L’ANALYSE *A PRIORI* : UN OUTIL POUR L’ENSEIGNANT ? UN EXEMPLE AVEC LES PROBLÈMES DE PARTAGE À L’ÉCOLE ÉLÉMENTAIRE

Jeanne KOUDOGBO[1]
Université de Sherbrooke

Laurent THEIS[2]
Université de Sherbrooke

Karine MILLON-FAURÉ[3]
Université d’Aix-Marseille

Teresa ASSUDE[4]
Université d’Aix-Marseille

Jeannette TAMBONE[5]
Université d’Aix-Marseille

Marie-Pier MORIN[6]
Université de Sherbrooke

Résumé. Cet article propose un éclairage sur l’importance de l’analyse *a priori* pour l’enseignant. Prenant appui sur des travaux en didactique des mathématiques, nous précisons d’abord ce qu’est l’analyse *a priori* et cela à partir d’un élément indispensable, les variables didactiques. Ensuite à partir de la résolution de problèmes de partage à l’école élémentaire, nous illustrons comment les valeurs qui sont attribuées aux variables didactiques permettent d’anticiper les stratégies possibles de résolution, d’une part, et déterminent, d’autre part, les stratégies effectives des élèves. Puis nous confrontons ces prévisions aux stratégies effectivement mobilisées par les élèves. Pour finir, les analyses menées permettent d’introduire la nécessité de faire connaître aux enseignants la portée de l’analyse *a priori* et son utilité pour l’enseignement et l’apprentissage des mathématiques.

Mots-clés. Analyse *a priori*, variables didactiques, problèmes de partage, division, enseignement-apprentissage, mathématiques, didactique, 2e cycle primaire.

[1] jeanne.koudogbo@usherbrooke.ca

[2] laurent.theis@usherbrooke.ca

[3] karine.millon-faure@univ-amu.fr

[4] teresa.dos-reis-assude@univ-amu.fr

[5] jane.tambone@wanadoo.fr

[6] marie-pier.morin@usherbrooke.ca

Introduction

Cet article traite d'une question vive en didactique des mathématiques qui est celle du rôle de l'analyse *a priori* (que nous noterons désormais AP), non seulement dans les travaux de recherche (Brousseau, 1998, 1986 ; 1982a et b; Artigue, 1988 ; Artigue & Douady, 1986 ; Dorier, 2010 ; Perrin-Glorian & Hersant, 2003 ; Assude, Mercier & Sensevy, 2007 ; Vendeira-Maréchal, 2012 ; Mercier, 2017), mais aussi en tant qu'outil pour l'enseignant pour élaborer et gérer des situations d'enseignement et d'apprentissage (Eon, 2018). Ainsi, nous répondrons tout au long de l'article à deux questions :

1) « En quoi consiste l'AP et comment peut-on la mener ? » ;
2) « Pourquoi l'AP est-elle pertinente pour l'enseignant ? ».

Prenant appui sur des travaux en didactique des mathématiques, nous précisons d'abord ce qu'est l'AP, son rôle en recherche, et développons les éléments qui la caractérisent dont les variables didactiques. Puis, à partir d'un exemple de résolution de cinq problèmes de partage, nous illustrons comment il est possible de jouer sur les variables didactiques (numériques ou non-numériques) pour influencer les stratégies effectives des élèves. Enfin, les analyses et discussions faites dans cet article permettent de répondre à la deuxième question et d'introduire ainsi la nécessité de faire connaître aux enseignants l'importance de l'AP et, particulièrement, l'utilité de l'étude des variables didactiques pour l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques.

Il nous paraît important de préciser que les données à la base de nos analyses, dans cet article, ont été collectées dans le cadre d'une recherche plus large (Theis, Morin *et al.*, 2016 ; Theis, Assude *et al.*, 2014 ; Assude, Koudogbo *et al.*, 2016a ; Assude, Millon-Fauré *et al.*, 2016b ; Millon-Fauré, Theis *et al.*, 2018a ; Millon-Fauré, Theis *et al.*, 2018b, 2021 ; Assude, Marchand *et al.*, sous presse) visant à créer des conditions favorables à l'engagement et à l'apprentissage des élèves en difficulté lors de la résolution de problèmes mathématiques au travers de dispositifs d'aide (appelés « dispositifs préventifs ») utilisés en amont des séances en classe entière. Nous ne présenterons pas en détail ici ces recherches.

Pour répondre aux questions à l'étude, nous nous intéressons essentiellement aux données issues de l'observation de deux groupes d'élèves de 2^{e} cycle primaire (8-10 ans), provenant de deux classes différentes au Québec[7]. La séance observée dans chacune de ces classes avait pour objectif d'introduire la notion de partage équitable en amenant ces élèves à résoudre ce type de problèmes dans le cas où les nombres en jeu sont des entiers.

La séance SY, pilotée par l'enseignante titulaire Yolande, compte quatre élèves et trois problèmes leur sont proposés. Quant à la séance SS, pilotée par l'orthopédagogue Sylvie, elle en compte six et deux problèmes leur sont soumis.

1. Analyse *a priori*, à quoi renvoie-t-elle et comment la fait-on ?

D'emblée, nous nous plaçons dans le cadre de la théorie des situations didactiques de Brousseau (1998, 1986 ; 1982a et b) et des développements de celui-ci (Artigue, 1988 ; Artigue & Douady, 1986 ; Charnay, 2003 ; Dorier, 2010 ; Vendeira-Maréchal, 2012 ; Perrin-Glorian & Hersant, 2003) pour traiter des fondements théoriques de l'AP et dans ceux d'Assude, Mercier et Sensevy

[7] Ces deux groupes étaient composés d'élèves considérés comme étant en difficulté en résolution de problèmes par chacune des enseignantes, mais ce point ne sera pas utilisé dans la suite de nos analyses.

(2007) qui considèrent l'AP d'un triple point de vue analytique ; ce que nous présenterons par la suite.

Commençons par préciser ce qu'on entend par analyse *a priori*. Charnay (2003, p. 20) propose une définition de l'AP d'une situation pour l'enseignant. Selon l'auteur, celle-ci repose sur un travail d'hypothèses élaborées par l'enseignant en fonction de plusieurs éléments : *« les démarches, stratégies, raisonnements, procédures et solutions »* de l'élève selon ses connaissances ; *« les difficultés et les erreurs »* de l'élève ; *« l'étude des variables didactiques de la situation »* et de leurs *« effets sur le travail de l'élève »* ; ainsi que les considérations *« pédagogiques »* liées aux choix organisationnels de la classe ou aux interventions de l'enseignant et leurs répercussions sur le déroulement effectif de la séance.

Mais, historiquement, on ne peut appréhender l'AP sans rappeler Brousseau (1998) qui l'évoque dans la théorie des situations didactiques (TSD). Déjà, en 1982, il reconnaissait comment le savoir à faire apprendre aux élèves faisait l'objet d'une certaine détermination préalable imposée par le système éducatif. Selon Brousseau, il est important de donner un sens aux situations mais également aux stratégies de l'élève en anticipant les conséquences des choix effectués lors de la conception de la situation. Dans la TSD, l'AP s'insère dans la planification et l'expérimentation d'ingénieries didactiques. Pour Artigue et Douady (1986), un des moyens de l'ingénierie didactique repose sur l'élaboration du processus d'apprentissage d'un contenu à partir d'hypothèses, d'une analyse *a priori* des effets possibles, de l'observation des effets provoqués pour les comparer aux prévisions. L'ingénierie didactique vise ainsi la conception de situations didactiques et leur mise à l'épreuve pour vérifier si les apprentissages prévus chez les élèves sont faits (Artigue, 1988). Il va sans dire que l'AP, au cœur de l'ingénierie didactique, se révèle un moyen d'anticipation de faits ou comportements. En allant dans ce sens, Dorier (2010, p. 2) indique que l'AP permet de définir, *« un cadre (a priori) qui permet de penser l'activité dans sa généralité et d'offrir une sorte de grille d'analyse, permettant de mieux comprendre le travail des élèves (voire de l'enseignant) »*. Dit autrement, l'AP est un outil qui permet de rendre compte dans une situation, des anticipations à propos du déroulement de la séance, à partir d'un cadre d'analyse bien défini dont le chercheur a le contrôle. Par ailleurs, Margolinas (1992) précise que l'AP peut être complétée par l'analyse *a posteriori* des connaissances mobilisées par les élèves et des stratégies mises en œuvre dans la classe, qui permet de requestionner l'intérêt de la situation proposée en fonction du déroulement effectif de la séance. L'analyse *a posteriori « dépend des faits expérimentaux observés. [Elle] n'est alors pas réductible à l'analyse a priori, ni à une constatation d'adéquation entre l'analyse a priori et les résultats d'observation »* (p. 132).

Dans ce qui précède, si l'AP a pris forme dans le cadre de la recherche, graduellement celle-ci se transpose dans des séquences ordinaires d'enseignement dont la planification et la gestion est sous la responsabilité de l'enseignant. D'ailleurs, pour Eon (2018), l'AP est un outil d'aide à la préparation de la classe. Elle s'insère dans l'écriture d'un projet, dans les fiches préparatoires des séquences d'enseignement. Elle permet ainsi de *« faire un choix cohérent de jeux ou d'outils de manipulation qui répondent aux compétences des programmes et aux objectifs »* à mettre en œuvre en classe.

Mais on ne peut parler de la transposition de l'AP dans des séquences ordinaires sans référer aux travaux de Perrin-Glorian et Hersant (2003) qui distinguent *« deux types de séquences ordinaires »* en fonction du *« milieu »* qui prévaut :

1) celles où les élèves peuvent réaliser seuls la pertinence des stratégies mises en œuvre, uniquement grâce aux rétroactions du milieu antagoniste, face à une tâche mathématique (on parle alors de milieu « évoqué ») ;

2) celles où les actions de l'élève ne peuvent pas être validées par les rétroactions du milieu, mais seulement par les interventions du professeur.

