UN RITUEL DE NUMÉRATION

Marie-Caroline CROSET[1]
Laboratoire Informatique de Grenoble, UGA, IREM de Grenoble

Anne DIVISIA[1]
IREM de Grenoble

Nicolas LE GAC[1]
IREM de Grenoble

Géraldine MASTROT[1]
IREM de Grenoble

Hélène STOFFEL[1]
IREM de Grenoble

Résumé. En tant que formateurs d'enseignants, nos visites de classes nous ont fréquemment donné l'occasion d'observer un rituel de numération qui dénombre les jours d'école souvent appelé *« chaque jour compte »*. Ce rituel est mis en œuvre selon des modalités très variables. Nous les avons confrontées à des éclairages théoriques issus des sciences cognitives et de la didactique des mathématiques portant sur les principes d'un rituel efficace, les caractéristiques du matériel pour qu'il soit source d'apprentissage et la prise en compte de l'aspect décimal de la numération. En appui sur ces apports théoriques, nous avons mis en place une expérimentation dans deux classes de CP et CP-CE1. Dans cet article, nous décrivons les principes clés que ce rituel doit prendre en compte pour devenir un véritable dispositif didactique d'enseignement de la numération. Nous présentons en détails les productions de trois élèves au cours de leur année scolaire dans la mise en œuvre de ce rituel.

Mots-clés. Rituel, numération décimale de position, représentations du nombre.

Introduction

Depuis janvier 2015, nous sommes membres d'un groupe IREM premier degré de Grenoble composé de formateurs (formatrice INSPÉ en mathématiques, conseillères pédagogiques, PEMF exerçant dans différents cycles). La réflexion de ce groupe de travail porte sur l'enseignement de la numération décimale de position au cycle 2, dont la maîtrise conditionne l'apprentissage et la compréhension d'autres champs mathématiques tels que le calcul ou les mesures de grandeur. En tant que formateurs, nous avons fréquemment observé un rituel consistant à dénombrer les jours d'école, rituel souvent appelé *« chaque jour compte »*. Ce dispositif, qui se réduit souvent à atteindre le centième jour d'école, nous semble avoir un potentiel plus ambitieux et pourrait répondre à des objectifs d'apprentissage de la numération décimale. En appui sur des travaux en didactique des mathématiques et en psychologie, nous avons cherché à faire évoluer ce rituel. En 2017-2018, nous avons expérimenté cette nouvelle proposition de rituel dans des classes de

[1] irem-primaire-grenoble@univ-grenoble-alpes.fr

cycle 2. Le matériel utilisé, la progression annuelle ainsi qu'un court film de présentation sont accessibles sur le site de l'IREM de Grenoble[2].

Dans une première partie, nous décrivons le rituel *« chaque jour compte »* à partir de nos observations de classe. Cette description nous amène à nous questionner sur l'efficacité de ce dispositif et, en particulier, la manière dont est enseignée la numération décimale de position. Dans une deuxième partie, nous apportons des éléments théoriques pour cerner les caractéristiques nécessaires à un rituel d'apprentissage de la numération. Cette partie débouche sur une proposition de caractérisation d'un rituel d'apprentissage, en particulier en numération décimale. Dans une troisième partie, en appui sur la caractérisation d'un rituel d'apprentissage, nous proposons une évolution du rituel *« chaque jour compte »*. Dans une quatrième partie, nous présentons une analyse de trois productions recueillies pendant les expérimentations.

1. Point de départ

1.1. Un rituel souvent observé : le *« chaque jour compte »*

Au fil de nos visites et observations de classes en tant que formateurs d'enseignants, nous observons régulièrement un rituel mathématique, le *« chaque jour compte »*[3].

Ce rituel consiste à compter les jours d'école jusqu'au centième jour. Chaque jour, un élève responsable ajoute un objet, par exemple une paille, qui représente un jour d'école, dans un gobelet. Ce gobelet est le contenant des unités (*cf.* photo 1). Le septième jour, le gobelet contient donc 7 pailles. Lorsque celui-ci contient 10 pailles, un élève les regroupe à l'aide d'un élastique et les place dans le gobelet des dizaines, c'est la phase de groupement. Le vingt-et-unième jour, il y a donc deux paquets de 10 pailles dans le gobelet des dizaines et une paille dans le gobelet des unités. L'élève procède de façon identique pour les centaines (10 paquets de 10 pailles passent dans le gobelet des centaines, *cf.* photo 2). Après avoir manipulé les pailles, il peut remplir un tableau de numération collectif (*cf.* photo 2). Dans certaines classes, les élèves complètent en plus une fiche préremplie avec différentes représentations du nombre : écriture chiffrée, représentations analogiques, écriture en lettres, décompositions additives voire parfois des calculs associés à ce nombre (je lui ajoute 1, je lui enlève 10…) (*cf.* photo 3).

Photo 1 *: Un fonctionnement classique : un gobelet par rang des unités de numération. 10 pailles sont groupées dès le 10e jour et positionnées dans le gobelet dédié aux dizaines (https://www.titline.fr/).*

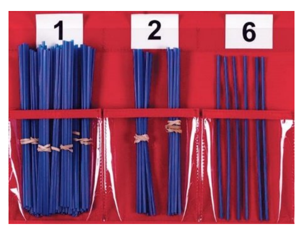


Photo 2 *: Les pailles et le tableau de numération collectif. C'est le 126e jour d'école (https://trousse-et-frimousse.net).*

[2] Page de notre site : https://irem.univ-grenoble-alpes.fr/recherche-action/themes/premier-degre-grenoble-aux-4-coins-des-maths/les-carnets-du-nombre-548092.kjsp?RH=413148517470877

[3] D'origine nord-américaine, le « Every Day Counts » (https://edconline.net/), est largement repris par les sites d'enseignants (par exemple : http://www.charivarialecole.fr/archives/1101 ou http://boutdegomme.fr/rituels-maths-chaque-jour-compte-a109143610 (consultés le 06/12/2022)).

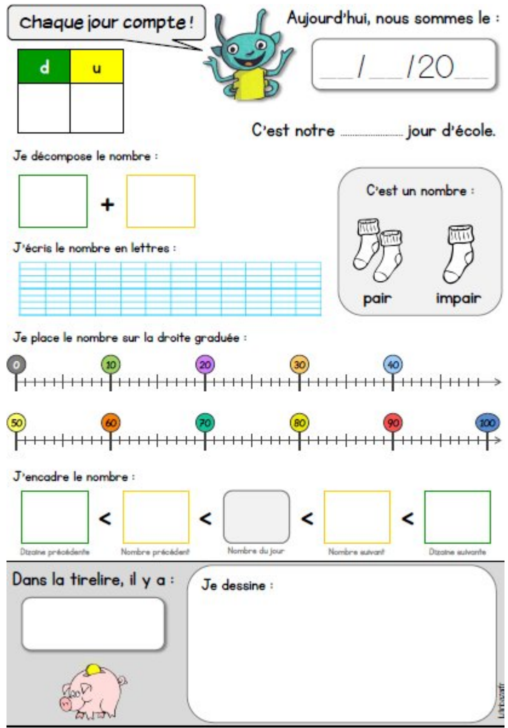


Photo 3 *: Fiche à compléter par les élèves individuellement (https://www.lutinbazar.fr).*

Parmi les pratiques souvent observées, certaines nous ont interpellées.

Souvent, un élève est seul responsable du rituel. Il n'y a pas de temps collectif ou de mutualisation avec le reste de la classe. Il n'y a pas d'institutionnalisation de connaissances.

Lorsque des fiches de représentations du nombre sont proposées à l'ensemble de la classe, elles sont souvent préremplies. Elles peuvent apparaître complexes en début d'année de CP. L'élève peut être perdu devant la multiplicité des représentations proposées. Ce panel de représentations évolue d'ailleurs peu dans l'année. En outre, le rituel se centre très souvent sur le tableau de numération qui arrive dès le premier jour de classe de CP avec la terminologie dizaine (d), unité (u) (*cf.* photo 6). Certaines fois, le rituel se réduit même au seul remplissage du tableau, aucun élément tangible ne représentant les jours d'école (*cf.* photo 4).

Nous avons souvent observé que le groupement par 10 est induit dès le dixième jour de classe qui se situe mi-septembre (*cf.* photo 6). Le rituel prend fin le centième jour, aux alentours du mois de mars, les enseignants ne se permettant pas de le dépasser croyant être alors hors programme.

La nature du matériel utilisé lors de ce rituel nous a également interrogés. En effet, le choix du matériel peut être très varié : des pailles de même couleur (*cf.* photo 2), de couleurs différentes au sein d'un même rang de numération (*cf.* photo 1) ou, au contraire, de couleurs différentes selon la position : une paille noire vaut 1 tandis qu'une paille blanche vaut 10 (*cf.* photo 5), le groupement puis l'échange ayant eu lieu. Ce matériel du rituel se limite à l'usage du rituel, il n'est pas utilisé dans les autres apprentissages de numération.

Photo 4 *: L'absence de matériel.*

Photo 5 *: 10 pailles noires ont été échangées contre 1 paille blanche, positionnée dans le gobelet central.*

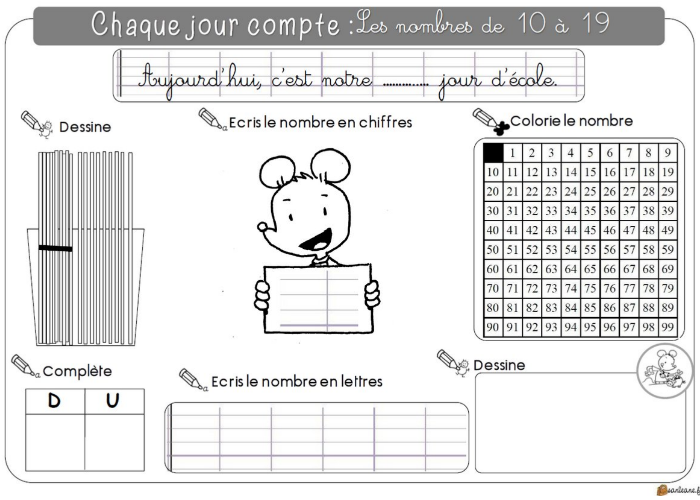


Photo 6 *: La dizaine induite dès le 10ᵉ jour d'école, un tableau de numération présent dès le 1ᵉʳ jour d'école (https://cpdesanleane.blogspot.com).*

1.2. Questionnement soulevé par le rituel *« chaque jour compte »*

Les différentes pratiques décrites plus haut nous mènent à nous interroger sur ce rituel :

- La tâche est identique chaque jour, sans progressivité des apprentissages. Un phénomène de lassitude semble s'installer avec le risque de perte d'intérêt et de sens pour l'élève. Pourrait-on exploiter ce rituel pour construire une progressivité des apprentissages ?
- Un seul élève est mobilisé pour compléter les affichages collectifs. En s'adressant à une seule personne, comment le rituel nourrit-il le groupe-classe ?
- Le tableau de numération est au centre des activités observées. Il apparait très tôt dans l'année scolaire, autrement dit, lorsque le nombre de jours de classe est encore faible et ne nécessite pas la présence d'un tableau pour organiser cette information. L'aspect positionnel de la numération est donc prépondérant au détriment des notions de groupement et d'échange.
- En parallèle, le groupement de dix unités est imposé dès le dixième jour. Ce groupement est positionné à gauche de celui des unités sans justification ni discussion avec les

élèves. La pertinence du groupement n'est donc pas mise en évidence. L'action de grouper puis d'échanger, notions nécessaires pour construire la numération peuvent-elles être travaillées et prises en charge dans ce rituel ?

