), 154-158.
- Lehrer, R. (2003). Chapter 2 Developing understanding of measurement. Dans J. Kilpatrick, W.G. Martin & D. Schifter. *A research companion to Principles and Standards for school mathematics* (pp. 179-192).
- Macdonald, A. (2011). Young children's representations of their developing measurement understandings. *Mathematics: traditions and [new] practices* (pp. 482-490).
- Marchand, P. (2006). Comment développer les images mentales liées à l'apprentissage de l'espace en trois dimensions ? *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 11, 103-121. IREM de Strasbourg.
- Margolinas, C. (2015). Des mathématiques à l'école maternelle. *Actes du colloque international du 26 avril 2015 à l'école Normale Supérieure Centrale d'Ho Chi Minh ville, Viêt Nam*.
<https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01140474>
- Muir, T. (2005). When near enough is good enough. *APMC*, 10(2), 9-14.
<https://search.informit.org/doi/abs/10.3316/informit.194596472843672>

- Pizarro, N., Gorgorio, N. & Albarracin, L. (2015). *Primary teacher' approach to measurement estimation activities*. K Krainer, N Vondrová. 9^e congrès de la société européenne pour la recherche en education mathématiques (CERME), Prague, Czech Republic (pp. 3227-3233).
<https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01289867>
- Segovia, I. & Castro, E. (2009). Computational and measurement estimation: curriculum foundations and research carried out at the University of Granada, Mathematics Didactics Department. *Electronic Journal of Research in Educational Psychology*, 17(7), 499-536. ISSN 1696-2095, 2009.
- Sirieix, P. (2019). Rôle de l'estimation de la mesure de longueurs dans la compréhension des unites de mesure et des liens qui les unissent. *Actes du 48^e colloque COPIRELEM - Lausanne* (pp. 338-351).
- MEN de la Jeunesse et des Sports (2016). *Ressource thématique d'accompagnement du programme de mathématiques, Grandeurs et mesures au cycle 2*. Éduscol.
- MEN de la Jeunesse et des Sports (2016). *Ressource thématique d'accompagnement du programme de mathématiques, Grandeurs et mesures au cycle 3*. Éduscol.
- MEN de l'Enseignement supérieur et de la Recherche (2015). *Évaluation diagnostique début CE2. Livret d'évaluation*. Éduscol.

Annexe 1

Exercice GM 0301 des évaluations nationales CE2 de 2015

Dire aux élèves : « *Observez bien la figure. Avec votre règle, vous mesurez les segments [AB], [GF] et [CD] et vous complétez les phrases en écrivant sur les pointillés le nombre qui convient* ».

Complète les phrases.

Le segment [AB] mesure cm.

Le segment [BC] mesure cm.

Le segment [CD] mesure cm.

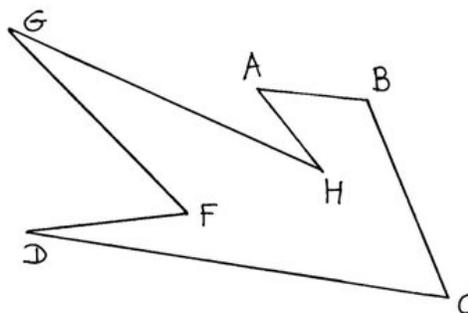


Figure 4 : L'exercice GM 0301 des évaluations nationales CE2.

Notons que dans cet exercice, les segments demandés mesurent tous un nombre entier de centimètres et que, pour valider cet item, les élèves doivent, après un mesurage instrumenté, avoir indiqué les 3 mesures exactes, soit [AB] mesure 2 cm ; [BC] mesure 4 cm ; [CD] mesure 8 cm.

Annexe 2

Le panel

Niveau	Désignation des classes	Composition des classes	Milieu scolaire	Filles	Garçons	Total
CE1	A	CP/CE1	Rural	6	4	36
	B	CE1	Ville	3	3	
	C	CE1/CE2	Ville	3	4	
	D	CE1	REP	3	3	
	E	CE1/CE2	REP	3	4	
CE2	F	CE2/CM1	Rural	6	6	36
	G	CE2	Ville	6	6	
	H	CE2	REP	6	6	
CM1	F	CE2/CM1	Rural	1	2	36
	I	CM1/CM2	Rural	6	3	
	J	CM1	Ville	6	6	
	K	CM1	REP	3	3	
	L	CM1/CM2	REP	3	3	
CM2	I	CM1/CM2	Rural	6	6	36
	M	CM2	Ville	6	6	
	N	CM2	REP	6	6	
TOTAUX				73	71	144

Figure 5 : La répartition par âge, classe, milieu scolaire et genre des élèves testés.

NB : Les annexes qui suivent sont numérotées dans l'ordre où les exercices ont été proposés aux élèves.