Ainsi, dans le premier cas, il est possible de faire une AP fondée sur le milieu d'une situation avec lequel l'élève interagit, seul ou avec des pairs. Les concepts de milieu et de contrat didactique de la TSD de Brousseau sont utilisés pour montrer ce qui revient à l'élève et les opportunités qui lui sont offertes pour apprendre, en plus des aides apportées par le professeur (l'enseignant) dans les interactions avec l'élève. Ces concepts de la TSD permettent également

> *d'analyser des séquences de classe ordinaire, à la fois pour reconstruire une analyse a priori d'une situation didactique élaborée à partir des observations et pour l'analyse a posteriori de cette situation* (Perrin-Glorian & Hersant, 2003, p. 254).

Par ailleurs, pour Assude, Mercier et Sensevy (2007), l'AP permet de décrire les « possibles » avant toute réalisation et s'effectue en trois temps : une analyse descendante, une analyse ascendante du point de vue des élèves et une analyse ascendante des problèmes d'enseignement. Primo, l'analyse descendante s'intéresse au savoir et à ses enjeux mathématiques tels que précisés dans l'institution scolaire. Cette analyse descendante permet de cerner le savoir tel qu'introduit dans le programme d'étude avant qu'il ne soit transposé en enseignement en classe. Ainsi, nous ferons cette analyse pour situer succinctement les attentes institutionnelles concernant le savoir en jeu dans les problèmes proposés aux élèves. Secundo, l'analyse ascendante s'intéresse aux élèves et se centre sur leurs stratégies possibles de résolution. Tertio, l'analyse ascendante des problèmes d'enseignement est liée aux problèmes didactiques que l'enseignant peut rencontrer en lien avec les deux autres temps. Mais nous n'allons pas dans ce sens ici (le lecteur intéressé peut se référer à Assude *et al.*, *op. cit.*). Nous nous focaliserons sur les deux premiers volets de l'analyse *a priori* en nous intéressant d'une part aux programmes d'études et d'autre part aux stratégies qui pourraient être mises en œuvre dans cette situation.

Certes, cette manière de considérer l'AP semble appropriée à plus d'un titre. En effet, non seulement l'AP que nous proposons en fonction de *« l'analyse ascendante du point de vue des élèves »* (Assude, Mercier & Sensevy, 2007) peut être rattachée à l'analyse *a priori* dans la TSD de Brousseau — et ses développements — en matière d'anticipation et, dans les travaux de Perrin-Glorian et Hersant (2003), à propos des séquences ordinaires, en présence d'un milieu « évoqué » d'une situation, avec lequel l'élève interagit seul ou avec des pairs, sans l'aide de l'enseignant. Mais encore, cela va au-delà, considérant l'apport de l'analyse descendante — que nous développons plus loin — sur les plans institutionnels entre autres.

Sans compter que l'AP permet de saisir l'ensemble des déclinaisons que l'on peut imaginer à partir d'une même situation grâce à l'identification et l'examen des « variables didactiques » (que nous noterons désormais VD) et des valeurs qui y sont afférentes (Vendeira-Maréchal, 2012). C'est sur ces VD que nous insisterons pour orienter nos analyses. D'emblée rappelons que les VD émergent dans les recherches menées par Brousseau (1981), afin « d'agir au niveau des situations d'apprentissage, d'en manipuler les caractéristiques pour obtenir les changements d'attitudes souhaités » (p. 9). Ultérieurement, en 1982, dans le cadre de la TSD, Brousseau (1982a, dans Bessot, 2004) les utilise pour l'analyse *a priori* d'une situation fondamentale concernant la soustraction et les définit alors ainsi :

> *Un champ de problèmes peut être engendré à partir d'une situation par la modification des valeurs de certaines variables qui, à leur tour, font changer les caractéristiques des stratégies de solution (coût, validité, complexité) […] Seules les modifications qui affectent la hiérarchie des stratégies sont à considérer (variables pertinentes) et parmi les variables pertinentes, celles que peut manipuler un professeur sont particulièrement intéressantes : ce sont les variables didactiques*

(Brousseau, 1982a, dans Bessot, 2004, p. 13).

Toujours, selon Brousseau (1982b) :

> *Ces variables sont pertinentes à un âge donné dans la mesure où elles commandent des comportements différents. Ce seront des variables didactiques dans la mesure où en agissant sur elles, on pourra provoquer des adaptations et des régulations des apprentissages* (Brousseau, 1982b, p. 47).

Une VD est, pour ainsi dire, mise *« à la disposition [de l'enseignant] qui peut en fixer les valeurs selon l'âge des enfants et l'étape de leur apprentissage »* (Brousseau, 1982b, p. 46). L'enseignant peut donc faire un choix conformément à son projet d'enseignement. Ce choix est objectivé comme une valeur de cette variable. D'ailleurs, c'est quand l'enseignant change ces valeurs pour complexifier la tâche que de nouvelles stratégies peuvent être anticipées, favorisant la construction de nouvelles connaissances.

2. Analyse descendante : problèmes de partage dans le programme officiel et savoir en jeu

L'analyse descendante permet de situer le contenu mathématique visé dans les documents officiels du programme d'étude et de préciser les enjeux de savoir. Dans les séances analysées, les élèves sont appelés à résoudre des problèmes de partage, en lien avec le concept de division. D'un point de vue institutionnel, la division est introduite dans le PFÉQ — Programme de formation de l'école québécoise (MELS, 2006) — et dans la PDA — Progression des apprentissages (MELS, 2009) — en tant qu'objet d'enseignement-apprentissage. Ce savoir s'insère dans le domaine de la mathématique, de la science et de la technologie, sous la rubrique « Sens des opérations sur les nombres ». Selon le MELS (2009), la division est enseignée aux trois cycles du primaire (6-12 ans), tout comme les autres opérations arithmétiques. Dans la progression des apprentissages, dès le 1er cycle (6-7 ans), les élèves sont censés rencontrer différents sens de la division, dont le sens partage, avec du matériel et des schémas et, aux deux autres cycles (8-11 ans), le recours au choix de l'opération, au sens de la relation d'égalité, d'équivalence (équations) est introduit. Cependant, ce n'est qu'au 2e cycle (8-9 ans) que sont considérés les procédés/processus personnels (opérations d'addition/de soustraction répétée, calcul mental…), tout comme le vocabulaire mathématique approprié à la division (produit, diviseur/dividende, quotient, reste, égalité, partage, opération inverse de la multiplication, multiples…) et les symboles associés ($\times$ et $\div$). Ces contenus sont censés être maîtrisés en fin de cycle (4e année). Les critères de divisibilité sont, quant à eux, travaillés au 3e cycle (10-11 ans).

En ce qui concerne les enjeux de savoir, les problèmes de partage équitable sont liés au sens de la division euclidienne, une opération permettant de trouver combien de fois une quantité b est contenue dans une quantité a. Le résultat obtenu en divisant le dividende (a) par le diviseur (b) est le quotient (q), avec un reste (r) qui peut être nul ou non nul ($a=bq+r$ avec $0 \leqslant r < b$). Pour Vergnaud (1996 et 1988), les problèmes de partage équitable sont des problèmes faisant partie du champ conceptuel des structures multiplicatives. Il précise que pour construire le concept de division à la base de ces problèmes, il est pertinent de recourir à deux situations différentes :

1) des situations de partage d'une quantité (ou mesure) en n parts égales (« division-partition ») ;
2) des situations de groupement en n parts égales (« division-quotition »).

Pour résoudre ces situations qui appartiennent à la même structure multiplicative, un raisonnement multiplicatif s'impose selon deux stratégies (Poirier, 2001). Pour le sens partage (ou partition), le nombre de parts (groupes) est connu et la question porte sur la valeur de chaque part (exemple : Noémie a 18 bonbons qu'elle veut partager également entre ses 6 petits-enfants. Combien chacun en recevra-t-il ?). Quant au sens groupement (ou quotition), le nombre d'éléments par part/groupe est connu et la question porte sur le nombre de parts/groupes (exemple : Roland a 35 chandails. Il en donne 5 à chacun des joueurs de basketball qu'il entraîne. À combien de joueurs de basketball peut-il en donner ?).

Naturellement, notons que dès le plus jeune âge, les enfants sont exposés à la résolution de problèmes de partage. Ils se familiarisent alors avec le fait de partager, par exemple des collections d'objets concrets entre amis. Puis, comme le constate Tcheuffa Nziatcheu (2018), dès le préscolaire (et au premier cycle du primaire), les élèves (4-7 ans) y recourent spontanément parce qu'ils y sont exposés lors de l'enseignement du sens partage de la division avec l'étude des entiers (collections discrètes) et, aux 2e et 3e cycles (8-11 ans), lors de l'apprentissage des rationnels (modèles continus de longueur ou de surface). Le sens groupement est tardivement utilisé et compris par les élèves. Or conceptualiser la division nécessite que l'élève puisse comprendre ces deux sens. De ce fait, les élèves peuvent rencontrer des difficultés pour maîtriser le concept de division (Feyfant, 2015).

3. Analyse ascendante : problèmes donnés, variables didactiques et stratégies anticipées

Afin de faire l'analyse *a priori* ascendante du point de vue de l'élève, nous décrivons d'abord les problèmes proposés ; puis nous étudions toutes les stratégies de résolution que ce type de problèmes génère et, finalement, nous analysons les VD en montrant comment le choix de leurs valeurs oriente vers l'une ou l'autre de ces stratégies.

