
FAMILIER MAIS PROBLÉMATIQUE, LE TABLEAU DE NUMÉRATION

Catherine HOUEMENT¹

Normandie Univ, UNIROUEN, Univ.de Paris, Univ. Paris Est Créteil, CY Cergy Paris Université, Univ. Lille
Laboratoire de Didactique André Revuz, Rouen

Frédéric TEMPIER²

CY Cergy Paris Université, Univ.de Paris, Univ. Paris Est Créteil, Univ. Lille, UNIROUEN,
Laboratoire de Didactique André Revuz, Cergy

Résumé. Le tableau de numération semble être un support pédagogique usuel à l'école primaire, à tous les niveaux d'enseignement. La recherche en fait rarement un objet d'étude à part entière. Nous interrogeons dans ce texte la place et le rôle qu'a et que pourrait avoir le tableau de numération pour l'apprentissage de la compréhension de l'écriture chiffrée à l'école primaire. Pour cela nous avons enquêté sur les usages du tableau dans l'enseignement à partir de quelques manuels et en recueillant des éléments de pratiques déclarées à partir d'un questionnaire proposé à des enseignants. Ce travail a été complété par une recherche de traces de tableau de numération dans l'histoire des nombres et de ses usages, en nous appuyant sur quelques travaux d'historiens et d'épistémologues. Ceci nous amène à dégager des potentialités didactiques du tableau de numération, et à proposer des pistes pour en renouveler les formes et les usages.

Mots-clés. Numération, tableau, abaque, unité, décimal, position, conversion.

Introduction

En France, le tableau de numération semble considéré par les enseignants comme un support pédagogique usuel, plutôt associé à la numération, et utilisé à tous les niveaux d'enseignement. Il est fréquent de le voir sur les murs des classes et dans les manuels et fichiers scolaires. Pourtant, certains formateurs considèrent qu'il vaut mieux éviter de l'utiliser, au risque de ne pas construire suffisamment de sens. Et certains programmes officiels demandent aux enseignants d'éviter d'en avoir un usage trop systématique. Par exemple un commentaire dans la rubrique *Connaissance des nombres entiers naturels* (MJENR, 2002, p. 18) précise qu'« *il convient d'éviter les activités trop formelles et l'utilisation trop systématique du tableau de numération* ».

Même si la recherche en didactique des mathématiques s'intéresse à cet artefact et produit parfois des résultats sur sa présence dans les manuels anciens (Chambris, 2008) ou certaines de ses modalités d'usage dans les classes (Tempier, 2013), elle en fait rarement un objet d'étude à part entière.

Par exemple, Tempier (2013) a étudié les pratiques de quatre enseignants de CE2 (8-9 ans) dans la séquence qu'ils ont mise en œuvre sur le millier : il a pu observer au passage leur usage du

¹ catherine.houement@univ-rouen.fr

² frederick.tempier@cyu.fr

tableau de numération. Il en ressort que, lorsque la tâche proposée consiste principalement à trouver dans un nombre le nom de l'unité de numération associée à un chiffre, le tableau de numération est utilisé par tous les enseignants observés. Ils associent au tableau les règles suivantes : en cas d'absence d'une unité isolée, ils rendent obligatoire l'écriture des zéros ; ils ne permettent pas l'écriture d'un nombre supérieur à dix dans une colonne. Quand l'enjeu de la tâche proposée porte principalement sur les relations entre les unités (unités, dizaines, centaines, milliers), le tableau de numération n'est pas, en général, utilisé pour faire des conversions, les enseignants observés utilisant principalement le matériel de numération.

Ces pratiques sont-elles partagées par beaucoup d'enseignants de l'école élémentaire ? Comment utiliser le tableau de numération pour favoriser l'apprentissage de la numération décimale de position ?

1. Rappels sur la numération décimale de position

Considérer une pluralité d'objets comme une entité individuelle, ce que les anglo-saxons nomment *unitizing* (Fosnot & Dolk, 2001), est un aspect fondamental pour la constitution et la compréhension d'un système de numération décimal. Considérer *dix* comme *une unité*, la désigner par un nouveau terme (ou symbole) et réitérer ce processus permet la constitution d'une liste ordonnée d'unités selon un principe itératif : dix unités d'un certain ordre sont égales à une unité de l'ordre immédiatement supérieur : par exemple dix dizaines (dix unités du 2^e ordre) égalent une centaine (une unité du 3^e ordre).