- Le matériel diffère d'une classe à l'autre. L'enseignant le choisit-il consciemment ? Quel sens lui fait-il porter ?
- Lors de la présence de fiches, de nombreuses représentations du nombre sont imposées et ne sont pas toujours en relation avec le matériel utilisé. Quel lien l'élève fait-il entre ces différentes représentations ?

Pour répondre à ces questions, nous nous appuyons sur quelques éléments théoriques qui déboucheront sur des caractéristiques potentielles d'un rituel d'apprentissage. Enfin, nous évoquerons en détails le rituel que nous avons expérimenté dans deux classes de CP et CP-CE1.

2. Éclairages théoriques

Afin d'obtenir des éléments de réponse à notre questionnement, nous apportons quelques éclairages théoriques que nous déclinons en trois axes. Le premier axe porte sur les apprentissages mathématiques de la numération décimale, le second sur les différentes représentations du nombre et le troisième sur les rituels.

2.1. Apprentissage de la numération décimale de position

Tempier (2010) rappelle les deux aspects de notre système de numération écrite en chiffres :

- L'aspect positionnel du chiffre dans l'écriture chiffrée, la position référant à une unité de numération. Par exemple, dans le nombre 5 159, le « 5 » en quatrième position (en partant de la droite) représente 5 milliers et le « 5 » en deuxième position représente 5 dizaines.
- L'aspect décimal lie les unités de numération par un rapport décimal. Ainsi, deux unités consécutives ont un rapport de dix. Dix unités sont égales à une dizaine, dix dizaines sont égales à une centaine…

Difficultés liées à l'apprentissage de la numération

Bednarz et Janvier (1984) mettent en évidence de nombreuses difficultés rencontrées par les élèves dans l'apprentissage de la numération. Leurs expérimentations soulignent les difficultés des élèves à voir le rôle des groupements dans l'écriture conventionnelle, à saisir la pertinence des groupements et à opérer avec ceux-ci notamment dans les calculs.

Cette étude ancienne pourrait nous laisser penser que les difficultés ont depuis été prises en charge dans l'enseignement. Or Tempier (2010, 2016), dans ses recherches, montre qu'il n'en est rien. D'une part, des difficultés concernant l'aspect positionnel de la numération persistent : recomposer un nombre par exemple lorsque les unités ne sont pas données dans l'ordre ou lorsqu'un zéro doit marquer une position. D'autre part, les difficultés concernant l'aspect décimal de la numération sont nombreuses. Tempier (2016) conseille de faire des relations entre unités de numération un enjeu fort d'enseignement et d'éviter de ramener l'élève à un apprentissage de techniques telles que le comptage en unités simples, la multiplication par 10 ou l'utilisation d'un tableau de numération sans mise en lien avec les savoirs de la numération. Chambris (2012) déplore que le travail sur les unités de numération se limite aux tableaux de numération et à quelques décompositions réglées dont *« chiffre des… »* et *« nombre de… »* sans enseigner les relations entre unités du type « $1\,millier = 10\,centaines$ ». Elle précise que la seule unité présente dans l'enseignement de la numération semble être le « nombre 1 ».

Les tâches de recomposition d'un nombre avec plus de 10 unités à certains rangs (par exemple, utiliser le fait que 21 dizaines correspondent à 210 unités) ou de conversions entre les unités de numération avec une difficulté renforcée lorsque la relation se situe entre deux unités non successives (par exemple convertir 3 centaines en unités) permettent de travailler sur la relation décimale entre unités de numération. Cependant, ces tâches nécessitent-elles bien un traitement décimal ou l'élève peut-il les réussir sans connaissances décimales ? Pour répondre à cette question, nous distinguons différents types de décompositions. Il y a la décomposition dite canonique (par exemple 3c 5d 7u pour 357). Il y a des décompositions « groupées » en unités de numération (par exemple 35d 7u ou 3c 57u pour 357). Ces décompositions peuvent être « désordonnées » (par ex 7u 5d 3c ou 57u 3c), évitant ainsi l'automatisation d'une concaténation sans réflexion sur l'ordre des unités. Ces décompositions, groupées, canoniques ou non, désordonnées ou non, ne nécessitent que des connaissances sur l'aspect positionnel de la numération. Elles ne garantissent pas une compréhension *décimale* de la numération au sens où les élèves peuvent convertir ces décompositions en 357u en positionnant les étiquettes c, d et u correctement sans mobiliser les relations décimales entre les unités. Nous avançons l'idée que ce sont les décompositions dont la concaténation des quantités d'unités de numération ne permet pas, à elle seule, d'aboutir à la bonne réponse (par exemple, 3c 4d 17u pour 357u) qui permettront de travailler véritablement les relations entre unités de numération. Nous les nommerons dorénavant ***décompositions semi-groupées***. Ce sont ces décompositions qui offrent la possibilité de détecter les *« experts apparents »* (Roche & Clarke, 2006) : ces experts qui donnent à croire à l'enseignant qu'ils ont une maîtrise de la numération alors qu'ils n'ont que replacé les étiquettes au bon endroit. Les décompositions semi-groupées sont ainsi garantes de connaissances de la numération décimale : de telles décompositions imposent la mobilisation de l'aspect décimal de la numération.

La construction de la dizaine

Nous avons vu lors de la présentation de *« chaque jour compte »* que le tableau de numération était prégnant dès les premiers jours de CP associé avec les terminologies *dizaine* et *unité*. Lors des activités de remplissage du tableau de numération, il peut arriver que l'élève remplisse de façon mécanique le tableau. Ses réponses correctes n'attestent pas nécessairement de sa compréhension réelle : les termes de dizaines et unités semblent vides de sens et il restitue simplement le *« texte du savoir »* comme le dénonce Brissiaud (2005) en parlant du verbalisme des figurations :

> *Le verbalisme est la restitution du « texte du savoir » sans réelle compréhension de ce savoir. Dans le domaine de la numération décimale, il existe deux formes de verbalisme qui correspondent aux deux grands types de représentations des nombres : chiffrées et figurées. Ces deux formes de verbalisme résultent d'une conception statique des représentations utilisées ; l'enfant peut alors fournir des réponses apparemment correctes, qui n'attestent pourtant pas de la compréhension réelle d'équivalences entre procédures de dénombrement* (Brissiaud, 2005).

Tempier (2010) dénonce une dérive similaire : *« Les mots unités, dizaines, centaines, … ne sont souvent utilisés que comme des étiquettes pour dire le nom des rangs dans l'écriture du nombre »*. Selon Brissiaud, une des pistes pour éviter le verbalisme des figurations est que l'élève groupe lui-même les dix objets pour construire « le paquet de 10 » : la dizaine serait alors perçue comme la représentation spatiale du résultat d'une action. L'écriture chiffrée 126, par exemple, associée à une quantité organisée en une centaine, deux dizaines et six unités prendrait du sens et répondrait à une procédure de dénombrement. Elle ne serait pas l'aboutissement d'un simple automatisme qui consisterait à concaténer mécaniquement les trois chiffres, sans mobilisation de l'aspect décimal de la numération. Ce principe de groupement pour organiser de grandes collections se retrouve dans des situations bien connues des formateurs en INSPÉ.

Un travail sur des décompositions semi-groupées et sur le groupement effectif de dix unités pour l'échanger contre une dizaine sont donc des pistes à prendre en compte pour une mobilisation de l'aspect décimal.

2.2. Représentations du nombre

Le rituel *« chaque jour compte »* offre une multiplicité des représentations du nombre. Le triple code proposé par Dehaene et Cohen (1995) permet d'organiser ces nombreuses représentations et les travaux de Bruner (1973) permettent d'articuler manipulation et symbolisme en travaillant autour de la schématisation.

Le triple code de Dehaene et Cohen

La conférence de consensus organisée par le CNESCO et l'Ifé-ENS de Lyon (2015) a rappelé que l'apprentissage des nombres est favorisé par la diversité des représentations qui sont proposées aux élèves : dessins, schémas, à l'oral, à l'écrit, résultats de petits calculs, etc… Cependant, il semble important de structurer ces représentations afin d'aider l'enseignant dans ses choix. Dehaene & Cohen (1995) proposent un modèle avec trois grands systèmes de représentations mentales des nombres : le code analogique, le code visuel arabe et le code verbal.

Le code analogique désigne la représentation du nombre par des grandeurs. Selon les auteurs, ce système inné permet d'appréhender le sens du nombre, autrement dit la signification des quantités. Ce système non symbolique permet une évaluation précise des petites quantités et une estimation approximative des grandes collections. Il sert à effectuer des comparaisons numériques et des quantifications approximatives. Le code visuel arabe, autrement dit l'écriture chiffrée des nombres, intervient dans les activités de calcul précis et permet de réaliser des calculs mentaux complexes. Le code verbal, constitué de mots-nombres, est la représentation auditive verbale (exemple : « quatre » prononcé [katʀ]) utilisée principalement dans l'activité de comptage. Elle permet de coder la quantité et intervient dans les activités de calcul précis.

Pour travailler la numération, il est pertinent d'aborder ces trois codes mais également le passage de l'un à l'autre, les six transcodages. Le modèle du triple code a un double apport : l'enseignant doit veiller à proposer les six tâches de transcodage qui consistent à passer d'un code à un autre et l'organisation des représentations autour de trois codes permet à l'enseignant de regrouper et d'analyser les représentations produites par les élèves.

