MATHIAS
ou
«UN MOMENT DE COMPREHENSION»

François CONNE
F.P.S.E.
Université de Genève

INTRODUCTION

Le texte ci-dessous constitue le premier volet d'une étude que j'ai faite en 1983 à propos d'une séquence didactique de Yves Chevallard pour l'enseignement de l'algèbre en 4ème. Ce texte a paru dans les cahiers **Interactions Didactiques** n° 3 publiés par les universités de Genève et Neuchâtel. Le titre est : «Jalons à Propos d'Algèbre»*.

Outre le but originel qui était de faire écho (déformé) au texte de Yves Chevallard, je voulais illustrer sur un exemple, la progression d'un élève dans la résolution d'un problème, et en particulier ce qui fait sens pour celui-ci. Puis, au travers de cette dynamique, analyser la tâche effectivement traitée et celle-ci une fois identifiée, comparer succintement les traitements : arithmétique, algèbrique et géométrique.

J'espère avoir trouvé une forme de présentation qui ne soit pas trop lassante pour le lecteur.

PROTOCOLE MATHIAS.

1ère partie : Numérique.

— Prends 3 nombres consécutifs, trois nombres qui se suivent.
Mathias écrit 4, 5, 6.

— Maintenant tu calcules le carré de celui qui est au milieu et tu y soustrais le produit de deux autres nombres.
Mathias écrit au fur et à mesure : 25 - 24 = 1.

— Un autre, refais trois autres nombres consécutifs.
Mathias choisit cette fois 10, 11, 12 qu'il écrit. Puis il construit son

* On peut se le procurer auprès de l'auteur, voir l'adresse à la fin de cet article.

«petit x» n° 10 pp. 53 à 66. 1986

calcul. 121 - 120 = 1. Durant un petit moment, il examine ses nombres. Compare : *Je crois que j'ai trouvé ! Là, on fait une fois de plus un nombre une fois plus petit.* Il reprend sa formulation. *Le multiplicateur est de un plus grand et le multip..., le multiplic... le multiple est de un plus petit.* Toujours pas convaincu de son expression, il rajoute : *je ne peux pas mieux dire, je vois comment par écrit, on voit comment ça marche.*

— Essaie encore une fois de le dire, explique avec les nombres.

12 on le faisait..., on le multipliait une fois de moins que 11 là... et 12 c'est un de plus que 11... et puis... comment dire... ça... ça donne ça que c'est une fois de plus... Mathias me regarde, j'ai l'impression qu'il doute que je le comprenne.

Commentaire de la première partie.

1. Tout d'abord il faut que je confirme le lecteur sur le point suivant : Mathias à ce moment de la résolution est sûr du fait. Il pense que cela donne 1 et que cela donnera sans doute toujours 1.

2. Mathias a tout de suite cherché à analyser cette seconde apparition du 1. Pour cela il examine les nombres, et leur écriture : 121 - 120 = 1 comparé à 10, 11, 12. Lors de cette activité de comparaison et de mise en relation dont les seules manifestations sont les mouvements du regard de Mathias ainsi que les pointages du stylo bille, il a le sentiment de trouver quelque chose. C'est ce qu'il déclare. Et je puis donc inférer que petit à petit les mises en relations s'organisent dans son esprit. Seulement, il n'arrive pas bien à en rendre compte dans sa formulation orale. Soit que sa pensée (l'échafaudage du raisonnement intuitif) est fugace soit que celle-ci est trop vague et ne passe pas par les mots, ceux-ci manquant ou encore faisant censure. L'examen attentif de ce qu'il dit montre qu'il se centre sur les relations entre les nombres donnés. Il situe le produit ac (nommons les 3 nombres a, b, c dans l'ordre de croissance) par rapport au carré b^2, mais en des termes arithmétiques, je veux dire par là qu'il se refère à la multiplication et particulièrement à une propriété additive de celle-ci. Ressortent alors deux aspects :

premièrement il retrouve le 1 dans les différences entre a, b, c. Il retrouve la trace du 1 que la soustraction fait apparaître ;

deuxièmement il y associe une sorte de compensation : *on prend une fois de plus un nombre une fois plus petit.* Cela est compris et prend un moment tout l'espace. Il paraît naturel de retrouver 1 dans le calcul $b^2 - ac$. Mais lorsque Mathias veut le formuler, ce dernier maillon ne passe pas. C'est là qu'il butte, recommence ou s'il force, devient évasif : *ça... ça donne ça que c'est une fois de plus...* (son raisonnement évidemment ne permettrait pas de dire pourquoi le résultat est 1 et non pas 0 ou 2 !).