Notre système de numération écrite usuelle en chiffres ne montre pas explicitement ces unités : c'est la position du chiffre dans le nombre qui rend compte de l'unité de numération associée à ce chiffre ; et le symbole 0 est nécessaire pour marquer l'absence d'unité à certaines positions. Ce système s'appuie donc simultanément sur deux principes :

- le principe décimal, qui correspond à l'organisation du système des unités : celle-ci respecte la règle itérative déjà citée, dix unités d'un certain ordre sont égales à une unité de l'ordre immédiatement supérieur ;
- le principe de position, qui définit la position de chaque unité dans l'écriture en chiffres : unités simples au premier rang à partir de la droite, dizaines au deuxième rang, etc.

Le concept d'unité joue donc un rôle central pour l'enseignement et l'apprentissage de la numération (Houdement & Tempier, 2019 ; Tempier, 2020). Les unités de numération fournissent un moyen de désigner les nombres, qui apparaît comme une alternative, notamment pour dire un nombre sans utiliser la numération parlée usuelle (avec ses irrégularités) : par exemple, 173 est une centaine sept dizaines trois unités. Un nombre ainsi désigné peut être écrit (ou lu) de plusieurs manières, par exemple, 173 peut être lu ou écrit comme 1 centaine 7 dizaines 3 unités, ou 17 dizaines 3 unités, ou 1 centaine 73 unités, etc. Les nombres en unités forment un troisième système de désignation des nombres qui peut être mis en relation avec les systèmes usuels, écrit et parlé (figure 1).

Écrire un nombre en unités de numération permet de donner un nom à la position de chaque chiffre du nombre (valence positionnelle des unités de numération). L'unité de numération affecte à ce chiffre une certaine valeur (valence décimale des unités de numération). Ainsi 235 s'écrit 2 centaines 3 dizaines 5 unités ou 3 dizaines 5 unités 2 centaines, ... 5060 s'écrit 5 milliers et 6 dizaines, ...

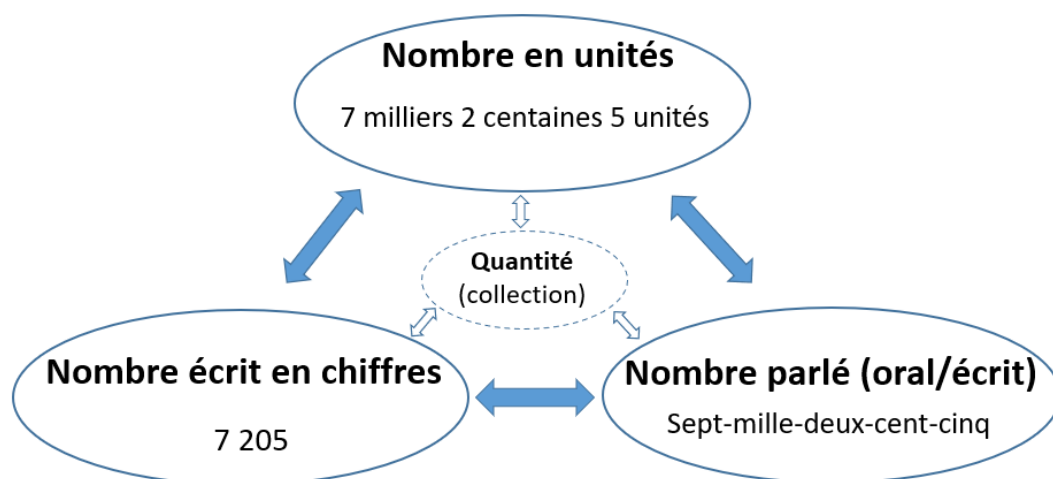


Figure 1 : Trois systèmes pour représenter les nombres (Houdement & Tempier, 2019).

L'apprentissage des unités de numération et des relations qui les lient s'appuie d'abord sur des actions (réelles et évoquées) de groupements et dégroupements de collections, avec un matériel de numération permettant des groupements successifs (Houdement & Tempier, 2019). Il est complété par des tâches plus formelles de compositions/décompositions de nombres en appui notamment sur des conversions d'unités (voir Tempier, 2016).

Rappelons notre questionnement. Quelles sont les pratiques des enseignants concernant le tableau de numération ? Comment l'utiliser pour favoriser l'apprentissage de la numération ?