Les trois modes de Bruner

Le triple code de Dehaene, s'il nous est utile pour considérer les différentes représentations, ne prend pas en compte l'aspect manipulation lui-même puisqu'il modélise les représentations mentales. De manière complémentaire, l'approche de la cognition incarnée éclaire les apports potentiels de la manipulation tangible. Bruner (1973), un de ses fondateurs, précise que le savoir peut se représenter selon trois modes. Le mode énactif est le mode où on apprend par l'action du corps, par la manipulation physique. Le mode iconique est celui où *« il s'agit de pouvoir représenter quelque chose sans l'avoir sous les yeux. L'action est transformée en image mentale »* (Barth, 1985, p. 51). Enfin, le mode symbolique propose une représentation abstraite, conventionnelle du savoir : *« Le système symbolique représente les choses par des symboles qui sont déconnectés et arbitraires »* (*ibid.*). C'est le cas du code arabe et du code verbal.

Le mode iconique est donc un levier potentiel pour passer d'une phase de manipulation à un mode abstrait[4].

Les caractéristiques d'un matériel adapté à l'apprentissage

Dans leur méta-analyse, Carbonneau *et al.* (2013) dégagent différentes caractéristiques d'un matériel de manipulation pour qu'il soit bénéfique aux apprentissages mathématiques. Selon les auteurs, il semble pertinent que le matériel soit utilisé sur une période assez longue, comme un matériel de référence pour différents apprentissages. Cela permettrait de faire des liens cognitifs et de reconnaître des enjeux d'apprentissage communs dans différentes activités proposées par l'enseignant. Un matériel épuré qui se distingue des objets du monde semble plus bénéfique pour les apprentissages, rejoignant les résultats préliminaires de Croset *et al.* (2021). En effet, les objets familiers tels que des ours en peluche risquent de distraire les élèves et ainsi de rendre plus difficile le lien entre la manipulation et le concept mathématique, contrairement à des cubes en bois. Une troisième caractéristique est la « transparence » du matériel avec le concept en jeu. La ressemblance physique avec la propriété visée et le respect des relations de proportionnalité entre les différents éléments (taille, poids…) faciliteraient la mise en mémoire et la création d'images mentales. Enfin, lorsqu'un autre matériel (boîtes de Picbille, abaques, bouliers…) est proposé en relation avec le précédent, il serait efficace d'expliciter en quoi ce nouveau matériel vise l'apprentissage de la même notion mathématique.

L'enseignant a donc intérêt à privilégier un matériel de référence épuré et transparent. Ce travail de manipulation, mode énactif, doit être articulé avec un travail de représentation, mode iconique, pour accéder au mode symbolique.

2.3. Ritualiser les apprentissages

Les recherches en sciences de l'éducation s'accordent à dire que le rituel donne une sécurité affective et intellectuelle qui favorise la construction des savoirs (Amigues & Zerbato-Poudou, 2009 ; Merri *et al.*, 2015). Ces auteurs définissent un rituel par des caractéristiques précises telles qu'une grande régularité de l'activité qui se déroule à la même heure, dans le même lieu avec la même durée, une répétitivité des gestes et des paroles qui lui donne une identité formelle et enfin la présence de contraintes avec des règles claires et devant être respectées par tous. Ces auteurs mettent l'accent sur l'aspect répétitif d'un rituel qui rassure les élèves.

Dias (2015) décrit différentes clés de l'apprentissage : jouer, investiguer, raconter et ritualiser. Il précise que ritualiser permet de stabiliser des connaissances mathématiques avec l'acquisition d'automatismes et permet également le développement de nouvelles connaissances. En tant que didacticien, Dias met le savoir au cœur de sa réflexion. L'aspect apprenant d'un rituel est primordial pour cet auteur.

Le rituel peut porter les fonctions « rassurer » et « apprendre », auxquelles vient s'ajouter une dimension collective. Gioux (2008) met en avant l'importance du collectif dans le rituel :

> *Le rituel est un mode d'organisation régulier lié à une intention de l'ordre de l'éducation, de l'apprentissage ou de l'enseignement en milieu scolaire et qui est de l'ordre du collectif* (Gioux, 2008).

Ainsi faudrait-il éviter un rituel qui ne mettrait qu'un seul élève en activité, « celui qui fait au tableau » pendant que le groupe classe observe. Nous verrons plus loin comment répondre à cette exigence.

[4] https://magistere.education.fr/dgesco/course/view.php?id=2038

À travers leurs approches complémentaires de l'apprentissage, ces auteurs font ainsi ressortir trois fonctions du rituel. Un rituel doit permettre *d'apprendre tout en rassurant et en intégrant l'apprenant au sein d'un groupe*.

2.4. Proposition de caractérisation d'un rituel d'apprentissage

À partir des aspects théoriques présentés précédemment, nous proposons une caractérisation d'un rituel d'apprentissage autour de trois fonctions (*cf.* figure 1). La première fonction d'un rituel est de faire apprendre : le rituel, à l'école, doit nourrir des apprentissages. Une deuxième fonction est de rassurer : par les habitudes développées, le rituel instaure un cadre qui va sécuriser l'élève. En vivant régulièrement un même rituel, l'élève en maîtrise les règles d'utilisation et il peut alors se concentrer sur la notion en jeu. L'accumulation et l'évolution des épisodes permettent à l'élève de ne garder que l'essence du rituel : la notion visée par l'enseignant. Enfin, un rituel peut permettre d'intégrer l'élève dans le collectif « classe », en lien avec les travaux de Gioux (2008). Il permet de donner une place à l'individu au sein d'un collectif.

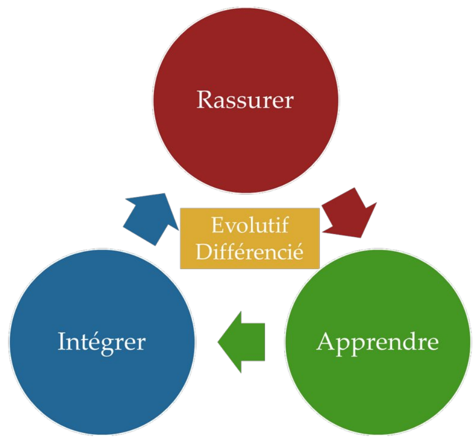


Figure 1 *: Caractérisation d'un rituel. Le rituel doit avoir l'ambition de faire apprendre. Il peut intégrer une dimension collective mais différenciée. Il devrait rassurer par un cadre immuable tout en étant en évolution sur le contenu d'appentissage.*

Cependant, pour que le rituel soit rassurant tout en étant garant d'apprentissage, il se doit d'évoluer : les enjeux d'apprentissage ne peuvent pas rester identiques tout au long de l'année. Nous avançons que le rituel peut donc être de forme constante pour rassurer mais avec un contenu qui évolue. Enfin, pour que le rituel soit garant d'apprentissages, tout en permettant à chaque élève d'intégrer le groupe classe, le contenu proposé doit aussi pouvoir être différencié. Butlen et Pezard (1991) dénoncent deux types de cercles vicieux de la différenciation. Un premier provient du risque de simplifier les apprentissages lorsque l'on différencie. En effet, différencier revient trop souvent à découper les problèmes en tâches élémentaires, en posant *« des questions intermédiaires dont la réponse ne demande pas une prise en charge du problème général »* ou en proposant des *« algorithmes simples de résolution, des règles ou des opérations »*. Cet enseignement maintient les élèves en difficulté dans un niveau d'exigence inférieur en termes d'apprentissage. Le second cercle vicieux porte sur le risque de désengagement de l'élève. Individualiser l'enseignement obligerait l'enseignant à répondre aux nombreuses sollicitations des élèves en difficulté qui, par peur de l'échec, ont tendance à ne pas s'engager seul dans la tâche et refusent le travail en groupe. Ainsi faut-il intégrer l'élève dans le groupe classe en différenciant sans individualiser. Lors de l'élaboration du rituel, nous avions en tête cette dérive potentielle. Aux trois fonctions du rituel, nous ajoutons donc deux caractéristiques fondamentales pour construire un rituel : *son aspect évolutif dans le temps et la possibilité de différencier l'apprentissage*.

La fonction d'apprentissage est essentielle à nos yeux de didacticiens. C'est pourquoi nous avons cherché à identifier des critères auquel devait répondre le rituel du *« chaque jour compte »* pour garantir un apprentissage de la numération décimale. Deux types d'indicateurs sont ressortis des travaux décrits précédemment : d'une part, la présence de collections groupées mais désordonnées et la présence de collections semi-groupées et d'autre part, le moment-clef de la construction de la dizaine qui doit être justifié par l'importance de la taille de la collection d'objets (et non par l'apparition du 10e objet dans la collection).

Ces fonctions et ces indicateurs nous ont permis de faire une proposition d'un rituel au service de l'apprentissage de la numération décimale.

3. Le rituel des crayons

Notre groupe Irem a cherché à construire un rituel d'appui à l'apprentissage de la numération décimale de position en tenant compte des apports théoriques cités précédemment. Si le rituel que nous proposons s'inspire du rituel *« chaque jour compte »* décrit plus haut, il apporte de nombreuses modifications et des choix explicites pour prendre en compte les résultats de la recherche. Afin de distinguer le rituel proposé des variantes des rituels observés, nous appellerons dorénavant « rituel des crayons » le rituel que nous avons construit et sous le nom de « rituel des pailles », l'ensemble des rituels observés avec les particularités décrites en introduction. Nous décrivons le rituel des crayons autour des trois fonctions repérées préalablement : intégrer l'individu dans le collectif en laissant la possibilité d'une différenciation, nourrir les apprentissages (et en ce qui nous concerne les apprentissages sur la numération décimale) et enfin, rassurer l'élève tout en restant évolutif.

Nous avons expérimenté le rituel des crayons dans deux classes du bassin grenoblois : une classe de CP en REP et une classe de CP-CE1. La description du rituel est illustrée par ces expérimentations.

3.1. Présentation succincte du rituel des crayons

Le rituel des crayons consiste, tout comme le rituel des pailles, à dénombrer les jours d'école. Il se déroule en trois phases. Chaque jour d'école, un élève responsable pose un nouveau crayon au tableau (*cf.* photo 7). Le crayon symbolise le jour d'école. L'élève dénombre la collection avec la classe et annonce « Il y a *n* crayons au tableau, nous sommes le $n^{\text{ième}}$ jour d'école ». Cette première phase orale collective se conclut ainsi par une formulation qui associe les aspects cardinal et ordinal du nombre.

Dans une seconde phase, les élèves écrivent individuellement le nombre du jour « de toutes les manières qu'ils connaissent ». Toutes les représentations sont acceptées (analogiques, verbales, arabes, …, *cf.* photo 8). Du lundi au jeudi, les élèves écrivent leurs représentations sur une ardoise. Le vendredi, les élèves représentent le nombre sur un carnet dédié : le « carnet des jours d'école ».