3. Pour le moment, la **signification** de la propriété est numérique. Et Mathias mobilise des représentations des nombres. Ainsi en est-il du recours à ce qu'il sait de la multiplication, et à cet argument de compensation. Mais, nous l'avons vu, il n'arrive pas à recouvrir totalement ce qui se passe. Il y a quelque chose qu'il voit sur ce qu'il a écrit mais qu'il n'arrive pas à dire. Là aussi je ferais l'hypothèse que la valeur des nombres choisis 10, 11, 12 n'est pas sans jouer un rôle. En particulier la simplicité de la multiplication 10 X 12 qui revient à **écrire** 12 suivi d'un zéro : 120. Mais aussi peut-être le carré de 11 qui n'est ni 101 ni 111. Je dirais encore la présence de 1 dans 11 et sa «retrouvaille» dans 11^2.

Je suppose donc que le traitement de Mathias porte sur les quantités, sur les propriétés des opérations numériques (1 de plus, 1 de moins, et additivité de la multiplication, compensation entre les + et les -). Ainsi que sur l'écriture, les écritures et les relations que l'on peut faire sur les symboles venant comme supports (ici comme manifestation) des relations numériques que l'on suppose œuvrer.

4. J'en conclus donc à cette **réalité numérique** et **scripturale** sur laquelle porte l'attention de Mathias, pour en dégager un élément de signification. Mais dès lors que l'on veut parler de signification, il s'agit de comparer temporellement les divers états par lesquels le sujet passe. Ainsi au départ le choix de 3 nombres consécutifs, pas d'autres indications pour ce choix qui paraît dès lors libre (et immanquablement le sujet hésite ou attend la suite). Le calcul de la quantité, il trouve 1. Bon, il retrouve 1 et dès lors il s'étonne. C'est alors ce 1 qui étonne, qui devient significatif. Enfin vient l'examen et le premier échafaudage dont on notera une chose que je n'ai pas encore relevée : c'est une centration relationnelle : *on prend une fois de plus un nombre une fois plus petit.* Je dirai que a, b, c sont des nombres, des nombres vus encore comme bien différents **c'est** une fois de plus **que** b, a **est** une fois plus petit **que** b. **Il y a encore 3 nombres dont Mathias traite les relations.**

Cette dernière remarque permet la transition à la seconde partie du protocole.

2ème partie : Algébrique.

Essaie de faire par l'algèbre pour expliquer.

Mathias écrit $x^2 - yz = 1$, puis réfléchit à haute voix. *Alors on sait que disons* $x - y = 1$ (il ne l'écrit pas) *si ça c'est* x... il réfléchit...*non, on ne doit pas faire comme ça, ça ne donne pas une formule. Je ne vois pas ce qu'on doit faire. On doit expliquer par l'algèbre ?* Il me renvoie donc ma question.

Ouais.

C'est pas une formule... puis il réfléchit... *et si ça* ($x^2 - yz = 1$) *je fais que ce soit égal à zéro* (pour le lecteur, Mathias venait de m'expliquer auparavant que le maître leur avait parlé de produit nul de 2 polynômes $P(x)\ Q(x) = 0 \Rightarrow P(x)$ ou $Q(x) = 0$). Il écrit alors : $x^2 - yz - 1 = 0$ en disant : *je ne suis pas sûr, je vais voir si ça marche.* Examen puis : *ah non ça ne marche pas... on ne peut pas réduire parce qu'on n'a pas de* x. Un temps de réflexion puis Mathias commence à écrire au-dessous : $x^2 - (x + 1)$ puis $x^2 - ((x + 1)(x - 1))$, à ce moment il s'exclame *ça, c'est une forme ; ça on sait ce que c'est.* Il écrit $x^2 - ((x + 1)(x - 1)) = 1$ puis $x^2 - (x^2 - 1) = 1$ *donc c'est 1, c'est un de moins que* x^2.

Réexplique-moi.

x, c'est le nombre du milieu. Alors (il lit) x^2 *moins grande parenthèse dans laquelle il y en a deux petites* x *plus un et pis* x *moins un c'est* x^2 *moins un donc c'est* x^2 *moins* x^2 *moins un donc c'est égal à un.*

Tu es sûr ?

Si on enlève les parenthèses il écrit alors à la suite de son équation :

$$x^2 - (x^2 - 1) = 1$$
$$x^2 - x^2 + 1 = 1$$
$$1 = 1$$

Tu en es où dans ton problème ?