3.1. Description des problèmes donnés aux élèves

Dans chacune des séances, les problèmes donnés aux élèves se déclinent ainsi dans les tableaux 1 et 2 suivants :

Problème 1 (P1)	**Problème 2 (P2)**	**Problème 3 (P3)**
On a trois enfants qui se partagent 12 carrés de chocolat. […] Chacun en reçoit la même quantité. Combien chaque enfant en aura-t-il ?	*Cinq enfants se partagent 15 cubes. Chacun en reçoit la même quantité. Combien chaque enfant en aura-t-il ?*	*On a 9 amis et on veut partager 36 billes entre les 9 amis de façon égale. Combien chacun va avoir de billes ?* (Avant de présenter le problème, SY demande aux élèves de dessiner sur leur feuille 36 croix. Une fois les croix dessinées, elle dit que ce sont des billes).
Matériel : 12 rectangles dessinés et répartis, en 2 colonnes × 6 lignes.	Matériel : Feuille avec 15 carrés dessinés et disposés pêle-mêle.	Matériel : Copie d'élève.
Mode de travail : individuel.	Mode de travail : individuel.	Mode de travail : individuel.

Tableau 1 *: Problèmes proposés de la séance pilotée par l'enseignante Yolande (SY).*

Problème 1 (R1)	Problème 2 (R2)
Vous allez avoir à partager 24 livres entre quatre élèves de manière à ce que chacun reçoive la même quantité.	*Vous allez avoir à partager 15 timbres entre trois élèves de manière à ce que chacun reçoive la même quantité. Alors combien chacun va-t-il en recevoir ? Et sur la feuille vous allez dessiner comment vous allez procéder.*
Matériel : 24 formes rectangulaires découpées en papier.	Matériel : Copies d'élèves avec le libellé du problème, sans les timbres dessinés.
Mode de travail : dyade.	Mode de travail : individuel.

***Tableau 2** : Problèmes de la séance pilotée par l'orthopédagogue Sylvie (SS).*

Dans ce qui précède, le savoir en jeu est le même dans les cinq problèmes et concerne le sens partage ou partition de la division. De ce fait, le concept de division est abordé exclusivement à partir d'une seule interprétation, le sens partage. Dans tous les problèmes, il s'agit d'un partage équitable où le dividende est multiple du diviseur (reste nul). De plus, tous les problèmes sont associés à du matériel manipulable ou dessiné, ce qui, nous le verrons par la suite, peut avoir une incidence sur les stratégies potentielles des élèves.

3.2. Stratégies de résolution associées aux problèmes de division, sens partage des problèmes donnés aux élèves

De façon générale, considérant la formulation des problèmes et le sens partage de la division qui y est sous-jacent, pour partager a éléments en b parts (égalité à trous du type $a=bq+r$ avec $r=0$) plusieurs stratégies de résolution peuvent être utilisées, des plus intuitives et élémentaires aux plus élaborées. Par exemple, l'approximation/estimation qui dépend d'un jugement qualitatif et perceptif ; l'essai-tâtonnement (ou essai-erreur) avec des tentatives de distribution ou partage des éléments jusqu'à trouver la quantité exacte par part ; le partage un à un des éléments de la collection selon le nombre de parts jusqu'à épuisement de la quantité à partager, avec une certaine organisation spatiale et coordination des actions ou gestes ; l'addition répétée ou soustraction répétée du nombre de parts, jusqu'à épuisement du dividende ; le calcul mental basé sur un rappel direct soit des faits additifs ou multiplicatifs en mémoire ou de décomposition des nombres jumelés aux faits additifs ou multiplicatifs ou encore des faits en mémoire de multiplication ou de division à terme manquant (opération à trous).

3.3. Choix des variables didactiques et stratégies anticipées

Pour cette analyse, nous considérons deux sortes de variables didactiques :

1) numériques, liées aux données numériques ;
2) non numériques, liées aux données non numériques constituant l'habillage du problème au travers des objets qui le caractérisent, comme le matériel, voire la formulation du problème, l'ordre des données, le choix des mots ou l'organisation du travail.

Variables didactiques numériques

Nous analysons les variables didactiques numériques pour révéler comment les valeurs qui leur sont attribuées commandent des stratégies types selon les relations en jeu dans ces problèmes de division partage. Pour l'ensemble des cinq problèmes, les valeurs attribuées à la quantité à partager (dividende) et au nombre de parts (diviseur) sont des nombres entiers, de petites grandeurs, et le dividende est multiple du diviseur. Rappelons que le choix des valeurs des VD numériques n'est pas anodin, mais judicieux, en fonction de plusieurs considérations :

1) l'objectif commun aux deux séances qui consiste à amener les élèves à résoudre des problèmes de partage, à partir de nombres entiers ;
2) les solutions étant elles-mêmes des nombres entiers.

Sous cet angle, le domaine numérique en jeu dans les problèmes proposés aux élèves dans les deux séances concerne des entiers naturels : dans la séance SY, $n \leqslant 36$ et dans la séance SS, $n \leqslant 24$ (n est le nombre d'objets à partager). Dans le PFÉQ (MELS, 2006) et la PDA (MELS, 2009) ces nombres s'insèrent dans le domaine numérique enseigné au 2[e] cycle primaire ($N < 99\,999$). Ce sont donc des nombres relativement petits par rapport aux nombres connus par des élèves de cet âge, ce qui peut faciliter des stratégies de partage un à un ou de calcul mental, voire des divisions successives par 2, lorsque le diviseur est un nombre pair (les moitiés semblent plus faciles à partager que les tiers ou cinquièmes). Mais en même temps, dans les deux séances la formulation des problèmes diffère. En effet, nous remarquons que l'ordre de présentation des données numériques (dividendes et diviseurs) est inversé : dans les problèmes de la séance SY, le nombre de parts est introduit avant le dividende (3 et 12 (P1) ; 5 et 15 (P2) ; 9 et 36 (P3), comparativement à ceux de SS où c'est plutôt l'inverse (24 et 4 (R1) ; 15 et 3 (R2)).

De plus, dans chaque problème, les dividendes sont systématiquement des multiples des diviseurs, ce qui implique qu'il n'y aura pas de reste à l'issue du partage, la solution demeure un quotient entier ($r = 0$). Toutefois, les multiplications mises en jeu sont plus ou moins connues des élèves. En effet, on peut considérer que le calcul $3 \times \_\_\_ = 12$ (ou l'inverse $12 \div 3 = \_\_\_$) est plus facilement mobilisable par les élèves que le calcul $9 \times \_\_\_ = 36$ (ou l'inverse $36 \div 9 = \_\_\_$), considérant la progression dans l'apprentissage des tables. Par conséquent, le recours aux faits multiplicatifs plus ou moins connus peut également orienter des stratégies de type numérique. Tout compte fait, dans les deux séances, autant pour P1/R1 que P2/R2, il est possible de se faire une idée rapide du sens partage de la division, suivi d'une résolution aussi rapide.

Cependant, pour P3, la présence des nombres 36 et 9 rend plus difficile la résolution du problème (stratégie et solution numérique), nonobstant le fait que ces deux nombres soient des multiples/diviseurs. En effet, la multiplication par neuf ($9 \times \_\_\_ = 36$) semble plus ardue que $3 \times \_\_\_ = 12$ ou $5 \times \_\_\_ = 15$. Par ailleurs, la taille des nombres peut également être une variable didactique dans la mesure où le fait de dessiner ou de partager effectivement un très grand nombre d'objets serait trop fastidieux.

En somme, les valeurs des variables didactiques numériques commandent diverses stratégies pour résoudre les problèmes. Toutefois, des difficultés peuvent apparaître dans la recherche de la solution, avec des erreurs de compréhension du sens de la division partage, de calculs numériques ou de comptage.

Variables didactiques non numériques

Pour les VD non numériques, intéressons-nous au matériel utilisé auquel deux valeurs principales sont attribuées : matériel manipulable ou représentation imagée (dessin). L'attribution de ces valeurs est en dépendance étroite avec l'objectif visé par la séance, en lien avec le partage équitable, ainsi que les valeurs attribuées aux VD numériques.

Un seul problème recourt au matériel manipulable : R1. Dans ce cas, les 24 formes rectangulaires découpées en papier sont des objets manipulables représentant les livres à partager entre quatre amis. Considérant la structure même du problème (division partage), une telle valeur, jumelée aux données numériques 24 et 4, favorise davantage la stratégie de distribution : les objets sont manipulables et déplaçables. Par conséquent, le partage un à un des livres sera probablement une stratégie prédominante.

En outre, pour les quatre autres problèmes, la VD « matériel » est affectée d'une valeur figurative où les objets à partager sont dessinés. Dans ce cas, l'absence d'objets concrets manipulables et déplaçables vient complexifier la résolution des problèmes P1, P2 et P3 dans la séance SY et R2 dans la séance SS. Ainsi, même si les élèves comprennent qu'il faut partager également, le partage un à un risque d'être moins aisé, à cause du passage d'objets manipulables aux objets dessinés non déplaçables. Les élèves peuvent en effet rencontrer des difficultés à contrôler la situation et faire des erreurs de coordination (liées à la non-maîtrise des principes de bijection ou de suite stable). Mais en plus, il y a une gradation dans l'usage du matériel figuratif étant donné que deux autres valeurs y sont affectées, ce qui peut influencer les comportements des élèves, créant par le fait même différents niveaux de difficultés. Concrètement, soit les objets sont déjà représentés sur la copie de l'élève (P1 et P2) ; soit ils doivent être représentés par l'élève-même (P3 ; R2). Dans ce dernier cas, on observe que l'enseignante et l'orthopédagogue ont introduit différemment le moment de donner la consigne pour dessiner les objets. D'un côté, Yolande, en demandant aux élèves de dessiner les objets avant de poser le problème à résoudre, rend impossible la prise en compte du nombre de parts (diviseur) à effectuer dans le positionnement des objets dessinés (dividende). D'un autre côté, Sylvie présente d'abord le libellé du problème et demande ensuite aux élèves de dessiner comment ils vont procéder. Comparativement aux autres problèmes, R2 offre plus de possibilités en matière de stratégies : il revient à l'élève de choisir comment dessiner les objets lors de la résolution du problème. Du coup, cela permet d'anticiper plusieurs stratégies : la distribution un à un des objets, au fur et à mesure qu'ils dessinent les timbres (jusqu'à l'atteinte du nombre visé, le dividende 15) ; des stratégies fondées sur les raisonnements additifs, telle l'addition répétée ou la soustraction répétée et multiplicatifs, en recourant ou non aux rappels directs de faits en mémoire ou autres procédés de calculs.

