# Le musée de « petit x »

## A PROPOS DE L'IRRATIONALITE DE $\pi$

Les mathématiques font des progrès et le contenu de leur enseignement évolue. Bien sûr, les outils faisant partie du bagage du mathématicien d'aujourd'hui sont plus puissants qu'ils ne l'étaient au siècle passé ; certaines des constructions de nos prédécesseurs rendues caduques par ces progrès sont dès lors abandonnées de l'enseignement, qu'il soit secondaire ou supérieur, malgré toutes leurs qualités esthétiques. La théorie des fractions continues fait partie de celles là puisqu'elle peut se traiter en terme de série ; mais je suis convaincu que vous apprécierez l'élégance de son utilisation dans la démonstration de l'irrationalité de $\pi$ et celle de $\pi^2$ telle qu'elle a été donnée par Legendre en note de «Eléments de Géométrie» [1794].

Rappelons que c'est Lambert [1767] qui le premier a prouvé que $\pi$ était irrationnel en utilisant la méthode exposée ici. Mais on considère généralement sa démonstration du lemme comme insuffisamment rigoureuse et on attribue à Legendre la première démonstration de l'irrationalité de $\pi$, ainsi que celle de $\pi^2$.

Ce n'est qu'en 1882 que Lindemann démontrera que le nombre $\pi$ est même transcendant, c'est-à-dire qu'il ne peut être solution d'une équation algébrique à coefficients entiers. Ceci mettant un terme au problème de la quadrature du cercle puisque si on pouvait construire un carré de même aire que le cercle à l'aide de la règle et du compas, $\pi$ serait solution d'une telle équation (de plus particulière).

Georges MATHESIS
Institut IMAG

«petit x» n° 10 pp. 77 à 79. 1986

## NOTE IV.

*Où l'on démontre que le rapport de la circonférence au diametre et son quarré, sont des nombres irrationnels.*

Considérons la suite infinie

$$1+\frac{a}{z}+\frac{1}{2}\cdot\frac{a^2}{z.z+1}+\frac{1}{2.3}\cdot\frac{a^3}{z.z+1.z+2}+\text{etc.}$$

dont le terme général est $\frac{1}{1.2.3\ldots n}\cdot\frac{a^n}{z.z+1.z+2\ldots.(z+n-1)}$ et supposons que $\varphi:z$ en représente la somme. Si on met $z+1$ à la place de $z$, $\varphi:(z+1)$ sera pareillement la somme de la suite

$$1+\frac{a}{z+1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{a^2}{z+1.z+2}+\frac{1}{2.3}\cdot\frac{a^3}{z+1.z+2.z+3}+\text{etc.}$$

Retranchons ces deux suites, terme à terme, l'une de l'autre, et nous aurons $\varphi:z-\varphi:(z+1)$ pour la somme du reste qui sera

$$\frac{a}{z.z+1}+\frac{a^2}{z.z+1.z+2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{a^3}{z.z+1.z+2.z+3}+\text{etc.}$$

Mais ce reste peut être mis sous la forme

$$\frac{a}{z.z+1}\cdot\left(1+\frac{a}{z+2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{a^2}{z+2.z+3}+\text{etc.}\right),$$

et alors il se réduit à $\frac{a}{z.z+1}\varphi:(z+2)$. Donc on aura généralement

$$\varphi:z-\varphi:(z+1)=\frac{a}{z.z+1}\varphi:(z+2).$$

Divisons cette équation par $\varphi:(z+1)$, et, pour simplifier le résultat, soit $\psi:z$ une nouvelle fonction de $z$, telle





que $\psi:z=\frac{a}{z}\cdot\frac{\varphi:(z+1)}{\varphi:(z)}$; alors on pourra mettre $\frac{z}{z\psi:z}$ au lieu de $\frac{\varphi:z}{\varphi:(z+1)}$, et $\frac{(z+1)\psi:(z+1)}{a}$ au lieu de $\frac{\varphi:(z+2)}{\varphi:(z+1)}$. La substitution faite, on aura

$$\psi:z=\frac{a}{z+\psi:(z+1)}.$$

Mais en mettant successivement dans cette équation $z+1$, $z+2$, etc., à la place de $z$, il en résultera

$$\psi:(z+1)=\frac{a}{z+1+\psi:(z+2)},$$

$$\psi:(z+2)=\frac{a}{z+2+\psi:(z+3)};\ \text{etc.}$$

Donc la valeur de $\psi:z$ peut s'exprimer par la fraction continue :