Annexe 3 L'exercice 1 : « la porte »

La porte de la salle dans laquelle nous nous trouvons est montrée à l'élève. Le chercheur a, au préalable, mesuré sa hauteur à l'aide d'un instrument afin d'établir les valeurs qui déterminent la validité de l'estimation.



Figure 6 : Les dimensions des portes des salles où ont été testés les élèves.

Question 1/A

1/A Selon toi, combien mesure la hauteur de cette porte ?

Cette question doit nous permettre de déterminer d'une part si les élèves utilisent une unité adaptée au contexte de l'estimation de la mesure et d'autre part s'ils utilisent un vocabulaire spécifique à l'estimation.

Résultats

	% CE1	% CE2	% CM1	% CM2	% global
Estimation correcte en m (unité adaptée)	16,7%	16,7%	55,6%	52,8%	35,4%
Estimation correcte en m et cm	5,6%	13,9%	2,8%	13,9%	9%
Estimation correcte en cm	0%	0%	0%	2,8%	0,7%
Total estimations correctes de la porte	22,2%	30,6%	58,3%	69,4%	45,1%
Estimation incorrecte en m	33,3%	25%	22,2%	16,7%	24,3%
Estimation incorrecte en m et cm	0%	13,9%	2,8%	8,3%	6,3%
Estimation incorrecte en cm	11,1%	25%	5,6%	5,6%	11,8%
Estimation incorrecte en mm	0%	0%	2,8%	0%	0,7%
Estimation incorrecte donnée dans une unité d'une autre grandeur	2,8%	0%	2,8%	0%	1,4%
Total estimations incorrectes de la porte	47,2%	63,9%	36,1%	30,6%	44,4%
Ne sait pas	30,6%	5,6 %	5,6 %	0%	10,4 %

Figure 7 : Unités de mesure utilisées par les élèves lorsqu'ils estiment la hauteur d'une porte et qualité de leurs estimations selon leur niveau scolaire.

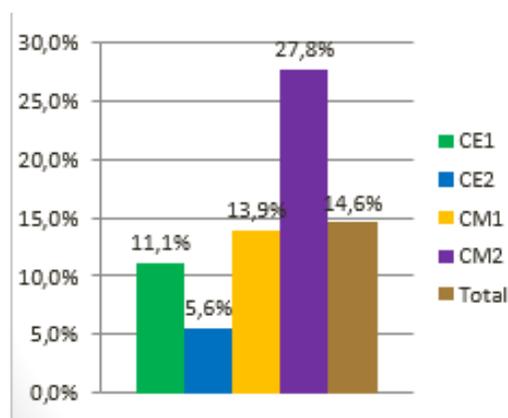


Figure 8 : Pourcentage des élèves qui utilisent du vocabulaire spécifique à l'estimation lors de l'estimation de la mesure de la hauteur de la porte selon leur niveau scolaire.

Question 1/B

1/B Comment as-tu fait pour estimer la hauteur de cette porte ? Comment sais-tu qu'elle mesure x m (ou autre unité) ?

Cette question doit nous permettre d'identifier la stratégie mise en œuvre par l'élève lors de son estimation de la mesure et de déterminer si cette stratégie est adaptée au contexte.

Résultats

Stratégies	CE1	CE2	CM1	CM2	% Global
Mesure porte mémorisée	0%	5,6 %	5,6 %	8,3 %	4,9%
Total comparaison à un référent pertinent (taille adulte) ou non	11,1%	5,6 %	16,7 %	11,1 %	11,1%
Total fractionnement mental en 2 parties égales (utilisation de la poignée par ex.)	0 %	0 %	0 %	0 %	0 %
Total fractionnement mental en 2 parties inégales (réfèrent + complément)	5,6 %	25 %	11,2 %	36,1 %	19,3%
Total report mental d'un référent (règle de 1 m / règle de 20 cm / pas / empan)	2,8 %	16,7 %	33,3 %	19,4 %	18,1%
Total réponses non justifiées	25 %	25 %	11,2 %	8,3 %	17,4%
Total de réponses « je ne sais pas »	55,6 %	22,2 %	22,2 %	16,7 %	29,2%

} 46,6 %

Figure 9 : Les stratégies déclarées pour estimer la mesure de la hauteur de la porte par niveau scolaire.

Annexe 4

L'exercice 2 : « les référents »

Question

Selon toi, qu'est-ce qui, quel objet, quel animal peut mesurer environ : 1 centimètre, 1 millimètre, 1 mètre, 10 centimètres, 5 centimètres, 10 millimètres, 70 centimètres,

100 centimètres, 5 mètres ?

