FAIT-ON DES MATHÉMATIQUES EN RÉSOLVANT DES « CASSE-TÊTES » ? L'EXEMPLE DES TOURS DE HANOÏ DANS UN DISPOSITIF D'EXPOSITION

Mickaël DA RONCH[1]

Institut Fourier, Université Grenoble Alpes

Résumé. Nous analysons, à travers ce texte, la situation des Tours de Hanoï telle qu'elle est proposée par la *Grange Vadrouille*[2], à partir d'un travail déjà mené par Da Ronch (2018b). Cette activité a été proposée lors d'une exposition, au sein d'un établissement scolaire français, destinée à des élèves de 11 à 14 ans. Dans ce contexte, le médiateur, qui n'est autre que l'enseignant de mathématiques, a une posture d'observateur, sa présence est minimisée. Cet article vise, d'une part, à faire la distinction entre « problème » et « casse-tête » et, d'autre part, il donne des éléments qui permettent de confirmer que les « casse-têtes » sont peu enclins à l'émergence d'une activité mathématique *a contrario* des « problèmes » (Da Ronch, 2018b, 2019). Enfin, il a également pour ambition de faire évoluer les activités proposées par les différentes institutions ou associations culturelles. Le but étant *in fine* qu'elles favorisent davantage l'activité mathématique d'un sujet.

Mots-clés. Tours de Hanoï, casse-tête, problème, Théorie des Situations Didactiques, activité mathématique, médiation.

Abstract. We analyze, through this text, the situation of the Hanoi Towers as proposed by the "Grange Vadrouille", based on our work (Da Ronch, 2018b). This activity was proposed during an exhibition at a school for students aged between 11 to 14 years. In this context, the mediator, who is the math teacher, adopts an observer posture, his presence is minimized. This paper aims on the one hand, to establish the distinction between "problem" and "brain teaser" and on the other hand, we will try to show that "brain teaser" are little prone to the production of a mathematical activity contrary to the "problems" (Da Ronch, 2018b, 2019). Finally, it also aims to change the activities proposed by the different institutions or cultural associations. The goal being *in fine* that they favor more the mathematical activity of a subject.

Keywords. Hanoï Towers, brain teaser, problem, Theory of Didactical Situations, mathematical activity, mediation.

Introduction et contexte de la recherche

Ce texte rend compte d'un travail de recherche émanant de questionnements autour des expositions mathématiques (Da Ronch, 2018b). Il s'inscrit dans le *continuum* des recherches menées par le thème Combinatoire et Didactique de l'Institut Fourier[3], en lien avec le projet *La Grange des maths*[4]. À l'heure actuelle, la plupart des expositions situées au cœur d'institutions culturelles promeuvent le fait de démocratiser les mathématiques en les rendant ludiques et attrayantes, d'autres complètent ces intentions par une réelle volonté d'apprentissage. Nous nous intéressons à ce type d'institution dont l'enjeu ne se restreint pas au caractère ludique donné à l'exposition, mais montre également la forte intentionnalité d'apprentissage. L'objectif de cet

[1] mickael.da-ronch@univ-grenoble-alpes.fr

[2] La *Grange Vadrouille* propose diverses activités mathématiques contenues dans des valises itinérantes à destination des collèges et lycées. https://www.la-grange-des-maths.fr/valise-pedagogique-maths-scolaire/

[3] UMR 5582 - Laboratoire de mathématiques - Université Grenoble Alpes.

[4] https://www.la-grange-des-maths.fr/

article est de démontrer l'écart qu'il y a entre une situation proposée comme potentiellement favorable à une activité mathématique d'une part, et l'activité mathématique réellement mesurée dans un dispositif d'exposition scolaire d'autre part. Pour ce faire, nous avons choisi la structure fédérative de recherche *Maths à Modeler*[5] ainsi que la *Grange Vadrouille* déclarant toutes deux, à travers leur communication, favoriser l'activité mathématique d'un sujet via les différentes situations qu'elles proposent. Notre choix s'est alors porté sur quatre situations : *Le Pavage de la cuisine*, où l'on demande s'il est possible de paver intégralement une grille carrée par des dominos — deux cases adjacentes d'un côté — lorsqu'on enlève une case à cette grille. Mais aussi *Les chemins de dominos*, qui porte sur l'exhibition d'un alignement de dominos — chemin — ou d'une boucle — chemin fermé — avec des dominos bien précis. Ou encore la situation des *Carrés insécables* qui vise à partitionner un carré de longueur entière par des pavés carrés de plus petite taille de telle sorte qu'il n'existe aucune droite horizontale ou verticale coupant le grand carré dans toute sa longueur. Et, pour finir, une situation autour du « jeu classique » des *Tours de Hanoï*, que nous analysons dans cet article. La mise en place de ces situations a eu lieu dans un collège de l'agglomération grenobloise et a été proposée à des élèves de 11 à 14 ans, dans le Centre de Documentation et d'Information (CDI) de l'établissement. À travers cet article, nous présenterons le cadre et les notions théoriques auxquels nous allons faire référence et qui nous permettront de développer nos idées (Brousseau, 1998 ; Giroud, 2011 ; Grenier & Payan, 2002 ; Lepareur, Gandit & Grangeat, 2017 ; Perrin, 2007 ; Sensevy & Mercier, 2007). La partie majeure de cet article aura pour but de présenter et d'analyser en amont et en aval de notre expérimentation une situation en référence aux Tours de Hanoï, ainsi que les résultats produits. À cet effet, nous décrirons précisément les éléments de méthodologie utilisés pour la récolte et l'analyse des données. Cette méthodologie se base sur un modèle multiniveau favorisant les relations entre les niveaux microscopique — décrivant les interactions des élèves vis-à-vis d'une tâche donnée — et macroscopique — assimilé à la conception d'actions génériques d'élèves au sein d'une situation — permettant de décrire l'activité mathématique de l'élève (Da Ronch, 2018b ; Lepareur et *al.*, 2017). On terminera cet article par une discussion laissant place à d'autres ouvertures et questionnements sur la recherche.

1. Éléments de problématisation et ancrages théoriques

Les situations présentées succinctement en introduction de cet article ont été proposées dans un collège. Elles prennent un format de type panneau accompagné de matériels manipulables associés tels que l'on peut le rencontrer dans des institutions culturelles. La médiation au sein de ces structures est représentée suivant deux formats très distincts (Belaën & Blet, 2007), à savoir :

- La médiation de type indirect associée aux médias de type artefactuel tels que les panneaux, objets matériels manipulables, *etc*. Elle prend en compte tout ce qui permet de médier un contenu et exclut totalement la présence de médiateur humain.
- La médiation de type direct est quant à elle une typologie de médiation en présence de médiateur qui est scindée en trois catégories que nous décrivons ci-après :
    i. La médiation directe en position retrait correspond à une posture du médiateur de type observateur ou conseiller permettant d'aider ou de réguler le visiteur au besoin et n'intervient donc pas *a priori* dans la situation. Cette posture permet donc au visiteur d'être actif.
    ii. La médiation directe en position médiane correspond à une posture du médiateur, de type animateur, modérateur ou réacteur organisant la gestion d'un atelier. Le visiteur a un rôle

[5] http://mathsamodeler.ujf-grenoble.fr/

plutôt actif car il peut interagir avec le médiateur et les médias disponibles.

iii. La médiation directe en position frontale correspond à une posture du médiateur mise en avant, le médiateur prend dans ce cas précis la place de conférencier ou de guide lors d'une visite. Le statut du médiateur est actif *a contrario* du visiteur qui endosse une posture assez passive en l'écoutant sans intervention, *a priori*, de sa part.

Les différentes postures qu'occupent le visiteur et le médiateur dans la médiation directe se rapprochent sensiblement de celles qu'adoptent l'enseignant et l'élève dans la Théorie des Situations Didactiques (TSD) de Brousseau (1998). Les ateliers itinérants proposés par la *Grange Vadrouille* ont été conçus pour faire travailler les élèves *en autonomie, seuls ou par groupes d'élèves*. Dans cette lignée, la médiation sous-jacente semble être de type direct en position retrait (i.). En effet, le médiateur est à l'écart, il prend une posture d'observateur *a contrario* de l'élève qui est actif puisqu'on lui demande d'agir. L'élève produit donc des actions qui favorisent de ce fait les rétroactions. Celles-ci sont interprétées en informations grâce à l'ensemble des connaissances de l'élève. Le milieu est à prendre au sens double. Il est vu, d'une part, comme le milieu de la situation faisant référence à l'ensemble du matériel à disposition de l'élève ainsi qu'éventuellement d'autres élèves du groupe — milieu antagoniste d'action — et, d'autre part, comme le milieu de l'élève relatif à ses connaissances intrinsèques — milieu comme contexte cognitif — (Sensevy & Mercier, 2007). Les postures adoptées par l'élève et le médiateur, ainsi que le fait de ne pas envisager de moments de formulation ou de validation, nous permettent de nous rapprocher des situations adidactiques d'action dans la TSD (Brousseau, 1998).

Les situations étudiées dans Da Ronch (2018b) et présentées de façon sommaire en introduction de ce texte nous ont permis d'en faire ressortir deux classes distinctes, à savoir : les « casse-têtes » et les « problèmes ». Nous définissons un problème comme proche du sens donné par Glaeser (1971) et repris par Giroud (2011). En effet, dans le contexte d'une exposition scolaire, nous définissons le mot « problème » comme un couple formé d'une question et d'un ensemble de variables dont les valeurs sont modulables par l'élève. Le choix de la nature de ces variables — constitutives de la situation —, ainsi que de leurs valeurs associées, influent de manière significative sur la compréhension de la situation et sur les raisonnements utilisés qui ont un impact sur le travail mathématique de l'élève. Un choix arbitraire de la valeur de ces variables peut transformer un problème en un simple casse-tête mathématique. De plus, la réponse à cette question sur laquelle s'appuie le problème n'est *a priori* pas connue, elle est non triviale et sa méthode de résolution n'est pas donnée à la lecture de l'énoncé. La résolution, même partielle, de ce problème doit dépasser la répétition d'étapes qui est donnée par le simple raisonnement par tâtonnements ou essais-erreurs. Nous pouvons donc considérer un problème à partir du moment où il met en jeu une pluralité de raisonnements mathématiques. Il est important de clarifier qu'une même question, posée dans un contexte différent (médiation, public, ...) pourrait perdre son statut de problème. Un « casse-tête », quant à lui, ne vérifie pas tous les critères que nous venons d'énoncer dans la conception de notre définition du mot « problème ». Il se présente sous la forme d'un couple formé d'une question particulière assimilée à une valeur d'une variable bien précise d'une situation donnée. Cette instanciation ne laisse *a priori* aucune place de paramétrisation et sa résolution ne dépasse *a priori* pas le simple raisonnement par tâtonnements ou essais-erreurs. La pluralité des raisonnements utilisés pour le résoudre intervient plutôt du côté du concepteur que de l'utilisateur (Da Ronch, 2018a, 2018b). Autrement dit, la transposition des raisonnements mis en avant à la conception de ce casse-tête ne s'effectue pas lors de la résolution par l'utilisateur.