$$\psi:z=\cfrac{a}{z+\cfrac{a}{z+1+\cfrac{a}{z+2+\text{etc.}}}}$$

Réciproquement cette fraction continue, prolongée à l'infini, a pour somme $\psi:z$, ou son égale $\frac{a}{z}\cdot\frac{\varphi:(z+1)}{\varphi:z}$; et cette somme, développée en suites ordinaires, est

$$\frac{a}{z}\cdot\frac{1+\frac{a}{z+1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{a^2}{z+1.z+2}+\text{etc.}}{1+\frac{a}{z}+\frac{1}{2}\cdot\frac{a^2}{z.z+1}+\text{etc.}}$$

Soit maintenant $z=\frac{1}{2}$, la fraction continue deviendra

$$\cfrac{2a}{1+\cfrac{4a}{3+\cfrac{4a}{5+\text{etc.}}}}$$

dans laquelle les numérateurs, excepté le premier, sont tous égaux à $4a$, et les dénominateurs forment la suite des nombres impairs 1, 3, 5, 7, etc. La valeur de cette fraction continue peut donc aussi s'exprimer par



$$2a.\frac{1+\frac{4a}{2.3}+\frac{16a^2}{2.3.4.5}+\frac{64a^3}{2.3\ldots7}+\text{etc.}}{1+\frac{4a}{2}+\frac{16a^2}{2.3.4}+\frac{64a^3}{2.3\ldots6}+\text{etc.}}$$

Mais ces suites se rapportent à des formules connues, et on sait qu'en représentant par $e$ le nombre dont le logarithme hyperbolique est 1, l'expression précédente se réduit à $\frac{e^{2\sqrt{a}}-e^{-2\sqrt{a}}}{e^{2\sqrt{a}}+e^{-2\sqrt{a}}}\cdot\sqrt{a}$; de sorte qu'on aura en général

$$\frac{e^{2\sqrt{a}}-e^{-2\sqrt{a}}}{e^{2\sqrt{a}}+e^{-2\sqrt{a}}}\cdot 2\sqrt{a}=\cfrac{4a}{1+\cfrac{4a}{3+\cfrac{4a}{5+\text{etc.}}}}$$

De là résultent deux formules principales selon que $a$ est positif ou négatif. Soit d'abord $4a=x^2$, on aura

$$\frac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}=\cfrac{x}{1+\cfrac{x^2}{3+\cfrac{x^2}{5+\text{etc.}}}}$$

Soit ensuite $4a=-x^2$, et en vertu de la formule connue $\frac{e^{x\sqrt{-1}}-e^{-x\sqrt{-1}}}{e^{x\sqrt{-1}}+e^{-x\sqrt{-1}}}=\sqrt{-1}.\ \text{tang.}\ x$, on aura

$$\text{tang.}\ x=\cfrac{x}{1-\cfrac{x^2}{3-\cfrac{x^2}{5-\cfrac{x^2}{7-\text{etc.}}}}}$$

Celle-ci est la formule qui servira de base à notre démonstration. Mais il faut, avant tout, démontrer les deux lemmes suivants.

LEMME I. *Soit une fraction continue prolongée à l'infini,*

$$\cfrac{m}{n+\cfrac{m'}{n'+\cfrac{m''}{n''+\text{etc.}}}}$$

*dans laquelle tous les nombres* m, n, m', n', *etc. sont des entiers positifs ou négatifs; si on suppose que les fractions*





*composantes* $\frac{m}{n}, \frac{m'}{n'}, \frac{m''}{n''}$, etc. *soient toutes plus petites que l'unité, je dis que la valeur totale de la fraction continue sera nécessairement un nombre irrationnel.*