Mesures données	Présents dans la salle	Corporels	Absents non scolaires	Absents scolaires
1 mm	Ep. Mine du stylo I. Stylo Diam. Bouton habit	Ep. Cheveu I. Doigt	Diam. Grain de sel Ep. Télécommande L. Gendarme (animal) L. Mouche L. Scarabée L. Fourmi	Ep. Mine d'un crayon H. dé à jouer I. Côté touche ordi I. Crayon, feutre Ep. Livre Ep. Gomme L. Partie taillée crayon Diam. bille Diam. punaise murale
1 cm / 10 mm		L. Pouce (doigt)	L. Clé I. Télécommande I. Téléphone L. Chenille L. Escargot L. Mante religieuse L. Sauterelle	L. Taille crayon L. Voiture (jouet) H. Tasse à café Ep. Dictionnaire L. Gomme
5 cm	L. Aiguille de l'horloge L. Poignée de porte L. Interrupteur, prise	I. Main	L. Barrette de cheveux H. Verre L. Petit poisson (gardon) L. Souris (avec queue)	H. Grand tube de colle I. Livre (de poche) H. Pot à crayons L. Eponge
10 cm	H. Table L. Affiche	L. Bras (doigt à épaule) L. Jambe	Taille enfant 1 an H. Grosse peluche H. Gros chien H. Loup	H. Canne I. Porte armoire I. Bureau du maître
70 cm	H. Tableau noir L. Règle de la classe H. Chaise H. Porte jusqu'à la poignée L. Fenêtre I. Porte	L. Grand pas	Taille enfant 4, 5 ans I. Télévision L. Bébé requin	I. Carte murale
1 m / 100 cm	I. Salle de classe		H. Girafe	L. Poutre gymnastique H. Maison H. Arbre L. Alligator
5 m				

Figure 10 : Les réponses possibles attendues pour chaque mesure donnée triées par type de référents.

Résultats

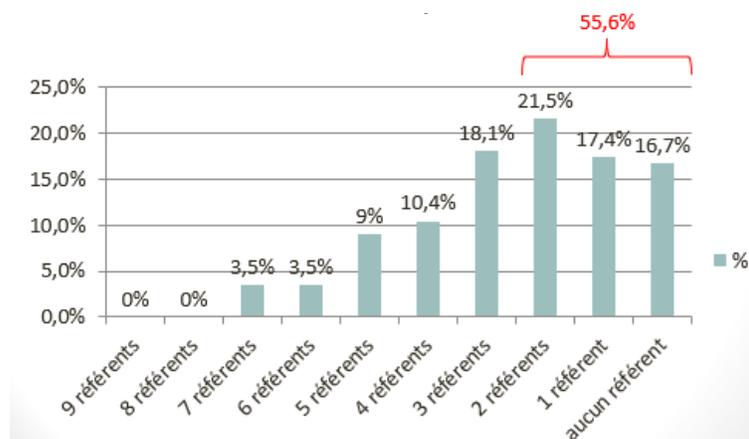


Figure 11 : Répartition du nombre de référents valides donnés par les élèves.

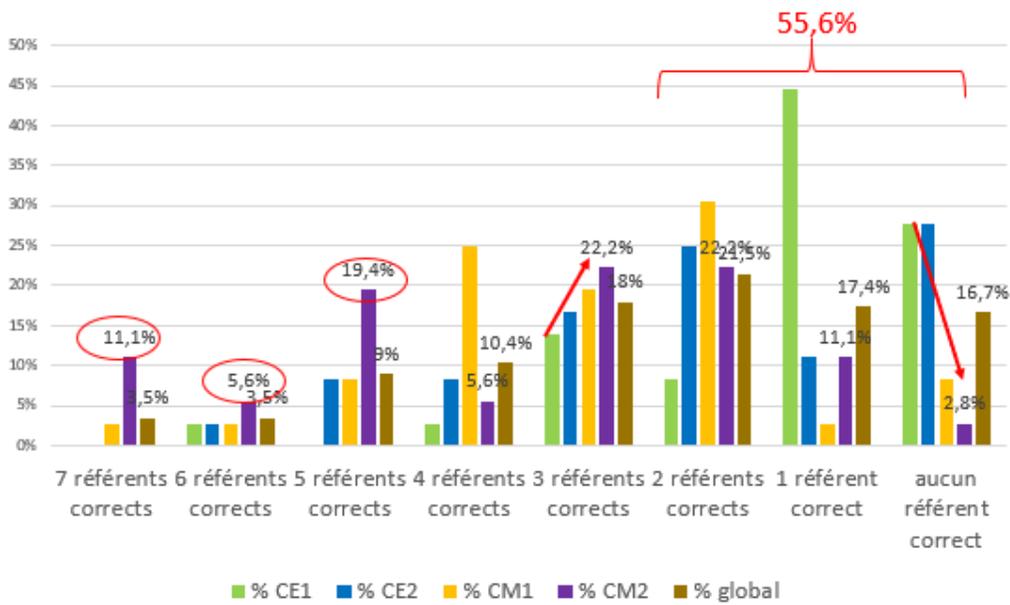


Figure 12 : Pourcentage d'élèves en fonction du nombre de référents valides cités selon leur niveau scolaire.