De plus, pour P3, même si dessiner les 36 croix nécessite plusieurs connaissances du nombre et habiletés connexes à former une collection d'objets, les stratégies possibles de résolution semblent les mêmes que celles anticipées pour P1, P2 et R1. Seules des difficultés liées à la formation d'une collection, à la cardinalité, peuvent s'y greffer. L'élève doit en effet maîtriser le dénombrement, et donc pouvoir représenter les 36 croix, réaliser leur comptage exact, voire les recompter pour en être sûr. Toute erreur de comptage (liée à la non-maîtrise des principes de bijection, de stabilité de la suite numérique ou de cardinalité) compromettra la résolution du problème pour trouver la part de billes reçue par chaque ami et avoir « 0 » comme reste. Lors de la recherche de la solution, l'élève peut toutefois se rendre compte du cardinal erroné et réajuster le cardinal.

Enfin, trois autres valeurs non numériques sont affectées au matériel concernant trois problèmes (P1, P2 et R2). Primo, les objets sont des rectangles, structurés spatialement (P1), donc bien organisés. L'organisation spatiale influe sur les stratégies : ici, le choix de répartir les rectangles en 6×2 facilite la vision du partage en 3×4 (il suffit de partager chaque colonne en 3, sans même effectuer des calculs…). Secundo, les objets sont des carrés, non-structurés et donc éparpillés, pêle-mêle (P2). L'élève doit alors trouver d'autres moyens plus pertinents pour réorganiser le tout et pouvoir opérer sur la collection de 15 carrés. Le recours au marquage, à différentes couleurs, par exemple, sera nécessaire. Tertio, il revient à l'élève de déterminer la manière dont les 15 objets seront dessinés : structurés/organisés ou non (R2). Notons, d'ailleurs, que pour P3, il semble difficile pour l'élève d'anticiper le type d'organisation spatiale étant donné que c'est après avoir dessiné les 36 carrés qu'il découvre la consigne.

En somme, nous faisons l'hypothèse qu'il est fort probable que le matériel, avec les différentes valeurs présentées, aura des effets sur les stratégies mobilisées en complexifiant graduellement la résolution des problèmes : de la manipulation d'objets concrets (R1) aux objets déjà dessinés (P1 et P2) ou à dessiner par l'élève (P3 et R2). Notons que les stratégies peuvent produire des erreurs dues à certaines difficultés en fonction du matériel et du problème en jeu. Nous synthétisons dans le tableau suivant les éléments clés en lien avec les VD non numériques.

<table>
<tr><th colspan="3">Variables didactiques</th><th rowspan="2">Problèmes</th><th colspan="2">Stratégies et difficultés/erreurs potentielles</th></tr>
<tr><th colspan="3">Matériel proposé</th><th>Stratégies</th><th>Difficultés et erreurs</th></tr>
<tr><td colspan="2">Manipulable</td><td rowspan="3">Par l'enseignant.</td><td>R1</td><td>Partage un à un ;
divisions successives.</td><td>Dénombrement,
coordination, organisation.</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Représenté</td><td>Structuré</td><td>P1</td><td>Partage en 3×4 ;
calculs.</td><td rowspan="2">Passage d'objets manipulables à dessinés, coordination.
Organisation.</td></tr>
<tr><td>Pêle-mêle</td><td>P2</td><td>Partage et marquage.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Structuré ou pêle-mêle</td><td>Par l'élève avant d'avoir l'énoncé.</td><td>P3</td><td>Organisation (structurée ou pêle-mêle, suivant les tâches ou stratégies précédentes) ; partage.</td><td>Passage d'objets manipulables à dessinés ; formation de collection, dénombrement, coordination, organisation.</td></tr>
<tr><td>Par l'élève après avoir eu l'énoncé.</td><td>R2</td><td>Partage un à un ;
addition ou soustraction itérée ; faits multiplicatifs ; organisation anticipée.</td><td>Passage objets manipulables à dessinés ; dénombrement (les principes), coordination, organisation.</td></tr>
</table>

***Tableau 3** : VD non numériques, stratégies, difficultés et erreurs selon les problèmes à résoudre.*

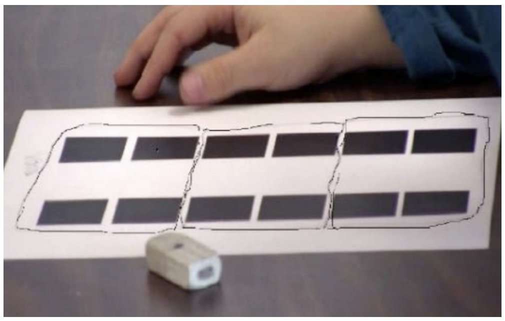
4. Stratégies effectives observées chez les élèves

Dans ce qui précède, nous avons mis en exergue les problèmes proposés par l'enseignante et l'orthopédagogue aux élèves. Nous en avons fait une analyse *a priori* pour préciser d'abord les stratégies qui correspondent généralement à ces types de problèmes. Puis nous avons anticipé comment le choix des VD et les différentes valeurs qui y sont logiquement associées peuvent orienter vers l'une ou l'autre de ces stratégies. L'analyse des productions écrites des élèves et quelques-unes de leurs verbalisations et actions permettront de dégager les stratégies effectives qu'ils ont utilisées et, du coup, de saisir l'effet des valeurs attribuées aux VD selon chaque problème et les stratégies anticipées, mais également selon la suite des problèmes et la progression entre un problème et le suivant (la stratégie utilisée dans le problème précédent peut influencer celle qui apparaît dans le problème suivant).

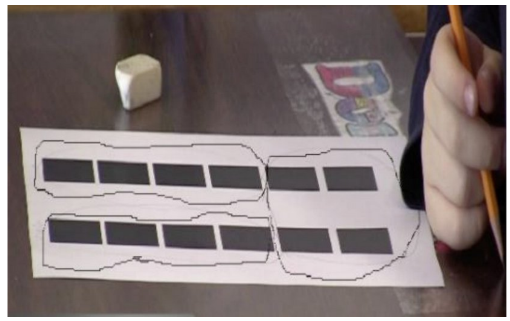
4.1. Séance pilotée par Yolande (SY) : Stratégies effectives des élèves

Stratégies effectives (P1)

Il ressort clairement des productions et stratégies des élèves observées, puis analysées, que pour résoudre P1 (*On a trois enfants qui se partagent 12 carrés de chocolat. [...] Chacun en reçoit la même quantité. Combien chaque enfant en aura-t-il ?*), plusieurs stratégies fondées sur le sens partage de la division ont été utilisées par les élèves. Toutefois, dans les productions écrites des élèves, l'organisation matérielle des 12 rectangles dessinés diffère deux à deux, car les élèves assis face à face ont utilisé la même stratégie. Le travail est individuel ; mais la proximité a peut-être influencé la configuration. Ainsi, Georges et Sébastien ont utilisé la même configuration spatiale, et Zacharie/Julien la même, de leur côté (voir figure 1).



Georges et Sébastien



Zacharie et Julien

***Figure 1** : SY - Productions écrites des élèves pour résoudre P1.*

Les élèves font des paquets de 4, certainement en s'appuyant sur la collection dessinée à partager ou en recourant aux relations entre les données numériques. Une première explication peut résider dans la configuration spatiale facilitée par la disposition des objets sur la feuille, ce qui visuellement incite à regrouper de la sorte. Le partage en trois est relativement « intuitif » ici (à cause du choix de petits nombres et de l'organisation des objets, voire de la perception). Ainsi, en constituant trois sous-collections de 4 carrés de chocolat, ils utilisent une répétition du nombre de parts (4) pour épuiser finalement le tout. Également, les VD numériques (12 est un multiple de 3) facilitent l'emploi d'un raisonnement multiplicatif déployé sous forme d'une stratégie d'addition répétée ou tout au moins le passage d'un raisonnement additif à celui multiplicatif, comme nous pouvons le voir dans ce que dit Georges. Enfin, le propos tenu par Georges permet de distinguer entre l'explication qu'il propose (il justifie sa réponse de manière additive) et sa stratégie teintée d'un raisonnement multiplicatif : « J'ai comme eux [4 et 4] collés ensemble ça donne 8 et puis 8+4 ça donne 12. […], j'ai fait des paquets, 3 paquets de 4. […] Ben eux, je les ai jumelés ensemble… 4+4=8 ; 8+4=12 ». Il explique sa stratégie oralement et à l'écrit (4+4=8). L'addition itérée permet, selon nous, de recourir aux multiples de 4 pour trouver 8 (4+4=8) et de rajouter 4 pour trouver 12. La stratégie est impulsée d'une part par des doubles (4+4) qui s'apprennent facilement (la rétention des faits en mémoire est plus rapide à rappeler) et, d'autre part, par des faits additifs en mémoire (8+4=12). Ainsi les valeurs des VD numériques permettent d'utiliser le calcul mental pour ensuite constituer les parts selon les formes représentées en forme de disposition rectangulaire des carrés de chocolat en sous collections (3×4).