... Là j'ai prouvé que quand il y avait 3 nombres consécutifs, le carré du milieu moins le produit des deux autres est égal à un.

Tu es sûr que tu l'as prouvé ?

moment puis *pas par écrit.* (Pas une preuve explicite comme en géométrie) *mais en regardant ça,* x, *peut être remplacé par n'importe quoi, manquera toujours un... J'ai pas tout expliqué en français j'ai écrit simplement.*

Bon, si maintenant on prend avec des nombres négatifs... avec 3 nombres consécutifs négatifs, ça marche toujours ?

Il réfléchit un moment. Puis *je crois* (il examine son égalité $(x^2 - (x + 1)(x - 1) = 1)$ *un nombre négatif au carré ça donne plus, un nombre négatif fois un nombre négatif ça donne plus, donc on doit obtenir un. C'est la même formule si on veut ...* il regarde encore (hésite ?) puis jetant d'un geste vif son crayon sur la table. *C'est la même formule* x *est négatif,* x *égale moins* x *si on veut.* (Il veut sans doute dire par là que x peut désigner une quantité négative comme une quantité positive).

Commentaire de la deuxième partie.

Je vais poursuivre mon analyse en examinant la signification.

1. Nouvelle consigne : expliquer par l'algèbre. Mathias reprend le problème au départ et écrit littéralement le calcul qu'il s'agit d'expliquer. $x^2 - yz = 1$. On remarque l'ordre avec lequel Mathias prend les nombres. Le carré du nombre du milieu moins le

produit des deux autres. On remarquera aussi, et ce en relation avec le dernier point du commentaire précédent, qu'il y a 3 lettres pour les 3 nombres. Mathias reprend les choses. Il exprime ensuite une des relations données : $y - x = 1$. Mais de nouveau, on notera que cela relie 2 nombres considéré comme entités bien distinctes.

2. Le second point à noter est peut-être un effet dû à ma consigne (expliquer par l'algèbre). Il n'en reste pas moins que Mathias anticipe ce que cela devrait donner avant même d'avoir traduit les relations en jeu. Il écrit $x^2 - yz = 1$ mais cela est la traduction de la consigne et du résultat escompté. Il explicite une des relations mais abandonne car : *ça ne donne pas une formule.* C'est donc que le traitement algébrique est déjà soumis à une finalité : trouver une formule, ce que j'aurais envie de traduire par : trouver quelque chose d'exploitable. C'est à cette finalité aussi que Mathias cherche à répondre lorsqu'il a l'idée, après tâtonnement et analyse de l'obstacle auquel il butte (*on ne peut pas réduire car on n'a pas de* x), de substituer à y et z leur expression $(x + 1)$ et $(x - 1)$. Ce point est fondamental car Mathias ne procède pas dans le flou. Il ne commence pas par traduire les relations de la donnée qu'il substituerait dans la formule pour développer ensuite. Son traitement est moins linéaire, plus contrôlé. Et lorsqu'il exprime les relations $(x - 1)$, x, $(x + 1)$, cela répond avant tout au souci (sous-tâche) de tout exprimer en x. On remarquera ainsi que ceci marque un changement de perspective dans son traitement. **Il utilise les relations données pour exprimer les nombres en fonction d'une seule variable, et ne cherche plus à exprimer les relations pour elles-mêmes.** Dès lors, et par le biais de la reconnaissance instantanée d'une identité remarquable (une formule, quelque chose d'utilisable) l'algébrique prend le pas sur le numérique.

3. L'algébrique, et l'écriture des équations deviennent alors la réalité sur laquelle Mathias est centré. Je lui demande une réexplication — Voilà qu'il me lit son équation (comme s'il s'agissait de la dicter). Je lui demande s'il est sûr — Il vérifie ses parenthèses, une erreur de signe s'est peut-être glissée. Il a prouvé le théorème (il en revient au problème si je le lui demande) mais cette preuve est administrée par l'algèbre : on peut remplacer x par n'importe quoi... la preuve réside dans les équations écrites (*j'ai pas tout expliqué en français... mais en regardant...*).