À la suite de cette phase écrite individuelle, une troisième phase est proposée pour conclure le rituel. C'est une phase collective de mise en commun. Nous allons la détailler ci-après.

Photo 7 : *Phase orale du rituel.*

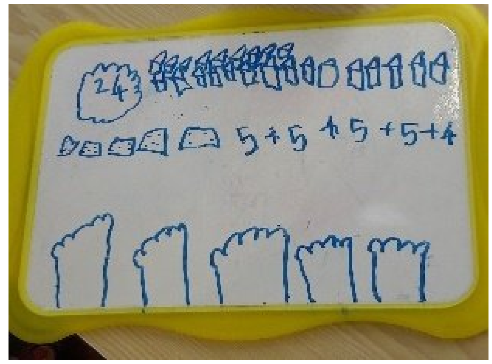
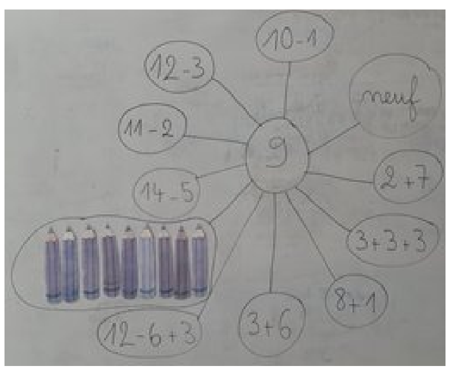
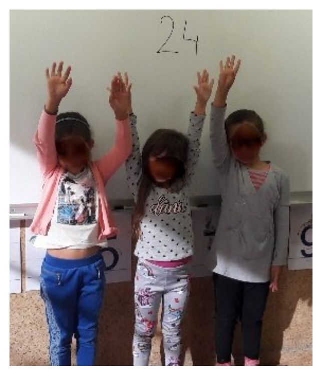


Photo 8 : *Phase écrite du rituel.*

3.2. Comment ce rituel peut-il intégrer l'élève dans le collectif classe tout en restant différencié ?

La succession des trois phases quotidiennes permet à l'élève de vivre un temps individuel puis d'être intégré dans le groupe classe lors de la phase collective. Cette phase collective peut prendre différentes formes, parmi lesquelles on peut citer la construction d'une carte collective des représentations à partir des propositions des élèves, un retour sur une ou plusieurs productions d'élèves intéressantes et suscitant un débat, ou encore la représentation du nombre par les doigts des élèves... (*cf.* photos 9 et 10).





Photos 9 et 10 : *Phase collective.*

L'ardoise utilisée les premiers jours de la semaine offre un support léger d'écriture : l'élève efface, ré-écrit, se corrige… Elle ne permet pas de conserver une trace. Au contraire, le support du carnet des jours d'école, utilisé les vendredis, permet à l'enseignant d'analyser avec finesse, de manière différée les acquis des élèves mais aussi leurs besoins pour réajuster les modalités de différenciation. L'enseignant peut ainsi sélectionner les erreurs et/ou propositions nouvelles sur lesquelles il peut prendre appui dans les séances suivantes ou lors de la phase collective. Du côté des élèves, ce carnet permet de garder trace, de synthétiser, de s'engager dans une production, de s'auto-évaluer en percevant une évolution dans le temps. Le carnet peut aussi être présenté aux parents en cours d'année.

Comment les besoins individuels des élèves peuvent-ils être pris en compte avec un tel dispositif ? D'une part, la consigne est volontairement ouverte, « représentez de toutes les manières que vous connaissez », afin d'offrir un espace de liberté aux élèves. Cet espace donne souvent lieu à ce que nous avons nommé « des perles ». Les perles sont des représentations repérées par l'enseignant pour être partagées avec le groupe et inciter les élèves à s'en saisir. Elles peuvent être repérées pendant la phase individuelle ou *a posteriori* lorsque l'enseignant analyse les carnets des jours d'école. C'est par exemple le cas des doubles (36 jours est le double de 18 !) ou des presque-doubles (37 est un presque-double : le double de 18, plus 1) lorsqu'ils apparaissent. D'autre part, les plus fragiles ont à disposition du matériel personnel, identique à celui utilisé au tableau, leur permettant de travailler en mode énactif. Le matériel est utilisé comme matériel de référence pour toutes les activités de numération de la classe. Lorsqu'un autre matériel est utilisé, le lien conceptuel entre ce nouveau matériel et le matériel des crayons est explicité, rejoignant certains des résultats de la méta-analyse menée par Carbonneau et ses collègues (2013), décrits en section ***2.2. Les caractéristiques d'un matériel adapté à l'apprentissage***. Un outil spécifique vient aussi renforcer cet entraînement et construire les apprentissages pour les plus fragiles : une liste de représentations incontournables. Cette liste d'incontournables évolue pendant l'année (*cf.* photos 11 et 12). Par exemple, l'enseignant explicite la présence incontournable des trois codes : arabe, en lettres et analogique. Plus tard, il demandera une décomposition en appui sur le 5 ou le 10. Cette liste de représentations en nombre restreint est présentée aux élèves les plus fragiles, pour les rassurer face à une consigne qui peut paraître trop ouverte.

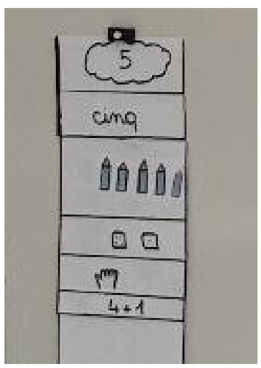


Photo 11 *: Incontournables proposés en période 1.*

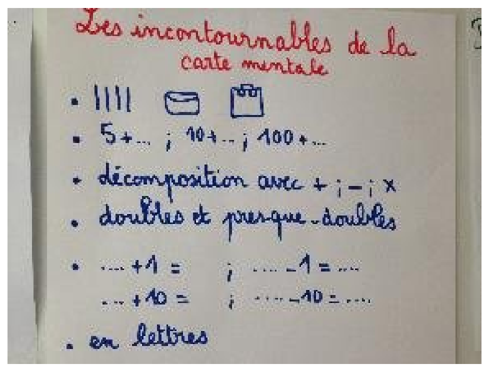


Photo 12 *: Incontournables proposés en période 3.*

3.3. Comment ce rituel peut-il nourrir les apprentissages mathématiques ?

Voyons maintenant quels sont les apprentissages pris en charge par le rituel des crayons. Comment avons-nous intégré l'importance de la construction de la dizaine et le travail sur l'aspect décimal ?

Comment le rituel permet-il de construire la dizaine ?

Au bout d'une quarantaine de jours de classe (avant Noël), la routine s'installe. Le dénombrement un à un des crayons devient fastidieux et source d'erreurs. Pour remobiliser les élèves, des rebondissements apparaissent qui permettent d'introduire le principe du groupement.

Le groupement

L'enseignant guide les élèves vers l'organisation et le groupement des crayons. Pour cela, il peut interroger les élèves sur comment gagner du temps dans le dénombrement quotidien. Les élèves proposent de grouper et de laisser des repères de ces groupements. Ces propositions s'appuient sur le travail en calcul mental mené en parallèle (*cf.* annexe 1) : par exemple, dans la classe où un travail sur la comptine de 2 en 2 était mené, les élèves ont d'abord proposé de grouper par 2. Chaque proposition de groupement ou d'organisation est testée (*cf.* photos 12, 13 et 14). Finalement, le groupement par 10 l'emporte suite à des propositions ou le guidage de l'enseignant : l'enseignant s'appuie, par exemple, sur le tableau des nombres d'Ermel qui peut être travaillé en parallèle ou sur la structuration de la comptine orale. Les crayons sont alors organisés en paquets de 10 au tableau. Le point fort de cette proposition de rituel est d'attendre le besoin de grouper. On ne groupe pas par paquet de 10 lorsque le nombre d'objets à dénombrer est faible. Contrairement au rituel des pailles, le groupement arrive comme une *nécessité* d'organisation.

L'échange

Une fois le groupement par 10 bien installé, le tableau est un jour malencontreusement mélangé… Il faut tout remettre en place et la trousse, symbole de la dizaine, est introduite en échange de 10 crayons comme outil facilitant le dénombrement (*cf.* photo 15). Les échanges s'opèrent, la numération décimale est en marche. Les 10 crayons peuvent au départ être accrochés avec un élastique derrière la trousse, permettant ainsi la vérification pour les plus fragiles. Plus tard, le cartable apparaîtra, représentant la centaine. La dizaine, puis la centaine, sont donc construits tels que les chercheurs cités dans la partie théorique le préconisaient. Une fois que les trousses et cartables sont introduits, l'enseignant veille à dégrouper certains jours les échanges. Il peut, par exemple, prétexter un manque de trousse ou forcer à ré-écrire le nombre en crayons : les élèves doivent alors dégrouper.

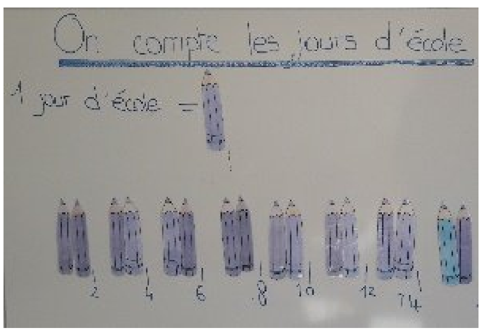


Photo 13 *: Groupements par 2.*

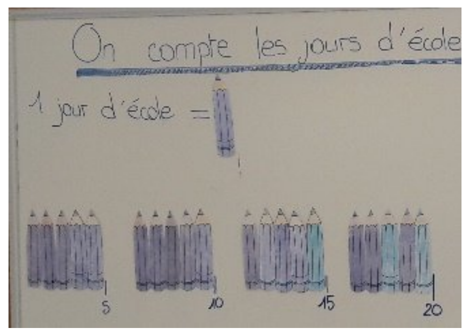


Photo 14 *: Groupements par 5.*

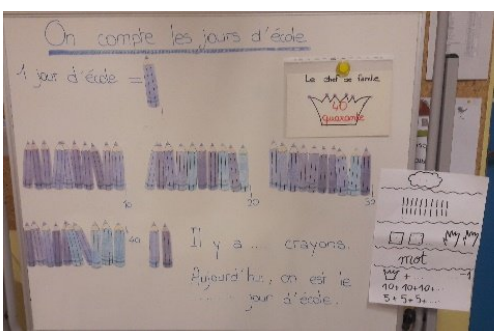


Photo 15 *: Groupements par 10.*

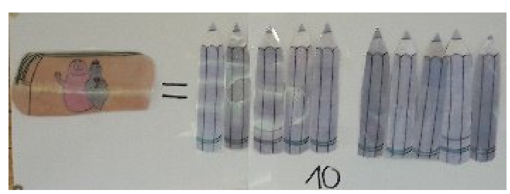


Photo 16 *: Introduction de la trousse.*

Comment le rituel permet-il de mobiliser l'aspect décimal ?