Stratégies effectives (P2)

Pour résoudre P2 (*Cinq enfants se partagent 15 cubes. Chacun en reçoit la même quantité. Combien chaque enfant en aura-t-il ?*), les stratégies effectives des élèves ont toutes en commun le recours au sens partage de la division mais selon différents raisonnements et actions. Ainsi, deux élèves (Georges et Sébastien) cherchent à partager la collection des 15 objets dessinées en sous-collections équipotentes : « J'ai fait des petits paquets et après ça, j'ai vu que ça marchait. J'aurais dû juste faire $6+6+3$. Ça m'aurait donné 15. Je n'étais pas assez sûr, mais j'ai vu que ça marchait » (Georges). Possiblement, ses explications découleraient de sa connaissance des nombres : $(3+3)+(3+3)+3$. Sébastien, quant à lui, précise sa stratégie ainsi : « Je les ai comptés pour voir comment faire des paquets. […] puis fallait en mettre 3 pour que ça soit égal ».

Deux autres élèves (Zacharie et Julien) partent de ce qu'ils connaissent (dividende et diviseur) pour partager en 3 paquets de 5 carrés et solutionnent le problème après avoir pris des détours. D'abord, Zacharie partage par tâtonnements, cherchant à réaliser des paquets équipotents de 5 carrés (le diviseur). Il cherche ensuite le nombre de carrés (5) dans chaque paquet et trouve d'abord 3 (le nombre d'enfants). Or, comme il faut 5 enfants, il réduit la valeur des parts petit-à-petit et trouve alors le nombre exact de carrés par part, 3 (le quotient) :

> *Moi, j'ai pris, j'ai regardé. Je les ai séparés en paquets de 5 au début [...] Parce que c'était déjà un bon début. Parce que j'avais déjà 3 enfants de faits. Puis là, je savais qu'il fallait que je fasse d'autres paquets. Donc, j'avais [hésitation] comme j'avais fait 1 ; 2 [en pointant avec son crayon des carrés] ; et là, j'ai vu que ça faisait déjà 3. Et là, j'ai fait 4, 5 et là j'ai vu que ça a marché. Il n'en restait aucun.*

Julien, quant à lui, constate un changement à propos du matériel dès la distribution des copies, comparativement au P1, et s'exclame alors : « Oh, c'est tout mélangé partout ». Ce n'est donc pas surprenant d'observer une modification dans sa stratégie lorsqu'il abandonne celle qu'il avait utilisée (P1) et recourt au numérotage pour partager ainsi : 1, 2, 3, 4, 5 ; 1, 2, 3, 4, 5 ; 1, 2, 3, 4, 5 (voir figure 2). Sa stratégie, bien que semblable à celle utilisée par Zacharie, revient à une distribution un à un. Autrement dit, il distribue d'abord un objet à cinq personnes différentes (numérotées 1, 2, 3, 4, 5) ; puis il recommence en distribuant un deuxième objet à chacune d'elles, ainsi de suite. Ce faisant, il efface à plusieurs reprises, parce qu'il rencontre des difficultés à regrouper les objets numérotés et donc des difficultés au niveau spatial lors de l'organisation des paquets de trois (1, 1, 1 ; 2, 2, 2 ; … ; 5, 5, 5). Or le codage tel qu'utilisé ne nécessite pas vraiment de regrouper. Une autre stratégie de validation serait de compter les numéros de même valeur (1, 1, 1 ; 2, 2, 2 ; …) ; visuellement, chaque numéro est répété trois fois. Des crayons de couleur aideraient à les discriminer, également.

Somme toute, les valeurs attribuées autant à la VD numérique (le choix du dividende et du diviseur selon les possibilités de constitution de collections équipotentes 15/5) qu'à celle du matériel non structuré (les carrés sont pêle-mêle), mettent en échec les stratégies déjà utilisées (P1) à partir d'un matériel structuré et, par conséquent, d'autres stratégies émergent, comme l'illustre la figure suivante.

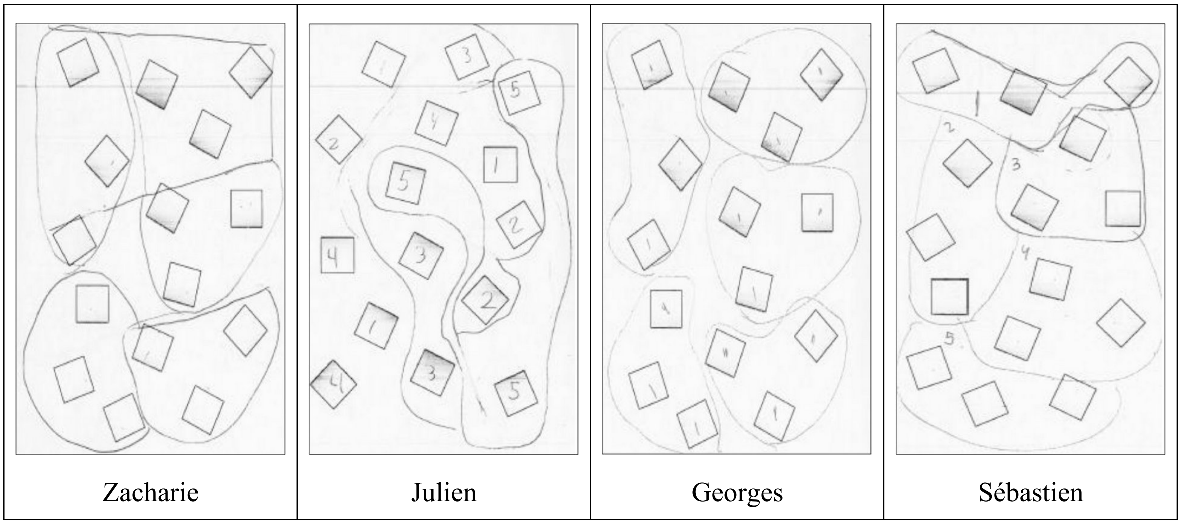


***Figure 2** : SY - Productions écrites des élèves pour résoudre P2.*

Dans ce qui précède, le choix des valeurs des VD non numériques (collection dessinée) semble, en effet, restreindre les stratégies des élèves à convoquer explicitement les relations entre les données numériques pour solutionner numériquement le problème à partir d'une égalité lacunaire. Précisément, ils auraient pu utiliser une multiplication à terme manquant ($5\times$ ___ $=15$) ou une division ($15\div5=$ ___). Les stratégies de formation de collections équipotentes par essai-tâtonnement se trouvent validées grâce aux nombres de réponses possibles, c'est-à-dire, 5 et 3. En outre, les difficultés de Julien à contrôler sa stratégie de distribution par le numérotage pour en extraire la solution révèlent comment le choix des VD, avec la valeur non numérique (matériel dessiné) ne favorise pas la mise en place de stratégies de distribution efficaces.

Stratégies effectives (P3)

La résolution de P3 (*On a 9 amis et on veut partager 36 billes entre les 9 amis de façon égale. Combien chacun va avoir de billes ?*) a été encore plus difficile que celle de P2 en termes de durée, de tentatives, de recherche, etc. En gros, tous les élèves procèdent par le partage pour résoudre P3, mais différemment. Ils mettent en avant quatre stratégies de partage :

1) essais-tâtonnements ;
2) codage/numérotage (1, 1, 1, 1 ; 2, 2, 2, 2 ; … ; 9, 9, 9, 9) ;
3) distribution ;
4) calcul mental.

Ainsi, Julien résout très rapidement grâce au calcul mental et au raisonnement multiplicatif (4×9 ou 9×4). Mais Sébastien et Georges utilisent une stratégie de numérotage des objets. La stratégie de Sébastien repose sur le numérotage des groupes de 4 (1, 2, 3, 4 ; 1, 2, 3, 4 ; …), contrairement à Georges qui numérote chaque croix (1, 2, 3, 4, 5, … , 36). De plus, Georges et Zacharie font des essais-tâtonnement jusqu'à obtenir des sous-collections équipotentes. Les verbalisations de Georges éclairent à ce propos :

> *J'ai fait un peu ça au hasard. […] je savais que 12+12 ça faisait 24. […] après j'ai essayé à 24. J'ai fait encore des paquets de 4 puis je me suis rendu […] parce que je savais que je pouvais faire des paquets de 4, mais j'ai fait 12+12, 24, puis à la fin il y a un 4. Je me suis dit que peut-être que c'est un 4, puis là c'était des 4. J'ai lu 24 et j'ai eu l'idée de 4.*

Tout comme pour P2, le jeu sur les variables didactiques numériques et à propos du matériel (le fait de demander tout de suite de dessiner les croix avant de donner le libellé du problème, etc.) influence les stratégies des élèves. Ainsi les élèves travaillent, à partir de la collection des 36 croix, sur des sous-collections équipotentes sans véritablement tenir compte du diviseur (9). Ce faisant, d'autres stratégies plus efficaces apparaissent, voire d'autres arrangements spatiaux en fonction d'un quotient hypothétique qui s'avère être le bon, comme illustrés dans les productions des élèves dans la figure suivante.