Par la définition donnée du casse-tête, nous pouvons formuler une hypothèse de recherche sur le fait qu'*a priori* les casse-têtes ne favorisent pas ou peu la production d'une activité mathématique. Ce texte vise donc à donner des éléments de réponse à cette hypothèse dans le cas de la situation des Tours de Hanoï telle qu'elle est proposée par la *Grange Vadrouille*. Autrement dit : « Dans le contexte d'une exposition et en minimisant la présence du médiateur, la situation des Tours de Hanoï telle qu'elle est présentée favorise-t-elle la production d'une activité mathématique chez les élèves ? ».

Pour vérifier cette hypothèse dans l'exemple proposé par la *Grange Vadrouille* des Tours de Hanoï, il nous faut tout d'abord démontrer que cette situation représente bien un casse-tête au sens de notre définition. En outre, il nous a semblé également important de faire une étude comparative entre la démarche expérimentale en mathématiques de Perrin (2007) et de Giroud (2011) et l'activité mathématique définie par Gandit (Lepareur et *al.*, 2017) en une catégorisation d'actions de l'élève décrite par quatre catégories telles que expérimenter, questionner, généraliser, communiquer (Lepareur et *al.*, 2017, p. 106).

• Expérimenter, c'est :

> *choisir des cas particuliers, ni trop simples, ni trop complexes pour comprendre le problème, observer ces exemples au regard du problème, formuler des conjectures concernant ces cas particuliers, valider ou invalider ces conjectures, reconnaître les résultats établis concernant ces cas particuliers.*

• Questionner, c'est :

> *dégager un questionnement dans une situation donnée, proposer de nouveaux problèmes ou questions, induits par les actions précédentes.*

• Généraliser c'est :

> *dégager le généralisable du particulier en formulant une conjecture de portée générale, la prouver ou l'invalider par un contre-exemple, définir des objets nouveaux utiles à l'étude.*

• Communiquer, c'est :

> *débattre scientifiquement de ses résultats, de ses conjectures, donner (par écrit ou oralement) une preuve acceptable par la communauté à laquelle elle s'adresse, expliciter sa démarche de recherche et sa démarche de preuve, présenter un problème et les résultats obtenus sur celui-ci.*

Ce comparatif a permis de démontrer une forte analogie entre la démarche expérimentale (Giroud, 2011 ; Perrin, 2007) et la catégorisation de l'activité mathématique de l'élève (Lepareur et *al.*, 2017) marquant fermement la relation qui les lie. Il nous a donc semblé propice d'élaborer des critères qui permettent *a priori* de vérifier qu'une situation favorise l'accès au plus proche à la démarche expérimentale et donc *a fortiori* à la production d'une activité mathématique (Da Ronch, 2018b, 2019). La vérification de ces critères permet entre autres d'analyser les différentes stratégies — correctes ou incorrectes — évoquées par la situation, de vérifier également si les questions sont de portée générale ou concernent uniquement des cas particuliers mais aussi d'établir si les valeurs des variables (instances) de l'activité sont fixées en amont ou bien sont laissées libres à la charge de l'élève. Ces points vont donc nous permettre de classifier cette situation en termes de casse-tête ou de problème.

Nos critères présentés ci-après (tableau 1) se rapprochent de ceux élaborés dans les Situations de Recherche (SR) de Grenier et Payan (2002). Ces auteurs définissent une SR comme inscrite dans une problématique de recherche non nécessairement résolue, la question est facile d'accès, des stratégies initiales existent et permettent de diversifier les stratégies d'avancée dans la recherche (Grenier & Payan, 2002, pp. 192-194).

Critère : C_i	Description
$C_{enrôlement}$	La situation suscite l'adhésion et l'envie des élèves d'entrer dans l'activité (Bruner, 2015).
$C_{dévolution}$	La situation facilite l'accès à l'activité et permet entre autres d'engager l'élève dans celle-ci via des essais, conjectures ou autres (Brousseau, 1990).
C_{milieu}	La situation favorise les actions de l'élève — milieu de la situation — et permet d'interpréter les rétroactions de ce milieu en informations — milieu de l'élève — (Sensevy & Mercier, 2007).
$C_{stratégie}$	La situation permet de mettre en avant une pluralité de stratégies permettant de la résoudre — au moins partiellement.
$C_{résolution}$	La situation ne suggère aucune méthode de résolution.
$C_{variable.de.recherche}$	La situation met en jeu au moins une variable de recherche, qui est un paramètre modulable de l'activité laissé à la charge des élèves (Godot, 2005).
$C_{connaissance.ordre.I}$	La situation fait intervenir des connaissances notionnelles, mais celles-ci ne sont pas un frein pour l'avancée dans la résolution de l'activité chez l'élève (Sackur, Drouhard, Assude, Paquelier & Maurel, 2005).
$C_{connaissance.ordre.II}$	La situation favorise la mise en avant de plusieurs compétences et connaissances transversales développées sur les objets mathématiques ainsi que sur leur registre de représentation mais favorise également une pluralité de raisonnements envisageables, autre que le simple raisonnement par essais-erreurs ou tâtonnements chez l'élève (Sackur et *al.*, 2005).

***Tableau 1** : Critères favorisant l'entrée dans une démarche expérimentale (Da Ronch, 2018b, 2019).*

Le tableau (tableau 1) va nous permettre de nous questionner sur la validité de ces critères dans le cas de la situation proposée des Tours de Hanoï. On va donc vérifier la potentialité d'entrée dans une démarche expérimentale pour cette situation et *a fortiori* sur la production d'une activité mathématique chez l'élève.

2. Quelques éléments théoriques sur les Tours de Hanoï

À travers la littérature, notamment en psychologie cognitive, nous avons observé de nombreux travaux de recherche basés sur des données empiriques. Ces travaux visent pour la plupart à démontrer (ou non) les capacités de planification et d'organisation de l'action chez différents sujets et à des âges différents (Richard, 1982) mais également à analyser les échanges entre individus dans le but de rendre compte des processus responsables de la construction de connaissances (Soidet, 2006). Notre article ne vise pas à étayer ces propos mais met davantage l'accent sur l'activité mathématique réalisée par l'élève et essaie, à cette occasion, de faire le lien entre les connaissances *a priori* visées et celles perçues *a posteriori* par les élèves à travers un regard de chercheur.

D'un point de vue historique, les Tours de Hanoï sont apparues pour la première fois dans Lucas

(1883) :

> *Cette tour se compose d'étages superposés et décroissants, en nombre variable, représentés par huit pions en bois percés à leur centre, et enfilés dans 1'un des trois clous fixés sur une tablette. Le jeu consiste à déplacer la tour en enfilant les pions sur un des deux autres clous et en ne déplaçant qu'un seul étage à la fois, mais avec défense expresse de poser un étage sur un autre plus petit (Lucas, 1883, p. 55).*

Ce même auteur affirme que le jeu est toujours *possible* et qu'il demande *deux fois plus de temps*. Il donne l'exemple suivant : *si l'on sait le faire pour huit disques alors on est capable de le faire pour neuf.* En effet, Lucas (1883) affirme qu'il suffit de déplacer les huit étages supérieurs sur le 3e clou, pour ensuite déplacer le neuvième étage sur le 2e clou et enfin déplacer les huit premiers étages sur celui-ci. Il constate alors qu'en ajoutant un étage à la tour il faut donc doubler le nombre de coups et en rajouter encore un (*ibid.*). Mais, alors, comment est-on certain, qu'il existe toujours une solution pour 3 clous ? En fait, la réponse est assez intuitive (figure 1) si l'on sait déplacer une tour de $n-1$ étages du 1er clou à un 2e clou par exemple, on sait aussi déplacer une tour de *n* étages du 1er clou vers un 3e clou. En effet, considérons une tour de *n* étages où chaque étage est rangé dans l'ordre décroissant. On note donc que la tour est composée de l'ensemble *E* des étages suivants : $E=\{E_1, E_2, ..., E_n\}$. Supposons que l'on sache déplacer l'ensemble des étages $\{E_2, E_3, ..., E_n\}$ sur le 2e clou. Il suffit ensuite de déplacer l'étage E_1 sur le 3e clou. Et pour finir, de déplacer encore l'ensemble $\{E_2, E_3, ..., E_n\}$ des étages, mais cette fois-ci sur le 3e clou et donc, sur l'étage E_1. Le 3e clou est donc constitué d'une tour qui possède bien les *n* étages.

