UN REGARD ÉPISTÉMOLOGIQUE SUR L'ÉVOLUTION HISTORIQUE DES NOTIONS DE PREUVE ET D'AXIOMATIQUE

Marc LALAUDE-LABAYLE[1]

LMAP - Laboratoire de Mathématiques et de leurs Applications [Pau], UPPA

Résumé. Cet article propose un survol épistémologique de l'évolution des notions de preuve, de rigueur et d'axiomatique en mathématiques. Cette étude, motivée par une recherche didactique portant sur les raisonnements produits en algèbre linéaire, permet de rappeler les liens étroits entre « libération » de la géométrie puis de l'algèbre et exigence de rigueur en analyse au XIX^{e} siècle, préparant ainsi l'émergence de l'axiomatisation des mathématiques. Nous soulignons aussi que des questions d'ordre didactique ont participé aux changements de paradigme quant à la rigueur attendue lors de la communication de preuves mathématiques. Enfin, nous confirmons la difficulté d'utilisation du levier méta en cours de mathématiques pour l'introduction de l'algèbre linéaire, car l'émergence de ce domaine se produit conjointement à une réflexion sur l'activité mathématique elle-même.

Mots-clés. Algèbre linéaire, épistémologie, preuve, axiomatique.

Abstract. This paper offers an epistemological survey of the notions of proof, rigor and axiomatic within mathematics. Motivated by didactical resarch about reasoning produced by students in linear algebra, this study allows to recall the tight links between the so called « liberation » of geometry and then of algebra and the demand of rigorization of analysis during the XIXth century, which leads to the emergence of the axiomatization of mathematics. We emphasize the fact that didactical questions did contribute to the changes of paradigm regarding the rigor needed to expose mathematical proofs. At last, we confirm the difficulty to use the meta lever in mathematics classroom to introduce linear algebra, the emergence of this domain being deeply linked to a reflection about the mathematical activity itself.

Keywords. Linear algebra, epistemology, proof, axiomatic.

Introduction

Pour le besoin de nos travaux de recherche sur l'enseignement de l'algèbre linéaire et les raisonnements produits par les étudiants dans ce domaine des mathématiques (Lalaude-Labayle, 2016), nous avons conduit une étude épistémologique de la notion d'application linéaire. Suite à cette étude, il nous est apparu nécessaire de mener une étude épistémologique de l'évolution de la notion de preuve et de rigueur en mathématiques afin d'isoler quelques spécificités des objets manipulés dans les preuves et validations produites en algèbre linéaire dans l'enseignement supérieur. Notons que nous n'abordons pas ici de question « réellement » didactique liée à la notion de démonstration. Pour un tel questionnement en lien avec l'algèbre linéaire, nous renvoyons à nos travaux (*ibid.*) ainsi qu'à leur bibliographie. Pour une approche didactique complémentaire de la notion de preuve et de validation, nous renvoyons aux travaux de Pedemonte (2002) pour le lien entre argumentation et démonstration, à ceux récents de Barrier (2016) sur le rôle des exemples dans l'élaboration de preuves au niveau de l'enseignement supérieur ; nous renvoyons également aux travaux de Grenier (2012) pour une étude didactique de preuve par récurrence, à ceux de Deloustal-Jorrand (2004), de Cabassut (2005), de Durand-Guerrier (2008), Mesnil (2014), Gandit (2008) ou encore Mathieu-Soucy et Tanguay (2017) pour des études sur les liens didactiques entre activité mathématique et logique, pour n'en citer que quelques uns. Pour aborder en plus des questions précédentes l'aspect cognitif de la notion de

[1] marc.lalaude-labayle@univ-pau.fr

preuve, nous renvoyons à l'ouvrage collectif dirigé par Hanna, Jahnke et Pulte (2010) et à celui dirigé par Stylianides et Harel (2018). Enfin, cet article propose un point de vue complémentaire et plus modeste que celui développé par Arsac (1988, 1997).

Cet article se présente donc comme une synthèse de travaux francophones, anglophones et germanophones sur la notion de preuve, d'axiomatique et de rigueur en mathématiques. Bien que n'apportant pas de réelle nouveauté d'ordre épistémologique ou historique, il met en lumière le rôle de la « libération » de l'algèbre des autres domaines mathématiques au XIX[e] siècle comme moment constitutif de l'émergence de l'axiomatique de Hilbert. Notre travail permet aussi d'insister sur l'évolution non linéaire et le rôle de la notion de rigueur dans cette progression de l'axiomatique d'Euclide à l'axiomatique de Hilbert. Une originalité possible de notre article réside dans la mise en perspective et la mise en relation des travaux épistémologiques cités en les associant au domaine de l'algèbre linéaire. Ainsi, nous allons couvrir en quelques lignes une histoire de la notion de rigueur en mathématiques qui mériterait certainement des centaines de pages.

1. Précautions méthodologiques

Avant de commencer ce bref survol épistémologique, nous nous devons de souligner deux types de raccourcis auxquels, à l'instar de Hodgkin (2005), nous nous soumettons. D'une part, un raccourci temporel : effectivement, en nous inspirant des principaux travaux existants sur la notion de rigueur et de preuve « formelle » en mathématiques, nous aborderons ces notions en omettant deux périodes historiques non contiguës : la période qui précède les mathématiques grecques, autrement dit l'intervalle de temps $]-20\,000\,,-600]$, puis la période allant d'Euclide jusqu'au début du XIX[e] siècle, soit l'intervalle de temps $[-300\,,1800]$. D'autre part, un raccourci spatial : en effet, nous nous concentrons sur l'évolution de la notion de preuve en Occident en « omettant » l'étude des mathématiques chinoises, indiennes et arabes par exemple.

Il nous semble important de justifier en quoi ces restrictions n'invalident pas pour autant les conclusions épistémologiques auxquelles nous allons aboutir. On associe souvent à ce choix de lecture de l'histoire le terme d'eurocentrisme (Hodgkin, 2005). Dès 1992, Joseph pointe les défauts de cette lecture partiale eurocentrée de l'histoire des mathématiques :

> *I propose to show [...] that the standard treatment of the history of non-european mathematics exhibits a deep-rooted historiographical bias in the selection and interpretation of facts, and that mathematical activity outside Europe has in consequences been ignored, devaluated or distorted (Joseph, 1992, p. 3).*

Joseph (1992) propose alors trois modèles historiques sur lesquels il s'appuie pour interpréter les caractéristiques de la transmission du savoir mathématique :

1. un modèle eurocentré classique, dit « classical Eurocentric trajectory », pour lequel les mathématiques sont passés directement de la Grèce antique à la Renaissance ;
2. un modèle eurocentré modifié, dit « modified Eurocentric trajectory », pour lequel les mathématiques grecques étendent les mathématiques babyloniennes et égyptiennes, furent préservées par les pays du monde musulman puis réintroduites lors de la Renaissance ;
3. enfin, un modèle alternatif, dit « alternative trajectory », pour lequel les mathématiques développées dans le monde musulman au cours du Moyen Âge et en lien avec les mathématiques indiennes, chinoises et même européennes occupent une place centrale. Les mathématiciens arabes n'apparaissent plus seulement comme vecteurs du savoir

mathématique (receveurs puis passeurs de savoirs) mais aussi comme découvreurs de mathématiques.

Les recherches récentes semblent valider cette troisième voie proposée par Joseph (1992). Néanmoins, dans le cadre de nos travaux, nous nous sommes appuyé sur une bibliographie d'ouvrages et articles qui relèvent le plus souvent du premier ou du deuxième modèle de Joseph (1992). Mener une analyse critique basée sur des textes et sources historiques ne nous a pas semblé pertinent, d'autant plus que, comme le dit Hodgkin (2005), l'une des raisons qui explique cet eurocentrisme de l'histoire des mathématiques est l'importance caractéristique que « nous » accordons à la forme « result + proof » (Hodgkin, 2005, p. 13). Cette centralité de la preuve et des inférences de type déductif est effectivement au cœur de beaucoup de travaux didactiques sur le raisonnement et sur nos pratiques mathématiques. Nous ferons d'ailleurs nôtres les propos certainement simplificateurs de Galda :

> *As far as we know, no culture outside of the European tradition has developed a well-defined standard of mathematical proof, nor « proved » any mathematical theorems in a way that we would call a proof. However, research in this area of the history of mathematics has not been adequately carried out, so it is certainly possible that we may have to revise our present position (Galda, 1980).*

Nous nous abriterons également derrière le fait qu'un des chapitres de Hodgkin (2005, p. 42) s'intitule, en référence à Kline, *« The Greek miracle »*, alors que Hodgkin semble être lui-même un ardent défenseur de la troisième voie proposée par Joseph (1992).

