REPRESENTATION DES FRACTIONS ET DES NOMBRES DECIMAUX CHEZ DES ELEVES DE CM_2 ET DU COLLEGE

I.R.E.M. de Paris sud

Marie-Jeanne PERRIN-GLORIAN

I – PRESENTATION DU TRAVAIL.

Problématique.

De nombreux travaux montrent que les élèves du collège font encore beaucoup d'erreurs sur les questions qui concernent l'ordre des nombres décimaux. Par exemple dans «Education et Formation» n° 3 de 1983 qui donne les résultats d'une enquête du Ministère de l'Education Nationale, on peut lire que 53 % des élèves seulement savent comparer deux décimaux à l'entrée en 6ème. Quand il s'agit d'ordonner 5 ou 6 nombres décimaux les erreurs sont encore très nombreuses en 4ème et au-delà.

Plusieurs travaux ont déjà décrit ces erreurs et explicité des règles implicites qu'utilisent les élèves confrontés à un problème d'ordre sur les décimaux. En particulier Grisvard et Léonard (1981 et 1983) ont repéré 3 règles utilisées par les élèves pour ordonner des nombres décimaux ayant même partie entière. Il est à noter que l'application de ces règles peut produire de bonnes réponses dans un grand nombre de cas.

Règle 1.

Le nombre le plus grand est celui dont le nombre entier formé par les chiffres après la virgule est le plus grand.

Exemple $12{,}113 > 12{,}4$ car $113 > 4$

ou $12{,}04 > 12{,}3$ car $4 > 3$

Règle 2.

Le nombre qui a le plus grand nombre de décimales est le plus petit.

Exemple $12{,}04 < 12{,}4$ ou $12{,}325 < 12{,}3$.

«petit x» n° 10 pp. 5 à 29. 1986

Règle 3.

Elle apparaît quand il y a plus de 2 nombres à comparer et que l'un des nombres a un zéro pour première décimale. La règle 3 peut alors se formuler : le plus petit nombre est celui dont la première décimale est un 0. Ensuite on applique la règle 1.

La règle 3 est une amélioration de la règle 1.

La règle 1 est la plus fréquemment employée dans les mauvaises réponses, à égalité avec la règle 3 dans le cas où celle-ci peut s'appliquer.

L'application de la règle 2 est moins systématique : elle est rarement employée seule et son emploi est partiellement recouvert par celui de la règle 3.

Grisvard et Léonard ont montré aussi que des élèves qui donnent une bonne réponse quand il s'agit de ranger un couple de décimaux, recourent aux règles décrites dans le cas où la situation est plus complexe (5 nombres à ordonner par exemple).

Dans le travail qui suit, je me suis plus particulièrement intéressée à la période scolaire qui suit l'apprentissage des décimaux (CM_2 - 6ème) et à des classes comportant beaucoup d'élèves ayant une réussite scolaire très médiocre (pourcentage important d'élèves ayant au moins un an de retard).

Mon objectif était de cerner les difficultés rencontrées par ces élèves, les types d'erreur et de voir si un apprentissage différent pouvait agir sur les représentations des élèves et donc modifier les erreurs observées.

Je me suis en particulier posé les questions suivantes :

— Quelles représentations les élèves se font-ils des petites fractions et des nombres décimaux ?

— Quelle pratique ont-ils de la graduation et de l'ordre sur les décimaux ?

— Y a-t-il un rapport entre les conceptions formulées et les performances sur l'ordre des décimaux ?

— Les élèves sont-ils capables de résoudre des problèmes multiplicatifs simples comme ceux mis en œuvre dans la numération (problèmes de groupements) ou dans la composition d'applications ?

— Y a-t-il un rapport entre la résolution de ces problèmes par les élèves et leur performance sur les décimaux ?

— Y a-t-il une différence au niveau des conceptions pour les élèves qui ont au moins un an de retard scolaire ?

— Y a-t-il des différences au niveau des résultats pour ces mêmes élèves ?

— Y a-t-il des différences au niveau des représentations selon l'apprentissage ?

— Y a-t-il des différences au niveau des résultats suivant l'apprentissage ?

Les questions posées sont nombreuses et nous ne pourrons pas y apporter de réponse générale. Nous espérons fournir quelques illustrations sur les conceptions et les erreurs des élèves à propos des nombres non entiers, et donner quelques précisions sur les questions formulées ci-dessus.

Méthodologie.

a) Présentation des classes.

Au cours de l'année 1983-1984, j'ai travaillé avec deux classes de CM_2 d'une même école (désignées par la suite CM_2A - CM_2B) et une classe de 6ème du même secteur scolaire (désignée 6ème A). Dans chacune de ces classes plus de la moitié des élèves avaient au moins un an de retard scolaire. La plupart des élèves étaient issus de milieu socio-culturel très modeste ; il y avait également un fort pourcentage d'élèves d'origine étrangère (40% dans les CM_2). J'ai travaillé avec les maîtres de ces deux classes pendant l'année de CM_2, préparant avec eux toutes les activités sur l'introduction des nombres décimaux et un certain nombre d'activités permettant de les utiliser, j'étais présente dans la classe une fois tous les quinze jours (parfois moins). Les élèves avaient déjà vu des écritures à virgule dans des activités de changement d'unité. En CM_2, nous avons commencé par un apprentissage sur les petites fractions dans des situations de mesure de longueur et les nombres décimaux sont apparus comme des nombres fractionnaires particuliers, plus commodes à manipuler dans certains cas, par exemple plus faciles à situer parmi les entiers. Les élèves ont travaillé sur la graduation d'une demi-droite et son affinement en demis, quarts, huitièmes ou en tiers et sixièmes, puis en dixièmes, centièmes, millièmes. Ce travail sur les écritures fractionnaires s'est étalé sur deux mois environ et l'écriture à virgule est apparue comme une convention et a été reliée au tableau de numération.

Dans la classe de 6ème A, nous avons organisé avec le professeur une séance de travaux dirigés une fois par semaine au cours du premier trimestre avec comme objectif la distinction des notions de longueur et d'aire et l'utilisation des décimaux dans des situations d'approximation. Nous avons aussi repris les situations d'introduction des fractions du CM_2 dans le but de donner un sens aux dixièmes, centièmes que les élèves manipulaient de façon très formelle.

Au second trimestre, j'ai interrogé tous les élèves, par groupe de 2 sur un des problèmes suivants :

1. Parmi les rectangles de périmètre X cm, y en a-t-il un d'aire Y cm^2 ?
2. Peux-tu trouver deux nombres dont la somme est X et le produit Y ?

X et Y variaient suivant les équipes et étaient choisis de façon qu'il y ait une solution irrationnelle.

Au 3ème trimestre nous avons travaillé sur la mesure des aires.

Le reste du temps les élèves travaillaient normalement avec le professeur sur le programme de 6ème de façon traditionnelle.

A chacune de ces 3 classes nous avons proposé un test écrit en décembre 83 ou janvier 84 puis en juin 84.

J'ai proposé le même test à d'autres classes de CM_2, 6ème, 5ème, 4ème désignées dans suite CM_2C, 6ème B, 6ème C, 6ème D, 5ème, 4ème A, 4ème B.