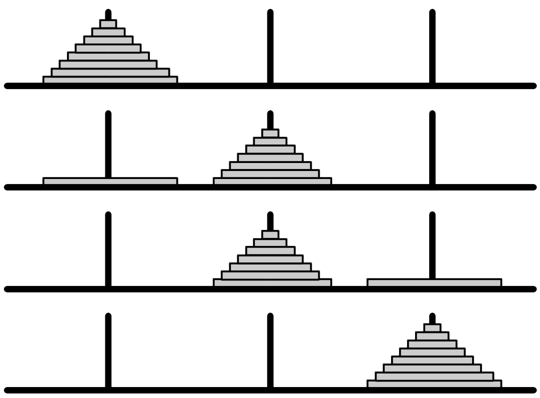


Figure 1 *: Schéma de la résolution des Tours de Hanoï à 3 clous et n étages.*

On considère à présent des disques comme des étages et des piquets comme des clous et l'on note t_n le nombre de déplacements pour transférer *n* disques du 1er au 3e piquet avec cette méthode. Il est clair que si $n=1$, on déplace le seul disque du 1er piquet vers le 3e en un seul déplacement, donc $t_1=1$. À partir de maintenant, on considère $n>1$, On constate alors que l'on déplace une première fois les $n-1$ premiers disques sur le 2e piquet en réalisant t_{n-1} déplacements (figure 1, 1re étape). Puis on déplace une seule fois le plus grand disque du 1er piquet vers le 3e (2e étape). Il reste alors à déplacer les $n-1$ disques du 2e piquet vers le 3e en t_{n-1} déplacements (3e étape). On a donc réalisé au total $t_{n-1}+1+t_{n-1}$ déplacements pour déplacer *n* disques. On a donc démontré que $t_1=1$ et $\forall n>1, t_n=2t_{n-1}+1$. Il nous reste à démontrer que la solution trouvée est en fait la solution optimale des Tours de Hanoï, autrement dit qu'il faut t_n déplacements (on sait déjà que t_n déplacements suffisent) pour déplacer *n* disques. Nommons (T_n) la solution optimale. La procédure récursive décrite en amont nous permet d'affirmer qu'il y a au plus $2T_{n-1}+1$ déplacements autrement dit on a démontré que $T_n \leqslant 2T_{n-1}+1$. Il faudrait donc démontrer que $T_n \geqslant 2T_{n-1}+1$. Les premières preuves (Allardice & Fraser, 1883, pp. 52-53) ne prenaient pas en compte cette condition de nécessité, cela est souligné par Graham, Knuth et Patashnik (1988, p. 2) *« Most of the "solution" to Lucas's problem [...] fail to explain why* T_n *must be* $T_n \geqslant 2T_{n-1}+1$ *»*. On peut donc interpréter cette omission de la condition nécessaire comme étant un obstacle épistémologique difficile et qui sera probablement retranscrit à travers notre analyse. Pour obtenir cette condition de nécessité, il faut à un moment ou un autre déplacer les $n-1$ disques sur un autre piquet, on a donc fait T_{n-1} déplacements. Il faut encore déplacer au moins une fois le dernier disque du 1er piquet vers le 3e. Il nous reste encore à déplacer les $n-1$ disques sur le 3e piquet qui contient déjà le plus grand disque. On a donc bien démontré qu'il est nécessaire de faire au moins $2T_{n-1}+1$ déplacements, autrement dit $T_n \geqslant 2T_{n-1}+1$.

À présent, nous avons bien démontré que le nombre de déplacements nécessaires et suffisants pour résoudre les Tours de Hanoï à n disques est bien donné par la suite (T_n) définie par $T_1=1$ et $\forall n>1, T_n=2T_{n-1}+1$.Un simple raisonnement par récurrence sur n nous permet de déterminer la formule explicite de T_n : pour tout $n \geqslant 1$, $T_n=2^n-1$.

Cette dernière formule nous permet de déterminer explicitement le nombre de déplacements nécessaires et suffisants. Néanmoins, quel algorithme itératif nous permet d'exhiber ce nombre ? Allardice et Fraser (1883) en donnent un assez tôt dans la littérature sans toutefois en donner une preuve (figure 2).

§ 3.—To accomplish the actual moves a simple rule may be given, as follows :—

To shift an even number of discs from A to C, move, by one step at a time, the odd numbers round ABC, counter-clockwise, the even numbers round ACB, clockwise.

To shift an odd number of discs the directions are reversed.

Figure 2 *: Algorithme itératif des Tours de Hanoï (Allardice & Fraser, 1883, p. 53)*

Cet algorithme itératif permet, à l'aide du plus petit disque, de déplacer les disques du 1er au 3e piquet en un minimum de déplacements. Il dépend de la parité du nombre de disques au départ. Pour expliciter ces dires, on désigne par *A*, *B* et *C* les 3 piquets caractérisant les Tours de Hanoï.

- Si n est pair, alors on déplace le plus petit disque une fois sur deux suivant la séquence $A \rightarrow B \rightarrow C$.
- Sinon, on déplace le plus petit disque une fois sur deux suivant la séquence $A \rightarrow C \rightarrow B$.

Cette alternance suivant la parité du nombre de disques de départ se démontre grâce à un raisonnement par récurrence. Nous en donnons les grandes lignes ci-après[6].

Soit D_1 le disque considéré comme le plus petit disque de la tour à n disques. Nous allons démontrer l'alternance des séquences pour le déplacement de ce disque. Pour cela on considère la propriété $P(n)$ telle que pour tout $n \geqslant 1$, on note :

$$P(n) := \begin{cases} si\, n\, est\, pair\,, & A \rightarrow B \rightarrow C \\ si\, n\, est\, impair\,, & A \rightarrow C \rightarrow B \end{cases}$$

[6] Nous renvoyons les lecteurs intéressés au travail de Chappelon (2016) ou de Cohen et Debant (2014).

On considère le cas où $n=1$, le déplacement du plus petit disque de $A \to C$ est la solution optimale. $P(1)$ est donc vraie. Quel que soit $n \geqslant 1$, supposons que $P(n)$ est vraie et démontrons que $P(n+1)$ est encore vraie. Dans le cas où *n* est pair, pour déplacer les $n+1$ disques de $A \to C$, il est nécessaire et suffisant de déplacer au préalable les *n* premiers disques de $A \to B$. Comme on a supposé que n est pair ($n+1$ est donc impair) d'après l'hypothèse de récurrence et en intervertissant le rôle de *B* et *C*, on a donc déplacé le disque D_1 suivant la séquence suivante : $A \to C \to B \to A \to \ldots \to C \to B$. On doit ensuite déplacer le plus grand disque de $A \to C$. Puis déplacer encore les *n* premiers disques, cette fois-ci de $B \to C$, en utilisant à nouveau l'hypothèse de récurrence, on a donc $B \to A \to C \to B \to \ldots \to A \to C$. Finalement, en concaténant ces deux suites de déplacements, on obtient la séquence optimale des déplacements du plus petit disque D_1 déplacé une fois sur deux :

$$A \to C \to B \to A \to \ldots \to C \to B \to A \to C \to B \to \ldots \to A \to C$$

Dans le cas où *n* est impair, la preuve est analogue. On démontre donc que pour tout $n \geqslant 1$, $P(n+1)$ est vraie. On a donc bien démontré que, pour tout $n \geqslant 1$, la propriété $P(n)$ est vraie. Ceci achève la preuve concernant la solution itérative des déplacements du plus petit disque déplacé une fois sur deux dans la résolution des Tours de Hanoï à *n* disques.

Dans ce qui suit, nous allons présenter la situation des Tours de Hanoï proposée lors de notre expérimentation en l'analysant d'un point de vue didactique.

3. Description et analyse didactique de la situation proposée des Tours de Hanoï

3.1. Présentation du panneau et du matériel utilisés

Figure 3 *: Présentation du panneau présenté lors de l'exposition.*

La figure illustre le panneau de la situation proposée lors de notre exposition (figure 3) provenant de la *Grange Vadrouille*. Le haut de ce panneau donne en premier lieu le but à atteindre via les différentes figures représentées permettant d'observer la configuration initiale et finale à obtenir (figure 4).

Figure 4 *: Le but à atteindre dans cette situation.*

Dans un second lieu, ce panneau décrit également les règles du jeu à respecter lors des phases de manipulation (figure 3) :

- Déplacer un seul disque à la fois, le plus haut de la pile ;
- On peut utiliser les 3 cercles de la planche pour poser les disques ;
- Un disque ne doit jamais être placé sur un disque plus petit.

En dernier lieu, le panneau met en évidence les questions posées. Le but étant, à travers cette situation, de déterminer combien de coups sont nécessaires pour déplacer 4 disques du cercle de gauche vers le cercle de droite en respectant les règles ci-dessus. Puis de faire de même avec 6 disques (figure 3).

Pour répondre à ces différentes questions, nous avons proposé du matériel provenant de la *Grange Vadrouille*, à savoir : un socle en bois constitué de 3 cercles permettant de positionner les différents disques. Ces disques sont au nombre de 6 et chacun d'entre eux possède une taille différente. Cela permet d'une part de les distinguer et d'autre part, de les emboîter en respectant les règles du jeu afin de répondre aux questions posées (figure 5).

Figure 5 *: L'ensemble du matériel à disposition des élèves.*

3.2. Analyse *a priori* de la situation expérimentée

Notre analyse va s'articuler autour des critères d'entrée dans une démarche expérimentale. Certains critères vont nous permettre de justifier le fait que la situation des Tours de Hanoï telle qu'elle est présentée dans notre contexte se rapproche indéniablement de la définition d'un casse-tête. Chaque critère est confirmé ou infirmé à l'aide d'indicateurs bien choisis qui nous permettent, grâce à la littérature ou à notre expérience personnelle et à nos anticipations, de les valider ou non.

***C**$_{\textit{enrôlement}}$*

Le critère concernant l'enrôlement est validé à travers la situation puisque l'ensemble du matériel donné suscite l'adhésion et l'envie pour l'élève de commencer l'activité proposée. En effet, le matériel mis à disposition est facilement manipulable (léger), le design est attrayant et bien réalisé avec du matériel en bois bien adapté. De plus, l'organisation du panneau est bien pensée. En effet, comme nous l'avons déjà présenté en amont, le panneau dispose principalement de 3 parties qui permettent facilement de distinguer le but à atteindre (figure 4), les règles du jeu (figure 3) ainsi que les questions posées (*cf.* partie 3.1., p. 56).

$C_{dévolution}$

Le critère concernant la dévolution n'est pas vérifié. Ceci s'explique par plusieurs raisons. Même si l'enrôlement fait partie intégrante du processus de dévolution, il n'est, à notre sens, qu'une condition nécessaire pour l'entrée dans l'activité qui n'est malheureusement pas une condition suffisante. Une première raison de l'échec du processus de dévolution tient du fait qu'après quelques minutes de prise de connaissance des différents médias, l'élève interprétera peut-être mal les règles du jeu. Le fait de les avoir présentées de manière univoque dans un registre textuel nous paraît délicat pour une dévolution efficace tout au long de l'activité. Il aurait été sans doute plus adapté d'utiliser différents registres de représentation, notamment en agençant les règles du jeu dans un registre textuel et schématique. Cela aurait permis d'exhiber clairement les déplacements qui sont proscrits. Une deuxième raison provient de la posture du médiateur. En effet, celui-ci adoptera principalement une posture de retrait et laissera *a priori* les élèves en autonomie, ce qui pourra entraîner par exemple des incompréhensions des règles du jeu. Une 3e et dernière raison tient du choix des valeurs des variables qui nous semble peu judicieux, puisque l'on considère uniquement les cas à 4 et 6 disques. Ces deux cas donnent exactement la même stratégie qui suit la séquence $A \rightarrow B \rightarrow C$. Nous pouvons supposer que le cas à 6 disques a été donné afin de réinvestir la stratégie utilisée pour le cas à 4 disques. Cependant, au vu de la temporalité de l'événement, nous ne pensons pas qu'un réinvestissement soit susceptible d'émerger. Il aurait été donc préférable de nuancer en donnant des instances de l'activité de parités différentes comme par exemple avec 3 disques, puis 5 disques et pour finir avec le cas à 4 disques qui n'utilise pas la même stratégie. Le choix des instanciations empêche l'élève de trouver toutes les solutions de la situation, et, à notre avis, ne lui permettra pas de s'engager dans l'expérimentation et la formulation de conjectures concernant d'autres instances de la situation car son objectif est déjà fixé initialement. La modification des variables laissée à la charge des élèves dans une situation donnée étant faiblement représentée dans leur *curriculum*, il nous semble peu probable qu'ils s'en préoccupent.