Pour une discussion historique bien plus détaillée et précise, nous renvoyons le lecteur aux travaux de Chemla (2015), de Hodgkin (2005), de Neugebauer et Sachs (1946), de Neugebauer (1952) pour des travaux spécifiques concernant les mathématiques égyptiennes et babyloniennes et de Youschkevitch (1976) pour les mathématiques arabes, ainsi qu'aux références auxquelles ces travaux renvoient.

2. Des Babyloniens aux Grecs : l'émergence d'une approche axiomatique de la preuve

On considère que les mathématiques babyloniennes et les mathématiques égyptiennes sont les plus avancées des mathématiques « occidentales » précédant celles de la Grèce antique. Néanmoins, dans les mathématiques babyloniennes, aucun résultat général n'est formulé, aucune étape déductive n'est formalisée : la notion de preuve ou simplement de validité d'un résultat fourni est ainsi absente des écrits mathématiques babyloniens. D'après Van der Waerden (1954), on peut penser que le traitement systématique d'un grand nombre d'exemples numériques d'un même type de problème mathématique constituait alors une sorte de justification du résultat proposé. Comme le souligne Coray (2008), on peut aussi penser que :

> *le simple fait de dessiner un triangle ou une pyramide tronquée sur un papyrus indique que l'on a abstrait l'idée du triangle et de la pyramide, ainsi que les notions de côté, d'angle, de hauteur, etc... (Coray, 2008, p. 11).*

Tout comme pour les mathématiques babyloniennes, l'abondance des sujets mathématiques traités dans les papyrus tend à montrer qu'il y avait en Égypte aussi un fort développement mathématique. Wilder affirme même que :

> *The Babylonians had brought mathematics to a stage where two basic concepts of Greek mathematics were ready to be born — the concept of a theorem and the concept of a proof (Wilder, 1968).*

Mais avec les mathématiques grecques, on assiste à un changement de paradigme : l'activité mathématique grecque est par essence différente de toute activité mathématique précédente. Lloyd précise d'ailleurs :

> *[The Greeks] were certainly not the first to develop a complex mathematics — only the first to use, and then also to give a formal analysis of, a concept of rigorous mathematical demonstration (Lloyd, 1979, p. 232, cité par Hodgkin).*

Si l'on accepte cette rupture épistémologique liée à la démonstration, il faudrait essayer d'en situer l'origine. Or l'absence de « communauté scientifique » clairement identifiée sur les travaux de laquelle on pourrait s'appuyer (Kuhn, 1983) rend cette tâche difficile. Ainsi, l'origine et l'auteur de « la » première preuve mathématique occidentale ne sont pas clairement établis. De plus, d'après Hodgkin (2005), et à la différence des mathématiques babyloniennes ou égyptiennes, nous ne disposons pour les mathématiques grecques que de peu de sources « directes » et fiables : les historiens ne s'appuient ici que sur des propos rapportés par des tierces personnes, en l'occurrence et principalement Proclus, et donc peu fiables pour un historien (Hodgkin, 2005). Néanmoins, Galda (1980) et, avec quelques réserves liées principalement au fait que nous n'ayons pas de traces directes de ces écrits, Hodgkin (2005, p. 44) envisagent les deux possibilités suivantes quant à l'auteur de la première « démonstration », qui s'appuie sur une organisation des arguments mathématiques selon une démarche déductive :

- Thalès de Milet (environ -624, environ -547) serait le premier homme individuellement identifié auquel on associe des travaux mathématiques (Eves, 1976, p. 55) et serait également le premier à proposer une démonstration mathématique (en géométrie) avec des arguments logiques. Il serait l'auteur, entre autres, des propositions suivantes et de leurs preuves (Eves, 1976, p. 55) : *« tout cercle est bissecté par l'un quelconque de ses diamètres »*, *« les angles de base d'un triangle isocèle sont égaux »*, *« tout angle inscrit dans un demi-cercle est droit »* (résultat connu semble-t-il depuis 1 400 ans par les Babyloniens). Comme le précise Eves (*ibid.*) :

  > *The value of these results is not to be measured by the theorems themselves, but rather by the belief that Thales supported them by some logical reasoning instead of intuition and experiment (Eves, 1976, p. 55).*

- Pythagore (environ -580, environ -495) serait un second candidat possible. D'après Galda (1980), il semblerait en effet que Pythagore ait montré assez tôt que si deux triangles ABC et $A'B'C'$ sont semblables, alors $\frac{a}{b}=\frac{a'}{b'}$ et $\frac{b}{c}=\frac{b'}{c'}$. En particulier, cette démonstration serait plus ancienne que celle concernant le fameux théorème de Pythagore.

De -600 à -300, les Grecs perfectionnent la notion de raisonnement et de discours logique comme suite de déductions rigoureuses émises à partir d'un « état » initial et reposant sur des affirmations explicitement formulées : chaque affirmation apparaît donc comme une conséquence logique et nécessaire des affirmations précédentes. Cette méthode, dite « postulationnelle » ou « axiomatique », est certainement la plus importante contribution des Grecs aux mathématiques (Kleiner, 1991 ; Eves, 1976) et les *Éléments d'Euclide* en constituent l'exemple le plus emblématique. Pour les Grecs, le titre « Éléments » était alors utilisé pour décrire un système de propositions déduites d'axiomes (Galda, 1980), ce que semble confirmer la référence aux *Éléments d'Hippocrate*, écrits quelques cent ans plus tôt que ceux d'Euclide (Galda, 1980 ; Hodgkin, 2007 ; Netz, 1999). Et les *Éléments d'Euclide* seraient le plus ancien exemple connu d'un traitement axiomatique et systématique de la géométrie. D'ailleurs, l'influence de cet ouvrage sur le développement de la logique et de la science occidentale est fondamental. Pour Galda (1980), les Éléments constituent le standard méthodologique pour toute rédaction de démonstration mathématique mais aussi pour toute argumentation logique (scientifique, philosophique ou politique), standard qui va prévaloir jusqu'au XIXe siècle. Van der Waerden insiste lui aussi sur l'importance des *Éléments d'Euclide*, en écrivant dans la biographie consacrée à Euclide dans la *Biography in Encyclopædia Britannica* :

> *Almost from the time of its writing and lasting almost to the present, the Elements has exerted a continuous and major influence on human affairs. It was the primary source of geometric reasoning, theorems, and methods at least until the advent of non-Euclidean geometry in the 19th century. It is sometimes said that, next to the Bible, the "Elements" may be the most translated, published, and studied of all the books produced in the Western world.*

Avant d'aller plus loin, arrêtons-nous quelques instants sur les motivations possibles d'un tel changement de paradigme avec les mathématiques grecques. Nous suivons ici les propositions faites par Kleiner (1991) et Wilder (1968). Wilder (1968) classe les raisons qui *« expliqueraient »* de tels bouleversements dans l'activité mathématique en deux catégories, les raisons *« héréditaires »* et les raisons *« environnementales »*, et Kleiner (1991) les qualifie respectivement de *« raisons internes »* et *« raisons externes »* aux mathématiques. En s'appuyant sur ces deux catégories, Kleiner (1991) énumère cinq raisons possibles :

1. des raisons internes ou héréditaires :
   a) la nécessité de résoudre la « crise » suscitée par la découverte de l'incommensurabilité de $\sqrt{2}$: cette crise serait à l'origine d'un questionnement sur les fondations logiques des mathématiques ; Dowek (2007) associe ce moment à la naissance des mathématiques où le raisonnement devient nécessité et non plus simplement calcul ;
   b) la nécessité de décider, et donc de justifier son choix, entre plusieurs possibilités incompatibles : par exemple, pour les Babyloniens, $3\times r^2$ donne l'aire d'un cercle alors que les Égyptiens utilisent la formule $\left(\frac{8}{9}\times 2\times r\right)^2$;
2. des raisons externes ou environnementales :
   a) la nature de la société grecque : la démocratie nécessite l'art de l'argumentation et de la persuasion, mais aussi et certainement, l'existence d'une classe aisée (et secondée par des esclaves) disposant donc de temps pour la contemplation voire l'abstraction mathématique ;
   b) la philosophie grecque, pour laquelle le raisonnement est central ;
   c) la nécessité d'enseigner qui a obligé les mathématiciens à penser en profondeur les principes à la base de leurs raisonnements.