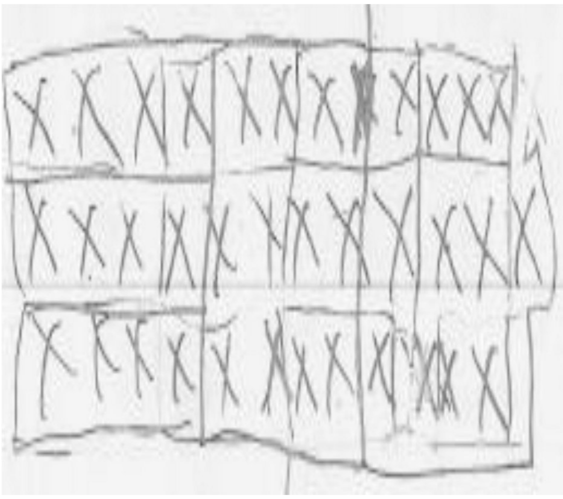
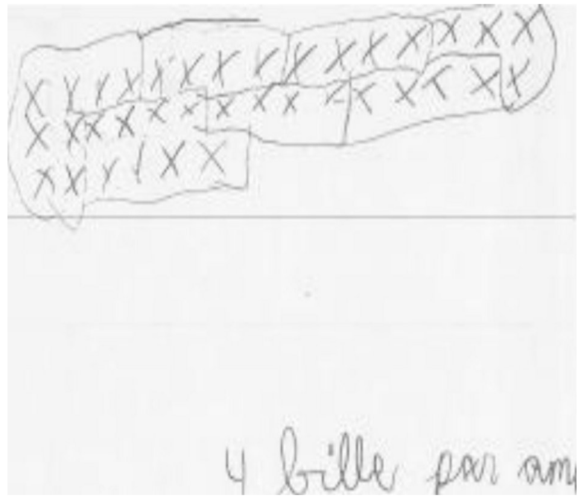
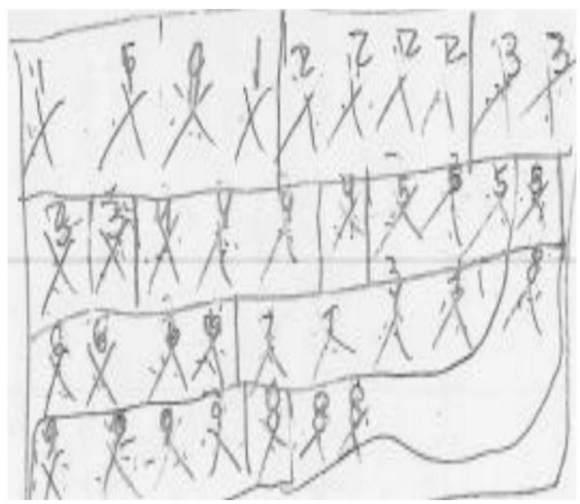
	
Zacharie	Julien
	
Georges	Sébastien

Figure 3 *: SY - Productions écrites des élèves pour résoudre P3.*

De prime abord, il ressort en effet des traces dessinées sur chaque copie d'élève une attention portée à l'organisation spatiale des croix afin de mieux opérer sur la collection. Nonobstant le fait que les élèves devaient dessiner les croix avant de connaître la consigne, spontanément, ils ont bien aligné leurs croix, ce qui facilite un peu les regroupements par rapport à un éparpillement complet comme dans le cas précédent (P2). Mais on constate, dans la production de Zacharie, une croix qui déborde à cause d'une mauvaise organisation spatiale. Il est possible que les difficultés rencontrées en résolvant P2 aient amené les élèves à bien structurer les objets afin de bien opérer sur eux. Il est également possible d'évoquer une dynamique inter-tâches (Koudogbo, 2021 et 2017) faisant en sorte que d'une tâche à l'autre, c'est-à-dire, de la résolution d'un problème à l'autre, on observe une certaine coordination applicable non aux connaissances mathématiques utilisées, mais plutôt dans ce cas, à l'organisation structurée du matériel (voir P1) ou aux actions faites préalablement (voir P2). C'est aussi dans cette lignée que s'inscrit la réapparition du numérotage préalablement utilisé par Julien (P2) chez certains élèves (Sébastien et Georges).

4.2. Séance pilotée par Sylvie (SS) : Stratégies effectives des élèves

Stratégies effectives (R1)

Dans la séance SS pour résoudre R1 (*Vous allez avoir à partager 24 livres entre quatre élèves de manière que chacun reçoive la même quantité*), les stratégies effectives des six élèves correspondent bien à ce que nous avions pu anticiper (voir AP). En effet, la valeur attribuée à la VD non numérique étant des cartes découpées (livres) et donc du matériel manipulable, les dyades utilisent le partage un-à-un pour co-résoudre R1. Ainsi, ils discutent d'abord de comment faire, manipulent et déplacent ensuite les « livres », puis les dénombrent. Une dyade (Alain et Rosalie), dont la stratégie semble fondée sur la prise en compte du diviseur (4) pour partager la collection de 24 livres, a directement distribué un à un, sans aucune difficulté pour trouver la valeur de chaque part (six), comme le montre la figure suivante.

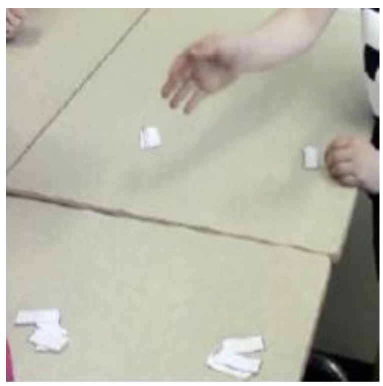
		
Alain-Rosalie	Sabin-Vicky	Jade-Robert

Figure 4 *: SS - Productions écrites des élèves pour résoudre R1.*

En revanche, les deux dyades Sabin-Vicky et Jade-Robert ont d'abord partagé en deux les 24 livres (chacun ayant une part). Néanmoins, deux difficultés apparaissent : une erreur de comptage (Sabin-Vicky) et une compréhension erronée du sens de la division, précisément en lien avec le mot « partager » pour résoudre le problème (Jade-Robert). Jade, en effet, n'ayant pas perçu que l'on attendait ici un partage égal entre quatre amis, répartit les livres entre eux deux : « On les a séparés pour qu'on ait égal ») de manière à « choisir le livre qu'on veut […] et s'il veut des livres il va l'écrire ». Ils abandonnent finalement cette stratégie après une intervention de l'orthopédagogue Sylvie qui les a questionnés pour savoir ce qu'il faut rechercher dans le problème. L'un des élèves, Robert, ayant bien interprété le problème, lui répond qu'il faut « donner le même nombre de livres à quatre amis ». Les dyades partagent alors à nouveau en deux sous collections chaque part de 12 livres et trouvent quatre parts de six livres chacune. Les choix des VD, avec les valeurs numériques associées et le travail en dyade, favorisent un tel partage du matériel manipulable ($24 \div 2 =$ ___ ; la réponse étant 12, alors $12 \div 2 = 6$). En somme, ils utilisent une stratégie de divisions successives, étant donné les nombres en jeu, les moitiés étant plus faciles à partager.

Stratégies effectives (R2)

Pour résoudre R2 (*Vous allez avoir à partager 15 timbres entre trois élèves de manière à ce que chacun reçoive la même quantité. Alors combien chacun va-t-il en recevoir ? Et sur la feuille vous allez dessiner comment vous allez procéder*), comme les élèves ont dessiné les objets après avoir reçu la consigne, ils empruntent alors tous le partage un-à-un par comptage, partant ainsi de ce qui est connu, le diviseur (3) et le dividende (15). Cependant, des différences s'observent graphiquement, parce que les objets dessinés (barres, ronds, rectangles) ainsi que leur organisation spatiale (colonnes, lignes, ronds, bonhommes) diffèrent même si les 3 parts sont représentées par 3 amis ou 3 personnages. C'est ce qui ressort de l'explication d'Alain (« Moi, j'ai fait trois rondes pour les 3 personnages. Pis j'ai fait des petites rondes pour dire 1, 2, 3, 4, 5, jusqu'à 15 »), ou dans les autres productions ci-dessous des élèves.

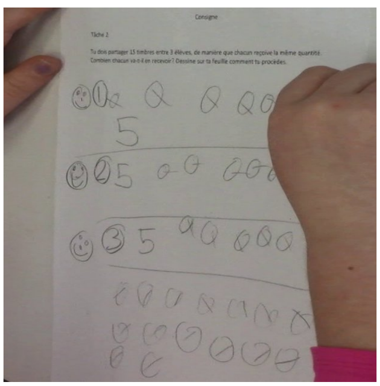
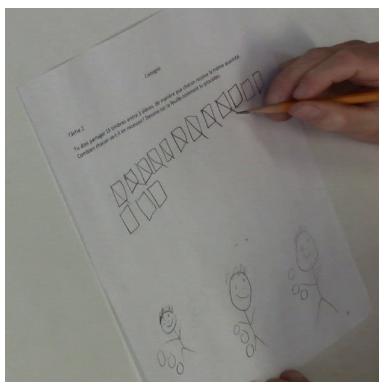
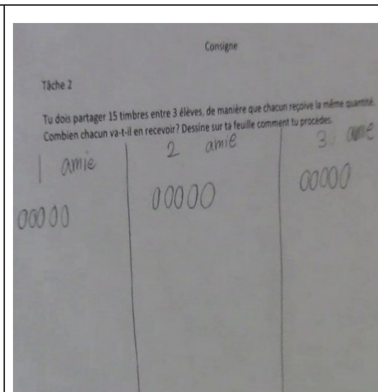
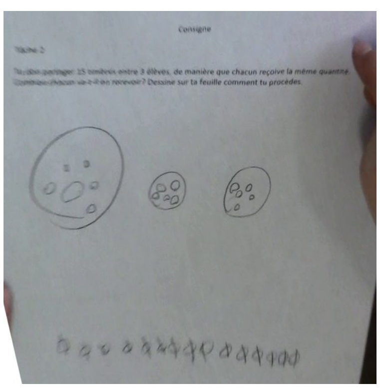
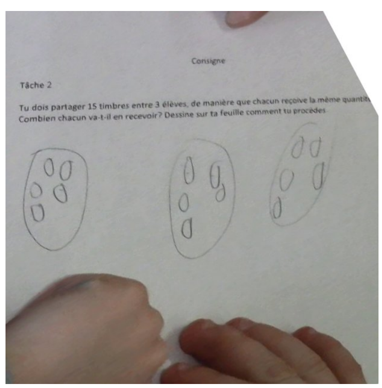
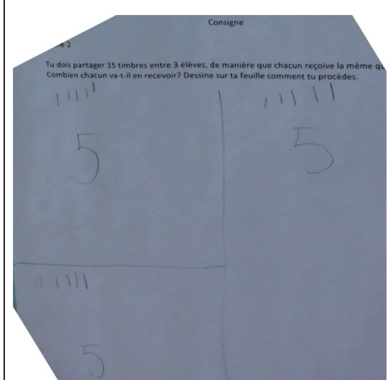
		