C_{milieu}

Le critère concernant le milieu n'est également pas vérifié à travers cette situation. Cette invalidation se justifie essentiellement par rapport au milieu de la situation et notamment vis-à-vis du matériel utilisé mais également par rapport au milieu de l'élève et donc à l'interprétation qu'il peut faire à la suite de la lecture de certaines données du panneau. En effet, tout d'abord le fait de ne pas avoir mis de piquets sur les 3 socles semble favoriser les déplacements interdits. Il est alors facile de déplacer intégralement la tour ou plusieurs disques à la fois, mais également d'en déplacer un situé en dessous d'autres disques par exemple. En outre, les règles du jeu ne sont pas à prendre *stricto sensu*, il y a là une part d'implicite : *« déplacer un seul disque à la fois : le plus haut de la pile »*. L'article défini *« la »* de *« la pile »* a une connotation d'unicité. On peut donc penser que cela favorise uniquement le déplacement du disque le plus haut de la première tour. Ceci va favoriser soit l'arrêt dans la résolution, soit des stratégies erronées si cette partie de la règle est mal interprétée par les élèves. Nous pensons également que le terme *« nécessaire »* mis en avant à travers la question du panneau ne sera probablement pas compris des élèves. Cette dualité entre condition suffisante et condition nécessaire est à peine abordée au début du secondaire, notamment à travers les propriétés des parallélogrammes particuliers par exemple, et n'est donc pas un savoir déjà institué ou naturalisé pour les élèves. De plus, comme nous l'avons déjà mentionné en amont, cette condition nécessaire a mis très longtemps à émerger dans les preuves retrouvées à travers la littérature (*cf.* partie 2., p 53), il est donc fondamental de considérer cette nécessité comme un obstacle épistémologique, et elle ne sera sans doute pas prise en considération par l'élève. Nous remarquons également que cette activité ne permet pas de renvoyer le nombre de déplacements effectués quand celle-ci est réalisée seule. C'est donc à l'élève de prendre en charge ce dénombrement en plus des déplacements à réaliser. Ceci ne facilite, à notre sens, pas la tâche pour répondre aux questions proposées.

***C** stratégie*

Le critère concernant les stratégies pour résoudre le problème n'est pas validé, d'une part parce qu'il n'existe en fait qu'une seule stratégie menant à la résolution de l'activité, et d'autre part car les autres stratégies qui peuvent apparaître sont, soit des stratégies erronées mettant en place des déplacements interdits qui ne permettent donc pas la résolution correcte, soit des stratégies utilisant des déplacements superflus, c'est-à-dire non nécessaires pour résoudre les différents cas. Cependant ces déplacements superflus peuvent s'avérer utiles dans la construction d'une organisation « algorithmique » du raisonnement via la manipulation des disques. C'est d'ailleurs ce que les chercheurs en psychologie cognitive appellent une capacité de planification et d'organisation de l'action (Richard, 1982). Dans notre contexte, on lui donnera le nom de raisonnement par tâtonnements ou essais-erreurs. Ce type de raisonnement va donc permettre de planifier et d'organiser de manière « algorithmique » les déplacements de disques. Nous expliciterons ce point de vue dans les prochaines lignes de ce texte.

Nous évoquions précédemment (*cf.* C_{milieu}) que le milieu de la situation semble favoriser les déplacements interdits, il nous semble donc important de prendre cela en considération à travers l'analyse des stratégies susceptibles d'être utilisées (figures 6 et 7).

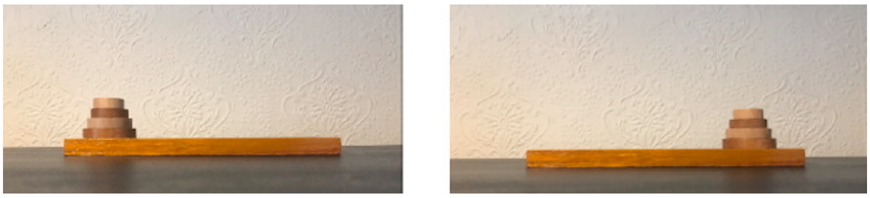


***Figure 6** : Déplacement intégral (interdit) de la tour du 1er vers le 3e cercle en un coup.*

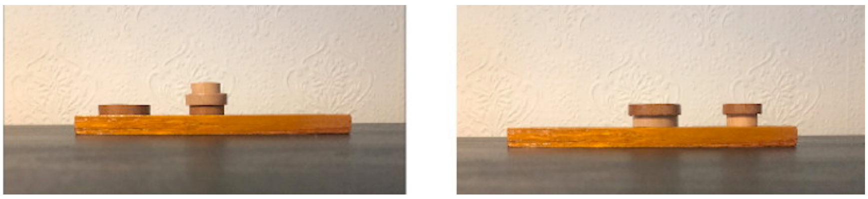


***Figure 7** : Déplacements interdits de plus grands disques sur de plus petits disques.*

Une autre stratégie erronée consiste également à alterner le nombre de disques à déplacer passant d'un seul disque à 2 ou 3, voire à déplacer la tour intégrale comme dans l'exemple de la figure 6.

Comme nous l'abordions en amont, une autre stratégie consiste à utiliser un raisonnement par tâtonnements en effectuant toujours des déplacements autorisés. Cette stratégie peut amener vers la stratégie optimale mais peut bien évidemment occasionner des déplacements superflus. En effet, nous constatons principalement, au même titre que Sorsana (2003), trois moments critiques dans la résolution des Tours de Hanoï. Le premier moment consiste à effectuer le tout premier déplacement de manière arbitraire. Effectivement, il n'y a pas de raison au départ de privilégier le déplacement du plus petit disque du cercle *A* (à gauche) vers le cercle *B* (au milieu) ou vers le cercle *C* (à droite) (figure 8, I.-II.). Ce choix est d'ailleurs déterminant dans la recherche de l'optimum. Le deuxième moment critique, notamment dans la résolution des Tours de Hanoï à 4 disques, se situe au 5ᵉ déplacement (figure 8, VI), puisque, là encore, on peut choisir de déplacer le plus petit disque sur le cercle *B* au lieu de le déplacer sur le plus grand disque situé sur le cercle *A*. Le 3ᵉ et dernier moment critique se situe au niveau du neuvième déplacement (figure 8, X.) et utilise des arguments similaires à ce qui a été dit en amont. Il est important de remarquer que l'étape IX. est une étape cruciale dans la résolution du cas à 4 disques puisqu'elle permet de déplacer le plus grand disque de *A* vers *C*.

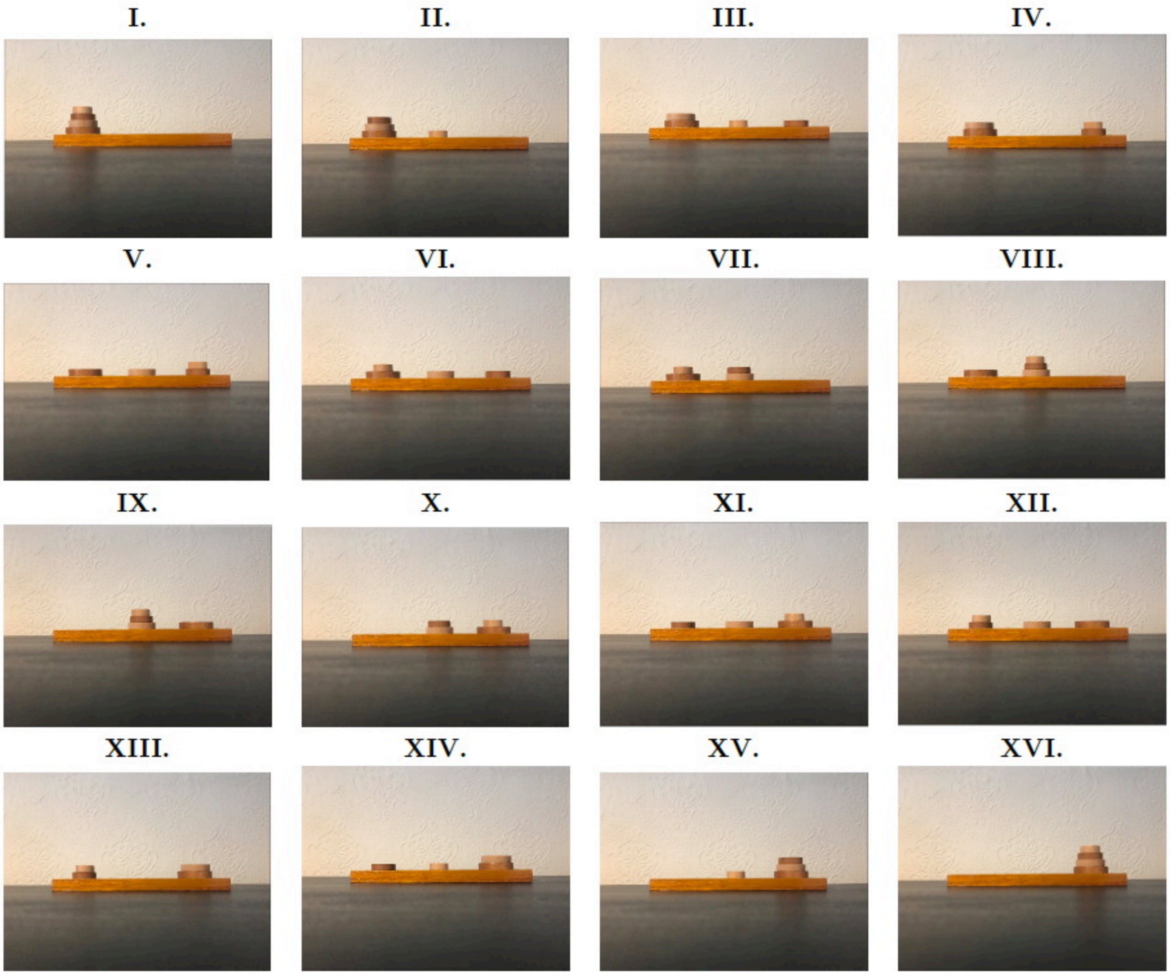


Figure 8 *:Solution optimale à quinze déplacements pour 4 disques.*

Nous ne développons pas ici le cas à 6 disques puisque nous retrouvons des arguments assez similaires. Ces choix, décrits et réalisés de manière arbitraire à la prise en main de la situation, sont, nous semble-t-il, de plus en plus influencés par le nombre d'essais effectués. Ceci permet donc de planifier et d'organiser ces actions afin d'obtenir la bonne stratégie. Nous donnons, ci-après, la solution des Tours de Hanoï à 4 disques[7] (figure 8). Elle est décrite en utilisant un algorithme itératif, c'est-à-dire en déplaçant le plus petit disque une fois sur deux suivant la séquence $A \rightarrow B \rightarrow C$ puisque le nombre de disques est pair.