Plus le nombre de crayons augmente dans l'année et plus les possibilités de décliner la phrase « Aujourd'hui, il y a n crayons, nous sommes le $n^{\text{ième}}$ jour d'école » s'étoffent grâce aux groupements par 10. Par exemple, au 147e jour d'école, cette phrase s'est déclinée ainsi : « Aujourd'hui, il y a 147 crayons, on peut aussi dire qu'il y a 1 cartable 4 trousses et 7 crayons, ou encore 14 trousses et 7 crayons ». Une autre élève a complété la phrase en utilisant le vocabulaire centaine, dizaine, unité : « On peut aussi dire 1 centaine 4 dizaines et 7 unités ou 14 dizaines et 7 unités ou 147 unités ». Les relations entre centaines, dizaines et unités sont travaillées dans un premier temps à l'oral. Naturellement, les élèves s'emparent à leur manière de ces conversions sur ardoises ou dans leurs carnets (*cf.* photo 17).

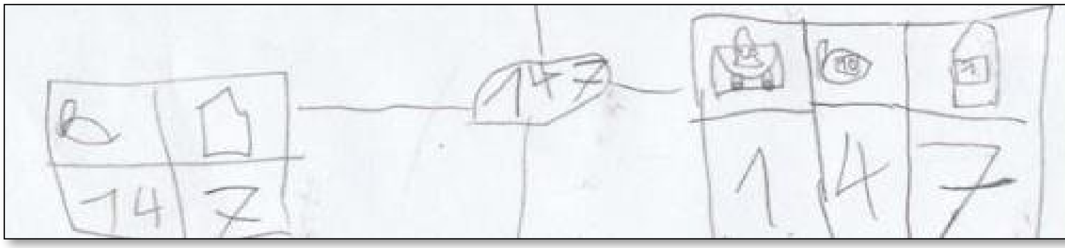
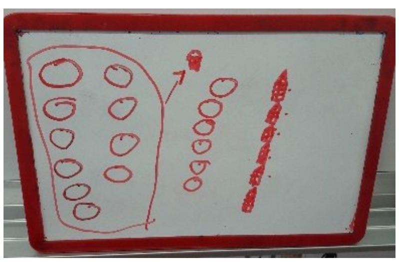


Photo 17 *: Différentes représentations du nombre 147. À gauche, on peut lire 14 trousses et 7 crayons. On remarque aussi la liberté de cet élève de placer un nombre à plusieurs chiffres dans une colonne du tableau de numération.*

La consigne de l'enseignant peut aussi conduire l'ensemble de la classe à travailler spécifiquement ces relations décimales en jouant sur les contraintes pour écrire un nombre. Ça a été le cas du 166e jour d'école : *« Aujourd'hui vous allez représenter le nombre de jours sans utiliser le cartable »* (*cf.* photos 18 et 19). Les élèves peuvent alors représenter 166 à l'aide de 16 trousses et 6 crayons ou encore 166 crayons. Avec ce type de consignes, il est rare de voir des représentations semi-groupées qui, pourtant, sont les seules garantes d'une mobilisation de l'aspect décimal.



Photos 18 et 19 *: Différentes représentations du nombre 166. À gauche, une tentative de décomposition en 16 dizaines et 6 unités : l'élève a toutefois groupé les dix dizaines. À droite, une tentative de représentation de 166 unités.*

C'est pourquoi l'enseignant doit veiller à contraindre la décomposition semi-groupée. Ça a été le cas du 131e jour d'école : « Aujourd'hui, vous allez représenter le nombre de jours d'école. Mais je ne veux voir le schéma que d'une seule trousse ». Cette fois, les élèves sont amenés à décomposer 131 de manière non canonique. Par exemple, un cartable, 1 trousse et 21 crayons.

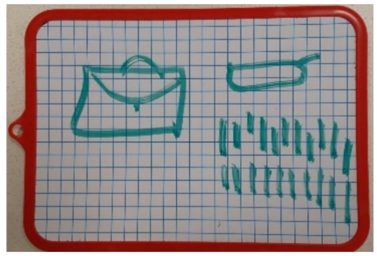


***Photo 20** : Représentation semi-groupée de 131 jours d'école avec la contrainte de ne représenter qu'une seule trousse.*

L'enseignant joue sur les contraintes de matériel pour faire émerger les différentes décompositions des nombres : il veille à ce que des décompositions semi-groupées émergent soit dans une phase de décodage (à partir du nombre du jour, les élèves représentent) soit dans une phase réciproque de codage (l'enseignant peut avoir tout mélangé et échangé une partie du matériel, l'élève doit alors retrouver le nombre).

3.4. Comment ce rituel peut-il être rassurant tout en garantissant l'évolution des apprentissages ?

Certains éléments du rituel restent identiques toute l'année. L'aspect très structuré des trois phases, des 3 jours d'ardoise et du jour du carnet du nombre permet aux élèves de savoir ce qu'ils ont à faire. Le matériel des crayons utilisé dans différentes activités est un matériel de référence pour les élèves, comme le préconisait la méta-analyse de Carbonneau et ses collègues. Ils peuvent s'y référer même lorsque l'activité utilise un autre matériel (des abaques, des pascalines (Soury-Lavergne *et al.*, 2013), etc.). La consigne générale (« représenter de différentes manières ») reste elle aussi identique.

En revanche, les enjeux mathématiques évoluent, en jouant sur les représentations incontournables proposées aux plus fragiles, sur le nombre en jeu et aussi, comme nous l'avons vu dans la section précédente, sur les contraintes matérielles. Le rituel est jalonné par des étapes cruciales qui s'appuient sur le travail mené à travers des situations de référence (*fourmillion, banquier* (Argaud *et al.*, 2016)). Nous présentons les grandes lignes de la progression du rituel (*cf.* annexe 1) :

En période 1, le dénombrement se fait de un en un. Pour certains élèves, le travail est centré sur la comptine orale, la graphie des chiffres, la notion de collection équipotente (dessiner autant de fleurs que de crayons) mais aussi, selon les propositions des élèves, le dénombrement de 2 en 2, de 5 en 5.

La structure du rituel : trois phases quotidiennes, un carnet du nombre.

Un élève est mobilisé chaque jour pour ajouter un crayon au tableau et donner le nombre du jour. Tous les élèves de la classe représentent individuellement le nombre puis collectivement lors d'une mise en commun. Le carnet des jours d'école est utilisé une fois par semaine à la place de l'ardoise.

Une liberté d'expression avec des représentations incontournables

Les représentations ne sont pas imposées mais construites par chaque élève. Cette liberté d'expression permet l'apparition de perles. Les élèves plus en difficulté sont aidés par des outils appropriés, notamment, la liste des incontournables (*cf.* photos 11 et 12) ou du matériel individuel.

Des points cruciaux d'apprentissage

L'acte de schématiser doit être travaillé explicitement par l'enseignant. Le groupement apparaît comme une nécessité d'organiser une grande collection. L'introduction du groupement par 10, souvent proposé par les élèves eux-mêmes, doit être relié aux autres supports présents dans la classe. Les phases de groupement (10 contre 1) et de dégroupement (1 contre 10) doivent être proposées régulièrement. Enfin, une vigilance didactique doit être portée sur la présence des collections semi-groupées.

La proposition du rituel des crayons cherche à intégrer les apports théoriques présentés plus haut dans l'objectif d'impacter favorablement les apprentissages des élèves sur leur compréhension de la numération. Il nous semble que le rituel proposé est avant tout l'occasion de revisiter des points didactiques de la numération et d'éviter une routinisation inadaptée aux apprentissages. La manipulation, le partage des connaissances à travers la carte des représentations, la mise en avant des perles, offrent des points d'appui propices à maintenir l'attention et la motivation des élèves. Le rituel est installé dans la progressivité des apprentissages. Nous allons nous intéresser maintenant aux productions des élèves qui ont suivi ce rituel sur une année pour illustrer sa mise à l'épreuve.

4. Analyse de productions issues du carnet du nombre

4.1. Grille d'analyse des productions

En lien avec les représentations incontournables (décrites en section **3.2.**) et les apports théoriques sur les représentations du nombre, nous avons créé une grille d'analyse pour évaluer l'évolution des représentations du nombre proposées dans les carnets du nombre. Cette grille liste différentes représentations du nombre qui peuvent apparaître dans les productions de chaque élève au fil des semaines :

- représentation de la quantité par un dessin ou schéma d'objets (cubes, ronds, fleurs, …) ;
- représentation schématisée des crayons, des trousses, du cartable ;
- représentation schématisée d'un autre matériel (abaques, boîtes de Picbilles, …) ;
- écriture chiffrée ;
- écriture en mots ;
- écriture additive, soustractive, multiplicative.

Quatre critères d'évaluation peuvent compléter cette grille :

- l'élève produit des « perles » : des représentations non enseignées à ce stade-là par l'enseignant ;
- l'élève s'empare des « perles » mises en avant en classe ;
- l'élève opère des groupements ;
- l'élève opère des conversions.

L'enseignant peut utiliser cette grille pour analyser les apprentissages en cours et piloter sa classe en choisissant par exemple de mettre en avant une nouvelle représentation ou de commander une représentation contrainte mettant en œuvre des conversions.

4.2. Analyse de productions de CP

Dans ce paragraphe, nous analysons des productions d'élèves d'une classe de CP ayant travaillé avec le rituel « les crayons » lors de l'année 2017-2018. Cette classe est située dans un établissement classé REP dans une commune limitrophe de Grenoble. L'école accueille des élèves issus de milieux sociaux mixtes. La classe se compose de 23 élèves dont 3 élèves allophones. Aux évaluations nationales de début de CP (évaluant les acquis de GS), le taux de réussite moyen de la classe sur l'épreuve de mathématiques était de 69 %.

Nous allons proposer une illustration de ce qui précède à travers l'analyse des progrès de trois élèves : une élève en difficulté appelée S, une élève qui est dans la moyenne de la classe appelée O, et enfin N, une élève que l'on peut qualifier de performante dans son travail mathématique. L'ensemble des productions des élèves a été analysé mais nous proposons un focus sur seulement trois élèves. Le choix s'est porté vers ces élèves pour les raisons suivantes : S parce qu'elle présentait un déficit langagier qui la mettait en difficulté dans la compréhension de consignes ; O parce qu'elle a obtenu un taux de réussite de 69,2 % la positionnant exactement dans la moyenne de la classe ; et enfin N pour son attitude d'élève chercheur. Ces trois élèves nous semblent représenter les profils types de cette classe.