Pour cela, nous avons d'abord enquêté sur les usages du tableau dans l'enseignement, d'une part en étudiant quelques manuels, d'autre part en recueillant des éléments de pratiques déclarées à partir d'un questionnaire proposé à des enseignants. Nous présentons cette enquête et ses résultats dans la partie 2. Dans la partie 3., nous recherchons les traces du tableau de numération dans l'histoire des nombres et de leurs usages, en nous appuyant sur quelques travaux d'historiens et d'épistémologues. Dans la partie 4., nous concluons sur des potentialités didactiques du tableau de numération et nous donnons des pistes pour des usages renouvelés.

2. Une enquête sur les usages du tableau de numération dans l'enseignement

Afin de se donner des éléments objectifs sur les usages du tableau de numération nous avons choisi d'étudier, d'une part, ce qu'on peut en voir sur la toile et dans des manuels, d'autre part, les pratiques déclarées d'enseignants d'école primaire à travers un questionnaire.

2.1. Les questions

Les questions qui pilotent notre enquête à la fois pour l'analyse des manuels et le choix des questions posées aux enseignants sont les suivantes. Quelles formes prend le tableau de numération ? Quelle est la fréquence d'usage du tableau dans les classes et dans les manuels ? Quelles fonctions didactiques sont attribuées au tableau ? Quelles en sont les règles d'usage ? Pour quels types de tâches mathématiques est-il mobilisé ?

2.2. Méthodologie

Voici les trois types de données recueillies pour l'enquête et les méthodologies associées.

Recherche sur la toile

Nous avons réalisé, en avril 2017, une recherche sur le moteur de recherche Google avec les mots-clés « tableau de numération ». Nous savons retenu les trois premières pages de résultats et utilisé ces données pour renseigner la première question de l'enquête : quelles formes prend le tableau de numération ?

Étude de manuels

Nous avons choisi d'étudier des manuels et guides de l'enseignant associés, à deux niveaux d'enseignement différents (CE1 pour le cycle 2 et CM1 pour le cycle 3), issus de quatre collections, qui nous semblent différentes et assez répandues dans les classes.

Manuels et guides de l'enseignant de cycle 2		Manuels et guides de l'enseignant de cycle 3	
A1	<i>Pour comprendre les maths CE1</i> , Hachette Éducation, 2018.	A2	<i>Pour comprendre les maths CM1</i> , Hachette Éducation, 2016.
B1	<i>Les nouveaux outils pour les maths CE1</i> , Magnard, 2019.	B2	<i>Les nouveaux outils pour les maths CM1</i> , Magnard, 2016.
C1	<i>À portée de maths CE1</i> , Hachette Éducation, 2018.	C2	<i>À portée de maths CM1</i> , Hachette Éducation, 2016.
D1	<i>Cap Maths CE1</i> , Hatier, 2016.	D2	<i>Cap Maths CM1</i> , Hatier, 2017.

Ces ressources ont été étudiées à partir de l'ensemble des questions précédemment citées, en identifiant la place et le rôle de l'ostensif *tableau de numération* dans les organisations mathématiques et didactiques (Bosch & Chevillard, 1999).

Un questionnaire

Nous avons conçu un questionnaire en ligne, comprenant 49 items avec questions fermées du type oui/non ou de fréquence (sur une échelle de Lickert à 3 niveaux : jamais, parfois, souvent). Ces questions portent sur certaines caractéristiques de contexte et caractéristiques personnelles (niveau, expérience d'enseignant, formation sur la numération, expérience de formateur, ...) ainsi que sur les usages du tableau de numération : fréquence et types d'usage du tableau de numération dans la classe, fonctions attribuées au tableau de numération, caractéristiques du tableau de numération utilisé, règles d'usage du tableau, tâches associées à l'usage du tableau.

Le lien du questionnaire a été diffusé par courriel aux enseignants d'école primaire de plusieurs circonscriptions des départements de Seine-Maritime et des Hauts-de-Seine. Ont répondu 140 enseignants de cycle 2 et 149 enseignants de CM1 et CM2.