$C_{résolution}$

Le critère concernant le fait qu'aucun élément ou méthode de résolution ne soit donné en amont est vérifié. En effet, à travers le panneau, nous ne trouvons aucune information permettant d'influencer les déplacements afin de trouver la stratégie optimale.

$C_{variable.de.recherche}$

Le critère concernant l'existence d'au moins une variable de recherche n'est pas validé car il n'y en a pas dans cette situation. Toutes les variables concernant d'une part le nombre de disques et d'autre part, le nombre de cercles disposés sur le socle sont déjà fixées en amont. Aucun paramètre de l'activité n'est donc laissé à la charge de l'élève. De plus, comme nous l'avons déjà dit en amont, les élèves sont souvent confrontés, dans une situation donnée, à une question bien précise et n'ont de ce fait pas l'habitude de faire varier les instances de cette situation. Il est donc très peu probable que les élèves se questionnent sur d'autres instances, comme par exemple le nombre de disques ou le nombre de cercles disposés sur le socle.

$C_{connaissance.ordre.I}$

Le critère des connaissances d'ordre I est validé puisque les connaissances notionnelles ne sont pas un frein pour résoudre les deux cas particuliers. En effet, au vu des deux cas à étudier (4 disques et 6 disques) et le fait qu'il n'est pas demandé de généraliser, nous pensons qu'il suffit de savoir ranger dans l'ordre (dé)croissant une même classe d'objets qui normalement est un savoir institué et naturalisé depuis l'école élémentaire. Dans notre situation, il suffit donc d'identifier les différentes tailles de disques et les classer suivant leur dimension afin d'effectuer des déplacements corrects, autrement dit ne jamais mettre un disque de plus grande taille sur un disque de plus petite taille.

$C_{connaissance.ordre.II}$

Le critère des connaissances d'ordre II est également validé. On y retrouve la recherche de l'algorithme optimal et son utilisation dans des cas particuliers, l'exhibition d'une solution (non) optimale par essais successifs (tâtonnements), des raisonnements par CN et CS, la distinction entre les termes « au plus » et « au moins », le fait de conjecturer le nombre minimal de déplacements, de prouver ou invalider cette conjecture mais également de respecter les règles du jeu, qui peuvent être vues comme une compétence dans ce cas-ci.

Le tableau ci-après synthétise notre propos et permet d'avoir un regard éclairé sur les critères C_i validés ou non à travers notre analyse (tableau 2).

[7] Nous donnons en annexe 1 la résolution des Tours de Hanoï à 6 disques avec exactement 63 déplacements.

Critère : C_i	Validé	Invalidé
$C_{enrôlement}$	✔	
$C_{dévolution}$		✔
C_{milieu}		✔
$C_{stratégie}$		✔
$C_{résolution}$	✔	
$C_{variable.de.recherche}$		✔
$C_{connaissance.ordre.I}$	✔	
$C_{connaissance.ordre.II}$	✔	

***Tableau 2** : Critères (in)validés a priori dans la situation des Tours de Hanoï.*

À ce stade de l'analyse, nous pouvons apporter deux réponses dont une qui sera affinée après l'expérimentation. En effet, premièrement nous venons de démontrer que la situation des Tours de Hanoï telle qu'elle est proposée par la *Grange Vadrouille* est à considérer comme un casse-tête au sens de notre définition donnée en début de l'article (*cf.* partie 1., p. 50). Effectivement, cette situation valide tous les critères énoncés à travers notre définition à savoir que :

- les deux questions et leurs instances forment des cas particuliers, puisque le nombre de disques ainsi que les piquets sont fixés au départ ;
- aucune paramétrisation n'est laissée à la charge de l'élève ;
- le raisonnement utilisé est unique et ne dépasse *a priori* pas le simple raisonnement par tâtonnements ou essais-erreurs.

Deuxièmement, l'hypothèse énoncée sur le fait que les casse-têtes sont peu enclins à favoriser la production d'une activité mathématique semble, à ce stade de l'analyse, cohérente. Le fait que les critères C_i ne soient pas tous validés démontre qu'*a priori cette situation ne favorise pas l'entrée dans une démarche expérimentale et donc affecte la production d'une activité mathématique chez les élèves*.

4. Éléments méthodologiques de recueil et d'analyse des données

Pour notre recherche (Da Ronch, 2018b), nous avons mis en place une expérimentation qui s'est déroulée durant le printemps 2018 au sein du CDI d'un collège de l'agglomération grenobloise. Cet événement a été proposé durant une semaine à des élèves de classes de 5e et 4e (11 à 14 ans), chacune des visites a duré entre une heure et deux heures et aucun réinvestissement en classe n'a eu lieu à la suite de celle-ci. Les élèves pouvaient, suivant leur choix, rester quelques minutes sur une activité ou y passer bien plus de temps. La visite de l'exposition n'était pas sur la base du volontariat. En effet, elle s'est déroulée avec leur enseignant de mathématiques, qui endossait à cette occasion le rôle de médiateur dans une position *a priori* de retrait (cf. partie 1., p 50). Nous verrons d'ailleurs à cet effet que la posture du médiateur peut évoluer durant l'expérimentation pour plusieurs raisons qui s'interprètent en termes d'échec de la dévolution. Ce changement de posture peut intervenir pour l'explicitation de consignes, pour le maintien de l'orientation mais également pour une discussion concernant l'optimalité du nombre de déplacements trouvé. Ces faits sont des indicateurs importants qui nous permettront de constater les ratés de la dévolution. Comme déjà mentionné à travers d'autres textes (Da Ronch, 2018a, 2018b, 2019), un contrat a été passé en amont de la visite entre les élèves et le médiateur (Da Ronch, 2019, p. 50) :

- la visite était libre, les élèves avaient la possibilité de se positionner comme ils le voulaient, seuls, par 2 ou par 3 au maximum ;
- les élèves pouvaient également utiliser un support « papier crayon » afin de répondre aux questions proposées par les différentes situations (non obligatoire) ;
- la disposition des différents panneaux et de leurs matériels associés était faite en sorte que chacune des situations proposées pouvait accueillir entre un et 3 élèves ; toutes les tables présentaient un panneau décrivant la situation, ainsi qu'un ensemble de matériels manipulables, le but étant de minimiser l'influence d'une situation par rapport à une autre.

Cette organisation spatio-temporelle a permis d'essayer d'être au plus proche d'une situation d'exposition retrouvée dans des infrastructures de type muséal. Afin d'analyser et de mesurer l'activité mathématique de l'élève, nous avons utilisé un dispositif de caméras posées sur des trépieds filmant leur progression et relevé quelques productions écrites. Néanmoins, l'activité des Tours de Hanoï a été analysée uniquement à l'aide des enregistrements vidéo, cela étant dû à l'absence de trace écrite pour cette situation. L'activité mathématique des élèves a pu être mesurée grâce à une analyse fine des interactions entre élèves et médias. Nous sommes alors partis du modèle d'action de l'élève élaboré par Gandit (Lepareur et *al.*, 2017), en termes de catégories d'action. L'analyse de ces vidéos nous a permis d'élaborer des catégories d'action microscopique en fonction des stratégies élaborées par l'élève suivant quatre catégories déjà présentées en amont : *Expérimenter* (E_j), *Questionner*[8] (QA_j), *Généraliser* (G_j) et *Communiquer* (C_j). L'élaboration de ces actions microscopiques nous a permis de favoriser la correspondance entre le niveau microscopique des interactions des élèves par rapport à une tâche précise et le niveau macroscopique des catégories générales décrites précédemment. Nous présentons en annexe 2 le tableau microscopique des actions de l'élève et les indicateurs de validité qui ont été utilisés.

5. Déroulement effectif de l'expérimentation et les résultats obtenus

Cette situation a été filmée via le dispositif de caméras et nous a permis de récolter 160 *min* d'enregistrement vidéo, dont 15 *min* à vide à cause de la pause ainsi que de la mise en place des élèves.

Phase d'enregistrement	Nombre d'élèves(s) par matériel	Durée moyenne sur l'activité (en *min*)
Phase 1	1+2	30
Phase 2	1+2	16
Phase 3	1+1	34
Phase 4	1+1	26
Phase 5	1	5
Phase 6	1+1	34

Tableau 3 *: Différentes phases d'enregistrement données avec leur durée et leur nombre d'élèves par matériel*

Sur la durée de l'enregistrement, 13 élèves de 5^e et de 4^e ont travaillé sur cette situation, seuls ou

[8] Les actions microscopiques (QH_j) sont considérées comme hors activité mathématique de l'élève.

par groupes de 2 ou 3. Le panneau décrivant la situation était posé sur la table avec les matériels associés — 2 socles en bois et 2 tours de 6 disques. Le fait d'avoir doublé le matériel a permis d'enregistrer davantage de progressions d'élèves sur cette activité.

Dans cette partie du texte, nous essayons, à partir des différentes phases enregistrées, d'analyser des moments qui nous paraissent essentiels dans l'activité des élèves.

Lors de l'expérimentation, le dispositif de médiation utilisé était principalement de type direct en position retrait — néanmoins, nous verrons plus loin que la posture du médiateur a dû évoluer dans le temps. Cette posture de retrait a permis, lors de l'enregistrement vidéo, d'observer d'une part que la plupart des groupes ne lisent pas les consignes du panneau, et d'autre part que, quand elle sont lues, celles-ci sont souvent mal interprétées et très peu comprises. D'ailleurs, nous étayons nos propos sur l'extrait d'un dialogue[9] entre deux élèves qui n'ont visiblement pas compris ce qu'il fallait faire. Il est extrait de la phase 1 de l'enregistrement.

Élève X : « Est-ce que tu as compris la question ? Et il faut faire quoi en fait, c'est pareil !

[L'élève déplace la tour du 1er socle au dernier socle en un seul mouvement].