Jade	Robert	Rosalie
		
Sabin	Alain	Vicky

Figure 5 *: SS - Productions écrites des élèves pour résoudre R2.*

De plus, des différences apparaissent dans les actions et opérations faites sur la collection. Par exemple, 3 élèves (Jade, Robert et Sabin) ont représenté la collection de timbres soit d'un trait (Robert et Sabin), soit en deux temps (Jade) pour ensuite distribuer en coordonnant timbre dessiné *versus* timbre barré. Dans ce dernier cas, Jade trouvant le procédé très long va recourir finalement au comptage, justifiant ainsi :

> *J'en ai mis 15 en bas, mais vu que j'ai trouvé que c'était trop long de barrer […] en bas pis mettre un [en haut]. […] donc j'ai mis un dans chaque pis j'ai compté sur la feuille. J'ai continué à compter mais dans ma tête j'ai arrêté à 15. Pis après je les ai comptés. J'ai compté les timbres pis il y en avait 5 dans chaque. Pis après je les ai barrés parce que je les avais déjà comptés.*

Ainsi, cette stratégie est pertinente pour garder une trace et pour savoir quand il faut arrêter la distribution. Cela provient aussi du fait que Sylvie donne d'abord la consigne et leur demande ensuite seulement de dessiner, De son côté, après avoir épuisé les dix timbres qu'il avait dessinés, Robert utilise le calcul mental pour compléter les cinq autres restant : il recherche alors le complément de 10 pour arriver à 15 ($10+\_\_\_=15$) pour contrôler la situation.

Les trois autres élèves ne dessinent pas la collection totale. Ils distribuent directement un-à-un (dessinant chaque fois un timbre) jusqu'à épuiser le tout mentalement, à l'exception de Vicky. Cette dernière utilise possiblement le calcul mental, tout comme Robert, grâce à la décomposition du nombre et à la recherche du complément : « J'ai fait 5 et après j'ai compté. Pis j'ai fait 5 à l'autre et j'ai compté. […] 10. Là j'ai oublié qu'il y avait un autre ami, donc j'ai fait 5 autres ». Il est aussi possible que Vicky n'ait pas considéré le diviseur, cherchant plutôt à former des sous-collections équipotentes, $5+5=10$ (« J'ai fait 5 et après j'ai compté. Pis j'ai fait 5 à l'autre et j'ai compté. […] 10 ») ; puis, se rendant compte du cardinal des éléments restant (5), elle forme finalement une autre sous-collection pour épuiser le dividende ($10+5=15$).

Ainsi, comme la valeur de la VD liée au matériel a été modifiée à deux niveaux, cela joue sur les stratégies des six élèves. Enfin, même si la distribution un-à-un prédomine, d'autres organisations matérielles sont convoquées, de même que des procédés jumelés par décomposition des nombres avec le calcul mental.

Discussion et conclusion

Dans l'ensemble, toutes les analyses menées et les constats qui en découlent nous permettent à présent de répondre à la deuxième question concernant la pertinence de l'AP pour l'enseignant. En effet, l'intérêt porté à l'AP est double parce que sont en jeu autant l'enseignement (*a priori* l'enseignant opère des choix préalables selon les enjeux du savoir visé) que l'apprentissage (les choix opérés déterminent les stratégies effectives des élèves par rapport aux tâches ou problèmes proposés). Ainsi, nous avons montré dans cet article les usages possibles de l'AP. Pour cela, nous sommes d'abord partis des travaux de Brousseau (1998 et 1986) et ses développements (Artigue, 1988 ; Artigue & Douady, 1986 ; Perrin-Glorian & Hersant, 2003 ; Dorier, 2010 ; Margolinas, 1992 ; Vendeira-Maréchal, 2012) et de la triple AP selon Assude, Mercier et Sensevy (2007) pour camper notre propos et ainsi mieux cibler les dimensions qui semblent propices aux visées de notre article, notamment l'entrée par les analyses descendante et ascendante.

Plus particulièrement, nous avons présenté une analyse *a priori* concernant la résolution de cinq problèmes de partage proposés à 10 élèves de 2[e] cycle du primaire lors d'une séance organisée sous forme d'un dispositif d'aide ponctuel piloté respectivement par une enseignante et une orthopédagogue pour préparer les élèves identifiés en difficulté à prendre leur place d'élèves en s'engageant dans la résolution de problèmes de fractions ultérieurement en classe. Nous avons alors montré la portée des variables didactiques numériques et non numériques au cœur de l'analyse *a priori* faite (Dorier, 2010). L'analyse nous a permis de dégager des VD à propos de chacun des cinq problèmes et d'anticiper selon les valeurs qui leur sont attribuées des stratégies possibles de résolution. Ainsi, il nous a été possible de constater que d'une situation à l'autre selon les valeurs affectées aux VD, les stratégies de résolution des problèmes des élèves se modifiaient. Ces valeurs sont soit numériques et donc de l'ordre de grandeur des nombres et des relations entre ces nombres, soit non numériques, et dans ce cas, de l'ordre de l'habillage du problème et des objets qui le caractérisent, comme le type de matériel. Par exemple, le recours au matériel manipulable dans la formulation du problème dans la séance SS conduit à une stratégie de distribution un-à-un (R1). Le recours au matériel figuratif, dépendamment du moment où est donnée la consigne, met en échec cette stratégie et en fait voir d'autres : configuration (SY : P1), organisation spatiale (SY : P1, P2 et P3 ; SS : R1 et R2) et stratégie plus élaborée (SY : P2 et P3).

D'ailleurs, dans d'autres séances menées en classe entière, dont les données n'ont pas été analysées ici, force est de constater que lorsque les valeurs des VD numériques n'étaient plus des nombres entiers ayant des relations de multiples/diviseurs, mais induisaient le sens quotient de la fraction (nombres rationnels non entiers), les stratégies de distribution un à un ne fonctionnaient plus, au moment de devoir découper un des objets pour en distribuer les parts ensuite. Elles étaient donc mises en échec et les élèves utilisaient alors des connaissances nouvelles pour résoudre les problèmes.

À la lumière de ce qui précède, l'AP dont la réalisation repose sur le jeu sur les VD nous semble un outil didactique et méthodologique d'anticipation, d'observation, voire d'action qui mériterait grandement d'être connu et même vulgarisé auprès du corps enseignant ou des autres personnes ressources gravitant autour des élèves. Une telle vulgarisation est nécessaire à plus d'un titre. Primo, elle permet à l'enseignant (ou l'orthopédagogue) de connaître cet outil et de pouvoir se l'approprier graduellement. L'enseignant peut ainsi être mieux préparé au savoir à enseigner, aux VD à considérer, aux valeurs à attribuer à ces VD ainsi qu'à leurs effets sur les stratégies possibles ou effectives des élèves. Conséquemment, il peut anticiper et prendre le recul nécessaire, pouvoir contrôler, agir/réagir *in situ*. Car pouvoir anticiper d'abord les stratégies possibles chez les élèves permet ensuite de les exploiter pour effectuer des relances dans les interactions avec les élèves ou d'apporter des aides aux difficultés anticipées lors de l'AP. D'ailleurs, à propos de la pertinence de l'AP, Dorier (2010) abonde dans le même sens lorsqu'il revient sur la nécessité en formation initiale d'outiller les *« enseignants pour qu'ils abordent des activités de classe avec le recul suffisant pour une gestion la plus optimale possible »* (p. 2).

Secundo, elle permet à l'enseignant de bien planifier les problèmes/tâches mathématiques à proposer dans les situations d'enseignement et de soutenir les élèves dans leurs apprentissages en favorisant l'émergence de la stratégie (ou des stratégies) visée par l'enseignant. En effet, l'AP qui intègre le jeu sur les variables didactiques selon la pertinence des valeurs qui y sont attribuées, contribue à l'apprentissage des concepts mathématiques chez les élèves. Mais pour rendre un tel jeu optimal, il s'avère pertinent de le conjuguer avec une analyse conceptuelle du savoir mathématique visé. Une telle analyse devrait tenir compte notamment des différents contenus imbriqués au concept mathématique pour favoriser une meilleure conceptualisation (Koudogbo, 2021 et 2017) avec des accès variés au savoir mathématique et ancrés dans des résultats de recherche. Les caractéristiques des situations devraient donc être prises en compte, sans égard à la gestion que peut en faire le professeur (Perrin-Glorian & Hersant, 2003).