Les productions d'une élève située dans la moyenne de la classe

L'élève O a un taux de réussite aux évaluations de rentrée de 69 % et se situe exactement au niveau de la moyenne de la classe. En septembre, l'élève O connaît la comptine numérique jusqu'à 28, elle sait lire les nombres jusqu'à 9, les écrire jusqu'à 12. Elle ne réussit pas à dénombrer une collection de 17 cubes : elle les touche mais ne les déplace pas et en compte certains plusieurs fois. Les productions (*cf.* photos 21, 22 et 23) de cette élève à trois moments de l'année illustrent la progression des apprentissages. Ces productions ont été réalisées spontanément par l'élève sur son carnet, sans autre guidage que les temps collectifs d'explicitation et de partage proposés chaque jour, comme expliqué dans la section précédente.

Photo 21 *: Représentation du nombre 20 par l'élève O en septembre : « représentation de la quantité par un dessin ou schéma d'objets ».*

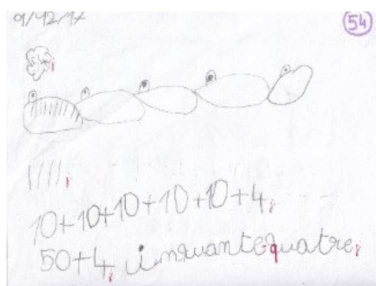


Photo 22 *: Représentation du nombre 54 par l'élève O en décembre : écriture chiffrée, écriture en lettres, écriture additive, présence de groupement.*

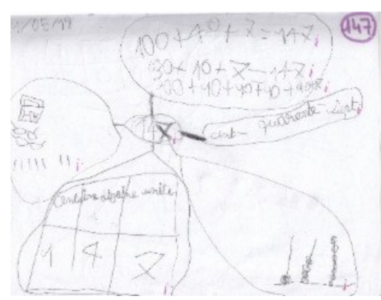


Photo 23 *: Représentation du nombre 147 par l'élève O en mai : apparition d'une représentation d'un autre matériel (abaque) et de nouvelles décompositions additives (semi-groupées).*

Le 20e jour d'école, en septembre (*cf.* photo 21), O produit une écriture chiffrée erronée (71), dessine 20 crayons et 19 croix, deux représentations analogiques dont une n'est pas correcte.

Le 54e jour, en décembre (*cf.* photo 22), elle produit une écriture chiffrée correcte (54), schématise les crayons et les trousses, fait deux décompositions additives qui prennent appui sur le schéma et finit par une écriture littérale du nombre. Les représentations dessinées de la quantité ont disparu. À ce moment de l'année, les productions de O suivent toujours le même ordre : écriture chiffrée, schéma, décomposition additive (qui symbolise le schéma et apparaît comme une traduction mot à mot du code analogique en code arabe) et écriture en mots. Elle propose cinq représentations distinctes du nombre, toutes correctes.

En mai (*cf.* photo 23), O réalise une carte mentale de 5 représentations du nombre (écriture littérale, schéma des trousses et crayons, décompositions additives, tableau de numération, abaque) qui sont toutes correctes. Elle décompose le nombre dans un tableau de numération en précisant le vocabulaire centaine, dizaine, unité.

Lors des évaluations du mois de juin, O connaissait la comptine numérique jusqu'à 199, elle savait lire et écrire les nombres jusqu'à 100 et dénombrer une collection de 37 cubes, en les comptant de un en un.

Ces éléments sont synthétisés dans la grille d'analyse ci-dessous, qui reprend les critères présentés en section **4.1.**

Indicateurs des carnets	septembre	mai
Écriture chiffrée	erronée (17 pour 20).	correcte (147).
Écriture en mots	—	correcte.
Représentation de la quantité	correcte.	correcte.
Schématisation	non. 	oui. 
Présence de groupements	—	oui.
Transfert vers autre matériel	—	abaque.
Écritures additives	—	3 correctes.
Écritures soustractives	—	—
Écritures multiplicatives	—	—
Écritures nouvelles	—	—
Connaissance comptine numérique	28	199
Lecture de nombres	jusqu'à 9.	jusqu'à 100.
Dictée de nombres	jusqu'à 12.	jusqu'à 100.
Dénombrer une collection groupée (37 cubes)	non (ne déplace pas les cubes et en compte certains plusieurs fois).	oui (procédure de comptage de 1 en 1).

***Tableau 2** : Grille d'analyse de deux productions de l'élève O.*

Les productions d'une élève en difficulté

L'élève S est une élève allophone dont le milieu familial est très éloigné de la culture scolaire. Elle a un déficit au niveau de ses acquis langagiers, des manques importants de vocabulaire et est en difficulté de manière générale sur la compréhension des consignes orales. Son taux de réussite aux évaluations de rentrée est de 30,8 %. En septembre, elle connaît la comptine numérique jusqu'à 28, sait lire et écrire les nombres jusqu'à 9 avec une confusion du 6 et du 9 et réussit à dénombrer une collection de 17 cubes.

Analysons les productions de S à trois moments de l'année (*cf.* photos 24, 25, 26).

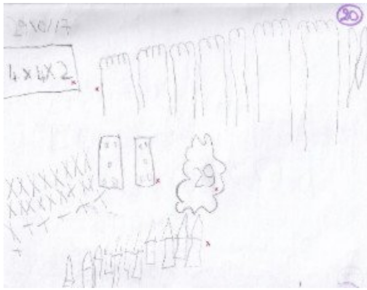


Photo 24 *: Représentation du nombre 20 par l'élève S en septembre.*

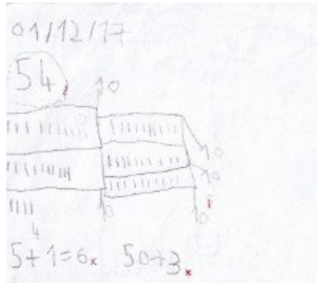


Photo 25 *: Représentation du nombre 54 par l'élève S en décembre.*

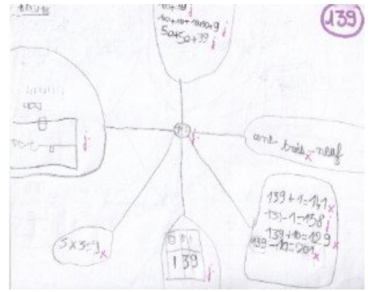


Photo 26 *: Représentation du nombre 139 par l'élève S en mai.*

En septembre, l'élève S produit une écriture chiffrée erronée (29) et ne fait pas le lien entre le nombre et la quantité d'éléments des collections qu'elle représente (11 crayons, 24 croix, 10 points, 27 doigts). Deux représentations du nombre sont présentes (écritures analogiques et écriture chiffrée) mais ne sont pas correctes.

En décembre, son écriture chiffrée du nombre est correcte (54) et elle fait le lien entre le nombre et sa quantité. Sa représentation analogique est constituée de 54 traits qui symbolisent l'ensemble des crayons regroupés en 5 trousses et 4 crayons isolés. Les écritures mathématiques associées sont incorrectes (5+1, 50+3). Trois représentations différentes du nombre dont deux sont correctes.

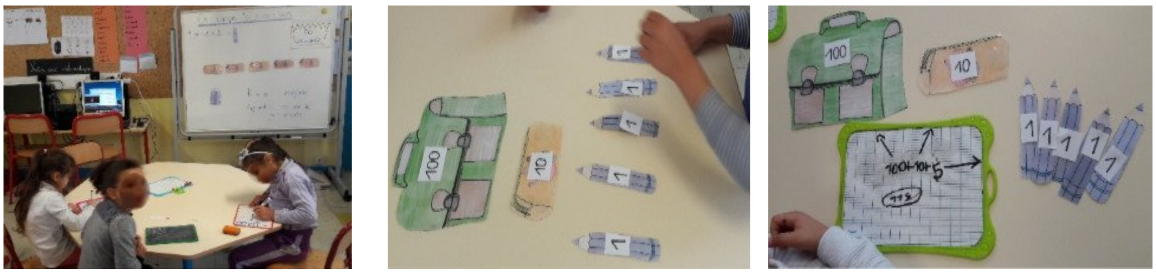
Indicateurs des carnets	septembre	mai
Écriture chiffrée	erronée (29 pour 20).	correcte (139).
Écriture en mots	—	erronée (elle écrit ce qu'elle voit).
Représentation de la quantité	erronée.	correcte.
Schématisation	non.	oui.
Présence de groupements	—	oui.
Transfert vers autre matériel	—	—
Écritures additives	—	partiellement correctes.
Écritures soustractives	—	erronées.
Écritures multiplicatives	—	—
Écritures nouvelles	—	—
Connaissance comptine numérique	28	69
Lecture de nombres	jusqu'à 10 (confusion 6/9).	jusqu'à 100 (erreur sur 95).
Dictée de nombres	jusqu'à 10.	jusqu'à 100 (erreur sur 75).
Dénombrer une collection groupée (37 cubes)	non (ne déplace pas les cubes et en compte certains plusieurs fois).	oui (procédure de comptage de 1 en 1).

Tableau 3 *: Grille d'analyse de deux productions de l'élève S.*

En mai, S réalise une carte mentale de six représentations du nombre partiellement correctes. Le lien entre numération orale et numération écrite est en cours d'acquisition (elle écrit « cent-trois-neuf » pour « cent-trente-neuf »). Elle produit beaucoup plus de décompositions mathématiques qu'en décembre : huit productions dont une moitié est correcte.

Lors des évaluations du mois de juin, l'élève S connaissait la comptine numérique jusqu'à 69. Elle savait lire et écrire les nombres jusqu'à 100 avec des confusions sur les 60/70, 80/90 et a réussi à dénombrer une collection de 37 cubes, en les comptant de un en un.

S a bénéficié de différentes modalités de différenciation (*cf.* photos 27 à 29) : elle a travaillé une grande partie de l'année, avec un petit groupe d'élèves disposant du matériel du rituel et de l'étayage de l'enseignante. La composition de ce groupe a évolué avec l'analyse régulière des productions des carnets des jours d'école.



***Photos 27 à 29** : Modalités de différenciation : certains élèves ont leur propre jeu de matériel. Ils travaillent sur une table d'appui avec l'enseignant.*

Les productions d'une élève performante en mathématiques

L'élève N. est une élève performante dans l'ensemble des domaines scolaires. Elle est parfaitement lectrice lors de son entrée au CP. Son taux de réussite en mathématiques aux évaluations de rentrée est de 96 %

En septembre, elle connaît la comptine numérique jusqu'à 78, elle sait lire et écrire les nombres jusqu'à 20 et sait dénombrer une collection de 37 cubes en comptant de un en un.