Nous remarquons que, dès le début de l'histoire des mathématiques, des considérations d'ordre didactiques constituent l'une des motivations de la nécessité d'une certaine rigueur en mathématiques : le souci pédagogique et la nécessité de justifier leurs conceptions et procédures obligent les mathématiciens à un dépassement de l'évidence, tel qu'illustré plus haut par les (supposés) travaux de Thalès par exemple. Avec la nécessité d'une justification de leur démarche mathématique et de l'explication de leur raisonnement logico-mathématique, l'axiomatisation de la géométrie par les Grecs impose également une mise à distance des objets mathématiques aux objets de la nature. On assiste ainsi à la naissance des mathématiques (Dowek, 2007) ou, pour le moins, à une transformation de la pratique mathématique : les mathématiques passent d'un statut de « science » expérimentale, de science empirique à celui de science *« intellectuelle »* (Grabiner, 1974). Cette distance naissante entre objets mathématiques et objets de la nature est doublée d'une différenciation entre objets mathématiques et procédures sous-jacentes à l'émergence de ces objets. Ainsi, pour Netz (1999), dès les travaux d'Hippocrate, une première véritable révolution mathématique a donc lieu en Grèce au V^e siècle avant J.C., révolution dont les *Éléments d'Euclide* constitue le phénomène le plus important. Dowek, en s'appuyant sur les contributions des Pythagoriciens, écrit à ce propos :

> *Ce passage du calcul au raisonnement a été retenu comme l'acte de naissance des mathématiques, en Grèce, au V^e siècle avant notre ère (Dowek, 2007, p. 23).*

La justification de type axiomatique en mathématiques, dont les *Éléments* constituent le premier exemple paradigmatique de l'histoire des mathématiques, va prévaloir jusqu'à la prochaine rupture au XIX^e siècle. Néanmoins, d'immenses progrès mathématiques vont être produits sans cette exigence de rigueur :

> *Standards of rigor have changed in mathematics, and not always from less rigor to more (Kleiner, 1991, p. 291).*

Pour comprendre cette nouvelle rupture épistémologique quant à la notion de rigueur en mathématiques, rupture qui a eu lieu au XIX^e siècle, nous devons isoler les conditions dans lesquelles elle se produit et justifier ce qui fait que l'on appelle parfois le XVIII^e siècle le siècle de la vigueur, en opposition au siècle suivant dit parfois siècle de la rigueur.

3. De la notation symbolique de la Renaissance à l'analyse du XVIII^e siècle

Comme nous le soulignons dans notre analyse épistémologique de la notion de fonction (Lalaude-Labayle, 2016), le symbolisme mathématique introduit en 1591 par Viète va apparaître ici aussi comme le plus grand outil de découverte mathématique. Ce phénomène atteint son paroxysme au cours du XVIII^e siècle. Pour illustrer une pratique mathématique emblématique du XVIII^e siècle, nous proposons l'exemple suivant, extrait de Grabiner (1974) et de Kleiner (1991). Il s'agit pour Euler de trouver la série infinie (série entière en termes contemporains) de la fonction $x \mapsto \cos x$. Euler utilise l'identité du binôme et développe le terme de gauche de l'égalité left $(\cos z + i \times \sin z)^n = \cos nz + i \times \sin nz$, pour obtenir par égalité des parties réelles :

$$\cos nz = \cos^n z - \frac{n(n-1)}{2!} \cos^{n-2} z \,.\, \sin^2 z + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!} \cos^{n-4} z \,.\, \sin^4 z + \ldots$$

En supposant que $|z|$ est infiniment petit et n un entier infiniment grand, Euler obtient :

$$\cos z = 1 \ ;\ \sin z = z \ ;\ n(n-1) = n^2 \ ;\ n(n-1)(n-2)(n-3) = n^4 \ ;\ \ldots$$

L'équation devient alors

$$\cos nz = 1 - \frac{n^2 z^2}{2!} + \frac{n^4 z^4}{4!} - \ldots$$

D'où, en posant $x = nz$, Euler affirme que nz est fini car n est infiniment grand et z infiniment petit, et il écrit :

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots$$

À la lecture de cette « preuve » et en extrapolant ce style de rédaction aux productions mathématiques du XVIII^e siècle, on peut remarquer avec Grabiner (*ibid.*) que la motivation principale semble être... l'obtention de résultats mathématiques ! Et effectivement, tout étudiant en mathématiques a entendu les noms de Euler, Leibniz, Bernoulli, Taylor, Laplace, Newton, L'Hospital.

Grabiner (*ibid.*) se demande d'ailleurs si, avec les canons de la rigueur mathématique actuels, Euler, Leibniz et les autres auraient été aussi prolifiques. Mais qu'est-ce qui explique l'acceptation de ces preuves mathématiques par la communauté scientifique ? Grabiner affirme que l'une des raisons, et peut-être la raison principale, est la confiance totale portée au symbolisme mathématique introduit par Viète, et parfaitement maîtrisé par les scientifiques de l'époque. Cette confiance dans le symbolisme et dans la manipulation algébrique des symboles, pratiques reposant sur une démarche guidée par une intuition rarement mise en défaut, constitue un épiphénomène dans l'histoire des mathématiques et se justifierait par deux principaux faits : en algèbre, et avec les polynômes en particulier, le symbolisme permet des calculs rapides et efficaces ; l'algèbre apparaît alors comme une « arithmétique universelle » (en référence à Newton) et de là à généraliser une arithmétique des polynômes à une arithmétique des séries infinies, il n'y a qu'un pas que franchit, entre autres, Euler ; en analyse, les notations de Leibniz pour les fonctions, pour le calcul différentiel ou intégral, inventées pour faciliter la façon de penser ces objets, se trouvent être également très efficaces pour les calculs.

Comme on a pu le voir, les scientifiques de l'époque sont plus occupés à obtenir des résultats qu'à les valider ou les justifier. Les mathématiciens du XVIII[e] siècle ne semblent éprouver aucune nécessité à réfléchir aux fondations logiques de leurs pratiques mathématiques. Quelques scientifiques remettent même en cause cette nécessaire rigueur pour la géométrie euclidienne. Kline écrit d'ailleurs :

> *The typical attitude of the XVIII[th] century was: Why go to the trouble of proving by abstruse reasoning things which are never doubted in the first place, or of demonstrating what is more evident by means of what is less evident ? Even Euclidean geometry was criticized, on the ground that it offered proofs where none were deemed to be needed (Kline, 1972, p. 618).*

En effet, certains des résultats obtenus peuvent être vérifiés numériquement ou expérimentalement et l'absence de preuve rigoureuse ne semble alors pas gênante. De plus, comme nous l'avons déjà souligné, les scientifiques de l'époque, bien que ne disposant pas de définition claire et précise des objets qu'ils manipulent, disposent d'une profonde maîtrise de leurs propriétés, avec pour conséquence une intuition rarement mise en défaut. On voit donc qu'un changement d'attitude s'avère nécessaire pour une formalisation plus rigoureuse des preuves mathématiques et que l'on ne peut se contenter de l'explication simpliste voulant que l'analyse devint rigoureuse pour éviter les erreurs et corriger celles des travaux antérieurs. Mais un changement de paradigme quant à la rigueur nécessaire à la validité d'un résultat mathématique ne suffit pas : il faut aussi développer des techniques nécessaires à la justification formelle d'une preuve.

Comme nous l'avons fait avec la géométrie pour la Grèce antique, on peut s'essayer ici aussi à isoler plusieurs sources à l'origine de ce changement de paradigme concernant la notion de preuve et de rigueur en mathématiques :

1. Des raisons internes ou héréditaires :
    a) À la fin du XVIII[e] siècle, les erreurs sur les séries trigonométriques (par exemple Euler affirme que toute fonction 2π-périodique est limite de série trigonométrique), les erreurs sur les fonctions de plusieurs variables sont plus fréquentes : la seule intuition ne suffit maintenant plus.
    b) Comme le souligne Bridoux (2011), l'algébrisation de l'analyse qui culmine au XVIII[e] siècle avec notamment les travaux de Lagrange ou d'Euler a constitué un frein à

l'émergence d'une plus grande rigueur en analyse. Bien que les attaques de Berkeley dès 1734 et leurs réponses ne suffisent pas à elles seules à motiver les scientifiques pour rendre les mathématiques plus rigoureuses, à l'instar de ce qui eut lieu avec la géométrie euclidienne, une brèche dans l'édifice mathématique est ouverte.

c) Dahan-Dalmedico et Peiffer affirment que :

> *la conception algébrique et formelle des fonctions, qui a stimulé si longtemps l'ascension de l'analyse, fonctionne maintenant comme un facteur de blocage (Dahan-Dalmedico, Peiffer, 1986, cité par Bridoux, 2011).*

Grabiner confirme également ce point de vue :

> *At the end of the eighteenth century, several mathematicians thought that the pace of getting new results was decreasing. […] most of the results obtainable by the routine application of eighteenth-century methods had been obtained. (Grabiner, ibid.).*

Émerge alors un souci de généralisation et d'unification de tous les résultats obtenus, ce qui pourrait avoir mécaniquement abouti à une réflexion sur la nécessité de fondements axiomatiques rigoureux sur lesquels baser les travaux existants. On peut noter que l'on retrouve ici des éléments du concept d'objets FUG(S)[2] pour la notion de preuve et de rigueur en mathématiques et ce dès 1974 avec les travaux de Grabiner. Pour Kleiner (1995) il semble historiquement acceptable qu'à une longue période exploratoire durant laquelle de nombreux résultats sont publiés succède une période plus posée de réflexion et de consolidation de ces résultats, tel que ce fût en quelque sorte le cas pour la géométrie avec les Grecs.