La classe de CM_2C comportait également un fort pourcentage d'élèves d'origine étrangère et beaucoup d'élèves issus de milieu socio-culturel modeste. C'est une classe d'application de l'école normale. R Douady a travaillé en mathématiques avec cette classe en CM_1 et CM_2. L'apprentissage des décimaux s'est fait au cours de situations dont la plupart sont décrites dans une brochure de l'I.R.E.M. de Paris VII (Douady et Perrin-Glorian, 1986) : l'ensemble des nombres connus (entiers) s'est enrichi de quelques fractions pour répondre à des problèmes de mesure de longueur. Les élèves ont travaillé sur la graduation d'une demi-droite et son affinement. Les fractions décimales ont été privilégiées pour simplifier les calculs et la virgule est apparue comme une convention commode pour alléger l'écriture, au moment où les élèves avaient déjà mis en place toutes les techniques de calcul sur les écritures en fractions décimales. Le travail sur les écritures fractionnaires s'est étalé sur une année avant l'introduction de l'écriture à virgule.

Pour les autres classes, nous n'avons pas d'information sur l'apprentissage. Les classes de 6ème B et 6ème C sont deux classes de 6ème d'une ZEP de la banlieue nord de Paris, avec un fort pourcentage d'élèves ayant au moins un an de retard scolaire.

Les classes 6ème D, 5ème, 4ème B sont 3 classes ordinaires d'un même établissement de Vélizy. Dans cette 4ème l'apprentissage sur les rationnels était commencé. La classe 4ème A est une classe du lycée Victor Hugo à Paris. Le test a été passé avant l'apprentissage sur les rationnels. Le retard scolaire est faible dans les classes de Vélizy, mais assez important en 4ème A (voir en annexe les tableaux concernant l'âge des élèves).

b) Présentation du test (voir annexe 2).

Il existe deux versions du test. Nous précisons plus loin les conditions de passage. Les versions 1 et 1 bis sont en annexe. Pour les autres versions voir Perrin (1985)

■ Pour tester les représentations des élèves sur les petites fractions, nous avons posé 3 questions :

— La première question est destinée à cerner la représentation que se font les élèves des petites fractions et des nombres décimaux. En demandant d'expliquer à un camarade de CE_2, on espère sortir du cadre purement scolaire et accéder aux conceptions spontanées des élèves, le CE_2 a été choisi parce que c'est la classe qui précède le premier apprentissage des nombres décimaux.

— La question sur les heures est destinée à vérifier si l'usage du quart d'heure est bien une pratique courante pour les élèves, si cette pratique est reliée à la notion de fraction, si l'élève peut l'utiliser pour évaluer des fractions d'heure qui ne sont pas d'usage courant ($\frac{1}{3}$, $\frac{1}{5}$ pour la première version, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{5}$ pour la deuxième version).

— La question sur la somme de fractions est destinée à déceler des modèles spontanés des élèves avant l'apprentissage systématique de la somme de 2 fractions (ou les déviations par rapport à l'apprentissage dans le cas où il y en a eu).

■ Sur l'ordre des décimaux nous avons posé deux questions :

— Intercalation de nombres entre deux autres.

— Ranger 9 nombres décimaux du plus petit au plus grand. Il y avait en fait 11 nombres proposés et parmi eux deux avaient une écriture fractionnaire. Les traitements de ces deux nombres ont été divers et nous n'en avons pas tenu compte dans les résultats quantitatifs.

■ Une question sur la graduation : placer 8 nombres sur un axe où les graduations entières étaient marquées (5 cm pour 1 unité).

Cette question manquait dans la première version du test.

Par ailleurs deux problèmes ont été proposés à tous les élèves :

■ Un problème de numération : problème des œufs.

■ Un problème de composition d'applications : problème des âges.

Nous n'analyserons pas ici les réponses à ces problèmes. On peut trouver ces résultats dans Perrin (1985).

■ Pour la première version, il y avait aussi un problème sur la mesure de l'aire d'un rectangle (problème de carrelage). Quelques élèves avaient proposé $25 + 15 = 40$ ou $2 \times (15 + 25)$, mais il a été assez bien réussi et ce problème n'a pas été repris dans la deuxième version.

c) Conditions de passage du test.

La première version a été passée en 6ème A en décembre 83, dans les trois CM_2, en 4ème A, 6ème D, 5ème, 4ème B en janvier 84.

Pour les CM_2 A et B la passation s'est faite en une séance d'une heure un quart. En CM_2 C elle s'est faite en deux séances d'une heure.

Dans les trois classes de 6ème, et la classe de 4ème A en une séance de 50 minutes, dans la classe de 5ème en 30 minutes et dans la classe de 4ème B en 15 minutes.

La première version ne comportait pas de question sur la graduation et était trop longue : beaucoup d'élèves en avaient laissé tomber une partie et en particulier, très peu avaient abordé le problème des œufs placé en dernière position.

La version 1 bis comporte une question sur la graduation, reprend le problème des œufs et les questions sur l'ordre des décimaux. Elle a été passée en mai 84 en 6ème A, en juin 84 en CM_2 A et CM_2 B.

La deuxième version du test comporte deux parties A et B. Les deux parties ont été proposées à deux jours d'intervalle fin juin 84 dans deux classes de 6ème : 6ème B et 6ème C. Elles reprennent les questions de la version 1 bis et les questions 1-2-3-4-5 de la version 1 (avec des modifications pour la question 3).

II – RESULTATS[1] AUX QUESTIONS PORTANT SUR FRACTIONS ET DECIMAUX.

1) Questions concernant les représentations, les heures, les sommes.

a) Représentations proposées.

Dans les classes où l'apprentissage a été fait de façon classique, l'unique représentation proposée par les élèves pour $\frac{1}{3}$ et $\frac{3}{4}$ est en termes de partage de tartes, gâteaux, disques... regroupés sous le terme «galette». Quelques élèves proposent des rectangles, mais assez peu.

Une exception : la classe de 4ème B où des élèves proposent des représentations correctes en termes de longueurs (4 pour $\frac{1}{3}$, 3 pour $\frac{3}{4}$).

(1) Les résultats complets du questionnaire sont publiés dans le cahier de didactique des mathématiques n° 24 - I.R.E.M. - Université Paris VII, 2 place Jussieu, Paris 5ème.

Pour 2,3 certains élèves restent fidèles aux représentations en termes de galette, toutes fausses. La plupart n'ont aucune réponse à fournir. Les seules représentations correctes fournies le sont en termes de cm et mm. Il faut d'ailleurs signaler que dans la classe de 6ème C où 6 élèves utilisent la représentation de la règle en cm et mm, elle a été suggérée par le professeur avant le passage du test.

Seule la classe de 4ème B fait exception : 5 élèves fournissent des représentations en termes de longueur, indépendamment des centimètres et millimètres. Remarquons que cette classe est celle qui a les conditions les plus favorables du point de vue âge des élèves et que l'apprentissage sur les fractions y était commencé.

Pour les classes de CM_2 où il y a eu un apprentissage sur les petites fractions à partir des longueurs, la représentation «baguettes» est partout présente. C'est particulièrement net pour la classe de CM_2 C où ce sont presque les seules fournies (à part quelques rectangles). Dans la classe de CM_2 B, il y a beaucoup de réponses sans dessin du type «$\frac{1}{3}$ c'est une unité partagée en 3» ou «$\frac{3}{4}$ c'est trois fois $\frac{1}{4}$» ou «2,3 c'est 2 entiers et 3 dixièmes» difficilement interprétables en termes de représentation.