4. J'ai posé la question des nombres négatifs dans l'espoir de le ramener sur le numérique. Cela avait fonctionné ainsi avec quelques étudiants adultes. A prime abord, il semble que cela marche. En effet, l'examen des signes des quantités écrites répond à des règles de traitement numérique où il est obligatoire de faire la distinction des cas (calcul de valeur absolue, calcul des signes). Mais le souci de Mathias reste la formule. Il lui semble que celle-ci ne devrait pas changer. Les quantités restent positives. Et sur la formule, c'est sûr x^2 reste x^2. (Un petit doute cependant, me semble-t-il pour affirmer que $(x + 1)(x - 1)$ reste aussi identique). **Puis un argument algébrique** balaye le tout : x désigne tout autant une quantité négative que positive. Notez

l'expressivité : le crayon jeté («faux problème que je suis en train de me poser !») et : x *égale moins* x *si on veut*. Phrase très claire mais qu'il ne s'agirait pas de poser algébriquement.

Remarque.

Avec mes étudiants adultes, cela n'avait pas été aussi clair. Il avait fallu tout réécrire et le plus dur aura été de réécrire «en négatif» la suite des 3 nombres. Ensuite le calcul avec le contrôle parallèle que cela est plausible (un carré est positif, le produit de 2 nombres négatifs reste positif). Alors quelqu'un se demanda : «et si ces deux nombres ne sont pas négatifs ?». On avait alors vérifié avec -1, 0 et 1.

5. L'algébrique fait donc maintenant toute la signification du problème et Mathias ne reviendra pas vraiment sur le numérique. (Il faut remarquer que dans sa vie d'écolier, en mathématiques on travaille exclusivement algèbre et démonstrations — en géométrie surtout —. Pas étonnant donc sa réaction). On notera aussi le niveau (état) de signification auquel il est abouti. Sa formulation reste factuelle : *quand il y avait 3 nombres consécutifs alors le carré du milieu moins le produit des deux autres est égal à 1.*

Mathias sait que le théorème est général, il comprend à la fois la constance, la valeur de cette différence. Or dans ce théorème la relation exacte en jeu (la propriété qu'elle exprime) porte sur l'écart entre les nombres choisis. Pour le moment Mathias n'accède pas à ce niveau de signification.

3ème partie : Discussion avec Mathias.

Avec Mathias j'ai la chance d'être tombé sur un élève qui non seulement n'a pas trop de difficultés en mathématiques, mais encore a une conscience assez nette de ce qu'il est en train de faire. De là une discussion passionnante que je livre maintenant et où je tente mollement de reproblématiser la question. Je dis mollement car rapidement je me suis plus intéressé à ses commentaires qu'à lui poser de nouvelles questions algébriques. Il va de soi que dans l'écriture des commentaires précédents, j'ai utilisé certains éléments de ce qui va suivre pour guider son interprétation.

Donc tu as compris ? Tu peux m'expliquer ce qui se passe ?

Oui, moi je peux expliquer puis il se tait un moment. Puis : *oui mais ta question ? C'est où, à quel point* (que je dois expliquer) *je comprends pourquoi, je comprends les opérations, j'ai tout compris les calculs que j'ai faits, la manière dont je peux prouver, j'ai bien compris...* puis après un moment, *je n'arrive pas bien à savoir ce qu'il faut faire quand tu dis ça... il ne se passe rien, c'est un calcul, on ne peut pas dire qu'il se passe quelque chose. Il y a une opération, on doit pour... développer... la seule chose qui se passe... c'est un nombre au carré... une suite de 3 nombres consécutifs... non... comment dire... on prend une suite de 3 nombres, et les deux nombres* *du bord on a ce à leur produit on... soustrait leur produit au nombre carré du milieu... c'est ça qui se passe... le reste c'est nous qui le faisons.*

Et puis cette histoire de 1 qu'on obtient, ça t'étonne ?

Quand tu me l'as mise sous le nez, oui. Mais maintenant plus. Avant que j'ai fait le dernier... quand j'ai fait celui-là (il montre 10, 11, 12) *ça m'a frappé, c'était presque normal avant d'écrire* x. *(...) après en faisant des* x *j'ai vraiment compris.*

Tu peux maintenant me redire ce que tu disais à ce propos (10, 11, 12) ?

Quand j'ai regardé comme ça, sans faire les opérations sur les nombres. Quand j'ai écrit les nombres j'ai trouvé normal que ça faisait un. Mais je n'ai pas compris pourquoi. Parce que, je ne sais pas si c'est juste, on multipliait le chiffre 12 par 1 de moins que le chiffre 11 et que le chiffre 12 est 1 de plus grand que le chiffre 11... donc ça... donc ça va se passer... je ne savais pas expliquer sans x... *un plus petit fois un plus grand, c'est comme ça. Je sais quelle formule utiliser* $((x - 1)(x + 1))$.

Explique pourquoi ?