Parmi les répondants, il y a environ autant d'enseignants ayant plus de 15 ans d'expérience que d'enseignants ayant moins de 15 ans d'expérience ; seuls 6 % des interrogés ont moins de 5 ans d'expérience. Environ 8 % des enseignants interrogés sont des formateurs (PEMF). La plupart ont suivi peu de formation continue sur la numération des entiers depuis 5 ans (69 % aucune formation, 29 % entre 1 et 10 heures, 2 % plus de 11 heures). Le milieu social de la classe est mixte pour 46 % des répondants, favorisée pour 33 % et défavorisée pour 21 %.

Pour analyser les données, nous avons réalisé des tris croisés des réponses prenant à la fois en compte le cycle d'enseignement (cycle 2 ou CM) et les réponses à l'item.

2.3. Les résultats

Quelles formes prend le tableau de numération ?

Sur la toile

La recherche sur la toile montre une grande variété de formes existantes pour l'objet « tableau de numération » :

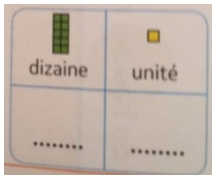
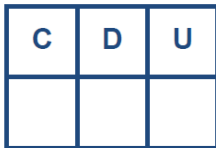
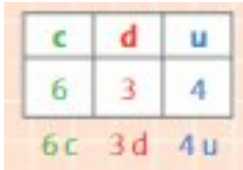
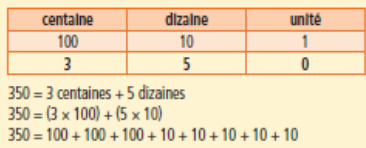
- avec un matériel de numération représenté (en cycle 2 principalement) ou sans,
- avec des couleurs ou sans,
- avec les unités de numération (écrites souvent en abrégé) ou sans,
- avec les écritures des puissances de 10 (1, 10, 100, 1000, ...) ou sans,
- avec les classes (des unités simples, des milliers, des millions, ...) ou sans,
- avec une colonne de séparation entre deux classes (parfois les mots « mille », « million », ... sont écrits) ou sans,
- avec une partie décimale ou sans,
- avec une colonne spécifique pour la virgule (parfois une nette séparation entre partie décimale et partie entière) ou sans,
- avec des lignes (parfois des cases pour écrire chaque chiffre) ou sans,
- ...

Parmi les tableaux proposés, voici quatre exemples de tableaux de numération de cycle 3 permettant d'illustrer cette variété :

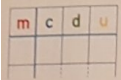
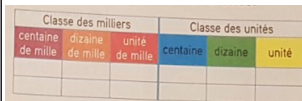
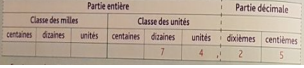
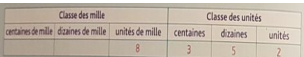
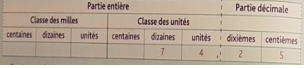
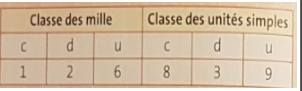
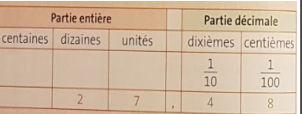
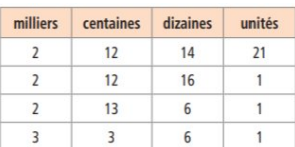