Dans la classe de CM_2 A les représentations «baguettes» et «galettes» sont à peu près équilibrées avec un léger avantage pour les galettes.

Notons qu'en CM_2 C l'apprentissage sur les fractions à partir des mesures de longueur a été plus poussé et s'est étalé sur une plus longue période de temps.

		CM_2 A	CM_2 B	CM_2 C	6ème A	6ème B	6ème C	6ème D	5ème	4ème A	4ème B	total 6ème	(2) % 6ème
effectif (1)		22 *22*	21 *18*	26 *25*	24 *19*	18 *15*	21 *21*	26 *26*	23 *22*	19 *16*	22 *20*	89 *77*	
baguettes	$\frac{1}{3}$	6	8	16	0	0	0	1	0	0	6	1	1,4
	$\frac{3}{4}$	11	4	15	0	0	0	1	0	0	4	1	1,5
	2,3	6	4	15	0	0	6	3	4	0	6	9	22
galettes	$\frac{1}{3}$	12	0	0	12	14	21	15	18	9	11	62	84,9
	$\frac{3}{4}$	10	0	0	8	13	21	16	16	12	9	58	85,3
	2,3	8	0	0	4	11	14	2	2	6	0	31	75,6

(1) En italique, effectif des élèves ayant abordé la question.
(2) % calculé sur les réponses fournies avec dessin.

		CM_2 A	CM_2 B	CM_2 C	6ème A	6ème B	6ème C	6ème D	5ème	4ème A	4ème B	6ème
$\frac{1}{3}$	R.C.	12	7	17	7	5	12	16	17	3	15	40
	R.D.	18	9	21	14	14	21	24	21	9	18	73
$\frac{3}{4}$	R.C.	16	1	13	6	8	19	17	16	12	10	50
	R.D.	21	4	18	11	13	21	23	19	12	13	68
2,3	R.C.	3	3	12	0	0	6	4	4	0	6	10
	R.D.	14	5	18	5	11	17	8	5	6	6	41

R.C. Représentations correctes.
R.D. Réponses fournies avec dessin.

On peut remarquer que les représentations fournies pour 2,3 ne sont majoritairement correctes (sur un effectif suffisant) que dans la classe de CM_2 C. Dans les classes de 6ème les seules représentations correctes fournies sont celles de la règle (avec cm et mm). Cette représentation resterait-elle efficace pour 2,37 ?

b) Heures et sommes.

Pour les heures, les réponses sont correctes pour ce qui relève de la pratique courante (plus de 80% des réponses fournies sont justes dans toutes les classes pour 1/4 h.).

Pour les autres questions ($\frac{1}{3}$, $\frac{1}{5}$) les réponses sont majoritairement correctes dans les 3 classes du collège de V. et dans les classes de CM_2 où il a eu un apprentissage sur les fractions (exception faite du CM_2 B). Notons que dans la classe de 6ème C, plus de la moitié des élèves répondent correctement pour $\frac{1}{10}$ h, mais la réussite retombe pour $\frac{1}{5}$ h parce que $\frac{1}{5}$ est vu comme la moitié de $\frac{1}{10}$.

Pour les sommes, les modèles les plus souvent utilisés par les élèves sont d'abord celui qui consiste à ajouter numérateurs d'une part et dénominateurs de l'autre (par exemple $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{6}$, ensuite celui qui consiste à garder le numérateur 1 et à ajouter les dénominateurs (par exemple $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$).

Même pour $\frac{1}{2}$, il y a beaucoup de réponses incorrectes (sauf en CM_2, en 6ème D et en 4ème B).

	CM_2 A	CM_2 B	CM_2 C	6ème A	6ème B	6ème C	6ème D	5ème	4ème A	4ème B	6ème A, B, C	6ème
effectif	22	21	26	24	18	21	26	23	19	22	63	89
réponses fournies	22	18	25	14	14	20	21	20	19	22	48	69
correct a b c d	0	0	8	1	0	0	0	0	3	12	1	1
correct a b c*	18 *81.8*	10 *55.6*	16 *64*	3 *21.4*	4 *28.6*	2 *10*	12 *57.1*	6 *30*	8 *42*	18 *81.8*	9 *18.75*	21 *30.4*
correct $\frac{1}{2}$*	22 *100*	13 *72.2*	22 *88*	3 *21.4*	5 *35.7*	6 *30*	15 *71.4*	8 *40*	9 *47.5*	21 *95.5*	14 *29.2*	29 *42*

* En italique, à titre indicatif, le pourcentage des réponses correctes par rapport aux réponses fournies.

Trois élèves de 6ème répondent en faisant systématiquement la somme des nombres figurant au numérateur et au dénominateur, par exemple $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 8$, $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = 7$, $\frac{1}{10} + \frac{3}{10} = 24$. Un autre fait un calcul légèrement différent et écrit : «$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \times (2 + 2) = 4$; $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1 \times (3 + 3) = 6$; $\frac{1}{10} + \frac{3}{10} = 10 \times (1 + 3) = 40$»

Deux autres élèves de 6ème répondent correctement pour $\frac{1}{2}$: «$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$» et font une réponse du même type que la précédente dans les autres cas : $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 6$ et $\frac{1}{10} + \frac{3}{10} = 40$ pour l'un, $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 12$, $\frac{1}{10} + \frac{3}{10} = 40$ pour l'autre.

Remarquons que les élèves de CM_2 ont une meilleure performance que les élèves de 6ème, 5ème, 4ème A pour les questions $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} =$, $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} =$, $\frac{1}{10} + \frac{1}{10} =$. Ce n'est pas étonnant puisque dans ces classes il y a eu un apprentissage sur les fractions et les élèves avaient été amenés à ajouter des fractions de même dénominateur. Pour $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$, seuls les élèves de CM_2C avaient rencontré des problèmes analogues et plus de 30% d'entre eux répondent correctement à la question.

Les élèves de 4ème B avaient commencé l'étude des fractions ce qui explique que plus de la moitié d'entre eux répondent correctement à la question, alors qu'aucun élève de 5ème du même établissement ne répond correctement à cette question.

Les élèves de 6ème B et 6ème C n'ont pas eu à énoncer $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$. En revanche, on leur demandait 0,7 + 0,8.

28 élèves sur 39 ont fourni une réponse. 10 de ces réponses étaient correctes ; 13 élèves ont répondu 0,15. On voit qu'il y a plus de réponses 0,15 que de réponses 1,5. Mais cette erreur n'est peut-être pas forcément signe d'une mauvaise conception : il y a des élèves qui ont répondu correctement aux questions plus difficiles et qui ont écrit $0{,}7 + 0{,}8 = 0{,}15$.

En ce qui concerne la moitié de $\frac{1}{100}$, sur les 183 réponses fournies, 93 sont « $\frac{1}{50}$ ». Plus de la moitié des élèves, tous niveaux confondus font cette réponse. En 4ème A, près des $\frac{2}{3}$ des élèves font cette réponse (12 sur 19) ; et même en 4ème B, où les résultats aux autres questions sont meilleurs, c'est la réponse de près de la moitié des élèves. C'est manifestement une question piège. Les réponses $\frac{1}{50}$ ne sont sans doute pas forcément significatives de conceptions érronées.