***Photo 30** : Représentation du nombre 10 par l'élève N en septembre.*

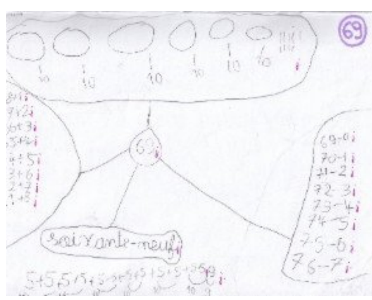


***Photo 31** : Représentation du nombre 69 par l'élève N en décembre.*

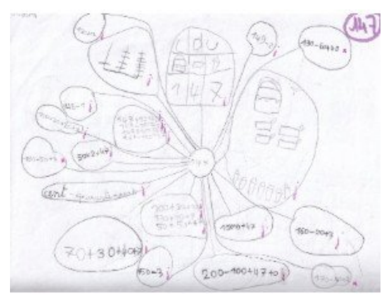


***Photo 32** : Représentation du nombre 147 par l'élève N en mai.*

En septembre (*cf.* photo 30), l'élève N. produit une écriture chiffrée correcte. Elle représente le nombre principalement de manière analogique (mains, dés, collection de crayons et autres éléments). Elle connaît les décompositions du nombre 10 (9 et 1, 3 et 7) mais n'a pas encore acquis l'écriture mathématique du signe **+** : trois représentations du nombre sont déjà maîtrisées.

En décembre (*cf.* photo 31), elle schématise les trousses en utilisant l'écriture chiffrée (10). Elle produit majoritairement des décompositions mathématiques additives (68+1, 67+2, 66+3, 65+4, …) et soustractives (69 − 0, 70 − 1, 71 − 2, …). Elle agit de manière mécanique en appliquant ses propres algorithmes (elle enlève un au premier terme de la somme et ajoute un au second…). Cinq représentations différentes sont présentes dans son carnet le 69e jour d'école. Toutes ses productions sont correctes.

En mai (*cf.* photo 32), elle réalise une carte mentale très dense de dix-neuf représentations du nombre. Sa production s'est enrichie d'écritures multiplicatives et mixtes (50×2+47 ; 10×10+47 ; 70+30+40+7 ; 130+10+7 ; 200 − 100+47+0, …). Elle prend appui sur les nombres 50, 100 et leurs décompositions (70+30 ; 50+50), elle exploite toutes les « perles » mises en évidence par l'enseignante dans les phases collectives. L'élève N se positionne en élève chercheur, qui prend des risques dans sa quête de nouvelles écritures du nombre, ce qui la conduit aussi à produire des écritures erronées (190 – 60+49 ; 170 – 40+7 ; 180 – 50+7).

Lors des évaluations du mois de juin, l'élève N connaît la comptine numérique au-delà de 200, elle sait lire et écrire les nombres jusqu'à 100 et sait dénombrer des collections de 37 éléments en utilisant le groupement (par 2 ou par 10).

Indicateurs des carnets	septembre	mai
Écriture chiffrée	correcte.	correcte.
Écriture en mots	—	correcte.
Représentation de la quantité	correcte.	correcte.
Schématisation	non.	oui.
Présence de groupements	—	oui.
Transfert vers autre matériel	—	abaque.
Écritures additives	décompose 10 sans le signe + .	8 écritures correctes. (100+20+20+… ; 50+50+… ; 70+30+…)
Écritures soustractives	—	10 écritures (200 − 100+… ; dizaine sup. − …) dont 3 erronées.
Écritures multiplicatives	—	2 écritures correctes. (2×50 … ; 10×10 …)
Écritures nouvelles	—	oui.
Connaissance comptine numérique	78	au-delà de 201.
Lecture de nombres	jusqu'à 20.	jusqu'à 100.
Dictée de nombres	jusqu'à 17.	jusqu'à 100.
Dénombrer une collection groupée (37 cubes)	oui (procédure de comptage de 1 en 1).	oui (procédure qui mobilise le groupement).

Tableau 4 *: Grille d'analyse de deux productions de l'élève N.*

Pour ces trois élèves, nous constatons une progression dans les apprentissages mathématiques : connaissance de la comptine, lecture des nombres, dénombrement d'une collection d'objets, calculs additifs, soustractifs, …

Le rituel semble permettre à chaque élève d'enrichir ses connaissances, chacun à son niveau et à son rythme.

Conclusions et perspectives

Depuis quelques années, il est courant d'observer dans les classes le dénombrement des jours lors d'un rituel dénommé *« chaque jour compte »*. Notre groupe IREM a choisi de retravailler ce rituel autour de trois caractéristiques clés : un rituel cherchant à intégrer l'individu dans un collectif tout en étant différencié, un rituel qui nourrit des apprentissages et enfin, un rituel rassurant mais évolutif. En tant que didacticiens, nous nous sommes principalement focalisés sur les apprentissages potentiels qu'offrait ce rituel et il serait intéressant de pouvoir intégrer des cadres issus d'autres communautés pour analyser et enrichir l'aspect rassurant du rituel.

La proposition de mise en œuvre présentée dans cet article cherche à éviter les écueils du rituel classique du *« chaque jour compte »* :

- Le rituel « les crayons » permet de mettre l'accent sur l'**aspect décimal** de la numération décimale en s'appuyant sur la manipulation. Les notions de dizaine, de centaine ainsi que les relations entre les unités de numération sont construites progressivement avec les élèves et se placent au cœur des activités proposées. La notion de groupement apparaît à l'élève comme une procédure nécessaire pour dénombrer et non comme une réponse à une injonction de l'enseignant.
- Les conversions et les décompositions canoniques ou semi-groupées sont régulièrement travaillées, assurant une compréhension de la numération.
- Différentes représentations du nombre sont travaillées. Elles reprennent les modes de représentation décrits par Bruner et Dehaene : le mode symbolique englobant le code verbal et arabe, le mode énactif (manipulation des crayons) et iconique (schémas des crayons) précisant le code analogique.
- De par les nombres proposés, l'usage du matériel, la manipulation et les représentations ouvertes avec un espace de liberté, ce rituel évolue et s'adapte au rythme d'apprentissage de chaque élève. La présentation des progrès de trois élèves de CP aux profils très différents illustre la capacité du rituel à répondre aux besoins de chacun. Tous peuvent être au travail sur une tâche collective qui ne se distingue pas par le nombre travaillé mais par le nombre ou le type de représentation demandé. Des représentations incontournables sont identifiées sécurisant l'élève fragile tandis qu'un espace de liberté permet à l'élève de devenir chercheur s'il le souhaite.

Des traces écrites (cartes de représentations collectives et carnet des jours d'école) accompagnent la structuration des connaissances. Par l'analyse des représentations proposées, l'enseignant peut enrichir les procédures des élèves, affiner son enseignement et différencier. Au fil de l'année, les nombres en jeu augmentent : on démarre avec de petits nombres, on compte de un en un, puis de dix en dix. On joue avec ces nombres selon des consignes qui évoluent. Chaque carte des représentations est source d'apprentissage et d'assise des connaissances. Les élèves s'emparent des représentations des autres, ils capitalisent la connaissance apportée par le groupe et mise en avant par l'enseignant.

Toutefois, les progrès ne peuvent être attribués au rituel seul. Le travail mené autour du rituel n'est assurément pas suffisant pour traiter la numération décimale : il s'appuie sur des séquences dédiées à l'installation de la compréhension des enjeux de la numération. Nous avons proposé des articulations entre rituel et situations de référence mais d'autres situations (par exemple le *chiffroscope*, Soury-Lavergne *et al.*, 2020) pourraient trouver leur place et enrichiraient le travail proposé.

À la suite de notre expérimentation au CP et CP-CE1, nous avons proposé un travail similaire dans d'autres niveaux de classe du CE2 au CM2. Le dénombrement des jours d'école n'est plus adapté à ce niveau de classe mais le rituel consiste toujours à réaliser régulièrement — voire de façon hebdomadaire — différentes représentations d'un nombre donné dans un carnet de nombres. Le nombre proposé pour réaliser la carte est choisi par l'enseignant sous différentes formes : oral, écrit en mots (code verbal), écrit en chiffres (code arabe) ou présenté au moyen du matériel ou d'une droite numérique (code analogique). Différents exemples sont proposés en annexe 2 (*cf.* photos 33 à 37). Les caractéristiques clés du rituel des crayons sont reprises : l'accent mis sur l'aspect décimal de la numération, l'utilisation d'un matériel de référence, l'espace de liberté pour différencier et adapter, l'espace de liberté donné à chaque élève permettant l'apparition de « perles », les représentations dans les différents codes et, enfin, l'affichage des incontournables qui sert de support aux élèves les plus fragiles. D'autres éléments complètent évidemment le rituel puisque dans les niveaux supérieurs le champ numérique abordé s'élargit : les écritures fractionnaires apparaissent en CM1 ainsi que des écritures jusqu'au millième en CM2. Des encadrements, des décompositions additives ou canoniques et un lien avec la résolution de problèmes (annexe 2, photo 33) s'insèrent peu à peu dans les cartes réalisées individuellement par les élèves.

Enfin, nous souhaitons conclure en mentionnant les retours informels des enseignants ayant expérimenté ce rituel : celui-ci semble développer un goût partagé pour les mathématiques, le plaisir de chercher dans un cadre sécurisant car réitéré tous les jours… et il semble contribuer à faire aimer les nombres !

Références bibliographiques

Amigues, R. & Zerbato-Poudou, M.-T. (2009). *Comment l'enfant devient élève : Les apprentissages à l'école maternelle*. Paris :Retz.

Argaud, H.-C., Douaire, J., Emprin, F., Emprin-Charotte, F. & Gerdil-Margueron, G. (2016). *Les Essentielles ERMEL CP*. Hatier.

Barth, B.-M. (1985). Jérôme Bruner et l'innovation pédagogique. *Communication & Langages, 66*(1), 46-58.
https://doi.org/10.3406/colan.1985.3656

Bednarz, N. & Janvier, B. (1984). La numération : Les difficultés suscitées par son apprentissage. *Grand N, 33*, 5-31.

Brissiaud, R. (2005). Comprendre la numération décimale : Les deux formes de verbalisme qui donnent l'illusion de cette compréhension. *Rééducation orthophonique, 43*(223), 225-237.

Bruner, J. S. (1973). *The relevance of education*. WW Norton & Company.