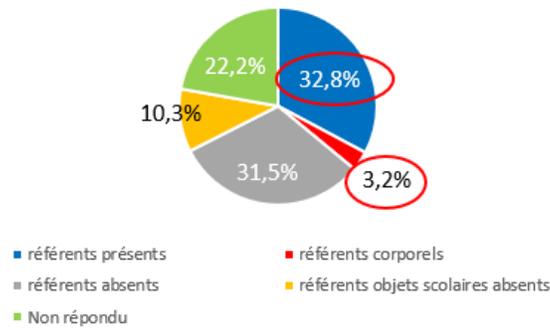


Figure 13 : Répartition des référents par typologie.

Présents : objets présents dans la pièce	Présents : référents corporels	Absents : objets du quotidien ou êtres vivants	Absents : objets scolaires
31,2%	35,7%	42,8%	30,6%

Figure 14 : Validité des référents choisis par les élèves selon leur typologie.

Annexe 5

L'exercice 3 : « les réglettes »

Cinq réglettes en bois non graduées et de longueurs différentes (1 cm / 1 dm / 20 cm / 1 m / 2 m) sont disposées de façon non ordonnée (selon leur longueur) sur la table, devant l'élève.

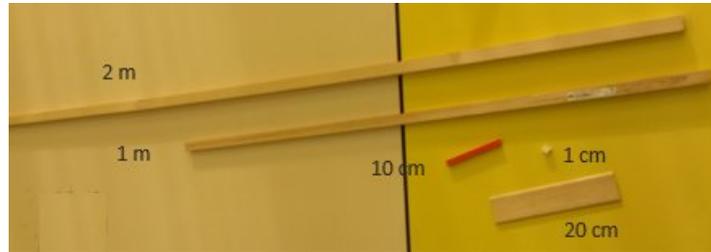


Figure 15 : Les cinq réglettes de l'exercice 3.

Question 3/A

3/A Selon toi, combien mesure, à peu près, la réglette que je te montre ? [Les réglettes montrées sont, dans l'ordre, celle mesurant 1 mètre de long, celle mesurant 20 centimètres de long et celle mesurant 1 centimètre de long].

Résultats

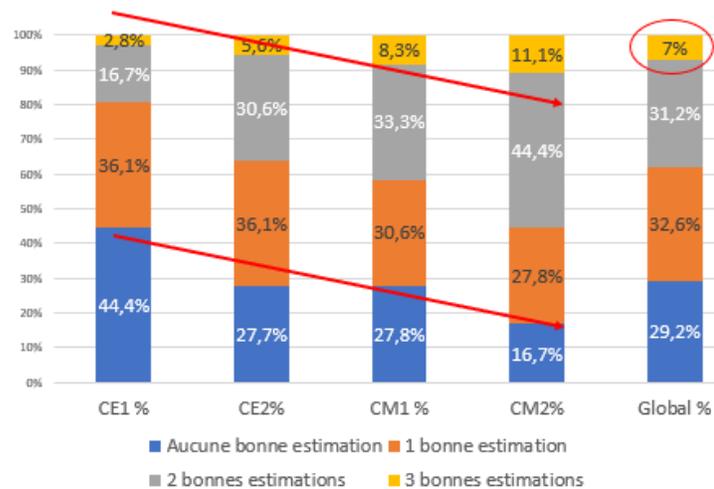


Figure 16 : Validité des estimations de la mesure des longueurs des 3 réglettes montrées selon le niveau scolaire des élèves.

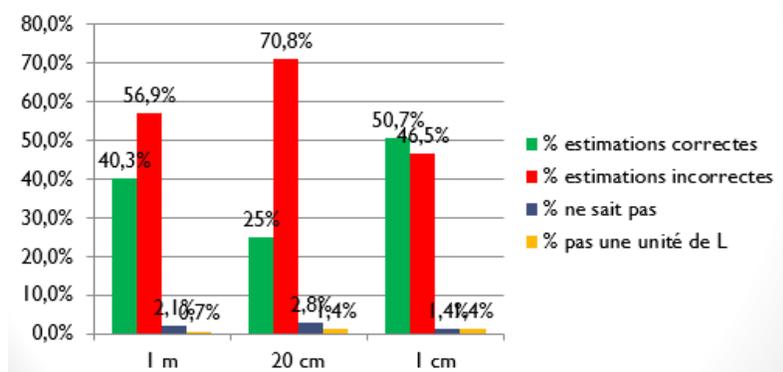


Figure 17 : Validité des estimations de la mesure des longueurs des 3 règles en fonction de la règle montrée.