J'ai remarqué qu'il y avait un de moins et un de plus, il m'a semblé que c'était à cause de ça... Je n'arrivais pas à trouver le raisonnement qui était dans ma tête... ce n'est qu'en mettant par écrit que j'ai trouvé qu'on pouvait mettre en formule.

Pour toi, maintenant, c'est clair clair clair ?

Je sais pourquoi je comprends tout. Ouais ça me paraît clair.

Mais tu n'as pas tout de suite fait ça. Tu avais écrit $x^2 - yz = 1$.

J'ai remplacé tous les chiffres par des lettres. Je me suis rendu compte que ça ne donnait pas une formule. J'ai essayé. On a appris à mettre de l'autre côté du signe égal ça donne 0 comme ça ça donne la possibilité de la valeur des nombres en lettres... puis après j'ai pensé qu'on prenait simplement le chiffre au carré qu'on remplaçait par une lettre puis les autres c'est ce chiffre plus un et ce chiffre moins un (...) $x + 1$ *si on veut c'est le nombre le plus grand de la triade* $x - 1$ *c'est le nombre le plus petit, j'ai trouvé plus simple.*

Pourquoi ?

J'ai pu soustraire plus facilement... c'est exprimé en x *seulement, ça m'a paru mieux.*

Tu as dit : «c'est pas une formule». Tu cherchais une formule ?

C'est une des formules de produit remarquable, on a appris cela en classe.

Quand y as-tu pensé ?

En faisant ça. Il montre sur son écriture que c'était au moment où il écrivait la dernière parenthèse de $x^2 - ((x + 1)(x - 1))$.

Tu as compris quoi ?

Que c'est cela qu'il fallait utiliser... ah c'est une... question assez... je me suis prouvé un peu à moi-même pourquoi quand on a 3 nombres et quand on fait le nombre du milieu au carré moins le produit des deux autres, on obtient un... si on veut, c'est surtout à nous-mêmes que ça prouve.

Pourquoi tu dis : «à moi-même» ?

Parce que moi, je ne le savais pas. En le faisant à moi-même, je l'explique aux autres.

Suppose que je ne connaisse pas les identités remarquables, tu peux m'expliquer ?

Mathias fait alors le développement algébrique et montre comment on passe de $(x + 1)(x - 1)$ à $x^2 - x + x - 1$ et finalement $x^2 - 1$.

Explique-moi ce que tu m'as expliqué à propos de 10, 11, 12 mais là avec des x.

Mathias inverse ma demande et montre la formule des identités remarquables en remplaçant x par 11. $(11 + 1)(11 - 1)$.

Tu as fait le contraire de ce que je te demande.

Je ne peux pas faire autre chose. C'est grâce à ça que j'ai compris.

Ce 1, il vient d'où ?

Lequel (...) je vois soit le -1 *soit le* +1 *des deux autres nombres de la triade soit le* 1 *qui est le produit de ces deux opérations* (c'est-à-dire $(x + 1)(x - 1)$...).

C'est lequel ?

Celui qui est après le égal.

C'est celui-là que j'entends.

Je pourrais l'expliquer en écrivant... puis un moment de réflexion, puis soudain très rapide : *donc ce 1 vient du premier nombre... du nombre du milieu... il vient de la différence entre le nombre du milieu et des deux autres (...).*

Ici, il y a un trou dans mes données. J'avais noté l'impression qu'il exprimait effectivement la relation noyau : à savoir la relation entre la différence des nombres de départ et la quantité calculée. Cependant je ne suis pas sûr à 100% de cette interprétation aujourd'hui.

Tu prends 3 nombres qui se suivent de 4, qui sautent de 4, et tu recalcules.

Je crois savoir, je te dis sans calculer. Je pense qu'on aura 14. Quand on fait le calcul $x^2 - 1$, 1, *c'est au carré et puis 14... 4 au carré c'est... non je veux dire 16.*

Tu vérifies.