2. des raisons externes ou environnementales : comme pour la géométrie euclidienne, une des motivations de la rigorisation des mathématiques est liée à l'activité d'enseignement des résultats obtenus par les mathématiciens. Grabiner (1974) précise que pour différentes raisons sociales liées à la Révolution française, cette activité d'enseignement est devenue une nécessité pour les besoins matériels des mathématiciens. D'ailleurs, la plupart des travaux sur les fondations des mathématiques ne sont pas publiés dans des revues scientifiques mais sont issus de cours et sont publiés dans des livres d'enseignement (Grabiner, 1974). Il est essentiel ici de rappeler que l'École Polytechnique est créée en 1795 et est alors la plus grande institution pour l'enseignement des sciences, enseignement qui apparaît comme une véritable nécessité politique et militaire aux gouvernements.

Notons qu'à nouveau des motivations didactiques apparaissent ici comme un facteur essentiel à l'évolution des mathématiques vers une plus grande rigueur.

En nous appuyant sur des travaux de Grabiner, nous avons identifié les principaux arguments qui pourraient expliquer les motivations des mathématiciens du XVIII^e^ siècle pour passer d'une pratique mathématique focalisée sur l'obtention de nouveaux résultats à une pratique plus rigoureuse, plus conforme aux canons issus de la géométrie grecque.

Néanmoins, ce survol serait incomplet sans rappeler le rôle essentiel qu'a joué un mathématicien, en l'occurrence Lagrange, à la fin du XVIII^e^ siècle. En 1784, à l'Académie de Berlin, dans une question mise à prix, Lagrange demande :

> *[…] qu'on explique comment on a déduit tant de théorèmes vrais d'une supposition contradictoire, & qu'on indique un principe sûr, clair, en un mot vraiment mathématique, propre à être substitué à l'Infini, sans rendre trop difficiles, ou trop longues, les recherches qu'on expédie par ce moyen (Lagrange, Nouveaux mémoires, 1786).*

Plus tard, Lagrange, dans son enseignement à l'École Polytechnique, se fixe comme objectif de

[2] FUG(S) pour concept Formalisateur, Unificateur, Généralisateur (voire Simplificateur) d'après Robert (1998).

proposer un cadre général et algébrique à l'analyse mathématique. Lagrange fonde l'analyse sur les séries de Taylor, mais, ce faisant, ne peut répondre de manière complètement satisfaisante à la question soulevée en 1784.

Cependant, sa question de l'Académie de Berlin ainsi que ses cours publiés en deux ouvrages auront un impact important sur le développement de la rigueur dans le domaine de l'analyse au cours du XIX^{e} siècle, avec les travaux de Cauchy notamment. C'est ce que nous abordons dans le paragraphe suivant.

4. Du XIX^{e} siècle au XX^{e} siècle : vers la notion moderne de preuve

Le changement d'attitude opéré au sein de la communauté mathématique à la fin du XVIII^{e} siècle ne suffit toutefois pas à rendre rigoureuse l'analyse mathématique, comme le montre la tentative de Lagrange d'algébriser l'analyse. Effectivement, pour que l'analyse mathématique puisse devenir plus rigoureuse, il « manque » encore à Lagrange et aux mathématiciens de la fin du XVIII^{e} siècle deux ingrédients essentiels : des définitions mathématiques « correctes », plus seulement liées à l'intuition graphique, géométrique voire calculatoire, et des techniques de preuve pour valider les résultats, dont ceux obtenus au cours du XVIII^{e} siècle, à partir de ces définitions.

En parallèle de ce souci de fonder rigoureusement l'analyse mathématique qui anime les mathématiciens du XIX^{e} siècle, on assiste également à une « libération de la géométrie », avec les premières géométries non-euclidiennes, puis à une libération de l'algèbre, avec l'apparition de la notion d'algèbre symbolique et donc implicitement de structure algébrique. Ce passage d'une algèbre arithmétique à une algèbre symbolique va donner naissance à une algèbre de la logique, à la base du renouveau de la méthode axiomatique que nous détaillons plus bas.

Nous allons quitter l'ordre chronologique tel que nous l'avons adopté jusqu'à présent. Tout d'abord, nous allons voir comment Cauchy puis Weierstrass s'éloignent petit à petit de la vision algébrique de l'analyse des mathématiciens du XVIII^{e} siècle pour aboutir à une arithmétisation de celle-ci. Pour une discussion approfondie sur la différence d'approche entre Bolzano et Cauchy et ce en quoi Bolzano annonce les travaux de Weierstrass, on pourra consulter Benis-Sinaceur (1973), Harrer et Wainer (2000) ou Boyer (1949). Puis nous verrons comment ré-émerge petit à petit l'approche axiomatique notamment avec les travaux des algébristes anglo-saxons dont ceux de Boole.

Les mathématiciens du XVIII^{e} siècle ont développé et exploité de nombreuses techniques analytiques et peu de techniques nouvelles seront introduites au XIX^{e} siècle pour répondre à ce souci de fondements de l'analyse mathématique (Grabiner, 1974) : la plupart des outils utilisés par Cauchy, essentiellement des inégalités, étaient maîtrisés par ses prédécesseurs (Grabiner, 1974 ; Dhombres & Pensivy, 1988). La « rigorisation » de l'analyse qui a lieu au cours du XIX^{e} siècle n'est donc pas une conséquence immédiate des pratiques du siècle précédent : un changement de regard sur les objets manipulés en analyse doit être effectué. Grabiner (1974), en s'appuyant sur plusieurs exemples, montre comment les pratiques du XVIII^{e} siècle ont évolué en définitions et théorèmes au XIX^{e} siècle. Elle regarde en particulier les approximations telles qu'elles étaient développées au XVIII^{e} siècle pour résoudre des équations algébriques ou différentielles et telles qu'elles ont lieu au siècle suivant. Grabiner distingue deux types de problèmes associés à l'approximation de solutions : les procédures d'approximation elles-mêmes et les déterminations (ou encadrement) d'erreur. Concernant les procédures elles-mêmes, trois exemples sont donnés qui illustrent le changement de regard sur les objets :

- d'une méthode d'approximation de solution du XVIII^{e} siècle, les mathématiciens du XIX^{e} tirent une preuve de l'existence d'une telle solution en regardant la démarche de leurs prédécesseurs comme construction d'une solution : ainsi, le théorème de Cauchy-Lipschitz se base sur une méthode d'approximation développée par Euler, la « preuve » de Cauchy du théorème des valeurs intermédiaires des fonctions continues utilise les travaux de Lagrange...
- alors que l'erreur d'une approximation était estimée pour un n donné, la question devient au XIX^{e} siècle : « étant donné une erreur souhaitée ε, et en admettant que le procédé d'approximation converge, quel est le rang n de l'approximation qui garantisse que l'erreur commise entre l'approximation et la solution est au plus (dans un sens à préciser bien-sûr) ε ? » ;
- enfin, des approximations obtenues pour des cas particuliers sont généralisées : Gauss puis Cauchy généralisent ainsi les travaux de d'Alembert pour montrer la convergence de la série hypergéométrique, Cauchy, Bolzano puis Weierstrass généralisent la définition « algébrique » de nombre dérivé de Lagrange pour donner la définition que nous connaissons actuellement.