	% CE1	% CE2	% CM1	% CM2	% global
Règle de 1 mètre					
Estimation correcte en m (unité adaptée)	13,9%	30,6%	47,2%	38,9%	32,6%
Estimation correcte avec 2 unités (m et cm)	0%	0%	2,8%	2,8%	1,4%
Estimation correcte en cm	2,8%	11,1%	2,8%	8,3%	6,3%
Total estimation correcte	16,7%	41,7%	52,8%	50%	40,3%
Estimation incorrecte en m	27,8%	8,3%	8,3%	2,8%	11,8%
Estimation incorrecte avec 2 unités (m et cm)	0%	5,6%	2,8%	0%	2,1%
Estimation incorrecte en dm	0%	0%	0%	2,8%	0,7%
Estimation incorrecte en cm	44,4%	38,8%	33,3%	41,6%	39,6%
Estimation incorrecte en mm	8,3%	0%	0%	2,8%	2,8%
Total estimation incorrecte	80,5%	52,7%	44,4%	50%	57%
Estimation incorrecte donnée dans une unité d'une autre grandeur	2,8%	0%	0%	0%	0,7%
Ne sait pas	0%	5,6%	2,8%	0%	2%

	% CE1	% CE2	% CM1	% CM2	% global
Règle de 20 centimètres					
Estimation correcte en cm (unité adaptée)	13,9%	22,2%	33,3%	30,5%	25%
Estimation correcte en une autre unité	0%	0%	0%	0%	0%
Total estimation correcte	13,9%	22,2%	33,3%	30,5%	25%
Estimation incorrecte en cm	41,6%	50%	52,7%	61,1%	51,4%
Estimation incorrecte en m	27,8%	11,1%	5,6%	0%	11,1%
Estimation incorrecte en mm	13,9%	8,3%	2,8%	5,6%	7,6%
Estimation donnée avec 2 unités (dm et cm)	0%	2,8%	0%	0%	0,7%
Total estimation incorrecte	83,3%	72,2%	61,1%	66,7%	70,8%
Estimation incorrecte donnée dans une unité d'une autre grandeur	2,8%	2,8%	0%	0%	1,4%
Ne sait pas	0%	2,8%	5,6%	2,8%	2,8%
Règle de 1 centimètre					
Estimation correcte en cm (unité adaptée)	47,2%	47,2%	33,3%	63,9%	47,9%
Estimation en mm correcte	0%	2,8%	2,8%	5,6%	2,8%
Total estimation correcte	47,2%	50%	36,1%	69,5%	50,7%
Estimation incorrecte en cm	8,3%	22,3%	19,4%	2,8%	13,2%
Estimation incorrecte en mm	16,7%	19,4%	41,7%	27,7%	26,4%
Estimation en m incorrecte	19,4%	8,3%	0%	0%	6,9%
Total estimation incorrecte	44,4%	50%	61,1%	30,5%	46,5%
Estimation incorrecte donnée dans une unité d'une autre grandeur	5,6%	0%	0%	0%	1,4%
Ne sait pas	2,8%	0%	2,8%	0%	1,4%

Figure 18 : Unités de mesure utilisées par les élèves lorsqu'ils estiment la longueur des règles de 1 mètre, de 20 centimètres et de 1 centimètre et qualité de leurs estimations selon leur niveau scolaire

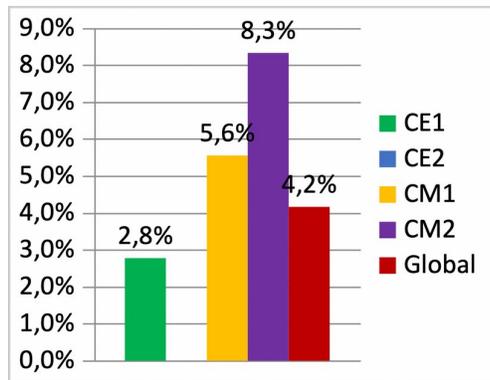


Figure 19 : Pourcentage des élèves qui utilisent du vocabulaire spécifique à l'estimation lors de l'estimation de la mesure de la longueur des réglettes selon leur niveau scolaire.

Question 3/B

Montre-moi la réglette qui, selon toi, mesure 10 cm, 100 cm, 1 cm, 20 cm, 2 m ?

