ACTIVITÉ

UNE HISTOIRE DE CUBES INSÉCABLES

Mickaël DA RONCH[1]
Université Grenoble Alpes
Institut Fourier, équipe Combinatoire et Didactique

Le problème de pavages insécables en dimension 3 présenté ci-après est issu d'un problème déjà étudié en dimension 2, le problème de « Carrés insécables ». Celui-ci a notamment été analysé par le groupe « logique, raisonnement et SiRC » de l'IREM de Grenoble (Brochure SiRC, 2017, pp. 53-67).

L'étude du problème de Carrés insécables est apparue lors de l'exhibition d'un pavage particulier du plan par des pavés carrés. En effet, la figure ci-après met en évidence

> *un pavage du plan par des carreaux (carrés) dont la particularité est qu'on ne peut tracer aucune droite traversant le pavage horizontalement ou verticalement sans couper au moins un carré du pavage. On dira qu'un tel pavage est* ***insécable*** *(ibid., p. 53).*

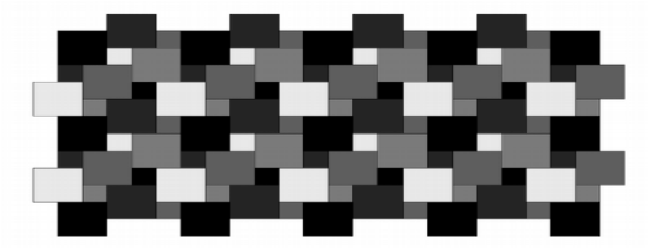

Figure 1 *: Pavage insécable du plan (ibid., p. 53).*

Ce travail a permis de mettre en avant un questionnement sur l'existence d'un tel pavage pour des régions bornées du plan comme le carré ou le rectangle par exemple. Si l'on se restreint à l'étude de grilles carrées, ce même groupe a alors montré qu'il existe au moins un pavage insécable pour toute grille carrée de taille $n \geqslant 5$ (*ibid.*, p. 59). La figure ci-après nous montre d'ailleurs un exemple de pavage insécable pour une grille carrée de taille $n=7$ (figure 2).

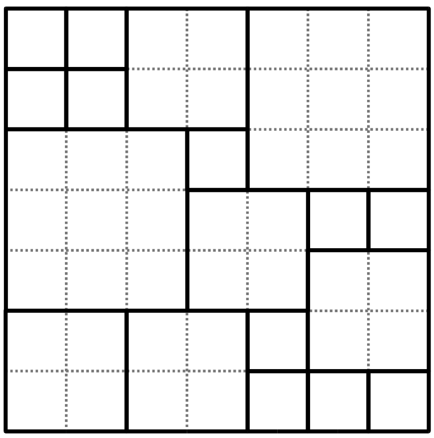

Figure 2 *: Pavage insécable d'une grille carrée (ibid., p. 55).*

[1] mickael.da-ronch@univ-grenoble-alpes.fr

Il semble alors intéressant d'élargir ce problème à d'autres dimensions, notamment à la dimension 3. En effet dans ce cas-ci, *est-il toujours possible de partitionner un cube de longueur entière par des pavés cubiques — ou cubes-partition — de telle manière qu'il n'existe, cette fois-ci, aucun plan horizontal ou vertical coupant le grand cube dans toute sa longueur* ***sans traverser un cube-partition****, et ce, quelle que soit la taille de notre cube ?*

Le but de ce questionnement est de faire émerger chez les élèves un processus de démarche de recherche lié à l'activité mathématique. En effet, cette activité vise à insuffler des savoir-faire idoines à cette démarche tels que : expérimenter sur des cas particuliers, modéliser cette situation sur des exemples à l'aide de matériels manipulables ou en utilisant un logiciel de géométrie en 3D, émettre des conjectures locales d'existence ou d'inexistence, les prouver ou les invalider à l'aide d'arguments utilisant une pluralité de raisonnements, mais le but est également d'inciter les élèves à formuler des conjectures de portée plus générale, voire, si possible, de les prouver...

Prenons l'exemple d'un cube d'arête 2 unités (figure 3), il semble alors évident d'exhiber un pavage en 8 cubes-partition d'arête 1 unité (en excluant bien évidemment le pavage trivial qui consiste à prendre un pavé cubique ayant pour arête 2 unités car sans intérêt pour notre problème).