Dans deux classes (6ème B et 6ème C) les élèves ont également répondu aux questions «quel est le double de $\frac{1}{100}$?» «Quelle est la moitié de 0,1 ?».

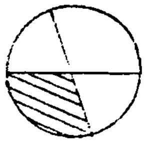
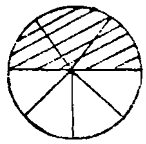
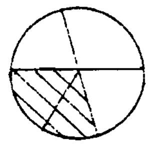
On a seulement $\frac{1}{4}$ de réponses correctes pour le double de $\frac{1}{100}$. La réponse la plus fréquente est $\frac{1}{200}$ ($\frac{1}{3}$ des élèves) ce qui est cohérent avec la réponse $\frac{1}{50}$ pour la moitié de $\frac{1}{100}$.

Le nombre des réponses correctes s'élève un peu quand la question est posée sous forme décimale, mais on n'arrive cependant qu'à 11 réponses correctes sur 30 fournies pour la moitié de 0,1. Le fait de demander aussi le double de $\frac{1}{100}$ n'a pas aidé les élèves à trouver la moitié de $\frac{1}{100}$. D'ailleurs les réponses aux deux questions sont souvent cohérentes : les élèves appliquent souvent une règle et son inverse pour les deux questions.

c) Conclusion.

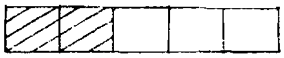
- Il semble que pour beaucoup d'élèves, seuls les nombres entiers ont vraiment le statut de nombre, ce qui fait que ces élèves essaient de se ramener aux entiers et à leurs opérations par des moyens divers.

— Au moment des représentations, certains élèves ne voient dans les fractions et les décimaux que des entiers juxtaposés. 3 élèves ont des réponses cohérentes dans ce sens :

 $\frac{1}{3}$  $\frac{3}{4}$  2,3

et un autre élève de CM_2 explique : avec cinq bâtons de chocolat je dois donner

2.3



Dans chaque cas il y a séparation respectivement en une part et 3 parts, 3 parts et 4 parts, 2 parts et 3 parts sans qu'il y ait nécessairement souci d'égalité des parts. C'est une conception qu'on pourrait appeler «juxtaposition de 2 entiers».

Les réponses du type «entiers juxtaposés» sont plus fréquentes pour 2,3. Parfois cette juxtaposition est améliorée : on voit 2,3 comme deux grosses unités et trois petites (exemple : 2 grosses boîtes de thon et 3 petites boîtes).

— On observe des confusions entre les codages : $\frac{1}{3}$ vu comme 1,3 et 2,3 comme $\frac{2}{3}$, plus fréquemment dans le deuxième sens que dans le premier, même dans les classes où on peut penser que l'apprentissage a été davantage centré sur les décimaux que sur les fractions.

On peut se demander si cette confusion n'est pas due à la forme du test. En effet les questions sur les fractions sont en tête, il reste peu de place pour 2,3.

— Une autre erreur qui est peut-être à rapprocher de celle-là est la confusion entre $\frac{1}{5}$ et 0,5 : 9 élèves répondent que $\frac{1}{5}$ heure c'est 30 minutes. C'est peut-être aussi cette confusion qui explique les réponses $\frac{1}{5}$ pour la moitié de $\frac{1}{100}$ (avec en plus oubli du dénominateur).

— Dans les représentations, l'erreur qui consiste à représenter $\frac{1}{3}$ ou $\frac{3}{4}$ par 3 parts est assez peu fréquente (1 seule fois pour $\frac{1}{3}$) mais on retrouve cette erreur très présente quand il s'agit de quantités numériques :

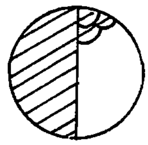
pour $\frac{1}{5}$ h, 10 élèves répondent 5 mn, un autre 300 mn (5 X 60), 1 élève répond 50 mn, 1 autre 50 s, 4 élèves répondent 15 minutes et 1 élève répond 1 h 5 mn, ce qui fait 18 élèves qui donnent une réponse faisant intervenir 5, 15 ou 50.

Pour $\frac{1}{3}$ h, 7 élèves répondent 30 minutes et 2 élèves répondent 13 minutes, plus un qui répond 690 minutes (60 X 13).

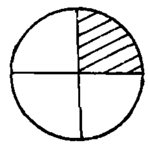
Pour $\frac{1}{10}$ h, 6 élèves répondent 10 mn et 1 répond 600 minutes (60 X 10), et même pour $\frac{1}{4}$ h, 3 élèves avaient répondu 40 mn, 1 élève avait répondu 14 mn (il avait répondu de façon cohérente : $\frac{1}{4}$ h : 14 mn, $\frac{1}{3}$ h : 13 mn, $\frac{1}{5}$: 15 mn) et 1 autre 840 mn (14 X 60).

■ Il semble que pour certains des élèves, les écritures proposées ne soient pas des nombres mais des **codages d'actions**.

Par exemple pour 2,3 :
«je coupe en deux et j'ajoute 3 petits bouts»
ou encore $\frac{1}{3}$ est bien un gâteau partagé en 3, mais on ne retient pas l'égalité des parts.

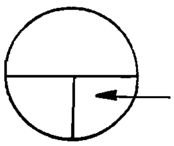


Autre exemple : $\frac{1}{3}$ est confondu avec $\frac{1}{8}$ parce qu'on partage en deux 3 fois de suite ; ou encore $\frac{1}{3}$ est confondu avec $\frac{1}{4}$ (14 fois). Cette confusion n'est pas toujours à rapprocher des partages inégaux car certains élèves dessinent



d'autres commentent

«il le coupe en demi et la moitié il la coupe en 2. Une des parties sera le tiers» avec le dessin



$\frac{1}{3}$

■ Ce désir de se ramener aux entiers et à leurs opérations est encore plus manifeste pour les sommes.

Ainsi la règle spontanée la plus utilisée par les élèves pour ajouter les fractions est d'ajouter les numérateurs d'une part et les dénominateurs de l'autre (plus du tiers des élèves de 6ème). A cet égard il n'y a pas de différence entre la 6ème D et les autres classes de 6ème.

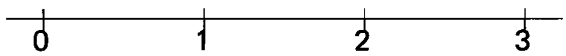
Une autre règle utilisée dans le cas où on ajoute des fractions de numérateurs 1 est de garder ce numérateur 1 et d'ajouter les dénominateurs : $\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$, peut-être pour rester dans l'ensemble des fractions de numérateur 1. Elle est moins utilisée que l'autre sauf dans la classe de 4ème A où plus de la moitié des élèves l'utilisent au moins une fois.

2) Questions concernant l'ordre et la graduation.

a) Axe gradué.

La question concernant l'axe gradué a été proposée en CM_2 A, CM_2 B, 6ème A, 6ème B, 6ème C en mai ou juin 1984.

L'unité choisie pour la graduation dessinée était de 5 cm.



On demandait de placer 2,5 ; 0,8 ; 1,45 ; 1,7 ; 0,62 ; 2,87 ; 1,08.