Résultats

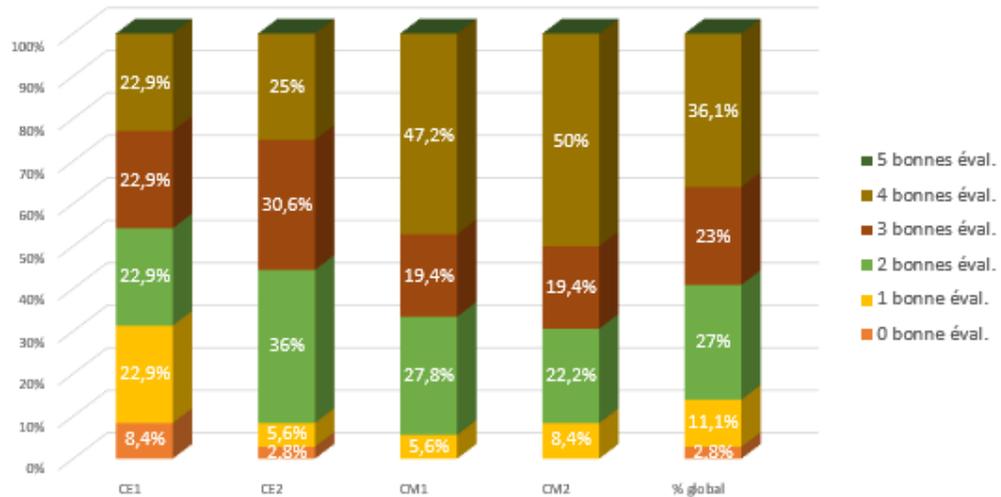


Figure 20 : Pourcentage du nombre de bonnes évaluations par niveaux de classe.

Mesures demandées	Règlettes montrées					
	1 cm	10 cm	20 cm	1 m	2 m	Non Répondu
1 cm CE1	32	1	3	0	0	0
1 cm CE2	35	0	1	0	0	0
1 cm CM1	34	1	0	1	0	0
1 cm CM2	32	3	1	0	0	0
1 cm Total	133	5	5	1	0	0
10 cm CE1	0	15	3	14	4	0
10 cm CE2	0	20	8	7	1	0
10 cm CM1	0	21	11	4	0	0
10 cm CM2	0	22	8	6	0	0
10 cm Total	0	78	30	31	5	0
20 cm CE1	0	10	21	4	1	0
20 cm CE2	0	4	20	11	0	1
20 cm CM1	0	5	26	3	0	2
20 cm CM2	0	6	25	3	0	2
20 cm Total	0	25	92	21	1	5
100 cm CE1	0	1	2	11	22	0
100 cm CE2	0	1	2	12	21	0
100 cm CM1	0	0	4	14	17	1
100 cm CM2	0	0	1	19	15	1
100 cm Total	0	2	9	56	75	2

Figure 21 : Nombre d'élèves total (sur 144) et par niveau (sur 36) ayant montré une règlette en fonction de la mesure demandée.

Annexe 6

L'exercice 4 : « les bandes »

Deux règlettes sont posées sur la table devant l'élève. Deux bandes plastiques bicolores sont posées au sol à la droite de l'élève. Les bandes plastiques ne sont ni positionnées côte à côte, ni parallèlement afin de rendre plus complexe la comparaison directe par la vue des deux bandes.

La longueur de la grande règlette blanche est 1 mètre et celle de la petite règlette orange est 10 centimètres.

La bande plastique A dont il faut estimer la mesure de sa longueur, lors de la tâche 4/A, a pour longueur 1,50 mètre. La bande plastique B dont il faut estimer la mesure de sa longueur lors de la tâche 4/C a pour longueur 1,10 mètre.

Aucune de ces quatre dimensions n'est communiquée.

Question 4/A

4/A Voici une bande plastique (A) et voici deux unités, l'unité blanche et l'unité orange. L'unité blanche vaut dix unités orange [le chercheur reporte 10 fois l'unité orange sur la blanche devant l'élève]. Donne l'estimation de la mesure de la bande plastique en unités orange ou en unités blanches ou en unités blanches et orange (ex. elle mesure 2 unités blanches et encore 3 unités orange).

Question 4/B

4/B Comment as-tu fait pour estimer ?

Question 4/C

4/C Voici une autre bande plastique (B). Je te rappelle que l'unité blanche vaut dix unités

orange. Donne l'estimation de la mesure de la longueur de la bande dans l'unité ou les unités de ton choix.

Question 4/D

4/D Comment as-tu fait pour estimer ?



Figure 22 : Les bandes de l'exercice 4.