Butlen, D. & Pézard, M. (1991). *Un enseignement de didactique des mathématiques à des futurs instituteurs-maîtres-formateurs*. Institut de recherche sur l'enseignement des mathématiques de l'Université de Paris VII.

Carbonneau, K. J., Marley, S. C. & Selig, J. P. (2013). A meta-analysis of the efficacy of teaching mathematics with concrete manipulatives. *Journal of Educational Psychology, 105*(2), 380.

Chambris, C. (2012). Consolider la maîtrise de la numération et des grandeurs à l'entrée au collège. Le système métrique peut-il être utile ? *Petit x, 89*, 5-32.

Croset, M.-C., Divisia, A., Gimbert, F., Le Gac, N., Mastrot, G. & Stoffel, H. (2021). Habillé ou épuré : Le matériel en question. *Actes du XLVII^{e} colloque COPIRELEM*. Dispositifs et collectifs pour la formation, l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques, ARPEME.

Dehaene, S. & Cohen, L. (1995). Towards an anatomical and functional model of number processing. *Mathematical cognition, 1*(1), 83-120.

Dias, T. (2015). Nous sommes tous des mathématiciens. EPUB : Des clés pour faire aimer les maths. Magnard.

Gioux, A.-M. (2008). *Première école, premiers enjeux*. Hachette éducation.

Laski, E. V., Jordan, J. R., Daoust, C. & Murray, A. K. (2015). What makes mathematics manipulatives effective? Lessons from cognitive science and Montessori education. *SAGE Open, 5*(2).
https://journals.sagepub.com/doi/10.1177/2158244015589588

Merri, M., Vannier, M.-P., Briquet-Duhazé, S., Bertrand, M., Purdy, M., Raveaud, M., Montandon, C., Odier-Guedj, D., Hatchuel, F. & Jeffrey, D. (2015). Pour un renouveau des usages et des définitions des rituels à l'école. *Recherches en Éducation, HS n°8*.

Roche, A. & Clarke, D. M. (2006). When successful comparison of decimals doesn't tell the full story. *Proceedings of the 30th Conference of the International Group of Psychology of Mathematics Education*. Charles University (pp. 425-432).

Soury-Lavergne, S., Croquelois, S., Martinez, J. L. & Rabatel, J. P. (2020). Conceptions des élèves de primaire sur la numération décimale de position. *Revue de Mathématiques pour l'École, 233*, 128-143.

Soury-Lavergne, S. & Maschietto, M. (2013). À la découverte de la « pascaline » pour l'apprentissage de la numération décimale. In C Ouvrier-Buffet (éds.). *XXXIX^{e} colloque de la COPIRELEM Faire des mathématiques à l'école : De la formation des enseignants à l'activité de l'élève*.

Tempier, F. (2010). Une étude des programmes et manuels sur la numération décimale au CE2. *Grand N, 86*, 59-90.

Tempier, F. (2016). New perspectives for didactical engineering: an example for the development of a resource for teaching decimal number system. *Journal of Mathematics Teacher Education, 19*(2-3), 261-276.
https://doi.org/10.1007/s10857-015-9333-8

CNESCO (2015). *Nombres et opérations : premiers apprentissages à l'école primaire. Dossier de synthèse*.
http://www.cnesco.fr/fr/numeration.

Annexe 1
Programmation sur une année scolaire du « rituel des crayons »

Période 1

	SEPTEMBRE				OCTOBRE		
Nombre de semaines	S1	S2	S3	S4	S5	S6	S7
Nombre de jours d'école	J5	J10	J15	J20	J25	J30	J35
Points cruciaux	J1 : Introduction du 1er crayon	J6 : Début carte mentale	Début écriture en mots			Marqueurs de 10	
Phases	Dénombrement de 1 en 1		Notion de groupements : de 5 en 5, etc. Recherches de schématisation des crayons et d'anticipation du résultat (1)			Dénombrement de 10 en 10	
Exemples d'activités complémen-taires	Lucky Lucke (décomposition des 10 premiers nombres)		Introduction des doigts de Stella Baruk	Greli Grelo (addition de petits nombres)		Greli Grelo (compléments à 10)	

(1) : Les élèves proposent des idées pour anticiper le résultat du comptage par exemple laisser une trace du nombre écrit en chiffre pour le lendemain.

Période 2

NOVEMBRE			DECEMBRE			
S8	S9	S10	S11	S12	S13	S14
J40	J45	J50	J55	J60	J65	J70
vers J47 intro. trousse (2)			Des perles de décompositions semi-groupées peuvent apparaitre			
Apparition erreurs, lassitude justifie l'intérêt d'échanger 10 crayons contre 1 trousse			Recherches pour schématiser les trousses		Calcul avec utilisation du matériel pour comparer et ajouter le nombre de filles et de garçons (3)	
Ermel : Le banquier 3 contre 1 (distinction valeur-quantité) Boite noire (compléments à 10)			Ermel : Le château des nombres jusqu'à 50		Les petits doubles (jusqu'à 10) + activités autour du château des nombres	

(2) : L'introduction de la trousse se fera lorsque les élèves sauront bien compter de 10 en 10, on veillera à ne pas choisir un nombre rond (40). La proposition de J47 est purement indicative, on peut tout à fait introduire la trousse plus tard. Le groupement doit arriver comme une nécessité au groupe classe pour réussir à compter de manière plus fiable l'ensemble des crayons.

(3) : utilisation de l'écriture symbolique du calcul avec les signes + et = .

Période 3

JANVIER				
S15	S16	S17	S18	S19
J75	J80	J85	J90	J95
introduction termes dizaines et unités			Introduction du tableau de numération	L'approche de 100 stimule l'usage de la soustraction 100-…
		Conversion. introduction d'additions avec retenues en ligne et conversions : (1 trousse + 15 crayons)		
Activités spécifiques sur les nombres 60/70, 80/90 Ermel : Le château des nombres		Ermel : banquier (10 jetons blancs contre 1 jeton lui-même blanc)		

Périodes 4 et 5

MARS					AVRIL		AVRIL	MAI				JUIN JUILLET
S20	S21	S22	S23	S24	S25		S26	S27	S28	S29	S30	S31 à S36
J100	J105	J110	J115	J120	J125		J130	J135	J140	J145	J150	J155 à J180
Introduction du cartable						Vacances	Utilisation du tableau de numération			Enrichissement de la carte mentale du nombre : introduction de l'écriture 1c 6d 4u		
Recherches pour schématiser le cartable		Utilisation du matériel pour réaliser des additions posées Retour sur les cachotiers					Conversions. Collections semi-groupées					
Ermel : les Fourmillions							Les grands doubles (jusqu'à 20)			Ermel : Les carrelages		

Annexe 2
Développement des carnets du nombre dans d’autres niveaux

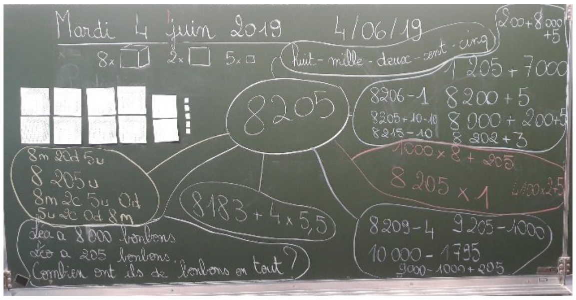


Photo 33 *: Carte mentale collective en CE2.*

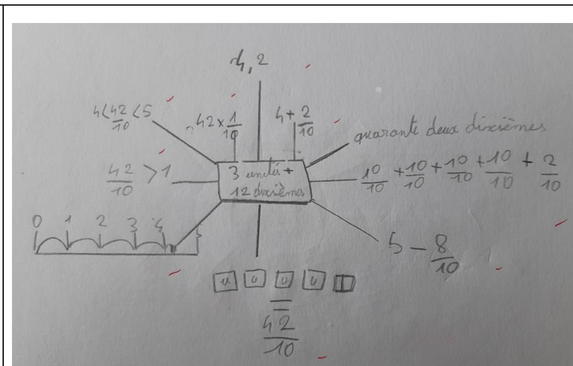


Photo 34 *: Cahier de CM1 pour 3 unités et 12 dixièmes.*

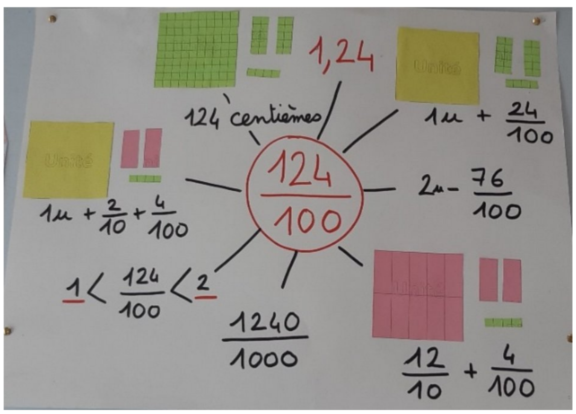


Photo 35 *: Carte mentale collective en CM1 avec le nombre* $\frac{124}{100}$.

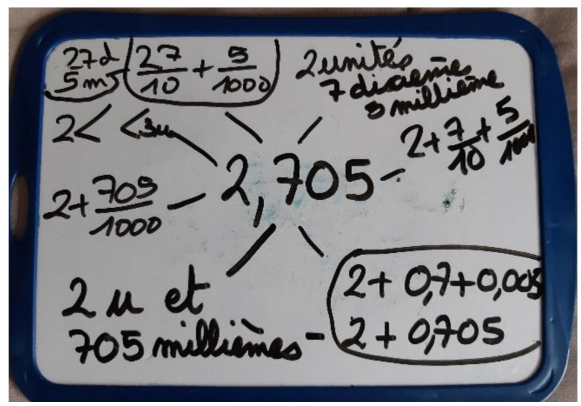


Photo 36 *: Ardoise élève de CM2 pour le nombre 2,705.*

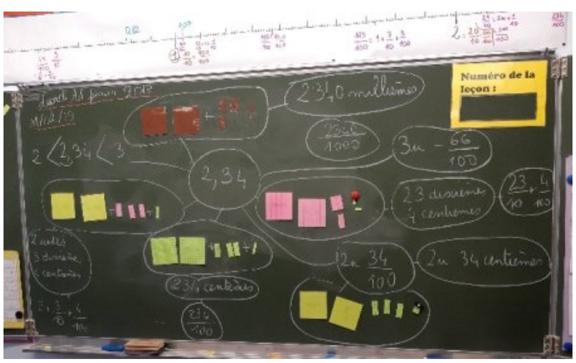


Photo 37 *: Carte mentale en CM2 avec le nombre 2,34.*