Les résultats ont été les suivants :

	CM_2 A	CM_2 B	6ème A	6ème B	6ème C	total 6ème
effectif total	23	16	24	21	22	67
ont abordé la question	21	13	23	20	15	58
tous les points bien placés	1	1	1	0	2	3
au moins 4 points bien placés	1	1	2	3	3	8
2,5 bien placé	9	3	5	10	5	20
aucun point marqué	3	4	6	1	3	10
ordre entièrement correct	4	1	3	1	2	6
un oubli ou une erreur sur l'ordre	+4	0	+3	+2	+1	+6
intervalles entiers non respectés	3	3	2	6	0	8
utilisation des cm, mm	4	3	5	10	3	18

Très peu d'élèves placent correctement tous les points (2 en CM_2 et 3 en 6ème ; 8 élèves de 6ème placent correctement 4 des points). A peine plus du tiers des élèves de 6ème ayant abordé la question placent correctement 2,5 (20/58). Il y en a un peu plus en CM_2 A, mais moins en CM_2 B.

Certains élèves ne marquent aucun point sur la graduation et se contentent d'écrire les nombres sur l'axe en s'en servant comme d'une ligne ; d'autres placent des points mais en ne se souciant que de l'ordre. C'est pourquoi nous avons aussi examiné l'ordre proposé par les élèves indépendamment du placement sur la graduation. Cette fois encore les résultats sont meilleurs en CM_2 A (8 élèves sur 21 font au plus une erreur) qu'en 6ème (12 sur 58) ; mais ils sont plus mauvais en CM_2 B.

Certains élèves ne placent pas le nombre décimal entre les deux entiers qui conviennent. Cela vient parfois d'une référence abusive au cm et mm : par exemple ils ont placé 0,62 à 6,2 cm de 0, donc entre 1 et 2.

En 6ème, surtout en 6ème B, un nombre important d'élèves essaie d'utiliser les cm et mm d'une manière ou d'une autre. Remarquons qu'en 6ème A la première réaction des élèves avait été la même, mais nous sommes intervenues le jour de la passation en faisant remarquer aux élèves qu'on ne parlait pas de cm dans le texte.

Les élèves ont plusieurs manières de se référer aux mm. Une première idée est de compter en mm la partie décimale du nombre. Mais ce n'est pas toujours possible (par exemple 2,87). Alors les élèves adaptent leur procédure de plusieurs manières :

— On compte la partie décimale en mm quand c'est possible, sinon on prend tout le nombre en cm : par exemple 1,45 à 45 mm de 1 et 2,87 à 2,87 cm de 2.

— On compte le tout en cm et mm. Par exemple 1,7 à 1,7 cm de 1. Dans ce cas certains élèves traitent de la même manière 1,7 et 1,08 comme s'il s'agissait de 1,8 ; d'autres élèves font un traitement différent : par exemple 1,08 à 8 mm de 1 et 1,7 à 1,7 cm de 1 (ou le contraire).

— On prend la partie décimale en mm quand c'est possible, sinon on divise par 2. (Ce qui fait que 0,62 et 2,87 sont bien placés à cause de l'échelle choisie mais que 1,7 ou 1,45 ne le sont pas).

— On divise systématiquement la partie décimale par 2 : une élève de 6ème B a placé 0,8 à 4mm de 0 ; 0,62 à 3,1 cm de 0 ; 1,7 à 3,5 mm de 1 ; 1,08 à 4 mm de 1 ; 1,45 à 2,25 mm de 1 ; 2,5 à 2,5 mm de 2 et 2,87 à 4,35 de 2.

Avec cette procédure tous les nombres qui ont deux décimales sont bien placés mais ceux qui n'ont qu'une décimale sont mal placés.

Cette utilisation de la règle graduée explique peut-être le faible nombre d'élèves qui placent correctement 2,5.

Notons cependant qu'une certaine utilisation de la règle graduée donne un placement correct de 2,5 (à 2,5 cm de 2). D'ailleurs la classe qui a le plus de 2,5 bien placés (50%) est aussi celle qui a le plus d'utilisation des cm et aussi celle qui a le plus d'intervalles entiers non respectés.

	CM_2 A	CM_2 B	6ème A	6ème B	6ème C	total 6ème
1,08 après 1,7	7	1	5	8	7	20
1,08 avant 1,7	8	5	11	5	5	21
1,45 après 1,7	9	6	14	12	9	35
1,45 avant 1,7	9	2	7	5	4	16
0,62 après 0,8	10	8	15	6	9	20
0,62 avant 0,8	9	1	7	7	3	17
1,08 remplacé par 1,8	3	4	3	5	0	8

Il semble bien que la règle qui consiste à comparer les décimaux qui ont même partie entière selon l'entier formé par leur partie décimale (règle 1 de Grisvard et Léonard) soit dominante. Elle révèle une conception des décimaux comme couple de 2 entiers. En 6ème A, nous pouvons remarquer l'améliorationde cette règle quand un des nombres a un zéro derrière la virgule (règle 3 de Grisvard et Léonard) : en 6ème A 1,08 est plus souvent placé avant 1,7 alors que 1,45 est après 1,7 et 0,62 après 0,8.

On trouve cependant aussi quelques élèves qui placent 1,08 après 1,45 (resp. 3, 1, 1, 3, 0) ou 2,5 après 2,87 (resp. 1, 1, 0, 1, 0).

b) Ordonner neuf nombres décimaux.

4,12 - 43,25 - 4,54 - 4,02 - $4 + \frac{1}{2}$ - 4,45 - 40,2 - 4,2 - 40,12 - $43 + \frac{1}{4}$ - 4,325.

Il y avait en fait onze nombres à ranger dont deux donnés sous forme fractionnaire. Nous ne tenons compte que du rangement des neuf nombres écrits avec une virgule.

Nous appelons «ordre b» le classement obtenu en comparant les parties décimales comme des entiers. Nous distinguons (quand cela est possible) l'ordre b_1 : (ordre b avec $4{,}02 < 4{,}2$), l'ordre b_2 (ordre b avec $4{,}02 > 4{,}2$) l'ordre b_3 (ordre b avec $4{,}02 = 4{,}2$).

Nous appelons «ordre c» le classement obtenu en appliquant la règle «plus la partie décimale est longue, plus ne nombre est petit».

Nous appelons «mélange» le classement obtenu en appliquant l'ordre b pour les nombres ayant une ou deux décimales mais en plaçant 4,325 avant 4,45 : par exemple $4{,}02 < 4{,}2 < 4{,}12 < 4{,}325 < 4{,}45 < 454 < 40{,}2 < 40{,}12 < 43{,}25$, ou même 4,325 avant tous les autres.

Nous retrouvons une utilisation importante de la règle 1 de Grisvard et Léonard (ordre b), un peu la règle 3 (l'ordre b_1 est un peu plus utilisé que l'ordre b_2), mais pratiquement pas d'utilisation de la règle 2 (ordre c) sauf en cohabitation avec la règle 1 (mélange).

Nous constatons une meilleures réussite et une plus faible utilisation de la règle b dans les classes témoin de Vélizy (6ème D, 5ème, 4ème B). En 4ème B le faible pourcentage de réussite est dû au nombre élevé de non réponse (10 sur 22) qui s'explique par le manque de temps (rappelons que les élèves ne disposaient que de 15 minutes). On constate la progression des CM_2 C entre janvier et juin (en janvier l'écriture à virgule venait d'être introduite dans la classe et n'avait pas été beaucoup utilisée). On retrouve la différence entre les CM_2 A et les CM_2 B déjà constatée sur d'autres questions. Les CM_2 A et les CM_2 C qui ont eu un apprentissage sur les petites fractions et sur la graduation ont une meilleure réussite que les élèves de 6ème A, 6ème B, 6ème C.

c) Intercalation.