D'abord, je dis que cette valeur sera plus petite que l'unité. En effet, sans diminuer la généralité de la fraction continue, on peut supposer tous les dénominateurs $n$, $n'$, $n''$, etc. positifs; or, si on prend un seul terme de la suite proposée, on aura, par hypothese, $\frac{m}{n}<1$. Si on prend les deux premiers, à cause de $\frac{m'}{n'}<1$, il est clair que $n+\frac{m'}{n'}$ est plus grand que $n-1$ : mais $m$ est plus petit que $n$; et, puisqu'ils sont l'un et l'autre des entiers, $m$ sera aussi plus petit que $n+\frac{m'}{n'}$. Donc la valeur qui résulte des deux termes

$$\cfrac{m}{n+\cfrac{m'}{n'}}$$

est plus petite que l'unité. Calculons trois termes de la fraction continue proposée; et d'abord, suivant ce qu'on vient de voir, la valeur de la partie

$$\cfrac{m'}{n'+\cfrac{m''}{n''}}$$

sera plus petite que l'unité. Appelons cette valeur $\omega$, et il est clair que $\frac{m}{n+\omega}$ sera encore plus petite que l'unité; donc la valeur qui résulte des trois termes

$$\cfrac{m}{n+\cfrac{m'}{n'+\cfrac{m''}{n''}}}$$

est plus petite que l'unité. Continuant le même raisonnement, on verra que, quel que soit le nombre de termes qu'on calcule de la fraction continue proposée, la valeur qui en résulte est plus petite que l'unité; donc la valeur totale de cette fraction prolongée à l'infini, est aussi plus petite que l'unité. Elle ne pourrait être égale à l'unité que dans le seul cas où la fraction proposée serait de la forme

$$\cfrac{m}{m+1-\cfrac{m'}{m'+1-\cfrac{m''}{m''+1-\text{etc.}}}}$$

dans tout autre cas elle sera plus petite.

Cela posé, si on nie que la valeur de la fraction continue proposée soit égale à un nombre irrationnel, supposons qu'elle est égale à un nombre rationnel, et soit ce nombre $\frac{B}{A}$, B et A étant des entiers quelconques; on aura donc

$$\frac{B}{A}=\cfrac{m}{n+\cfrac{m'}{n'+\cfrac{m''}{n''+\text{etc.}}}}$$

Soient C, D, E, etc. des indéterminées telles qu'on ait

$$\frac{C}{B}=\cfrac{m'}{n'+\cfrac{m''}{n''+\cfrac{m'''}{n'''+\text{etc.}}}}$$

$$\frac{D}{C}=\cfrac{m''}{n''+\cfrac{m'''}{n'''+\cfrac{m^{IV}}{n^{IV}+\text{etc.}}}}$$

et ainsi à l'infini. Ces différentes fractions continues ayant tous leurs termes plus petits que l'unité, leurs valeurs ou sommes $\frac{B}{A}, \frac{C}{B}, \frac{D}{C}, \frac{E}{D}$, etc. seront plus petites que l'unité, suivant ce qui vient d'être démontré, et ainsi on aura $B<A$, $C<B$, $D<C$, etc.; d'où l'on voit que la suite A, B, C, D, E, etc. est décroissante à l'infini. Mais l'enchaînement des fractions continues dont il s'agit donne

$$\frac{B}{A}=\cfrac{m}{n+\cfrac{C}{B}}; \text{ d'où résulte } C=mA-nB,$$

$$\frac{C}{B}=\cfrac{m'}{n'+\cfrac{D}{C}}; \text{ d'où résulte } D=m'B-n'C,$$

$$\frac{D}{C}=\cfrac{m''}{n''+\cfrac{E}{D}}; \text{ d'où résulte } E=m''C-n''D,$$

etc. etc.



Et puisque les deux premiers nombres A et B sont entiers par hypothese, il s'ensuit que tous les autres C, D, E, etc., qui jusqu'à ce moment étaient indéterminés, sont aussi des nombres entiers. Or, il implique contradiction qu'une suite infinie A, B, C, D, E, etc. soit à-la-fois décroissante et composée de nombres entiers; car d'ailleurs aucun des nombres A, B, C, D, E, etc. ne peut être zéro, puisque la fraction continue proposée s'étend à l'infini, et qu'ainsi les sommes représentées par $\frac{B}{A}, \frac{C}{B}, \frac{D}{C}$, etc. doivent toujours être quelque chose. Donc l'hypothese, que la somme de la fraction continue proposée est égale à une quantité rationnelle $\frac{B}{A}$, ne saurait subsister; donc cette somme est nécessairement un nombre irrationnel.