Elève Y : — Non, d'abord ils vont nous expliquer. »

Par ce dialogue, on distingue plusieurs choses. La première est que l'élève n'a visiblement pas compris la question, ni même les règles du jeu. L'élève *X* demande à l'élève *Y* s'il a compris la question, puis répond en même temps en exhibant une solution utilisant des déplacements interdits. Tout ce que l'on peut dire ici, c'est que l'élève semble avoir compris le but à atteindre à la fin de la partie mais ne respecte pas les règles du jeu (figure 9).

***Figure 9** : Déplacement interdit de la tour en un seul coup du cercle de gauche A vers celui de droite C.*

La deuxième chose que l'on peut relever vient du fait que l'élève *Y* ne lui donne pas plus d'explications, lui-même ne semble pas avoir compris et est dans l'attente d'une intervention venant du médiateur. Cette attente passive conduit à un échec de l'enrôlement — et donc *a fortiori* de la dévolution de la situation — et peut s'interpréter en termes de contrat pédagogique liés à l'environnement. En effet, au-delà d'une discipline bien précise se situe un cadre scolaire régi par de nombreuses règles et contrats implicites de portée plus générale, comme la gestion de l'environnement de la classe. Nous retrouvons à cet effet des élèves qui ont souvent tendance à attendre — plus ou moins longtemps — la venue d'un professeur pour leur expliquer les consignes. Cette attente se caractérise par la passivité des élèves face à une situation.

Nous avons également constaté d'autres déplacements interdits comme par exemple déplacer des disques situés en dessous de la pile (figure 10).

9 Dans tous les dialogues de ce texte, les crochets « [ ] » sont utilisés pour écrire des commentaires afin d'étayer et de rendre compréhensibles les propos des élèves.

Figure 10 *: Déplacement interdit de disques sous la pile.*

Mais aussi le déplacement de plusieurs disques en même temps (figure 11), ou encore le déplacement des plus gros disques sur de plus petits disques (figure 12).

Figure 11 *: Déplacement interdit de plusieurs disques en même temps.*

Figure 12 *: Déplacement interdit de disques plus grands sur des disques plus petits.*

Ce phénomène de déplacements interdits a déjà été mis en avant en amont de notre expérimentation et nous pensons que son existence vient directement d'une relation de cause à effet provenant du milieu matériel de la situation. Tout d'abord, le fait de ne pas avoir mis de piquet sur les cercles permet ce type de déplacements et favorise de ce fait des stratégies erronées. En outre, cela montre que les consignes du panneau ne sont pas claires pour la plupart des élèves. Il aurait été souhaitable de compléter les consignes données dans un registre textuel, par un registre schématique permettant d'exhiber distinctement les mouvements interdits. Cela aurait sans doute faciliter la dévolution des règles du jeu et de ce fait éviter les stratégies erronées.

Dans les différentes phases observées — sauf pour la phase 4 —, le médiateur a dû changer sa posture, passant d'une posture de retrait de type observateur à une posture médiane favorisant les interactions entre élève(s)/médiateur. Ce changement de posture a permis d'expliciter les règles du jeu, les déplacements interdits mais également d'inciter les élèves à commencer la résolution de la situation par 4 disques au lieu de 6. Ces faits ont permis d'une part d'éviter le découragement et la frustration, et d'autre part de maintenir l'orientation des élèves.

Au cours de la phase 1 de l'enregistrement, nous avons constaté une première stratégie par tâtonnements qui a permis de résoudre — sans mouvement interdit — de manière non optimale le cas à 4 disques. En effet, l'élève a réalisé 17 déplacements alors que 15 suffisaient. Ce nombre est dû à des déplacements superflus apparus lors de moments critiques déjà décrits et commentés dans notre analyse *a priori* (*cf.* partie $C_{stratégie}$, p. 59). En particulier, lors du 5^{e} déplacement décrit comme critique, nous avons observé que l'élève a au départ déplacé le plus petit disque de C vers B, mais s'est ensuite autorégulé en déplaçant celui-ci de C vers A, c'est-à-dire en suivant la séquence optimale $A \rightarrow B \rightarrow C$. Ce fait nous permet d'interpréter cette autorégulation en une capacité de planification de ses actions proches. Néanmoins, le moment critique qui a fait que la solution trouvée n'était pas optimale provient du neuvième déplacement — juste après le déplacement du plus grand disque de A vers C. En effet, sur cette image, on constate lors des 6^{e} et 7^{e} déplacements (figure 13, VI.-VII.) que le plus petit disque est déplacé de A vers B ; il faudrait alors qu'il se déplace ensuite de B vers C, si l'on suit la séquence optimale. Or, ici on constate bien que le plus petit disque revient sur A au lieu d'aller vers C. Ceci ajoute donc des déplacements superflus et explique le fait d'avoir trouvé 17 déplacements au lieu des 15 escomptés.

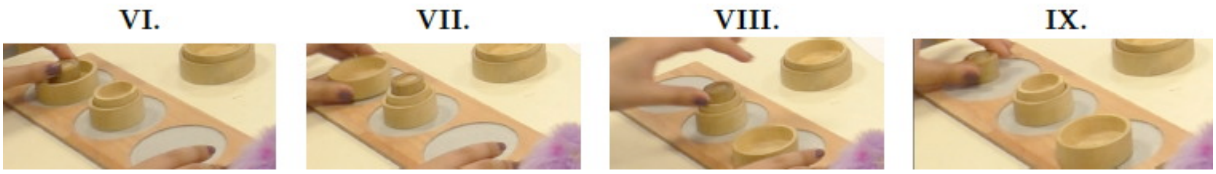


Figure 13 *: Mise en évidence d'un moment critique au niveau du neuvième déplacement (IX.).*

D'autres moments critiques sont apparus à travers d'autres phases enregistrées, notamment sur le choix du positionnement du plus petit disque lors du premier déplacement. Ceci a naturellement conduit à des solutions non optimales. D'ailleurs, aucun groupe d'élèves ne s'est questionné sur l'optimalité de la solution trouvée, autrement dit la question de savoir si le nombre de déplacements exhibé est nécessaire dans ce cas particulier n'a pas émergé. Ceci peut s'expliquer en partie à l'aide de deux facteurs :

- le premier est de nature épistémologique ; en effet, l'absence de preuve concernant le nombre de déplacements nécessaire est apparue dès la genèse du problème, où de nombreux écrits comme chez Allardice et Fraser (1883) n'apportent pas satisfaction (Graham, Knuth & Patashnik,1988) ;
- le deuxième facteur semble être de nature à la fois ontogénique et didactique. On peut ici supposer que le contrat didactique relatif à la preuve se transpose, d'une part au vu du statut du médiateur — qui n'est autre que l'enseignant de mathématiques —, et d'autre part au vu de l'emplacement de l'exposition, qui se situe au sein même de l'institution scolaire. L'unicité des solutions rencontrée dans le *curriculum* des élèves peut justifier en partie l'absence de vérification sur l'optimalité du nombre de déplacements trouvé.

Lors de l'analyse de la phase 4, nous avons observé qu'un groupe d'élèves a trouvé la solution optimale sans intervention du médiateur dans le cas à 4 disques. Avant de trouver la solution optimale, un des élèves prend conscience qu'il doit déplacer les 3 premiers disques sur B pour pouvoir déplacer le plus gros disque de A vers C. L'élève a semble-t-il implicitement utilisé l'algorithme récursif donnant la solution optimale (figure 14).

Élève : « Trouvé, trouvé !

[il a déplacé les 3 disques sur le 2^{e} socle],

le but c'est de rassembler lui,

[en parlant de l'ensemble des 3 disques sur le 2^{e} socle],

ensuite tu fais ça [...]. »

[il déplace alors nécessairement le plus grand disque du 1er socle vers le 3^{e}].

Figure 14 *: Déplacement des 3 disques sur le cercle du milieu B.*

Ce moment nous montre que l'élève a implicitement réduit le problème instancié à 4 disques à deux sous-problèmes instanciés à 3 disques. En effet, le premier correspond aux déplacements des 3 premiers disques de A vers B. En outre, le deuxième correspond, quant à lui, aux déplacements des 3 premiers disques de B vers C. Il semble de ce fait prendre conscience que s'il est arrivé à déplacer les 3 premiers disques il est capable de le faire pour 4. Cette remarque rejoint les propos de Lucas (1883) lors de la présentation des Tours de Hanoï.

Nous n'avons pas mentionné de commentaires sur la résolution du cas à 6 disques puisqu'elle a été abordée succinctement en début de l'activité et n'a pas donné de résultats probants. En effet, cela a été dû, d'une part à l'incompréhension des règles du jeu lors du démarrage de l'activité, et d'autre part au changement de variables demandé par le médiateur, faisant passer d'une configuration à 6 disques à une configuration à 4 disques. Les élèves ont alors travaillé essentiellement sur le cas à 4 disques et n'ont pas réinvesti la stratégie trouvée dans le cas de 6 disques.

D'après ce que nous avons observé et analysé *a posteriori*, nous pouvons affirmer que *les connaissances perçues des élèves, notamment à l'ordre II, semblent assez lointaines de celles qui ont été évoquées en amont de cette expérimentation*. En effet, seul un raisonnement très basique utilisant le tâtonnement ou essais-erreurs est utilisé par les élèves. Par l'analyse effectuée notamment des stratégies effectives, nous sommes donc en mesure de décrire l'activité mathématique des élèves en deux catégories telles que :

- *expérimenter* : les élèves exhibent la (une) solution (non) optimale sur un cas particulier ;
- *communiquer* : les élèves donnent des arguments locaux pertinents ou erronés.

Nous constatons à cet effet que l'activité est moindre en termes d'actions chez les élèves. Cela peut s'expliquer par l'absence des composantes *« généraliser »* et *« questionner »* dans notre contexte. Ceci étant dû, d'une part au fait que les Tours de Hanoï telles qu'elles sont présentées se définissent comme un casse-tête et non un problème. Le fait de ne pas avoir de variables de recherche, au sens où l'élève peut fixer lui-même les instances du problème, empêche certainement de généraliser. D'autre part, il semble n'y avoir aucun questionnement concernant l'optimalité de la solution trouvée. Les élèves exhibent une réponse en respectant les règles du jeu, celle-ci semble unique et nécessairement la meilleure selon eux. Cette absence de vérification sur le caractère nécessaire du nombre de déplacements trouvé peut s'interpréter en termes de contrat didactique lié à l'unicité d'une solution en mathématiques. En effet, dans un cadre institutionnel scolaire, les élèves ont tendance à croire qu'il existe une et une seule solution à un problème posé. De plus, le fait de démontrer que cette solution est optimale revient à démontrer qu'il n'existe pas de solution de cardinalité plus faible, autrement dit à raisonner sur le fait qu'il est impossible d'en trouver une meilleure. Cela ne semble pas naturel pour eux, car cette démarche est très peu rencontrée au cours de leur *curriculum* mathématique d'élève. On peut donc interpréter cet obstacle comme un obstacle à la fois épistémologique, ontogénique et didactique (Brousseau, 1998).