Il calcule 6, 10, 14 et 100 - 84 = 16. Puis il dit qu'on peut le prouver comme avant, c'est pourquoi il a pu anticiper. Il écrit :

$x^2 - (x + 4)(x - 4) = 16$
$x^2 - (x^2 - 16) = 16$
$x^2 - x^2 + 16 = 16.$

Puis il corrige son calcul, vu qu'au départ on ne sait pas que cela fera 16

$x^2 - (x + 4)(x - 4) =$
$x^2 - (x^2 - 16) =$
$x^2 - x^2 + 16 = 16.$

Plus tard, je lui explique une autre démonstration qui reprend en fait son argument : *une fois de plus un nombre une fois de moins.* Par le diagramme suivant.

$$\begin{tikzcd} 11 \times 11 \arrow[r, "+11"] \arrow[dr, "-1"'] & 12 \times 11 \arrow[d, "-12"] \\ & 12 \times 10 \end{tikzcd}$$

Mathias n'a pas de peine à comprendre la démonstration. Il compare (à ma demande) ceci à son raisonnement. *On joue aussi sur le 1 de moins. Mais c'est pas comme moi car j'ai pas utilisé ce 12 de moins et ce 11 de plus. Tu arrives finalement au même résultat. Mais c'est bien moins évident à trouver ton truc. Parce qu'il faut penser à chercher. A prendre* 12 × 11 (comme intermédiaire). *Il y a plusieurs combinaisons possibles mais on ne sait pas lesquelles sont bonnes.*

Il me montre qu'on aurait pu aussi faire en passant par 11 × 10 :

$$\begin{tikzcd} 11 \times 11 \arrow[r, "-11"] \arrow[dr, "-1"'] & 10 \times 11 \arrow[d, "+10"] \\ & 10 \times 12 \end{tikzcd}$$

Tandis qu'ici $x^2 - (x + 1)(x - 1)$ *tu compares deux multiplications et tu aboutis à 1. Tu affiches que ça c'est le nombre du milieu plus 1 et ça moins 1.*

3 jours plus tard Mathias viendra me dire qu'il l'a proposé en classe à ses camarades, à son professeur. Mais que personne n'a pu le montrer comme je l'avais fait, sans algèbre.

Commentaire de la troisième partie.

Le lecteur trouvera dans les déclarations de Mathias les éléments à l'appui des interprétations précédentes. Quant à moi, je veux revenir brièvement sur les points suivants.

1. Mathias reste dans l'algébrique. Et ne recherche pas à revenir au numérique. D'ailleurs on pourrait dire : plus de problèmes pour lui.

2. Mathias contrôle très bien son calcul algébrique, et cela se voit à sa généralisation. Tout d'abord une possibilité de caractériser le 1 (produit de la différence de x avec les 2 autres nombres de la triade). Que 1 est un carré, et que si les nombres se succédaient de 4, la différence serait de 4^2. Ceci dénote d'un bon niveau de signification. Mais c'est la formule algébrique qui lui sert d'appui (et de représentation). Il abandonne la représentation en termes de multiplications numériques.

3. Mathias comprend la démonstration finale (s'appuyant sur un schéma ainsi que sur les propriétés additives de la multiplication numérique). Cela montre aussi son contrôle de ce type de représentation et confirme qu'il a sans doute bien compris quelque chose dans sa propre analyse numérique. Il ne reconnaît cependant pas son raisonnement, ou plutôt le prolongement de son raisonnement vu qu'il n'est pas possible de quantifier directement la relation entre x^2 et $(x + 1)(x - 1)$. Il faut en effet considérer cette relation comme composée de deux relations laissant fixe alternativement l'un des facteurs :

$$\begin{array}{lll} x.x \longrightarrow (x+1)x & & \\ & (x+1)x \longrightarrow (x+1)(x-1). & \end{array}$$

Remarquons que ce type d'enchaînement correspond exactement à l'usage de la «technique des noms auxiliaires» proposée par Y. Chevallard (cf. note fin d'article).

4. On notera enfin que Mathias ne revient pas sur l'argument numérique (compensation et propriété de la multiplication) qu'il donnait comme explication de la propriété. Il me semble d'ailleurs pas avoir conscience de l'insuffisance logique de cet argument. Pour lui ce n'est qu'une question de mots qui lui manque , il n'arrive pas à redire ce qu'il a pensé dans sa tête. Même lorsque je propose une démonstration qui prolonge la sienne, il n'y a pas réexamen et finalement Mathias termine en se référant une fois de plus à la formule algébrique. Sans doute j'aurais dû proposer

des contre-exemples, et en parler plus directement avec lui. (par exemple : $(x + 1) + (x - 1) = 2x$ et pour le dire en des termes proches des siens : «on ajoute un nombre de 1 de plus à un nombre de 1 de moins et on aboutit à 2 fois ce nombre. $2x - (x + 1) + (x - 1) = 0$). Avouons quand même qu'il y a quelque chose de vrai et que les mots manquent en français pour expliciter ce genre de raisonnements. Il est bien agréable de se baser d'un autre support. Un schéma par exemple.