En substance, le rôle de l'AP, une question vive non seulement dans les travaux de recherche en didactique des mathématiques mais encore en enseignement-apprentissage des mathématiques, n'est plus à démontrer, d'une certaine manière. Pourtant, l'AP demeure étrangère à un certain nombre d'enseignants, orthopédagogues ou intervenant-e-s en mathématiques, en référant aux constats relevés en formation continue ou lors du transfert des connaissances en milieux de pratique. Le lecteur averti aura perçu que l'AP est une aide indispensable pour soutenir l'enseignant dans l'exercice de son métier en vue d'amener les élèves à faire des mathématiques et à apprendre, tout en donnant un sens à leurs apprentissages. De surcroît, c'est un outil professionnel d'aide à la décision pour anticiper des comportements d'élèves face à la situation mathématique et guider les choix de l'enseignant (Charnay, 2003). Si l'AP est utile aux enseignants, elle l'est encore davantage aux enseignants débutants. Comme le souligne si judicieusement, Eon (2018), le début dans le métier d'enseignant n'est pas une évidence, si l'on considère par exemple la préparation de situations d'apprentissage. L'AP s'avère ainsi un outil pratique et nécessaire à la disposition de l'enseignant pour la préparation de la classe, comme il est possible de mettre à l'écrit, dans une fiche de préparation, une situation d'apprentissage. Il est tout aussi possible de considérer l'AP comme un outil pour préparer l'observation des effets attendus relativement aux effets véritablement observés et aux analyses subséquentes à propos de la situation didactique.

C'est pourquoi, l'AP est un outil robuste qui permet de révéler

> *des possibilités d'apprentissage d'un savoir nouveau que porte la situation, avec ou sans l'intervention du professeur, des rétroactions possibles du milieu suivant les connaissances des élèves, et aussi des insuffisances éventuelles du milieu ou des connaissances des élèves qui rendent nécessaire l'intervention du professeur dans certains cas* (Perrin-Glorian & Hersant, 2003, p. 254).

Par conséquent, utilisé dans des classes ordinaires, cet outil permet à l'enseignant d'anticiper, selon les connaissances des élèves, les possibilités qu'ils peuvent avoir de résoudre les problèmes proposés, les connaissances mobilisables en les résolvant et, dans certains cas, la nécessité d'une intervention dans ses interactions en classe. Par conséquent, même si nous n'avons pas fait le choix d'approfondir ce point dans cet article, l'AP permet à l'enseignant d'être mieux préparé pour enseigner et pouvoir apporter des aides *in situ* lorsque des difficultés émergent chez les élèves.

Enfin, l'AP dépend du degré d'ingéniosité de l'enseignant, car le jeu sur les variables didactiques, au cœur de l'AP, nécessite que l'enseignant puisse avoir une maîtrise des connaissances autant mathématiques que didactiques. D'où la pertinence de considérer l'AP et la portée des VD ainsi que des valeurs qui leur sont attribuées dans les pratiques d'enseignement ou d'intervention, dans les transferts de connaissances sur le terrain avec les praticien-ne-s, et définitivement, à l'instar de Dorier (2010.) de les intégrer dans la formation initiale ou continue, lorsque ce n'est pas encore fait.

Références bibliographiques

Artigue, M. (1988). Ingénierie didactique en mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 9*(3), 281-308.

Artigue, M. & Douady, R. (1986). La didactique des mathématiques en France. *Revue française de pédagogie, 76* (juillet-août-septembre), 69-88.

Assude T., Mercier, A. & Sensevy, G. (2007). L'action didactique du professeur dans la dynamique des milieux. *Recherche en didactique des mathématiques, 27*(2), 221-242.

Assude, T., Koudogbo, J., Millon-Fauré, K., Tambone, J., Theis, L. & Morin, M.-P. (2016a). Mise à l'épreuve d'un dispositif d'aide aux difficultés d'un système didactique. *Canadian*

Journal of Science, Mathematics and Technology Education, 16(1), 64-76.

Assude, T., Millon-Fauré, K., Koudogbo, J., Morin, M.-P., Tambone, J. & Theis, L. (2016 b). Du rapport entre temps didactique et temps praxéologique dans des dispositifs d'aide associés à une classe. *Recherches en didactique des mathématiques, 36*(2), 197-226.

Assude, T., Marchand, P., Millon-Fauré, K., Theis, L. & Koudogbo, J. (2022). Des systèmes d'aide à l'enseignement. Une étude de cas à propos du volume. *Recherches en didactique des mathématiques, 42*(3), 285-324.

Bessot, A. (2004). Une introduction à la théorie des situations didactiques. *Cahier du laboratoire Leibniz, 91*, 1-28.

Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. Grenoble : La Pensée Sauvage.

Brousseau, G. (1986). *Théorisation des phénomènes d'enseignement des mathématiques*. Thèse d'état, Université Bordeaux I.

Brousseau, G. (1982a). Les objets de la didactique des mathématiques. *Actes de la deuxième école d'été de didactique des mathématiques*. Olivet 1982, IREM d'Orléans.

Brousseau, G. (1982b). D'un problème à l'étude *a priori* d'une situation didactique. *Actes de la deuxième école d'été de didactique des mathématiques*. Olivet 1982, IREM d'Orléans (pp. 39-60).

Brousseau, G. (1981). Problèmes de didactique des décimaux. *Recherches en didactique des mathématiques, 2*(1), 37-128.

Charnay, R. (2003). L'analyse *a priori*, un outil pour l'enseignant. *Math-École, 209*, 19-26.

Dorier, J.-L. (2010). L'analyse *a priori* : un outil pour la formation d'enseignants - exemple d'un jeu issu des manuels suisses romands de première année primaire. In P Danos (dir.). *L'enseignement des mathématiques à l'école : où est le problème - Actes du XXXVI^e^ colloque international des formateurs de professeurs des écoles en mathématiques* (COPIRELEM). Auch : ARPEME 2010. https://archive-ouverte.unige.ch/files/downloads/0/0/0/1/6/8/5/5/unige_16855_attachment01.pdf

Eon, B. (2018). *L'analyse a priori de situations d'apprentissages en grande section : un outil d'aide à la préparation de la classe*. Mémoire MEEF « Métiers de l'Enseignement, de l'Éducation et de la Formation ». École supérieure du professorat et de l'éducation, Académie de Nantes.

Feyfant, A. (2015). La résolution de problèmes mathématiques au primaire. *Dossier de veille de l'IFÉ, 105, novembre*. ENS Lyon. http://veille-et-analyses.ens-lyon.fr/DA-Veille/105-novembre-2015.pdf

Koudogbo, J. (2017). Decimal number system: Knowledge of Quebec students educated under the 2001/1981 programs and teaching situations. *Journal of Mathematics Education, Education for All, 10*(1), 17-35.

Koudogbo, J. (2021). La recherche en didactique des mathématiques, un levier pour l'enseignement ? Vers une approche systémique pour développer le potentiel des élèves en difficulté. In P Marchand, A Adihou, J Koudogbo, D Gauthier & C Bisson (dir.). *La recherche en didactique des mathématiques et les élèves en difficulté : quels enjeux et quelles perspectives ?* Montréal : Éditions JFD (pp. 1-21).

Marchand, P., Adihou, A., Koudogbo, J., Gauthier, D. & Bisson, C. (2021). *La recherche en didactique des mathématiques et les élèves en difficulté : quels enjeux et quelles perspectives ?* Montréal : Éditions JFD.

Margolinas, C. (1992). Eléments pour l'analyse du rôle du maître : les phases de conclusion. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 12*(1), 113-158.

Mercier, A. (2017). Questions comparatistes sur les analyses didactiques des situations d'enseignement et d'apprentissage de divers savoirs. *Recherches en éducation, 29*, 100-112.

Millon-Fauré, K., Theis, L., Assude, T., Koudogbo, J., Tambone, J. & Morin, M.-P. (2018a). Comparaison des mises en œuvre d'un même dispositif d'aide dans des contextes différents. *Éducation et didactique, 12*(3), 43-64.

Millon-Fauré, K., Theis, L., Tambone, J., Koudogbo, J., Assude, T. & Hamel, V. (2018b). Appropriation par un enseignant d'un dispositif d'aide pour l'enseignement des mathématiques. *Spirale - Revue de Recherches en Éducation - Supplément électronique, 61*, 41-56.

Perrin-Glorian, M.-J. & Hersant, M. (2003). Milieu et contrat didactique, Outils pour l'analyse de séquences ordinaires. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 23*(2), 217-276.

Poirier, L. (2001). *Enseigner les maths au primaire. Notes didactiques*. Québec : Éditions ERPI.

Tcheuffa Nziatcheu, J. (2018). De l'analyse conceptuelle à la réalisation d'une carte conceptuelle : un dispositif de formation pour les futurs enseignants du primaire en mathématiques. *Revue de Mathématiques pour l'École, 229*, 31-38.

Theis, L., Morin, M.-P, Tambone, J., Assude, T., Koudogbo, J. & Millon-Fauré, K. (2016). Quelles fonctions de deux systèmes didactiques auxiliaires destinés à des élèves en difficulté lors de la résolution d'une situation-problème mathématiques ? *Annales de didactique et de sciences cognitives. Revue internationale de didactique des mathématiques, 21*, 9-37. IREM de Strasbourg.

Theis, L., Assude, T., Tambone, J., Morin, M.-P., Koudogbo, J. & Marchand, P. (2014). Quelles fonctions potentielles d'un dispositif d'aide pour soutenir la résolution d'une situation-problème mathématique chez des élèves en difficulté du primaire ? *Éducation et Francophonie, 42*(2), 158-172.

Vendeira-Maréchal, C. (2012). Ce que l'analyse *a priori* peut révéler des pratiques enseignantes. *Grand N, 89*, 103-129.

Vergnaud, G. (1996). La théorie des champs conceptuels. In J Brun, avec la collaboration de R Floris (dir.). *Didactique des mathématiques*. Lausanne : Delachaux et Niestlé S.A. (pp. 197-242).

Vergnaud, G. (1988). Multiplicative structures. In J Hiebert & M Behr (éds.). *Number Concepts and Operations in the Middle Grades*. Hillsdale, N.J.: Erlbaum/Reston, VA (pp. 141-161).

MELS (2006). *Programme de formation de l'école québécoise. Éducation préscolaire et enseignement primaire*. Québec : Gouvernement du Québec.

MELS (2009). *Progression des apprentissages au primaire. Mathématique*. Québec : Gouvernement du Québec.