On voit avec les exemples précédents que la « rigorisation » des fondements de l'analyse mathématique au cours du XIX^{e} siècle nécessite deux moments, au sens temporel et philosophique : tout d'abord exploiter et élargir l'application des techniques analytiques développées par les prédécesseurs, puis poser les « bonnes questions » et les « bonnes » définitions. On pense ici à la citation de Grothendieck :

> *C'est à ce moment, je crois, que j'ai entrevu pour la première fois (sans bien sûr me le formuler en ces termes) la puissance créatrice d'une « bonne » définition mathématique, d'une formulation qui décrit l'essence. Aujourd'hui encore, il semble que la fascination qu'a exercé sur moi cette puissance-là n'a rien perdu de sa force (Grothendieck, Esquisse d'un programme, note (2)).*

On remarque aussi que le nom de Cauchy apparaît dans chacun des exemples donnés ci-dessus. En effet, Cauchy, le plus prolifique des mathématiciens du XIX^{e} siècle avec Cayley (Eves, 1976), est motivé par les ouvrages de Lagrange et le problème posé à l'Académie de Berlin en 1784 ; il est interpellé par les problèmes posés par la représentation des fonctions en tant que séries de Fourier mais est aussi impliqué en tant qu'enseignant à l'École Polytechnique pour laquelle il devait rédiger ses cours. Toutes ces raisons poussent Cauchy à devenir le « législateur » de l'analyse au XIX^{e} siècle : il rigorise l'analyse mathématique en introduisant implicitement la notion d'infiniment petit, notion qu'il exploite pour définir (certes en langage courant) certaines notions déjà utilisées par les mathématiciens (Grabiner, 1983). Néanmoins, Cauchy ne distingue pas la notion de continuité de celle de continuité uniforme, pas plus qu'il ne fait de différence entre la notion de convergence simple et de convergence uniforme d'une suite (en fait d'une série) de fonctions (Kleiner, 1991). En particulier, avec sa fonction continue nulle part dérivable, Weierstrass met en défaut la preuve de Cauchy pour qui une fonction continue est forcément dérivable sauf en quelques points isolés. Les efforts de « rigorisation » de l'analyse menés par Cauchy engendrent de nouveaux problèmes et ne répondent pas complètement aux exigences de rigueur attendus par Lagrange. On peut émettre deux raisons possibles pour expliquer ce à côté de quoi passe Cauchy :

1. ses définitions de limite et de continuité sont écrites en français et font appel à la notion encore floue d'infinitésimal (Lakatos, 1984). Par exemple, sa définition de limite est la suivante :

   > *Si les valeurs successivement attribuées à une variable s'approchent indéfiniment d'une valeur fixe, de manière à finir par en différer aussi peu que l'on voudra, alors cette*

dernière est appelée la limite de toutes les autres (Cauchy, 1821).

et pour la continuité d'une fonction :

> *h désignant une quantité infiniment petite lorsque, la fonction f(x) admettant une valeur unique et finie pour toutes les valeurs de x comprises entre deux limites données, la différence* $f(x+h)-f(x)$ *est toujours entre ces limites une quantité infiniment petite, on dit que f(x) est une fonction continue de la variable x entre les limites dont il s'agit (Cauchy, 1821).*

2. Cauchy s'appuie encore trop souvent sur son intuition géométrique pour établir l'existence de certaines limites (Kleiner, 1991).

Pour dépasser ces problèmes, Weierstrass, puis Dedekind, abandonnent les formulations algébriques et les démonstrations jugées encore trop géométriques dues à Cauchy : Weierstrass montre les théorèmes d'analyse d'une manière purement arithmétique puis, Dedekind (1872) « achève » l'arithmétisation de l'analyse en proposant une définition rigoureuse des nombres réels.

Ainsi, Weierstrass et Dedekind ont compris que fonder rigoureusement l'analyse mathématique pouvait se « réduire » à définir (et en fait construire) de manière rigoureuse les nombres réels : l'arithmétique devient plus que la géométrie d'Euclide, le langage de la rigueur mathématique. Mais ce questionnement quant aux fondements de l'analyse une fois réduit à celui de la construction des nombres réels suscite la question du fondement même de l'arithmétique. Répondre à cette nouvelle question revient à donner une base solide à l'arithmétique : Dedekind, Peano et Frege vont proposer chacun une reconstruction de l'arithmétique en s'appuyant sur les premiers travaux de théorie des ensembles développés par Cantor et sur des notions de logique initiée par Boole.

Comme le souligne Kleiner (1991), la plupart des travaux visant à rendre rigoureuses les mathématiques du XVIII^e siècle sont effectués dans le domaine de l'analyse mathématique. Mais au cours du XIX^e siècle se mettent également en place les prémisses de ce que l'on appellera l'algèbre moderne et qui va aboutir à l'émergence de la logique au retour de la (d'une) méthode axiomatique au cours des premières années du XX^e siècle. Jusqu'à la première moitié du XIX^e siècle, l'algèbre est considérée comme une arithmétique symbolique (Eves, 1976). Peacock semble être le premier à s'intéresser sérieusement aux principes fondamentaux de l'algèbre et publie en 1830 *Treatise on algebra*, dans lequel il essaie de fonder l'algèbre en s'inspirant de la méthode mise en place dans les *Éléments d'Euclide* ; ce faisant, Peacock libère l'algèbre de ses bases arithmétiques en distinguant l'algèbre arithmétique de l'algèbre symbolique, i.e. d'une algèbre arithmétique universelle (Eves, 1976 ; Burton, 2011). Au même moment, Lobachevsky en 1829 et Bolyai en 1832 « libèrent » la géométrie en développant des géométries non-euclidiennes cohérentes. Kline affirme à ce propos et de manière un peu caricaturale voire radicale :

> *Euclidean geometry was supposed to have offered accurate proofs of theorems suggested intuitively by figures, but actually it offered intuitive proofs of accurately drawn figures (Kline, 1972, p. 1007).*

Cette libération de la géométrie force alors les mathématiciens à un réexamen logique rigoureux des fondements de la géométrie mais aussi de la méthode axiomatique héritée des Grecs, ce que feront Pasch, Peano puis Hilbert en fondant une axiomatique moderne. Comme nous l'avons déjà vu, un phénomène équivalent a lieu en algèbre à la suite des travaux de Peacock : Hamilton (1843), Grassmann (1844) et Cayley (1857) proposent des algèbres vérifiant des lois structurelles différentes de celles auxquelles obéit l'algèbre classique de l'arithmétique et participent ainsi à ouvrir la voie vers une algèbre abstraite moderne.

Entre 1830 et 1860, nous assistons ainsi à un double mouvement : une libération de la géométrie qui interroge les mathématiciens sur les fondements même de la géométrie et une libération de l'algèbre, initiée par Peacock, pour qui l'algèbre apparaît comme le pendant abstrait de l'approche hypothético-déductive héritée de la géométrie d'Euclide (Eves, 1976). C'est dans ce cadre que Boole publie en 1847 *The mathematical Analysis of Logic*. Il y suggère que les règles auxquelles obéissent les symboles sont porteuses de sens et offrent ainsi un regard novateur sur la sémantique des symboles eux-mêmes, ces symboles ne représentant d'ailleurs pas forcément des nombres. Dans l'introduction de son article, Boole précise ce point de vue :

> *Those who are acquainted with the present state of the theory of Symbolic Algebra are aware that the validity of the process of analysis does not depend on the interpretation of the symbols which are employed, but solely upon the laws of their combination (Boole, 1847).*

Puis, en 1854, Boole publie *An Investigation of the Laws of Thought, on Which are Founded the Mathematical Theories of Logic and Probabilities*, dans lequel il généralise et étend les résultats contenus dans son article de 1847. Il a pour objectif d'y montrer que les raisonnements étudiés en logique peuvent être formalisés en une algèbre de la logique :

> *The design of the following treatise is to investigate the fundamental laws of those operations of the mind by which reasoning is performed; to give expression to them in the language of a Calculus, and upon this foundation to establish the science of Logic and construct its method (Boole, 1854).*

Pour y parvenir, Boole construit ce que l'on appelle maintenant une algèbre booléenne, dans laquelle les problèmes de logique sont résolus par un processus de calcul formel (Burton, 2011). Ainsi, les travaux de Boole, en substituant le raisonnement algébrique au raisonnement verbal, donnent vie au « langage universel » (ou « caractéristique universelle ») envisagé par Leibniz. En ce sens, ces travaux sont à l'origine d'une première formalisation de la logique, ce qui poussa Bertrand Russell à affirmer plus tard que *« Pure Mathematics was discovered by Boole in a work which he called The Laws of Thought [...] »* (Russell, 1901). De Morgan en Angleterre et C.S. Peirce aux États-Unis développeront ensuite les travaux de Boole. On voit donc que l'un des objectifs et l'un des résultats du mouvement initié par Peacock est de fournir des bases formelles, via des structures algébriques, à de nombreux domaines mathématiques, dont la logique.