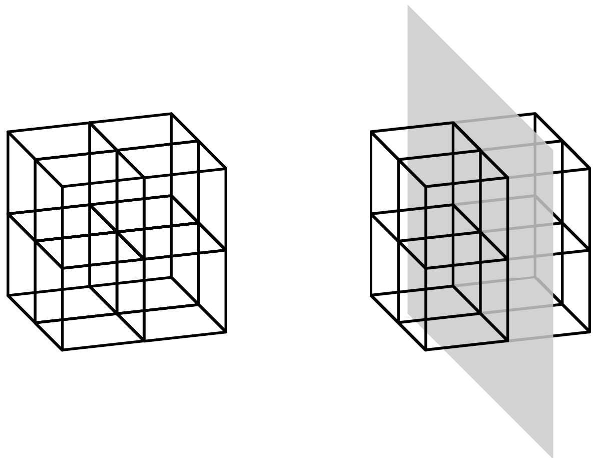

Figure 3 *: Pavage d'un cube d'arête 2 unités avec 8 cubes-partition d'arête 1 unité.*

L'observation de cette figure (figure 3, à droite) montre qu'un plan vertical traverse l'intégralité du cube sans intersecter aucun cube-partition. Ce type de pavage est donc ce qu'on appelle communément un pavage sécable. À présent, que se passe-t-il si l'on décide de faire varier l'arête du cube ? *Est-il toujours possible d'exhiber un pavage insécable d'un cube d'arête n unités par des cubes-partitions ? Quelle est la condition portant sur l'entier n pour pouvoir réaliser un tel pavage ?*

L'exemple que nous proposons ci-après illustre la partition d'un cube ayant pour arête 6 unités par des cubes de plus petites tailles[2] dont les longueurs sont entières (figure 4). *Vérifiez à présent qu'aucun plan horizontal ou vertical ne puisse couper le grand cube dans toute sa longueur sans intersecter au moins un cube-partition*. Ainsi la réunion des cubes-partitions est égale au cube de départ.

[2] Pour éviter la surcharge de la figure, nous ne présentons pas les cubes unitaires (*d'arête* 1 unité) qui complètent naturellement les espaces libres situés entre le grand cube et les pavés cubiques.

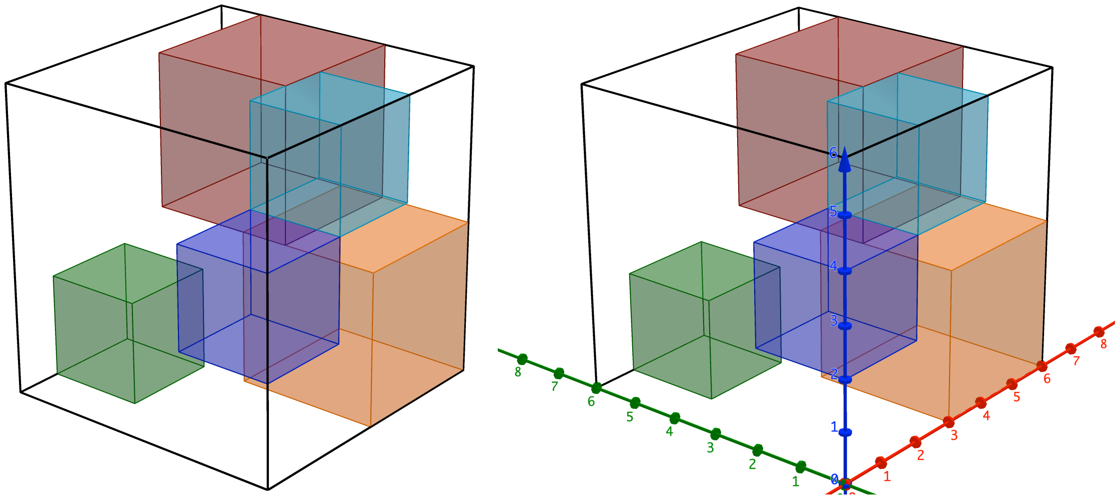

Figure 4 *: Pavage d'un cube d'arête 6 unités par des cubes-partition.*

À présent, *pouvez-vous partager un cube d'arête 7 unités par des cubes plus petits sans qu'aucun plan horizontal ou vertical ne puisse le couper dans toute sa longueur ? Essayez ensuite avec un cube d'arête 8 unités, puis 4.*

De façon générale : *pour quelles valeurs de l'entier n est-il toujours possible de partitionner un cube d'arête n unités en cubes d'arêtes strictement plus petites que n de telle sorte qu'il n'existe aucun plan horizontal ou vertical coupant le grand cube dans toute sa longueur sans intersecter au moins un cube-partition ?*

Nous donnerons des éléments de réponse au problème dans un prochain numéro...

Référence bibliographique

Groupe « Logique, raisonnement et SiRC ». (2017). *Situations de recherche pour la classe. Expérimenter, conjecturer et raisonner en mathématiques, au collège, au Lycée et... au delà*. IREM de Grenoble.