Résultats pour les questions 4/B et 4/D

Stratégies	Total A (1,50m)	Total B (1,10m)
Comparaison de la Longueur de la bande à l'unité blanche « la bande mesure la même longueur qu'une unité blanche »	29,2%	33,3%
Report de l'unité Blanche (la bande mesure 1,5 / 2 / 3 / 4 unités blanches)	5,6%	0,7%
Report de l'unité Orange	14,6%	34%
Total report 1 seule unité	20,2%	34,7%
Report Blanc puis + Or	44,4%	9%
Report Blanc puis - Or	0%	5,6%
Total utilise un système	44,4%	14,6%
Report d'un écart de doigts (avec visée sur la bande)	0%	0,7%
Utilise repères de la rue balise	3,4%	6,9%
Total autre stratégie	3,4%	7,6%
Total ne sait pas	2,8%	10,5%

Figure 23 : Stratégies utilisées par les élèves, lors de l'estimation de la longueur des bandes plastiques A et B à l'aide des deux unités données.

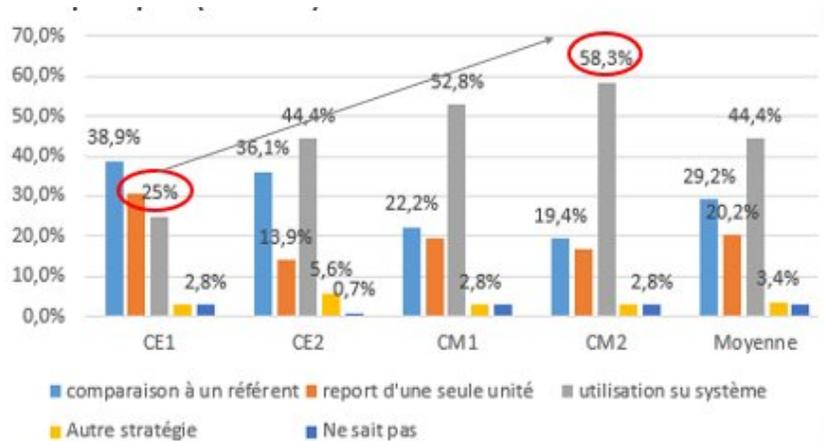


Figure 24 : Stratégies d'estimation de la mesure selon le niveau scolaire des élèves pour la bande plastique A.

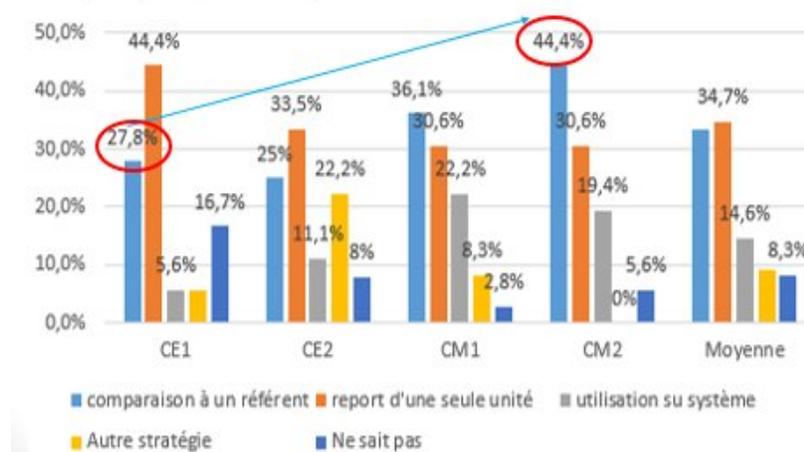


Figure 25 : Stratégies d'estimation de la mesure selon le niveau scolaire des élèves pour la bande plastique B.

Annexe 7

L'exercice 5 : « les segments »

Une feuille blanche disposée au format paysage (et sur laquelle sont notées les lettres a, b et c), un stylo ainsi que 2 réglettes (une orange de 10 cm de long et une blanche de 1 cm de long) sont disposés devant l'élève.

La tâche proposée

Voici 2 unités, l'unité blanche et l'unité orange qui vaut 10 unités blanches. Sans toucher les unités, trace :

5/A Un segment qui mesure 11 unités blanches ;

5/B Un segment qui mesure 15 unités blanches ;

5/C Un segment qui mesure 27 unités blanches.

Pour chacun de tes tracés, explique comment tu as fait pour estimer que ton segment mesurait la longueur demandée.



Figure 26 : L'exercice 5 : les segments.