CONCLUSIONS.

A. Dans ce protocole, nous assistons à un moment de compréhension où Mathias **anticipe les modalités de traitement propres à lui permettre le succès et où il passe d'un ordre de signification à un autre***. Ce moment passé, les commentaires qui suivent ne peuvent pas le recréer (ce n'est pas possible) on a le sentiment que Mathias et moi ressassons des choses, que le problème s'est dégonflé et qu'en fait, il n'y a plus rien à comprendre.

Moi-même, en tant qu'observateur et analyste, j'oscille entre deux attitudes. D'une part considérer le sujet (Mathias) et son évolution, passant par différents états de signification, qui à un moment donné réussit à assimiler la propriété numérique inattendue à un (ou plusieurs) pans de sa réalité ; et de l'autre, l'objet (la propriété numérique) qu'il s'agit d'admettre comme un fait auquel il n'y a pas grand chose à redire (à comprendre). C'est que la signification (et la compréhension) ne se laissent vraiment saisir qu'aux moments de changement, de passage, que comme un processus dont le siège est le sujet. Dès lors que l'analyse néglige les significations antérieures pour se cantonner au niveau atteint, on perd le contact, cela s'évanouit. Et ces questions nous apparaissent comme des faux problèmes à rejeter. Par exemple la question que je pose à Mathias «d'où provient le 1 de $b^2 - ac = 1$» n'a en soi pas beaucoup de sens. Lui en donner (et de pouvoir alors entrer en matière) suppose tout un travail. Soit de rechercher d'autres formulations de la propriété. Par exemple ici, vouloir en revenir au traitement numérique (arithmétique) ou encore trouver d'autres traitements. Cf. plus loin un traitement géométrique. Soit de rechercher exactement ce qui est à l'œuvre dans la propriété, ce qui mène à une généralisation. Quoiqu'il en soit, cela s'accompagne toujours d'un changement de point de vue, donc de signification. Je fais bien sûr l'hypothèse que ceci est toujours possible, du moins du point de vue de la signification. Même si du point de vue de l'objet, il n'y aura pas toujours gain.

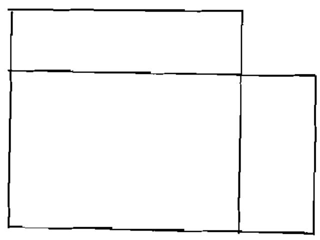
* On caractérisera ce passage : soit par l'explicitation de la nouvelle signification auquelle le sujet accède. Ici dans l'exemple de Mathias, c'est sans conteste l'algébrique et en particulier l'écriture des 3 nombres avec une seule variable. (Il n'y a en quelque sorte plus qu'un nombre et deux de ses transformés). Soit par l'explicitation de ce que le sujet rejette. Ici tout le raisonnement numérique et arithmétique sur lequel Mathias n'entre plus en matière.

Je dirai donc finalement qu'il reste toujours quelque chose à comprendre, même si la compréhension elle-même est un phénomène momentané.

B. Revenons-en aux diverses significations. Il y a plusieurs ordres de significations et celles-ci ne se situent pas toutes à un même niveau. Certaines d'entre elles tiennent au système de traitement du problème. C'est-à-dire au support d'objets ou de signifiants sur lequel le sujet travaille ainsi que les actions ou opérations associées. Dans l'exemple, nous en avons vu au moins deux à l'œuvre, caractérisées par les vocables «algébrique» et «numérique». Remarquons que ce sont des ordres de réalités fort différents, mobilisant des représentations spécifiques (se laissant plus ou moins bien exprimer en langage naturel). Dans l'exemple ci-dessus, les symboles écrits jouaient dans les deux cas un rôle non négligeable. Cependant les comparaisons des symboles 10, 11, 12 et 121-120 que Mathias fait ne sont pas du tout celles qu'il fait sur les formules algébriques. D'autre part, il s'avère que ces opérations sont orientées (sont sous contrôle d'une finalité). Ainsi la traduction d'un système à l'autre ne se fait pas automatiquement ni de but en blanc, même si apparemment le sujet dispose de tous les éléments voulus. Mathias ne décroche que lorsqu'il arrive à rendre les propriétés de la donnée utilisables pour un traitement algébrique (tel qu'il le connaît).