Dans cette question, il s'agit de fournir 3 nombres compris entre deux nombres donnés. Dans la première version du test, il y avait deux questions avec des bornes entières, nous les avons supprimées dans la version suivante et nous n'avons pas tenu compte des réponses à ces questions : quand les bornes sont entières, beaucoup d'élèves comprennent la question «peux-tu citer 3 nombres entre 1 et 3» comme «peux-tu citer 3 nombres entiers entre 1 et 3» ! C'est sans doute le même phénomène lié au contrat didactique et aux habitudes qui explique en partie la réussite légèrement meilleure aux deux dernières questions (entre 1,5 et 1,6 ; entre 1 et 1,1) qu'aux deux premières (entre 1,8 et 2,1 ; entre 1,5 et 1,8) : les élèves sortent plus facilement des nombres à une décimale quand ils y sont obligés ; quand ils peuvent donner une réponse avec des nombres à une décimale certains élèves ne fournissent que ceux-là : entre 1,5 et 1,8 il y a 1,6 et 1,7.

D'autre part certains des types d'erreurs rencontrées expliquent une moins bonne performance pour la première question (erreur E_1) ou une meilleure performance à la quatrième question (erreur E_2).

Types d'erreurs rencontrées.

E_1 : Cette erreur résulte de la conception «2 entiers» des nombres décimaux et correspond au type d'ordre b vu à la question précédente : entre 1,8 et 2,1 on intercale 1,9 ; 1,10 ; 1,11... 1,78... Cette erreur est présente dans toutes les classes de CM_2 et 6ème.

E_2 : Intercaler un zéro derrière la virgule pour rester proche d'un nombre donné : par exemple entre 1,3 et 1,4 il y a 1,03 ; 1,003 ; ou 1,04 ; 1,004... Cette erreur, que nous n'avions pas prévue, est présente dans toutes les classes et très importante dans certaines (6ème A).

E_3 : Ajouter un zéro à la fin : entre 1,6 et 1,8 il y a 1,7 ; 1,70 ; 1,700 avec la même idée d'avoir des nombres proches d'un nombre donné.

E_4 : Rester dans les nombres à une décimale ou répondre que c'est impossible. Erreur présente dans toutes les classes ; c'est la réponse majoritaire dans certaines.

Cette erreur ne signifie pas que l'élève ne connaît pas de nombres avec plusieurs chiffres derrière la virgule, mais il ne les mobilise pas dans ce contexte. Nous avons déjà signalé l'effet possible du contrat didactique : la question étant posée avec des nombres avec 1 chiffre derrière la virgule, des élèves ne trouvent pas licite de sortir de cette catégorie de nombre pour la réponse.

E_5 : «débordement proche» : on donne des valeurs proches mais du mauvais côté de l'intervalle : par exemple entre 1,6 et 1,8 il y a 1,87 ; entre 1 et 1,1 on a 1,11.

E_6 : Erreur qu'on ne rencontre qu'entre 1 et 1,1 : oubli du zéro. Des élèves qui ont des réponses justes aux autres questions proposent 1,9 ; 1,8 ; 1,7 ou 1,99 ; 1,83 ; 1,85 entre 1 et 1,1. Quand les élèves proposent 1,12 ; 1,13 ou 1,2 ; 1,3... il n'est pas facile de savoir si c'est une erreur E_5 ou E_6. Nous l'avons comptée E_5 dans le 1er cas, E_6 dans le 2ème.

E_7 : Oubli de la partie entière. Cette erreur se rencontre surtout en CM_2C pour les élèves qui ont répondu avec des fractions.

Signalons une autre erreur rencontrée quelquefois (4 élèves de 4 classes différentes) : les questions sur les décimaux ont été comprises comme deux questions sur les entiers : par exemple, une élève de 4ème répond :

Entre 1,8 et 2,1 : oui 2, 3, 4 et non.
Entre 1,5 et 1,8 : oui 2, 3, 4 et oui 2, 3, 4.
Entre 1,5 et 1,6 : oui 2, 3, 4 et oui 2, 3, 4.
Entre 1 et 1,1 : non et non.

L'erreur E_1, importante dans les classes de CM_2 et les classes de 6ème A, B, C, ne se trouve presque pas en 6ème D, 5ème, 4ème. Dans ces dernières classes, on ne trouve pratiquement pas l'erreur E_3, ainsi qu'en CM_2C.

L'erreur E_2 se trouve dans toutes les classes mais elle est surtout importante en 6ème A : peut-être y a-t-il eu un phénomène de diffusion qui l'a aggravée dans cette classe.

L'erreur E_4 est présente dans toutes les classes ; elle correspond à la difficulté des élèves à mobiliser des décimaux avec plus de décimales que ceux qui sont dans le texte (cf. Izorche 1977).

Les erreurs E_5, E_6 et E_7 sont moins fréquentes.

Les erreurs E_1 et E_3 semblent correspondre aux plus mauvaises représentations des décimaux : les élèves qui font ce type d'erreur en font en général un autre (aucun élève ne fait que l'erreur E_1) alors que ce n'est pas le cas pour E_2 et E_4. Remarquons d'ailleurs que la conception (un décimal vu comme un couple d'entiers) qui mène à l'erreur E_1 entraîne aussi E_4. Les élèves de 5ème et 4ème qui font l'erreur E_2 ou E_4 ne font pour la plupart que celle-là. Plus de la moitié des élèves de 6ème qui font l'erreur E_4 ne font que celle-là.

d) Cohérence entre les réponses sur l'ordre.

Nous avons comparé les réponses des élèves aux questions portant sur l'ordre, l'intercalation, la graduation. Pour l'ordre et l'intercalation, nous avons :

	0	$\bar{0}$
I	34	23
$\bar{I}$	18	95

en notant 0 (resp. I) les élèves qui n'ont fait aucune erreur sur l'ordre (resp. l'intercalation) $\bar{0}$ (resp. $\bar{I}$) les autres.

ou

	0	$\bar{0}$
I	46	24
$\bar{I}$	19	81

Si l'on compte dans 0 et I les élèves ayant fait au plus une erreur.

On voit que la cohérence est surtout assurée par la négative (grand nombre d'élèves ne réussissant aucune des deux questions). La cohérence est meilleure dans les classes où les résultats sont meilleurs (6ème D, 5ème, 4ème). En 4ème B elle est totale pour les 11 élèves qui ont répondu aux deux questions (8 ont des réponses correctes aux deux questions, 3 font des erreurs aux deux questions).

Si l'on compare les résultats sur la graduation à ceux sur l'ordre et l'intercalation, on obtient, pour les 5 classes concernées (CM_2A, CM_2B, 6ème A, 6ème B, 6ème C) les résultats suivants. Nous désignons par G (resp. O, resp. I) les élèves ayant placé correctement la plupart des nombres sur l'axe gradué (resp. n'ayant fait aucune erreur sur l'ordre, resp. sur l'intercalation).