La plupart des travaux mathématiques importants de la fin de la seconde moitié du XIX^{e} siècle ont pour objectif d'asseoir rigoureusement les mathématiques sur des fondations solides (Galda, 1980). L'arithmétisation de l'analyse a réduit le problème de ses fondements à celui de la définition des nombres réels. Ceux-ci furent définis ensuite à l'aide des nombres rationnels. Puis, la construction des rationnels à partir des entiers positifs suivit (Kleiner, 1991). Enfin, l'arithmétique, c'est à dire la construction des entiers positifs fut traitée, comme nous l'avons vu plus haut, par Dedekind, Peano et Frege, chacun utilisant une axiomatique différente. Parallèlement, on assiste à une reconstruction de la géométrie par Pasch (1882) puis Peano (1889), reconstruction complète avec l'ouvrage de Hilbert publié en 1899 : *Grundlagen der Geometrie*. Hilbert y propose une axiomatisation de la géométrie euclidienne, proche de l'esprit des *Éléments d'Euclide* mais satisfaisant des standards modernes de rigueur mathématique. À l'instar des *Éléments d'Euclide*, les *Grundlagen* de Hilbert ont servi de prototype pour la construction de systèmes axiomatiques modernes (Galda, 1980). Nous abordons maintenant, et de manière succincte, ce que l'on entend par « méthode axiomatique » en essayant de souligner les différences entre celle d'Euclide et celle d'Hilbert.

5. (La) méthode axiomatique

L'utilisation de la méthode axiomatique, introduite par les Grecs et dont les *Éléments d'Euclide* constituent le premier parangon, se systématise durant les trois premières décennies du XX^{e} siècle : en théorie des groupes (1904), en théorie des corps puis des anneaux (1910 et 1914), pour définir des espaces de fonctions dits espaces de Fréchet (1906), pour les espaces de Banach (1922), pour les espaces de Hilbert axiomatisés par Von Neumann (1929), en théorie des ensembles avec Zermelo en 1908, *etc*. Kleiner insiste d'ailleurs sur l'importance de la méthode axiomatique comme outil du développement de la pensée mathématique du XX^{e} siècle :

> *The axiomatic method, surely one of the most distinctive features of 20th-century mathematics, truly flourished in the early decades of the century (Kleiner, 1991, p. 165).*

Mais qu'entend-on par méthode axiomatique ? Doit-on parler de méthode axiomatique ou de méthodes axiomatiques, autrement dit, peut-on identifier des différences entre la méthode axiomatique proposée dans les *Éléments* et celle proposée dans les travaux de Hilbert à la fin du XIX^{e} siècle et du début du XX^{e} siècle ? La première question admet la réponse formelle suivante :

> *La méthode axiomatique permet de définir l'ensemble des lois logiques du premier ordre à partir d'axiomes logiques et de règles de déduction de telle façon que toutes les lois logiques soient ou bien un axiome ou bien une formule dérivée des axiomes avec un nombre fini d'applications des règles de déduction (Wikipedia, consulté le 25/01/2015).*

Au regard de cette définition, la position de Bourbaki (très certainement en la personne de Dieudonné) propose un point de vue éclairant sur la différence entre logique formelle et méthode axiomatique :

> *What the axiomatic method sets as its essential aim, is exactly that which logical formalism by itself can not supply, namely the profound intelligibility of mathematics. [...] Where the superficial observer sees only two, or several, quite distinct theories, lending one another "unexpected support" through the intervention of a mathematician of genius, the axiomatic method teaches us to look for the deep-lying reasons for such a discovery, to find the common ideas of these theories, buried under the accumulation of details properly belonging to each of them, to bring these ideas forward and to put them in their proper light (Bourbaki, 1960).*

On relève dans la citation précédente l'aspect unificateur que revêt la méthode axiomatique. Cartan, l'un des fondateurs de Bourbaki, précise en 1958 lors d'une conférence à Berlin comment se dégage une axiomatique dans le travail d'un mathématicien :

> *Un mathématicien qui entreprend de construire une démonstration a en tête des objets mathématiques bien définis, qu'il étudie à ce moment-là. Lorsqu'il pense avoir trouvé la démonstration, et qu'il commence à tester soigneusement toutes ses conclusions, il se rend compte que seul un très petit nombre des propriétés spécifiques des objets considérés a joué un quelconque rôle dans la démonstration. Il découvre ainsi qu'il peut utiliser la même démonstration pour d'autres objets possédant uniquement les propriétés qu'il a employées auparavant. Ici nous pouvons voir l'idée simple sous-jacente à la méthode axiomatique : au lieu de déclarer quels objets doivent être examinés, il suffit d'établir la liste des propriétés [...] à utiliser dans l'investigation. On met alors ces propriétés en exergue en les exprimant par des axiomes ; dès lors, il n'est plus important d'expliquer ce que sont les objets à étudier. Au lieu de cela, on peut construire la preuve de telle façon qu'elle soit vraie pour tout objet satisfaisant aux axiomes. Il est assez remarquable que l'application systématique d'une idée aussi simple ait si complètement ébranlé les mathématiques (Pour la science Hors Série les Génies n°2, Février 2000).*

Au rôle unificateur de la méthode axiomatique relevé par Bourbaki (1960) s'ajoutent, d'après

Cartan, des fonctions formalisatrices voire simplificatrices à toute approche axiomatique. Nuançons néanmoins ces propos en rappelant le refus de Poincaré et Weyl de réduire les mathématiques à une méthode axiomatique, quelle qu'elle soit. Pour eux, et pour les intuitionnistes en général, l'axiomatique n'est qu'un outil précisant des objets mathématiques existants au préalable. Avec ce point de vue intuitionniste, on retrouve ici la difficulté voire l'impossibilité de disposer de situation fondamentale (au sens de la Théorie des Situations Didactiques) pour introduire les objets mathématiques de type FUG(S), tels que les notions relevant des structures algébriques par exemple, mais aussi certains concepts topologiques (Bridoux, 2011). Dans ce qui précède, en essayant de définir ce qu'est la méthode axiomatique, nous avons procédé à un glissement de « la » méthode axiomatique à « une » méthode axiomatique. Effectivement, il semble important de distinguer plusieurs niveaux de méthode axiomatique, à la fois d'un point de vue épistémologique mais aussi et surtout d'un point de vue didactique. Afin de comprendre l'évolution des systèmes axiomatiques et donc leurs différences, nous nous appuyons sur quatre d'entre eux : l'axiomatique de la géométrie d'Euclide et des Grecs, les axiomatiques de géométries non-euclidiennes, l'axiomatisation de l'arithmétique et enfin l'axiomatisation de la théorie des ensembles (Mykytiuk & Shenitzer, 1995). La multiplicité des méthodes axiomatiques ne fait plus de doute et, afin de les distinguer, Wilder (1967) propose de les classer en trois niveaux, suivant leur degré de formalisation :

1. « an euclidean type axiomatic », une axiomatique telle que développée dans les *Éléments d'Euclide* ;
2. « a working-mathematician axiomatic », une axiomatique utile au travail quotidien du mathématicien ou axiomatique « naïve » ;
3. « a foundational axiomatic », une axiomatique fondationnelle dans laquelle l'appareil logique est formellement explicité.

Dans la catégorie la plus formalisée telle que proposée par Wilder (1967), la catégorie de « l'axiomatique fondationnelle », l'axiomatique n'apparaît plus comme un outil nécessaire au travail quotidien du mathématicien mais comme objet d'étude *per se*. Une étude approfondie de cette catégorie, dite de l'« axiomatique fondationnelle » par Wilder, nécessiterait un travail long et fastidieux, qu'il ne nous a pas semblé pertinent d'entreprendre pour nos travaux didactiques. Néanmoins, nous pouvons exhiber ce qui semble être une spécificité propre à toute méthode axiomatique : Wilder (1967) affirme en effet que toute méthode axiomatique résulterait essentiellement de questions internes aux mathématiques et procéderait donc de motivations principalement héréditaires. L'axiomatisation, en tant qu'abstraction de méthodes et d'objets mathématiques, reposant essentiellement sur des objets préexistant, apparaît donc comme une spécificité parmi l'ensemble des concepts mathématiques.

Nous étudions donc les axiomatiques d'Euclide et du quotidien du chercheur en mathématiques et tâchons d'isoler quelques différences entre la méthode axiomatique d'Euclide et des Grecs et celle qui fut développée entre la fin du XIX^e^ siècle et le début du XX^e^ siècle. Par ailleurs, nous ne nous arrêtons que sur les différences qui nous semblent fondamentales et surtout pertinentes d'un point de vue didactique.

Commençons avec l'axiomatique euclidienne. Pour Galda (1980), les principaux constituants de l'axiomatique d'Euclide seraient : des termes ou mots non définis ; des définitions ; des axiomes ; des postulats ; des théorèmes (ou propositions).