Résultats

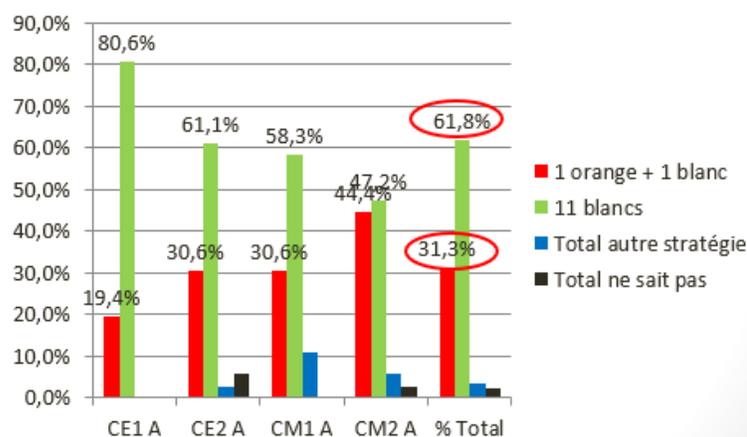


Figure 27 : Stratégies utilisées par les élèves pour tracer le segment A (11 unités) selon leur niveau de classe.

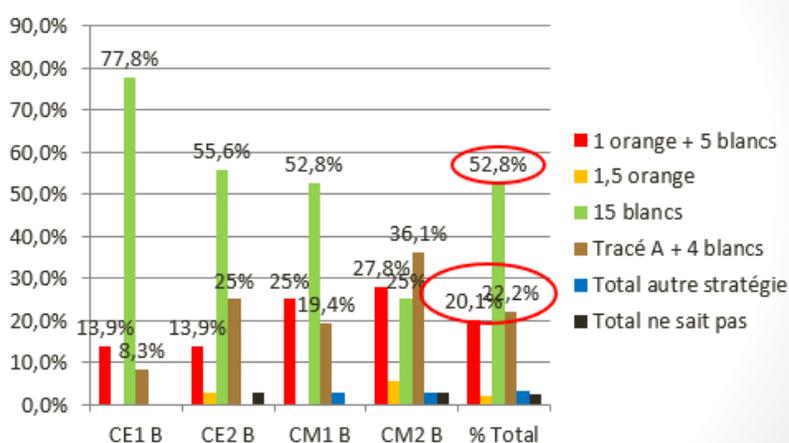


Figure 28 : Stratégies utilisées par les élèves pour tracer le segment B (15 unités) selon leur niveau de classe.

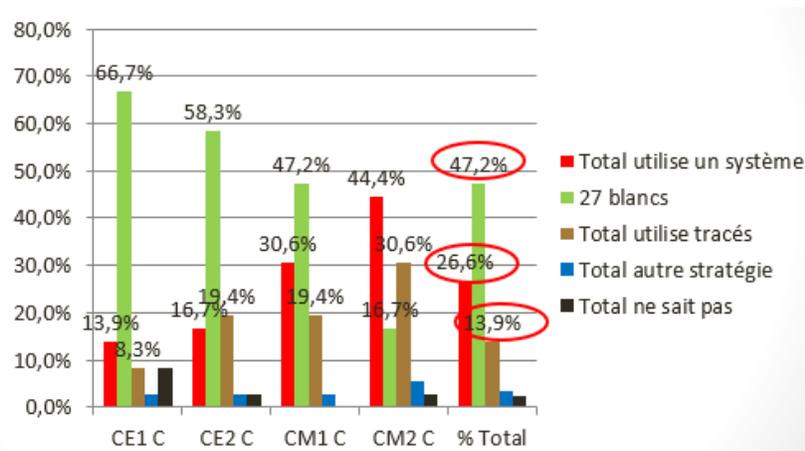


Figure 29 : Stratégies utilisées par les élèves pour tracer le segment C (27 unités) selon leur niveau de classe.

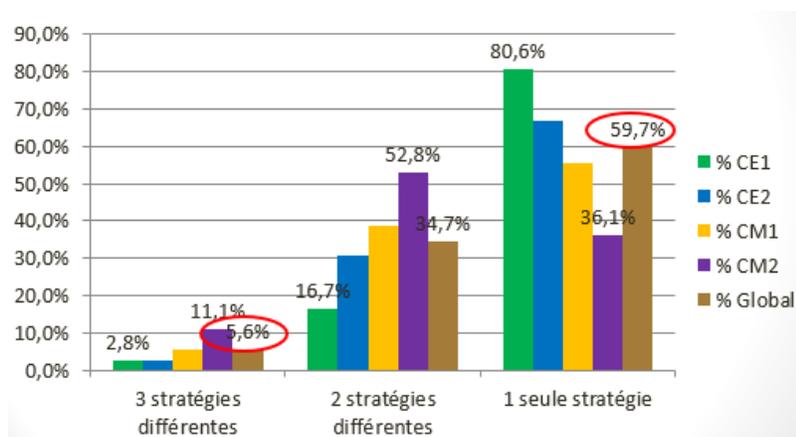


Figure 30 : Stratégies utilisées par les élèves pour tracer le segment C (27 unités) selon leur niveau de classe.