LEMME II. *Les mêmes choses étant posées, si les fractions composantes* $\frac{m}{n}, \frac{m'}{n'}, \frac{m''}{n''}$, etc. *sont d'une grandeur quelconque au commencement de la suite; mais qu'après un certain intervalle, elles soient constamment plus petites que l'unité; je dis que la fraction continue proposée, en supposant toujours qu'elle s'étende à l'infini, aura une valeur irrationnelle.*

Car, si à compter de $\frac{m'''}{n'''}$, par exemple, toutes les fractions $\frac{m'''}{n'''}, \frac{m^{IV}}{n^{IV}}, \frac{m^{V}}{n^{V}}$, etc. à l'infini, sont plus petites que l'unité, alors, suivant le lemme I, la fraction continue

$$\cfrac{m'''}{n'''+\cfrac{m^{IV}}{n^{IV}+\cfrac{m^{V}}{n^{V}+\text{etc.}}}}$$

aura une valeur irrationnelle. Appelons cette valeur $\omega$, et la fraction continue proposée deviendra

$$\cfrac{m}{n+\cfrac{m'}{n'+\cfrac{m''}{n''+\omega}}}.$$

Mais si on fait successivement

$$\frac{m''}{n''+\omega}=\omega', \quad \frac{m'}{n'+\omega'}=\omega'', \quad \frac{m}{n+\omega''}=\omega''',$$



il est clair que, $\omega$ étant irrationnelle, toutes les quantités $\omega'$, $\omega''$, $\omega'''$, doivent l'être pareillement. Or, la dernière $\omega'''$ est égale à la fraction continue proposée; donc la valeur de celle-ci est irrationnelle.

Nous pouvons maintenant, pour revenir à notre sujet, démontrer cette proposition générale.

THÉORÊME.

*Si un arc est commensurable avec le rayon, sa tangente sera incommensurable avec le même rayon.*

En effet, soit le rayon $=1$, et l'arc $x=\frac{m}{n}$, $m$ et $n$ étant des nombres entiers, la formule trouvée ci-dessus donnera, en faisant la substitution,

$$\text{tang.}\,\frac{m}{n}=\cfrac{m}{n-\cfrac{m^2}{3n-\cfrac{m^2}{5n-\cfrac{m^2}{7n-\text{etc.}}}}}$$

Or cette fraction continue est dans le cas du lemme II; car il est clair que les dénominateurs $3n$, $5n$, $7n$, etc. augmentant continuellement, tandis que le numérateur $m^2$ reste de la même grandeur, les fractions composantes seront ou deviendront bientôt plus petites que l'unité, donc la valeur de tang. $\frac{m}{n}$ est irrationnelle; donc, *si l'arc est commensurable avec le rayon, sa tangente sera incommensurable.*

De là résulte, comme conséquence très-immédiate, la proposition qui fait l'objet de cette note. Soit $\pi$ la demi-circonférence dont le rayon est 1; si $\pi$ était rationnel, l'arc $\frac{4}{\pi}$ le serait aussi, et par conséquent sa tangente devrait êtr irrationnelle : mais on sait, au contraire, que la tangente de l'arc $\frac{\pi}{4}$ est égale au rayon 1; donc $\pi$ ne peut être rationnel. Donc *le rapport de la circonférence au diametre, est un nombre irrationnel* (1).

(1) Cette proposition a été démontrée pour la premiere fois par Lambert, dans les Mémoires de Berlin, année 1761.



Il est probable que le nombre $\pi$ n'est pas même compris dans les irrationnelles algébriques, c'est-à-dire, qu'il ne peut être la racine d'une équation algébrique d'un nombre fini de termes dont les coëfficients sont rationnels : mais il parait très-difficile de démontrer rigoureusement cette proposition; nous pouvons seulement faire voir que le quarré de $\pi$ est encore un nombre irrationnel.

En effet, si dans la fraction continue qui exprime tang. $x$, on fait $x=\pi$, à cause de tang. $\pi=0$, on doit avoir

$$0=3-\cfrac{\pi^2}{5-\cfrac{\pi^2}{7-\cfrac{\pi^2}{9-\text{etc.}}}}$$

Mais si $\pi^2$ était rationnel, et qu'on eût $\pi^2=\frac{m}{n}$, $m$ et $n$ étant des entiers, il en résulterait

$$3=\cfrac{m}{5n-\cfrac{m}{7-\cfrac{m}{9n-\cfrac{m}{11-\text{etc.}}}}}$$

Or, il est visible que cette fraction continue est encore dans le cas du lemme II, sa valeur est donc irrationnelle, et ne saurait être égale au nombre 3. Donc *le quarré du rapport de la circonférence au diametre, est un nombre irrationnel.*