	G	$\bar{G}$
O	7	14
O	1	84

	G	$\bar{G}$
I	5	17
I	4	77

Là encore, la plupart des élèves font des erreurs dans les deux exercices. La tâche de graduation est très peu réussie et on aurait pu attendre que les élèves qui la réussissent aient de bons résultats sur l'ordre et l'intercalation.

Un seul élève (en 6ème B) réussit la graduation et pas l'ordre.
Quatre élèves réussissent la graduation et pas l'intercalation.

Un nombre assez important d'élèves réussit l'ordre ou l'intercalation sans réussir le placement sur l'axe gradué : il s'agit probablement d'élèves qui ont des règles de comparaison correctes pour les nombres décimaux, mais sans lien avec la mesure des longueurs.

En tout 4 élèves sur 103 répondent correctement aux 3 questions graduation, ordre, intercalation : un élève de CM_2 B qui n'a aucune erreur dans tout le test, un élèves de 6ème A, 2 élèves de 6ème C.

III – CONCLUSION.

▪ Il semble que les élèves interrogés aient peu de représentations disponibles pour les petites fractions ni surtout pour les nombres décimaux. (Cf. les mauvais résultats pour 2,3). La représentation sous forme de longueurs n'est pas spontanée et elle n'apparaît que dans les classes où il y a eu un apprentissage spécifique. Les élèves peuvent représenter les nombres décimaux qui ont un chiffre derrière la virgule à l'aide de la règle graduée en cm et mm. Cependant ils ont beaucoup de mal à représenter les nombres décimaux sur un axe gradué quand l'unité ne fait pas 1 cm, et ceci même pour les nombres qui n'ont qu'une décimale.

▪ Il semble que les élèves travaillent plutôt avec des règles de calcul purement numériques, en essayant de se ramener aux calculs connus sur les entiers. Ces règles numériques peuvent être correctes et bien fonctionner dans certains cas (voir les élèves qui réussissent l'ordre et l'intercalation mais pas la droite graduée) mais peuvent donner lieu à des dérapages quand la situation est plus complexe (rangement d'une dizaine de nombres) ou dans une situation qui n'est pas encore algorithmisée (somme de deux fractions, moitié de $\frac{1}{100}$), par exemple un retour aux règles utilisées sur les entiers, en considérant le décimal comme un couple de 2 entiers.

■ Il semble que peu d'élèves mettent en place un nouveau modèle ; le modèle de référence reste le modèle discret des entiers naturels et on essaie de faire entrer les nouveaux nombres dans ce cadre, avec cependant quelquefois des théorèmes implicites comme «il y a des nombres décimaux entre deux autres» qui ne sont pas toujours cohérents avec le reste ou qui sont mis en œuvre de manière inadaptée (cf. erreur E_2 pour l'intercalation).

■ Pour comparer des nombres décimaux de même partie entière beaucoup d'élèves comparent les parties décimales comme des entiers, c'est-à-dire que nous retrouvons une utilisation importante de la règle 1 de Grisvard et Léonard (1981-1983) et dans une moindre mesure celle de la règle 3 à partir de la 6ème (4,02 est plus souvent considéré inférieur à 4,2 que supérieur ou égal, du moins dans les classes du collège. En CM_2 c'est plutôt l'inverse qui se vérifie).

■ Les résultats sur les questions concernant l'ordre et l'intercalation sont meilleurs dans les classes témoin de Vélizy, mais ils sont aussi meilleurs dans les CM_2 A et C que dans les 6ème A, B, C. Il semble donc que le travail fait en CM_2 sur la mesure des longueurs et l'utilisation des fractions ait pu aider les élèves à se faire une représentation des nombres non entiers qui les aide dans les tâches de comparaison, et ceci bien que le placement de nombres sur un axe gradué soit encore très mal réussi. (Ce n'est pas le cas des CM_2 B mais nous ne chercherons pas à analyser cette différence ici d'autant plus que le fort pourcentage de non-réponse dans cette classe incite à considérer ces résultats avec prudence).

■ Les classes qui ont les meilleurs résultats pour l'ordre et l'intercalation (CM_2 A, CM_2 C, 6ème D, 5ème, 4ème A, 4ème B) sont aussi celles qui ont le plus de représentations correctes pour $\frac{1}{3}$, à l'exception de la 6ème C qui a un bon score sur cette question et un mauvais sur l'ordre.

Les questions posées ne permettent sans doute pas de cerner suffisamment les représentations mentales des élèves ni leur disponibilité pour se prononcer sur un lien entre ces représentations et les performances sur l'ordre. Ce lien est d'autant plus difficile à établir qu'il nous semble que les élèves mobilisent plutôt des règles que des images pour traiter une question sur l'ordre.

Il nous semble cependant qu'on peut peut-être expliquer ce manque de représentations disponibles pour les décimaux par l'insuffisance dans l'enseignement du lien entre l'ordre des décimaux positifs et la graduation d'une demi-droite avec une unité quelconque.

■ Le problème sur les œufs a été très mal réussi en CM_2 et en 6ème. Ces mauvais résultats au problème sur la numération semblent aller de pair avec les mauvais résultats sur l'ordre. Cependant, les classes de 6ème ont de meilleurs résultats sur le problème des œufs que les classes de CM_2, alors que c'était l'inverse pour les questions concernant l'ordre des décimaux. Une analyse plus fine nous permettrait de voir combien d'élèves réussissent une des questions et pas l'autre. Une absence de lien entre ces deux questions ne serait pas étonnante dans le cas où les élèves rangent les nombres décimaux en appliquant des règles purement numériques.

BIBLIOGRAPHIE.

BROUSSEAU G. 1980. Problèmes de l'enseignement des décimaux. Recherches en Didactique des mathématiques. **Vol. 1.1. La Pensée sauvage.**

BROUSSEAU G. 1981. Problèmes de didactique des décimaux. Recherches en didactique des mathématiques. **Vol. 2.1. La Pensée sauvage.**

DOUADY R. 1984. Jeux de cadres et didactique outil-objet dans l'enseignement des mathématiques. Une réalisation dans tout le cursus primaire. Thèse de doctorat d'état.**IREM de Paris VII.**

DOUADY R. et PERRIN-GLORIAN M.J. 1986. Liaison Ecole-Collège. Nombres décimaux. Brochure de l'IREM de Paris sud.

Education et Formation n° 3, 1983. Ministère de l'Education Nationale SIGES.

GRISVARD C. et LEONARD F. 1981. Sur deux règles implicites utilisées dans la comparaison de nombres décimaux positifs. Bulletin APMEP **n° 327.**

GRISVARD C. et LEONARD F. 1983. Résurgence de règles implicites dans la comparaison des nombres décimaux. Bulletin APMEP **n° 340.**

IZORCHE M.L. 1977. Les réels en classe de seconde. Mémoire de D.E.A. **IREM de Bordeaux.**

PERRIN-GLORIAN M.J. 1985. Représentation des fractions et des nombres décimaux chez des élèves de CM_2 et du collège. Cahier de didactique des mathématiques **n° 24. IREM Université Paris VII.**

ROUCHIER A. 1980. Situation et processus didactiques dans l'étude des nombres rationnels positifs. Recherches en didactique des mathématiques. **Vol. 1.2.**

VERGNAUD G. 1985. Multiplicative structures in Lesh R. Landau M. Acquisition of mathematics Concepts and Processus. **Academic Press.**

ANNEXE 1. AGE DES ELEVES

Dans ce premier tableau nous avons compté les avances ou retard par rapport à l'année civile légale.