La correspondance entre ces systèmes est globale, mais ne joue pas forcément dans tous les détails. S'il est tout à fait signifiant d'exprimer les 3 nombres consécutifs par $(x-1)$, x, et $(x+1)$, lors du calcul algébrique, la suppression des parenthèses fait apparaître des entités qui n'ont pas leur correspondant direct. Ainsi je puis facilement considérer le calcul numérique de 12 fois 10 comme étant identique à (11 + 1) fois (11 - 1) mais dans mon calcul de 12 fois 10 réapparaitra ni 121 ni +11 ni -11, ni -11. D'autre part, le traitement arithmétique considéré dans le protocole ferait plutôt apparaître le découpage $-x + (x-1)$ (c'est plutôt $-x$ et $(x-1)$ qui se compensent que $+x$ et $-x$ qui s'annulent).

Je veux encore examiner ici rapidement un traitement géométrique, par superposition d'un carré d'aire x^2 et d'un rectangle d'aire $(x+1)(x-1)$.



On remarquera tout de suite que ce sont des aires de (x) et de $(x-1)$ qui apparaissent (même découpage que dans le raisonnement arithmétique). Mais examinons ce traitement un peu plus finement.

a) C'est un nouveau système de traitement. **Celui-ci consiste en la construction,** à partir des hypothèses du problème (3 nombres consécutifs), de la figure ci-dessus. De cette «**organisation**» des 3 grandeurs, et de leurs relations, résulte l'apparition d'un petit carré de dimension 1 X 1 qui ne sera pas superposé. (Attention, une illusion perceptive veut qu'on le situe dans le coin droite en haut, mais c'est une erreur, ce carré n'appartient pas à la figure : ni au carré, ni au rectangle. Le petit carré dont je parle est inclus dans le rectangle — ici représenté horizontal — de dimension 1fois x). Remarquez que dans ce traitement, la soustraction apparaît plutôt comme une opération de comparaison.

b) On pourrait imaginer un autre traitement géométrique. Qui au lieu de construire une figure, construirait effectivement deux figures en carton. L'une un carré de côté x, l'autre un rectangle de côté (x + 1) et (x - 1). Puis on ferait la comparaison des surfaces par superposition et découpage. Ce type de traitement est l'exact correspondant d'un traitement numérique et comporte les mêmes limites. Les surfaces auraient été considérées comme des entités indépendantes. Cette remarque montre que la démonstration géométrique **consiste bien dans la construction d'une figure qui traduise les relations données de sorte à faire apparaître la propriété visée.** (De même le traitement algébrique consiste dans la **construction de l'équation,** la formule si chère à Mathias).

Finalement, les systèmes correspondent puisqu'ils convergent tous vers la même propriété. De cette correspondance, on peut tirer une caractérisation générale de la question (qui se situe alors à un plan de signification plus élevé). Ici par exemple, il s'avère que dans chacun des cas la démonstration procède en deux temps.

— Je rappelle qu'arithmétiquement la relation entre x^2 et $(x + 1)(x - 1)$ est décomposée selon le schéma

$$\begin{tikzcd} x.x \arrow[r, "+x"] \arrow[dr] & (x+1).x \arrow[d, "-(x+1)"] \\ & (x+1).(x-1) \end{tikzcd}$$

— Géométriquement, les surfaces : le carré de côté x et le rectangle de côtés (x + 1) et (x - 1), ne sont pas comparables directement. Il n'y a pas de recouvrement qui fasse apparaître tout de suite la différence. On passe par la comparaison des «bouts qui dépassent» à savoir une bande de 1 de large et de x de large et une bande de 1 de large et de (x - 1) de long.

— Enfin algébriquement, et pour être tout à fait précis, le calcul de $(x + 1).(x - 1)$ doit aussi procéder en deux temps à partir de la distributivité : $(x + 1).(x - 1) = (x + 1).x + (x + 1).(-1)$ puis on reprend le développement.

François CONNE
Didactique des Mathématiques
Université de Genève, F.P.S.E.
24, avenue Génral Dufour
1211 Genève 4, Suisse.

Note sur la technique des noms auxiliaires préconisée par Y. Chevallard.

Dans le développement de l'expression $(a + b)(c + d)$, Yves Chevallard propose d'utiliser un **nom auxiliaire** représentant une des expressions complexes ; par exemple ici posons $(c + d) = e$, l'expression devient alors : $(a + b)e$ que l'on développe par distributivité $ae + be$ puis on remplace e par sa valeur : $a(c + d) + b(c + d)$ que l'on développe finalement. e est dit **nom auxiliaire** dans la mesure où il n'apparaît que comme un intermédiaire de calcul dont la trace disparaît. Pour plus de précision cf. **Jalons à propos d'Algèbre** cité en début de cet article.