Notre travail (Da Ronch, 2018b) nous a également permis de démontrer que les « problèmes » — au sens donné dans cet article et dans ce dispositif précis — sont favorables à la production d'une activité mathématique. Pour obtenir en partie ce résultat, nous nous sommes appuyés sur de nombreux travaux de recherche (Gandit, 2008 ; Gravier, Payan & Colliard, 2008 ; Grenier, 2007 ; Grenier & Payan, 1998), qui ont notamment démontré que la situation de pavage présentée succinctement en introduction de ce texte est favorable à la production d'une activité mathématique au sein de la classe. Nous avons donc essayé de démontrer (Da Ronch, 2018b, 2019) qu'il est envisageable de faire des mathématiques en contexte d'exposition pour lequel la présence du médiateur est minimisée. L'analyse de notre situation, basée sur la même expérimentation et les mêmes éléments méthodologiques, nous a permis de démontrer par exemple que la situation du *Pavage de la cuisine* est encline à la production d'une activité mathématique modulo un changement de posture du médiateur. Tout d'abord, au sein de ce dispositif, cette situation est à prendre au sens d'un « problème ». En effet, la situation est présentée sous la forme du couple formé d'une question générale et d'un ensemble de variables de recherche. Elle est complétée par un cas particulier afin de favoriser la dévolution de la situation et donc l'enrôlement de l'élève. Le fait d'avoir laissé des variables de recherche a permis aux élèves de modifier certaines valeurs de ces variables. Les élèves ont pu développer des types de tâches idoines aux heuristiques mathématiques telles, qu'expérimenter sur des cas particuliers, conjecturer et valider ou invalider ces conjectures par des arguments dépassant le simple raisonnement par tâtonnements ou essais-erreurs. En outre, nous constatons à travers cette analyse que les conditions suffisantes d'existence d'un pavage sur un cas particulier émergent naturellement chez les élèves, au détriment des conditions nécessaires relatives à l'impossibilité d'exhibition d'un pavage pour une région considérée. Il est alors fondamental que le médiateur modifie sa posture, passant d'une posture de retrait en une posture médiane de type réacteur, Ceci dans le but d'une part de maintenir l'orientation de l'élève et d'éviter une certaine forme de frustration, et d'autre part de faire émerger un questionnement autour de cet obstacle afin de faire évoluer les conceptions intrinsèques que les élèves en font.

Conclusion et perspectives de recherche

À travers ce texte, nous nous sommes efforcés de démontrer que les Tours de Hanoï telles qu'elles sont présentées par la *Grange Vadrouille* sont à prendre au sens d'un casse-tête mathématique. En effet, tout d'abord, nous avons démontré que l'activité est instanciée sur deux cas particuliers et ne laisse de ce fait aucune possibilité de paramétrisation à la charge de l'élève. En outre, il existe une et une seule stratégie permettant d'exhiber la solution, cela laisse donc très peu de choix quant à l'émergence d'autres moyens de résolution. Ces points se rapprochent donc indéniablement du sens que nous avons donné du casse-tête comme étant une situation instanciée faisant intervenir *a priori* qu'une stratégie par essais-erreurs ou tâtonnements. Cette définition nous a permis d'avancer l'hypothèse qu'en général, les casse-têtes sont peu enclins à la production d'une activité mathématique chez les élèves. Celle-ci semble se confirmer sur l'exemple que nous avons donné des Tours de Hanoï. Effectivement, nous avons pu mesurer via notre analyse *a posteriori* l'activité mathématique des élèves. Elle se restreint à deux catégories, d'une part la catégorie « expérimenter » qui met en avant l'exhibition de la (d'une) solution (non) optimale via un raisonnement par tâtonnements, et d'autre part la catégorie « communiquer » qui met quant à elle en avant des arguments locaux qui sont pertinents ou erronés. Le fait que la composante « expérimenter » émerge, provient probablement d'un changement de posture du médiateur. En effet, celui-ci est passé d'une posture de retrait à une posture médiane de type réacteur, favorisant la dévolution des règles du jeu dans cette situation.

Sans ce changement de posture, il nous semble que ce moment de dévolution aurait été un échec et aurait conduit à un abandon massif dans la résolution de ce « casse-tête ». À notre avis, il n'est donc pas envisageable de proposer cette activité comme une véritable activité mathématique, telle que la situation est présentée, d'autant moins lorsque le médiateur adopte une posture de retrait. Il est alors important de réfléchir à d'autres types de situations qui pourraient favoriser la genèse de cette activité mathématique tout en gardant le même dispositif de médiation.

Dans notre travail (Da Ronch, 2018b, 2019), nous avons justement mis en avant d'autres situations de type problème permettant de favoriser cette activité dans les mêmes conditions d'expérimentation. Notamment, à l'aide de situations comme le *Pavage de la cuisine* ou encore les *Carrés insécables* présentées succinctement en introduction de ce texte. Ces problèmes ont permis aux élèves de développer, modulo parfois un changement de posture du médiateur, des types de tâches idoines aux heuristiques mathématiques comme : expérimenter sur des cas particuliers, exhiber des preuves d'existence, émettre des conjectures d'impossibilité (inexistence), se poser des questions, voire même formuler des conjectures de portée générale. Ce changement de posture a manifestement favorisé un questionnement, ainsi qu'une réflexion sur la notion d'impossibilité en mathématiques. Cela a certainement induit chez les élèves le développement de certaines heuristiques décrites précédemment. Mais alors, qu'en serait-il sans médiateur ?

À l'heure actuelle, les dispositifs proposés par les institutions culturelles ne garantissent pas nécessairement la présence de médiateur lors d'une exposition. Il est alors naturel de nous poser la question : quels auraient été les résultats obtenus dans un dispositif de type médiation indirecte où le médiateur est totalement absent de la situation ? Telles que les situations sont présentées, nous pensons que l'activité mathématique des élèves serait affectée, en raison d'une part de l'incompréhension de certaines consignes, et d'autre part du peu de réflexion et de l'abandon massif face à l'impossibilité d'exhibition de solution. Cette dernière provoque indéniablement un sentiment de frustration, d'échec et donc de renonciation à poursuivre la résolution. L'activité du mathématicien ne se résume pas, à notre sens, qu'à l'exhibition de solutions via des cas particuliers. Il peut être alors réducteur de parler véritablement d'activité mathématique quand l'élève se cantonne *in fine* à l'exhibition de solutions et n'insuffle guère de réflexion sur l'inexistence en mathématiques. Il est alors fondamental de remarquer que le concept d'impossibilité en mathématiques semble être un obstacle pour les élèves. Cela vient probablement d'une part du fait que la confrontation de l'impossibilité en mathématiques n'est que faiblement représentée dans le *curriculum* des élèves, et d'autre part du fait que cela dépend également de la conception intrinsèque que l'élève fait de cette notion. Il s'avère alors nécessaire d'élaborer des situations qui permettent, dans un premier temps, de faire accepter cette notion et, dans un second temps, de faire émerger des questionnements sur de possibles arguments de preuve. Cela semble être des éléments primordiaux dans la construction de la pensée mathématique, qui favorise de ce fait le processus de démarche de recherche. Ces faits nous ont amené à la conceptualisation d'une première caractérisation tridimensionnelle — artefactuelle, cognitive et sociale (Da Ronch, 2018b).

Par exemple, à travers la composante artefactuelle, nous distinguons deux éléments essentiels à savoir : le panneau présentant la situation et les artefacts manipulables associés. Nous donnons à travers ces quelques lignes — non exhaustives — des suggestions sur ces deux points issues du travail de Da Ronch (2018b). À notre sens, le panneau doit décrire un « problème » ainsi qu'au moins une instanciation permettant de découvrir la situation sur un cas particulier. Ces instanciations doivent être bien choisies et permettre d'une part de faire entrer l'utilisateur dans la résolution du problème, et d'autre part de faire évoluer ses stratégies et son raisonnement lors de la résolution. On les considérera donc comme des variables didactiques. Les variables de recherche, quant à elles, existent car la situation initiale est présentée sous la forme d'une question générale et d'un ensemble de variables dont les valeurs sont laissées à la modification de l'utilisateur. Les règles du jeu et le but à atteindre doivent être clairement identifiables, par exemple grâce à un double registre de représentation de type schématique et textuel. Il nous semble également important d'accentuer la notion d'impossibilité en mathématiques via des « marqueurs », notamment dans des problèmes de décision où l'inexistence de solution devient très rapidement un obstacle pour l'utilisateur. En ce qui concerne les artefacts de la situation, ils doivent être facilement manipulables et en relation étroite avec le problème donné. Ces artefacts doivent également permettre d'instancier le problème sur de nombreux cas particuliers. L'interaction entre les artefacts et l'utilisateur doit favoriser le renvoi de rétroactions permettant l'autorégulation de l'utilisateur afin de faire évoluer ses stratégies lors de la résolution. Ils doivent également être construits de telle manière qu'ils minimisent les déplacements interdits vis-à-vis des règles du jeu dans une situation donnée. Cela permettra d'éviter que l'utilisateur s'écarte du but à atteindre lors de la résolution (Da Ronch, 2018b).

De manière générale, cette première caractérisation — artefactuelle, cognitive et sociale — permet de procéder à une évaluation par inspection de la potentialité d'une telle situation, quant à l'émergence d'une activité mathématique chez le sujet. Cette caractérisation pourra être étoffée à travers la conception d'un dispositif de situations afin de donner *in fine* des conditions propices à l'activité mathématique d'un utilisateur dans un contexte où la présence de médiateur n'est pas garantie.

Références bibliographiques

Allardice, R., & Fraser, A. (1883). La Tour d'Hanoï. *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society, 2*, 50-53.

Belaën, F. & Blet, M. (2007). La médiation présentielle dans un musée des sciences. *La Lettre de l'OCIM, 114*, 30-38. OCIM, Musées, Patrimoine et Culture scientifiques et techniques.

Brousseau, G. (1990). Le contrat didactique: le milieu. *Recherches en didactique des mathématiques, 9*(9.3), 309-336.