	CM_2A	CM_2B	CM_2C	6ème A	6ème B	6ème C	6ème D'	5ème	4ème A	4ème B
avance	0	0	3	0	0	0	1	1	1	4
normal	12	11	12	7	7	7	11	9	6	14
1 an retard	6	8	5	8	9	8	7	2	8	2
retard ⩾2 ans	5	4	4	9	4	7	1		2	0
effectif	23	23	26	24	21	22	26	23	19	22
% d'élèves ayant un retard ⩾1 an	47,8	52,2	37,5	70,8	65	68,2	40		58,8	10
% d'élèves ayant un retard ⩾2 ans	21,7	17,4	16,7	37,5	20	31,8	5		11,7	0
non réponse	/	/	2	/	1	/	6	11	2	2

Pour la classe de 5ème trop d'élèves ont omis de donner leur date de naissance pour qu'on puisse faire des pourcentages. Dans les autres classes les pourcentages n'ont qu'une valeur indicative.

Dans le tableau ci-dessous nous classons les élèves qui ont du retard et qui sont nés en novembre/décembre avec ceux nés au cours de l'année civile suivante (cela diminue leur retard d'un an) et les élèves qui ont de l'avance et qui sont nés en janvier ou février avec ceux nés au cours de l'année civile précédente (cela diminue leur avance d'un an).

	CM_2A	CM_2B	CM_2C	6ème A	6ème B	6ème C	6ème D	5ème	4ème A	4ème B
avance	0	0	1	0	0	0	0		1	1
normal	14	14	15	9	8	9	17	10	8	18
1 an retard	7	6	6	8	8	6	3	2	7	1
⩾2 ans	2	3	2	7	4	7	0	1	0	
% ⩾1 an	39,1	39,1	33,3	62,5	60	59,1	15		47,1	5
% ⩾2 ans et +	8,7	13	8,3	29,2	20	31,8	0		5,9	0

ANNEXE 2 : TEST **VERSION 1**

Nom .... Prénom .... Classe ....
Date de naissance ....

1 – Si tu devais expliquer à un camarade du CE_2 ce qu'est $\frac{1}{3}$, que lui dirais-tu ? Quels dessins ferais-tu ?

Et pour $\frac{3}{4}$?

Et pour 2,3 ?

2 – Combien y a-t-il de minutes dans $\frac{1}{4}$ heure ? Dans $\frac{1}{3}$ heure ? Dans $\frac{1}{5}$ heure ?

3 – Que vaut $\frac{1}{3} + \frac{1}{3}$? ....

Que vaut $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$? ....

Que vaut $\frac{1}{10} + \frac{1}{10}$? ....

Que vaut $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$? ....

Quelle est la moitié de $\frac{1}{100}$? ....

4 – Peux-tu citer trois nombres compris

entre 1 et 5 ? ....

entre 1 et 3 ? ....

entre 1,8 et 2,1 ? ....

entre 1,5 et 1,8 ? ....

entre 1,5 et 1,6 ? ....

entre 1 et 1,1 ? ....

5 – Martine dit : «C'est drôle, dans ma famille, mon petit frère a la moitié de mon âge, mon père a le triple de mon âge et mon grand-père a 5 fois mon âge. Devine combien de fois mon grand-père a l'âge de mon petit frère ? Explique comment tu as trouvé».

«Mon père a 36 ans. Devine les âges des autres membres de ma famille. (Ma mère a 2 ans de moins que mon père).

6 — Compare les nombres :

4,12 — 43,25 — 4,54 — 4,02 — $4 + \frac{1}{2}$ — 4,45 — 40,2 — 4,2 — 40,12 — $43 + \frac{1}{4}$ — 4,325.

....

....

7 — Un carreleur utilise des carreaux rectangulaires pour carreler le sol d'une pièce rectangulaire. Il constate qu'il peut reporter exactement 25 fois la longueur du carreau dans la longueur de la pièce et exactement 15 fois la largeur du carreau dans la largeur de la pièce. De combien de carreaux aura-t-il besoin pour carreler la pièce ?

8 — Dans une entreprise, on range les œufs dans des boîtes. On met 6 œufs dans chaque boîte ; quand on a 6 boîtes, on les range dans un carton ; et on range 6 cartons dans une caisse. Ce jour là, on a rempli 50 caisses, 4 cartons, et 5 boîtes. Combien d'œufs ont été emballés ?

Dans une autre entreprise, on emballe les œufs par boîtes de 10, on met 10 boîtes dans un carton et 10 cartons dans une caisse. De combien de boîtes, cartons et caisses aurait-on besoin dans cette deuxième entreprise pour emballer le même nombre d'œufs ?

Classe de 6ème A.

8 — Dans une entreprise, on range les œufs dans des boîtes. On met 12 œufs dans chaque boîte ; quand on a 12 boîtes, on les range dans un carton ; et on range 12 cartons dans une caisse. Ce jour là, on a rempli 50 caisses, 8 cartons, et 10 boîtes. Combien d'œufs ont été emballés ?

Dans une autre entreprise, on emballe les œufs par boîtes de 10, on met 10 boîtes dans un carton et 10 cartons dans une caisse. De combien de boîtes, cartons et caisses aurait-on besoin dans cette deuxième entreprise pour emballer le même nombre d'œufs ?

VERSION 1 bis

Date ....
Nom .... Prénom ....
Date de naissance .... Classe ....

1 — Dans une entreprise, on range les œufs dans des boîtes, des cartons, des caisses. On met 6 œufs dans chaque boîte.

On met 6 boîtes dans chaque carton.

On met 6 cartons dans chaque caisse.

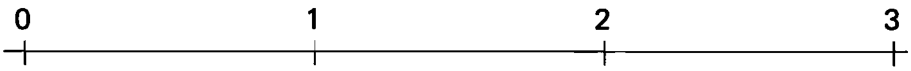
Aujourd'hui, on a rempli 50 caisses, 3 cartons et 2 boîtes. Combien d'œufs ont été emballés ?

Dans une autre entreprise, on emballe les œufs par boîtes de 10 ; on met 10 boîtes dans un carton et 10 cartons dans une caisse.

De combien de boîtes, cartons et caisses aurait-on besoin dans cette deuxième entreprise pour emballer le même nombre d'œufs ? (C'est-à-dire le nombre d'œufs que tu as trouvé à la première question).

2 — Voici un morceau d'axe gradué. Peux-tu placer les nombres suivants sur cet axe ?

2,5   0,8   1,45   1,7   0,62   2,87   1,08



3 — Range les nombres suivants du plus petit au plus grand en utilisant le signe $<$ ou le signe $=$ suivant le cas.

4,12   43,25   4,54   4,02 $4 + \frac{1}{2}$ 4,45   40,2   4,2   4,12 $43 + \frac{1}{4}$ 4,325.

4 — Cite, si c'est possible, trois nombres strictement compris

entre 1,8 et 2,1

entre 1,6 et 1,8

entre 1,3 et 1,4

entre 1 et 1,1