Avant d'aller plus loin, précisons ici les notions de termes indéfinis, d'axiome et de postulat. Par termes non définis, appelés avec Pascal « termes primitifs » (Hausberger, 2015), on entend les termes non définis précédemment. Par exemple, dans la définition d'Euclide *« Un point est ce dont la partie est nulle »*, la notion de partie et *a fortiori* de partie nulle ne sont pas définis précédemment. En fait, on considère généralement que les notions de point, de droite et de plan sont trois termes primitifs de la géométrie euclidienne. Par opposition, un segment est un terme défini, à l'aide du terme indéfini « droite » et de la notion de partie. Concernant la différence entre axiome et postulat, chez Euclide, l'axiome apparaît comme une *« vérité physique évidente »* alors qu'un postulat apparaît comme une vérité géométrique postulée. Ainsi, *« Les choses égales à une même sont aussi égales entre elles »* est le premier axiome et *« Qu'il soit demandé de mener de tout point à tout point une ligne droite »* est le premier postulat. Suivant la distinction de Kant, on pourrait penser que l'axiome procède de l'analytique : l'analyse du contenu de l'énoncé d'un axiome suffit à tout homme à vérifier sa véracité. Le postulat relèverait quant à lui du synthétique, et plus *a posteriori* qu'*a priori*, comme le montre l'histoire du cinquième postulat[3].

Dans les *Éléments d'Euclide*, les termes non définis ou primitifs semblent porter en eux le germe d'une définition, autrement dit la possibilité de pouvoir être définis plus tard. Ces termes primitifs ne sont donc pas variables : l'axiomatique euclidienne ne dispose que d'une seule interprétation, un seul modèle, celui de la géométrie de l'espace, et les termes non définis y apparaissent comme des constantes. Dans les théories axiomatiques modernes, l'existence de termes primitifs, non définis, est une nécessité formelle à l'instar d'une condition de terminaison en programmation récursive. En effet, deux raisons possibles (Galda, 1980) semblent justifier cette nécessité de termes non définis.

Si l'on devait effectivement ne pas accepter de termes non définis, alors de deux choses l'une (notons ici le principe du tiers-exclu) : on aurait soit une suite infinie, forcément dénombrable, de termes $T_0, T_1, \ldots$, la définition de T_{i+1} nécessitant celle de T_i, ce processus étant alors sans fin, soit un cercle vicieux $T_0, T_1, \ldots, T_n$ dans lequel $T_{i \bmod n}$ est défini à l'aide de $T_{(i+1) \bmod n}$, deux éventualités proscrites !

Nous voyons donc que dans les axiomatiques modernes, les termes primitifs ne sont plus des constantes de l'interprétation comme ils l'étaient sous les Grecs. Et effectivement, on peut attribuer à l'émergence des géométries non-euclidiennes de Bolyai et Lobachevski, des travaux de Peacock en algèbre et de Boole en logique, le fait que les termes primitifs d'une axiomatique puissent être indéfinis et indéfinissables. Puis, avec les travaux de Fréchet sur les espaces vectoriels topologiques, avec la formulation axiomatique de la notion de groupe, celle d'espace vectoriel, avec les travaux de Hausdorff sur l'axiomatique d'un espace topologique, apparaît l'idée qu'un terme primitif puisse être une variable de l'axiomatique. Young écrit dans la partie *The unity of mathematics* de son dernier cours :

> *We may regard the undefined terms in abstract science as symbols representing any entities for which the fundamental assumptions appear to be satisfied (Young, 1911).*

Une seconde différence importante entre l'axiomatique d'Euclide et une axiomatique moderne porte sur les notions d'axiomes et de postulats. Un axiome dans les *Éléments d'Euclide* est une affirmation assez générale pour qu'elle soit applicable à d'autres domaines que la géométrie, et que l'on peut raisonnablement supposer vraie sans que l'on puisse pour autant la montrer formellement. Un postulat partage avec la notion d'axiome le fait que l'on peut raisonnablement supposer sa véracité. Néanmoins, un postulat était alors supposé démontrable formellement. Bien

[3] Pour une formulation exacte du cinquième postulat d'Euclide, dit postulat des parallèles, voir par exemple le site : http://www.trigofacile.com/maths/euclide/livre1/postulats/1-post5.htm

que différents, les axiomes et postulats apparaissent, en tant que vérités évidentes, comme des idéalisations d'une vérité physique, réelle, concrète : ils formalisent une réalité tangible, sensible, évidente, indiscutable, ce qui correspond peu ou prou à une vision platonicienne des objets mathématiques. La disparition de la distinction entre postulat et axiome dans les méthodes axiomatiques modernes permet de souligner le fait que les axiomes, au sens moderne du terme, peuvent être relativement arbitraires et n'ont pas à avoir de sens physique :

> *Thus in a modern axiom system the axioms [...] are devoid of meaning (Kleiner, 1991).*

Ainsi, le postulat hyperbolique des parallèles n'est pas une abstraction d'une réalité sensible mais une alternative logiquement élaborée au cinquième postulat d'Euclide en géométrie hyperbolique. Dans l'axiomatique moderne, les axiomes sont relationnels : ils ne mettent qu'en relation les termes primitifs.

À l'instar de la « dégéométrisation » progressive de l'analyse mathématique, on assiste au cours du XIX^e siècle à une désensibilisation physique de l'axiomatique. Cette profonde différence dans la relation aux objets entre la géométrie grecque et l'axiomatique moderne, telle que révélée par l'évolution de la notion d'axiome, constitue à elle seule une explication possible de la difficulté de tout étudiant à manipuler les axiomes des structures algébriques courantes.

Une autre différence entre la notion d'axiomatique moderne et celle d'Euclide réside dans la formalisation de règles d'inférence logique. Pour l'axiomatique euclidienne, les règles logiques restent tacites et les démonstrations ne sont souvent que des descriptions des constructions géométriques : l'existence d'un objet mathématique repose sur sa constructibilité géométrique. Dans une axiomatique moderne, les règles sont le plus souvent évoquées et parfois formalisées, comme en logique intuitionniste par exemple. Notons néanmoins que, bien qu'étant formalisées, ces règles sont utilisées pour la communication des preuves avec une certaine souplesse, à cause notamment de l'usage de la langue vernaculaire mais aussi de certains implicites logiques. Lamport (2012) propose l'exemple suivant tiré de Spivak. Dans la preuve du fait que si $f'(x)>0$ pour tout x dans un intervalle, alors f est croissante sur cet intervalle, Spivak commence par écrire :

> *Let a and b be two points in the interval with a<b (Spivak, 1967, p. 170).*

Lamport (2012) remarque alors que l'on n'est pas certain que l'intervalle contienne deux points distincts et surtout, ne dit pas en quoi le fait de choisir deux points distincts permet d'envisager les prémisses d'une démonstration rigoureuse et vérifiable de ce résultat.

Enfin, une dernière différence se fait jour concernant les objectifs de l'axiomatique euclidienne et d'une axiomatique moderne. Pour les Grecs, l'axiomatisation de la géométrie poursuit un objectif fondationnel : celui de proposer des fondements rigoureux avec une théorie axiomatique consistante et une méthodologie basée sur la déduction logique. L'axiomatique moderne revisite l'objectif fondationnel grec et l'enrichit en affichant un but « abstractionnel », en tant que catalyseur de l'émergence d'objets mathématiques abstraits (groupes, anneaux, modules, *etc.*).

Ci-dessous, nous reprenons et complétons le tableau de Galda (1980) en résumant les différences entre axiomatique euclidienne et axiomatique moderne, tableau dans lequel « définissable (?) » signifie *« potentiellement définissable »* et « démontrable (?) » signifie *« potentiellement démontrable »* :

	Axiomatique euclidienne	**Axiomatique moderne**
Termes primitifs	• non définis • définissables (?) • constantes du modèle	• non définis • indéfinissables • nécessaires • variables du modèle
Axiomes	• évidents • idéalisations du modèle • indémontrables	• non évidents • relationnels
Postulats	• évidents • idéalisations du modèle • démontrables (?)	
Règles logiques	non formalisées	± formalisées
Interprétation	unique (catégorique)	multiple (non catégorique)
Rôle	fondationnel	• fondationnel • abstractionnel
Dialectique Outil/Objet	outil	• outil • objet

Tableau 1 *: Axiomatique moderne vs euclidienne.*

Conclusion

Avec cette rapide étude épistémologique des notions de preuve, de rigueur et d'axiomatique, nous espérons avoir mis en évidence la riche variété des questions qui ont permis l'évolution de ces notions. Nous avons rappelé que certaines de ces questions se révèlent intrinsèques au domaine mathématique, alors que d'autres, notamment les plus anciennes, apparaissent comme extrinsèques. Dans un objectif didactique, il nous semble important de souligner que les questions intrinsèques qui nous ont semblé pertinentes nécessitent une culture mathématique, voire une réflexion d'ordre méta, comme en témoigne l'évolution des notions de postulat et d'axiomes. Il peut donc sembler difficile d'espérer obtenir de la part d'élèves, voire de jeunes étudiants, une intuition formelle des objets algébriques alors même que l'intuition physique des objets géométriques pose souvent problème. Cette étude épistémologique propose ainsi une explication complémentaire aux travaux ayant souligné les limites du recours au levier méta, limites soulignées entre autres par Dorier (2000) et Castela (2011).