Brousseau, G. (1998). *Théorie des Situations Didactiques*. La pensée sauvage, Grenoble.

Bruner, J. (2015). *Le développement de l'enfant : savoir faire, savoir dire*. Presses universitaires de France.

Da Ronch, M. (2018a). Activité mathématique dans un contexte d'exposition avec manipulations d'objets : utopie ou réalité ? *Acte du colloque Espace Mathématique Francophone 2018*. Université de Cergy-Pontoise.

Da Ronch, M. (2018b). Activité mathématique dans un contexte d'exposition avec manipulations d'objets : utopie ou réalité ? *Mémoire de master 2 Didactique des Sciences et Numérique*. Grenoble : Université Grenoble Alpes.

Da Ronch, M. (2019). Un problème de pavage : entre jeu et activité mathématique. *Revue de Mathématiques pour l'école, 231*, 46-55.

Gandit, M. (2008). *Étude épistémologique et didactique de la preuve en mathématiques et de son enseignement : une ingénierie en formation*. Thèse de l'Université Joseph Fourier Grenoble I.

Giroud, N. (2011). *Étude de la démarche expérimentale dans les situations de recherche pour la classe*. Thèse de l'Université de Grenoble.

Glaeser, G. (1971). *Mathématiques pour l'élève professeur*. Hermann, Paris.

Godot, K. (2005). *Situations recherche et jeux mathématiques pour la formation et la vulgarisation. Exemple de la roue aux couleurs*. Thèse de l'Université Joseph Fourier Grenoble I.

Gravier, S., Payan, C. & Colliard, M. (2008). *Maths à modeler. Pavages par des dominos. Grand N, 82*, 53-68.

Grenier, D. (2007). *Des situations de recherche en mathématiques pour une formation à la démarche scientifique*. http://media.education.gouv.fr/file/Formation_continue_enseignants/16/0/StFlour2007_Grenier_110160.pdf

Grenier, D. & Payan, C. (1998). Spécificités de la preuve et de la modélisation en mathématiques discrètes. *Recherche en Didactique des Mathématiques, 18*(1), 59-100.

Grenier, D. & Payan, C. (2002). Situation de recherche en classe : essai de caractérisation et proposition de modélisation. *Cahiers du séminaire national de recherche en didactique des mathématiques*. Paris.

Lepareur, C., Gandit, M. & Grangeat, M. (2017). Évaluation formative et démarche d'investigation en mathématiques : une étude de cas. *Éducation & didactique, 11*(3), 101-120.

Lucas, É. (1883). *Récréations mathématiques, 3*. Gauthier-Villars.

Perrin, D. (2007). L'expérimentation en mathématiques. *Petit x, 73*(6), 34.

Richard, J.-F. (1982). Planification et organisation des actions dans la résolution du problème de la Tour de Hanoï par des enfants de 7 ans. *L'année psychologique, 82*(2), 307-336.

Sackur, C., Drouhard, J.-P., Assude, T., Pasuelier, Y. & Maurel, M. (2005). L'expérience de la nécessité épistémique. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 25*(1), 57-90.

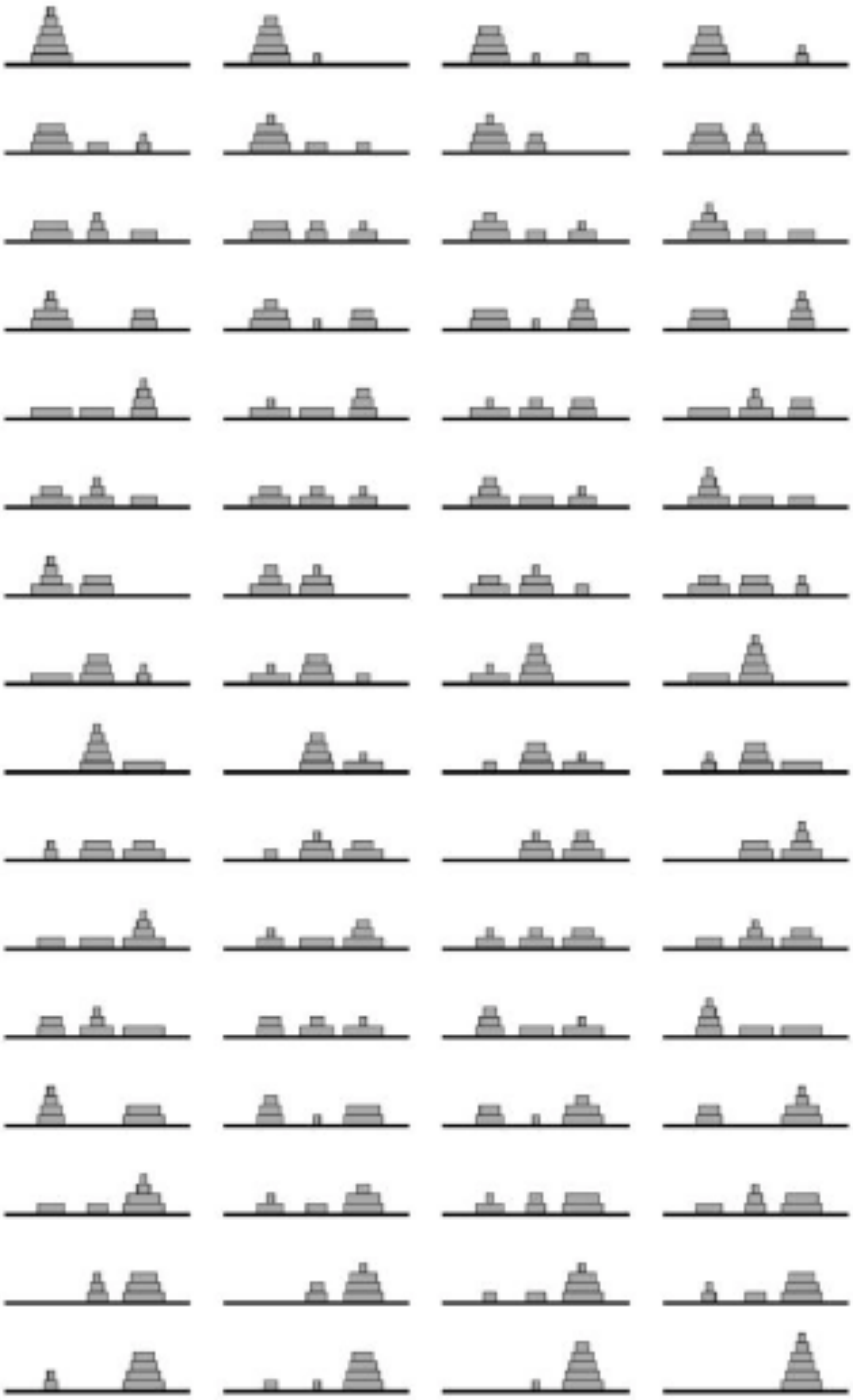
Sensevy, G., & Mercier, A. (2007). *Agir ensemble : l'action didactique conjointe du professeur et des élèves*. Presses universitaires de Rennes.

Soidet, I. (2006). Un système descriptif d'analyse des interactions de tutelle entre adolescents. Stratégies tutorielles et dynamiques interactives. *Bulletin de psychologie, 2*, 203-215.

Sorsana, C. (2003). Comment l'interaction coopérative rend-elle plus « savant » ? Quelques réflexions concernant les conditions nécessaires au fonctionnement dialogique du conflit sociocognitif. *L'orientation scolaire et professionnelle, 32*(3), 437-473.

Annexe 1

Résolution du problème des Tours de Hanoï à 6 disques avec exactement 63 déplacements



Annexe 2
Actions microscopiques de l'élève (E) et ses interactions possibles avec d'autres élèves ou avec le professeur (P)
(Da Ronch, 2018b, pp. 24-25)

Niveau microscopique des actions de l'élève	Description et indicateurs de validité
E_1	E propose une réponse (correcte ou erronée) en faisant des essais par manipulation. — réponse orale, écrite ou avec support visuel en défaisant leur « construction » répondant à une question.
E_2	E propose une conjecture locale. — Conjecture formulée à l'écrit ou à l'oral.
E_3	E valide ou invalide sa conjecture locale. — Trouve un contre-exemple pour invalider sa conjecture ou la prouve en utilisant un argument valide (oral ou écrit).
E_4	E explique comment il a obtenu une conjecture, une idée. — Dialogue entre élève et/ou professeur permettant à l'élève d'expliquer son cheminement.
E_5	E propose un état mais ne sait pas si celui-ci apporte une réponse[3] à la question. — L'élève fournit une réponse et se pose oralement des questions sur la validité de son résultat.
E_6	E propose une action en lien avec une stratégie identifiée. — L'élève réalise un geste avec l'artefact qui se rapproche d'une stratégie identifiée dans l'analyse *a priori*
QH_1	E questionne P car il n'a pas compris la consigne. — L'élève pose une question oralement au professeur concernant la consigne, les règles du jeu.
QH_2	E questionne un autre élève car il n'a pas compris la consigne. — L'élève pose oralement une question à un autre élève concernant la consigne, les règles du jeu.
QA_1	E questionne P concernant la question posée. — L'élève pose oralement une question à P concernant la question posée dans la situation.
QA_2	E questionne un autre élève concernant la question posée. — L'élève pose oralement une question à un autre élève concernant la question posée dans la situation.
QA_3	E se pose des questions sur la résolution de la question dans la situation. — L'élève se pose oralement des questions sur la résolution de la question, soit à lui-même, soit à un autre élève, soit au professeur.
G_1	E émet une conjecture de portée générale. — L'élève formule une conjecture de portée générale, soit à l'oral soit par écrit.
G_2	E tente une preuve générale. — L'élève essaye de prouver une conjecture générale par écrit ou à l'oral.
$C1_{E \to E/P}$	E exprime/donne son ignorance — Par écrit ou à l'oral.
$C2_{E \to E/P}$	E formule/donne un argument, un résultat local pertinent. — Par écrit ou à l'oral.
$C3_{E \to E/P}$	E formule/donne un argument, un résultat local non pertinent ou faux. — Par écrit ou à l'oral.
$C4_{E \to E/P}$	E formule/donne un argument, un résultat de portée générale pertinent. — Par écrit ou à l'oral.
$C5_{E \to E/P}$	E formule un argument, un résultat de portée générale non pertinent ou faux. — Par écrit ou à l'oral.

3. Une réponse dans notre contexte correspond à une action favorisant un raisonnement oral, écrit ou artefactuel de l'élève et qui peut être perçue entre les actions de « faire et défaire » sur le milieu de la situation (composante artefactuelle).