Il nous semble important de rappeler ici que l'évolution de ces notions, dont celle de rigueur, n'a pas été linéaire au fil des siècles et que, comme le souligne Galda (1980), une « absence » de rigueur ne saurait être associée à une absence de progrès mathématique. Par ailleurs, nous insistons à nouveau sur le fait que des questions d'ordre didactique, notamment au XIX^{e} siècle avec Cauchy, ont contribué à ce que l'on appelle une « rigorisation » de l'analyse.

Pour conclure, et d'un point de vue plus politique, cette étude épistémologique nous permet aussi d'insister sur la pertinence d'un enseignement mathématique commun, l'argumentation au sein de débats nécessaires à toute démocratie étant associée à l'émergence du raisonnement mathématique et de la mathématique telle que nous la connaissons.

Références bibliographiques

Arsac, G. (1988). L'origine de la démonstration : essai d'épistémologie didactique. *Recherches en didactique des mathématiques, 8*(3).

Arsac, G. (1997). Les limites d'un enseignement déductif de la géométrie. *Petit x, 47*, 5-31.

Barrier, T. (2016). Les exemples dans l'élaboration des démonstrations mathématiques : une approche sémantique et dialogique. *Recherches en Éducation, 27*, 94-117.

Benis-Sinaceur, H. (1973). Cauchy et Bolzano. *Revue d'histoire des sciences, 26*(2), 97-112.

Bourbaki, N. (1950). The Architecture of Mathematics. *The American Mathematical Monthly, 57*(4), 221-232.

Bourbaki, N. (1960). *Éléments d'histoire des mathématiques*. Paris : Hermann.

Boyer, C.B. (1951). The foremost textbook of modern times. *American Mathematical Monthly, 58*, 223-226.

Bridoux, S. (2011). *Enseignement des premières notions de topologie à l'université. Une étude de cas*. Thèse de l'Université Paris-Diderot. Paris VII.

Burton, D.M. (2011). *The History of Mathematics: An introduction, 7th edition*. Mc Graw Hill.

Cabassut, R. (2005). *Démonstration, raisonnement et validation dans l'enseignement secondaire des mathématiques en France et en Allemagne*. Thèse de l'Université Paris VII-Denis Diderot.

Castela, C. (2011). *Des mathématiques à leurs utilisations, contribution à l'étude de la productivité praxéologique des institutions et de leurs sujets / Le travail personnel au cœur du développement praxéologique des élèves en tant qu'utilisateurs de mathématiques*. Note de synthèse présentée en vue de l'Habilitation à Diriger des Recherches, Université Paris Diderot.

Chemla, K. (2015). *The History of Mathematical Proof in Ancient Traditions*. Cambridge University Press.

Coray, D. (2008). *Présentation de la Géométrie d'Eudoxe à Poincaré*. Paris : Hermann.

Dahan-dalmedico, A. & Peiffer, J. (1982). *Routes et dédales - Histoire des mathématiques*. Paris-Montréal : Éditions Études Vivantes.

Deloustal-Jorrand, V. (2004). *Étude épistémologique et didactique de l'implication en mathématique*. Thèse de l'Université Joseph Fourier, Grenoble.

Dhombres, J. & Pensivy, M. (1988). Esprit de rigueur et présentation mathématique au XVIII[e] siècle : le cas d'une démonstration d'Aepinus. *Historia Mathematica, 15*(1), 9-31.

Dorier, J.-L. (Ed.) (2000). *On the Teaching of Linear Algebra*. Kluwer Academic Publisher: Dordrecht.

Dowek, G. (2007). *Les métamorphoses du calcul : une étonnante histoire de mathématiques*. Paris : Le Pommier.

Eves, H. (1976). *An introduction to the history of mathematics, 4th edition*. Holy, Rinehart and Winston.

Galda, K. (1980). An informal history of formal proofs: from vigor to rigor?, *The Two-Year College Mathematics Journal, 12*(2), 126-140.

Gandit, M. (2008). *Étude épistémologique et didactique de la preuve en mathématiques et de son enseignement. Une ingénierie de formation*. Thèse de l'université Joseph Fourier, Grenoble.

Grabiner, J.V. (1974). Is mathematical truth time-dependant? *The American Mathematical Monthly, 81*(4), 354-365.

Grabiner, J.V. (1983). Who gave you the Epsilon? Cauchy and the origins of rigorous calculus. *The American Mathematical Monthly, 90*(3), 185-194.

Grenier, D. (2012). Une étude didactique du concept de récurrence. *Petit x, 88*, 27-47.

Gueudet, G. (2006). Using geometry to teach and learn linear algebra. *Research in Collegiate Mathematics Education VI*, 71-195.

Hanna, G., Jahnke H.N. & Pulte, H. (2010). *Explanation and Proof in Mathematics Philosophical and Educational Perspectives*. Springer.

Hairer, E. & Wanner, G. (2000). *L'analyse au fil de l'histoire*. Spinger (Scopos).

Hausberger, T. (2015). *Repères historiques et épistémologiques sur les Géométries non euclidiennes*. hal-01442924.

Hodgin, L. (2005). *A history of mathematics From Mesopotamia to Modernity*. Oxford University Press.

Joseph, G.G. (1992). *The Crest of the Peacock: Non-European roots of Mathematics*. Harmondsworth: Penguin.

Kleiner, I. (1991). Rigor and proof in mathematics: a historical perspective. *College Mathematics Journal, Mathematics Magazine, 64*(5), 291-314.

Kline, M. (1972). *The History of Mathematical Proof in Ancient Traditions*. Oxford University Press, Inc.: Fair Lawn, NJ.

Kuhn, T.S. (1983). *La Structure des révolutions scientifiques*. Flammarion, coll. « Champs ».

Lakatos, I (1984). *Preuves et réfutations : essai sur la logique de la découverte mathématique*. Paris : éditions Hermann.

Lalaude-Labayle, M. (2016). *L'enseignement de l'algèbre linéaire au niveau universitaire : Analyse didactique et épistémologique*. Thèse de l'Université de Pau et des Pays de l'Adour.

Lamport, L. (2012). How to write a 21st century proof. *Journal of fixed point theory and applications, 11*(1), 43-63.

Lloyd, G.E.R. (1979). *Magic, Reason and Experience*. Cambridge University Press.

Mathieu-Soucy, S. & Tanguay, D. (2017). La logique formelle au niveau universitaire : une étude empirique en contexte de démonstration, *Petit x, 104*, 5-24.

Mesnil, Z. (2014). *La logique : d'un outil pour le langage et le raisonnement mathématique vers un objet d'enseignement*. Thèse de l'Université Paris Diderot.

Mykytiuk, S. & Shenitzer, S. (1995). Four significant axiomatic systems and some of the issues associated with them. *American Mathematical Monthly, 102*(1), 62-67.

Netz, R. (1999). *The Shaping of Deduction in Greek Mathematics*. Cambridge University Press.

Neugebauer, O. & Sachs, A.J. (1946). Mathematical Cuneiform Texts. *American Oriental Series, 29*. American Oriental Society, Schools of Oriental Research, New Haven CT.

Neugebauer, O. (1952). *The Exact Sciences in Antiquity*. Princeton University Press.

Pasch, M. (1882). *Vorlesungen über neuere Geometrie*. Leipzig.

Pedemonte, B. (2002). *Étude didactique et cognitive des rapports entre argumentation et démonstration dans l'apprentissage des mathématiques*. Thèse de l'Université Joseph Fourier, Grenoble I.

Robert, A. (1998). Outils d'analyse des contenus mathématiques à enseigner au lycée et à l'université. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 18*(2), 139-190.

Spivak, M. (1967). *Calculus*. W.A. Benjamin, Inc.: New York.

Stylianides, A.J. & Harel, G. (2018). Advances in Mathematics Education Research on Proof and Proving : An International Perspective. Springer International Publishing.

Van der Waerden, B.H. (1954). *Science awakening*. P. Noordhoff: Groningen.

Wilder, R.L. (1967). The role of the axiomatic method. *The American Mathematical Monthly, 74*(2), 115-127.

Wilder, R.L. (1968). *Evolution of mathematical concepts*. John Wiley and Sons, Inc: New York.

Young, J.W. (1911). *Lectures on Fundamental concepts of algebra and geometry.* The Macmillan Company.

Youschkevitch, A.P. (1976). *Les Mathématiques Arabes (VIII^e^-XV^e^ siècles)*. Paris : Vrin.

Sitographie

https://fr.wikipedia.org/wiki/Axiome_logique (consulté le 11/04/2019).

http://www.trigofacile.com/maths/euclide/livre1/postulats/1-post5.htm (consulté le 07/10/2019).