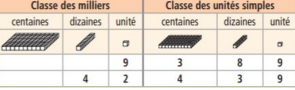
<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse; text-align: center;"> <thead> <tr> <th colspan="3">Classe des millions</th> <th colspan="3">Classe des mille</th> <th colspan="3">Classe des unités</th> <th colspan="3">Partie décimale</th> </tr> <tr> <th>C</th><th>D</th><th>U</th> <th>C</th><th>D</th><th>U</th> <th>C</th><th>D</th><th>U</th> <th>$\frac{1}{10}$</th><th>$\frac{1}{100}$</th><th>$\frac{1}{1000}$</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td></tr> <tr><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td></tr> <tr><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td></tr> <tr><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td></tr> <tr><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td></tr> </tbody> </table> <p>http://www.loustics.eu/tableaux-numeration-et-mesures-a3252357</p>	Classe des millions			Classe des mille			Classe des unités			Partie décimale			C	D	U	C	D	U	C	D	U	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{1000}$																																																													<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse; text-align: center;"> <thead> <tr> <th colspan="3">Classe des millions</th> <th colspan="3">Classe des mille</th> <th colspan="3">Classe des unités</th> </tr> <tr> <th>C</th><th>D</th><th>U</th> <th>C</th><th>D</th><th>U</th> <th>C</th><th>D</th><th>U</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>100 000 000</td><td>10 000 000</td><td>1 000 000</td> <td>100 000</td><td>10 000</td><td>1 000</td> <td>100</td><td>10</td><td>1</td> </tr> <tr><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td></tr> <tr><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td></tr> <tr><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td></tr> <tr><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td></tr> </tbody> </table> <p>http://danslarmoiredelamaitresse eklablog.com/tableau-de-numeration-a-plastifier-a99793757</p>	Classe des millions			Classe des mille			Classe des unités			C	D	U	C	D	U	C	D	U	100 000 000	10 000 000	1 000 000	100 000	10 000	1 000	100	10	1																																				
Classe des millions			Classe des mille			Classe des unités			Partie décimale																																																																																																																																											
C	D	U	C	D	U	C	D	U	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{1000}$																																																																																																																																									
Classe des millions			Classe des mille			Classe des unités																																																																																																																																														
C	D	U	C	D	U	C	D	U																																																																																																																																												
100 000 000	10 000 000	1 000 000	100 000	10 000	1 000	100	10	1																																																																																																																																												
<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse; text-align: center;"> <thead> <tr> <th colspan="3">classe des millions</th> <th colspan="3">classe des milliers</th> <th colspan="3">classe des unités simples</th> </tr> <tr> <th>C</th><th>D</th><th>U</th> <th>C</th><th>D</th><th>U</th> <th>C</th><th>D</th><th>U</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td></tr> <tr><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td></tr> <tr><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td></tr> <tr><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td></tr> <tr><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td></tr> </tbody> </table> <p>http://lacavernedalisa eklablog.com/numeration-ce2-c18246744</p>	classe des millions			classe des milliers			classe des unités simples			C	D	U	C	D	U	C	D	U																																														<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse; text-align: center;"> <thead> <tr> <th>Unité de million</th> <th>Centaine de mille</th> <th>Dizaine de mille</th> <th>Unité de mille</th> <th>Centaine</th> <th>Dizaine</th> <th>Unité</th> <th>Dixième $\frac{1}{10}$</th> <th>Centième $\frac{1}{100}$</th> <th>Millième $\frac{1}{1000}$</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td><td>/</td><td> </td><td> </td></tr> <tr><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td><td>/</td><td> </td><td> </td></tr> <tr><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td><td>/</td><td> </td><td> </td></tr> <tr><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td><td>/</td><td> </td><td> </td></tr> <tr><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td><td>/</td><td> </td><td> </td></tr> </tbody> </table> <p>https://fr.pinterest.com/pin/773915517185478833/</p>	Unité de million	Centaine de mille	Dizaine de mille	Unité de mille	Centaine	Dizaine	Unité	Dixième $\frac{1}{10}$	Centième $\frac{1}{100}$	Millième $\frac{1}{1000}$								/										/										/										/										/																										
classe des millions			classe des milliers			classe des unités simples																																																																																																																																														
C	D	U	C	D	U	C	D	U																																																																																																																																												
Unité de million	Centaine de mille	Dizaine de mille	Unité de mille	Centaine	Dizaine	Unité	Dixième $\frac{1}{10}$	Centième $\frac{1}{100}$	Millième $\frac{1}{1000}$																																																																																																																																											
							/																																																																																																																																													
							/																																																																																																																																													
							/																																																																																																																																													
							/																																																																																																																																													
							/																																																																																																																																													

Dans les manuels

En CE1. Les tableaux de numération sont formés de deux ou trois colonnes, avec toujours au moins une ligne entête unités de numération, parfois désignées par leurs initiales de couleurs différentes : les couleurs peuvent disparaître dans la fiche individuelle de travail disponible pour l'élève. La ligne unités de numération peut être doublée d'une ligne avec dessins de matériel.

Manuel A1	Manuel B1	Manuel C1	Manuel D1
<p>Entêtes remplis d u ou c d u de couleurs différentes, parfois doublés d'une ligne matériel.</p> 	<p>Entêtes couleurs c d u dans le manuel (pas dans la fiche individuelle).</p> 	<p>Entêtes couleurs c d u.</p> 	<p>Tableau de numération uniquement dans le guide.</p> <p>Entêtes en toutes lettres, parfois doublées d'une ligne matériel ou en chiffres.</p>  <p>350 = 3 centaines + 5 dizaines $350 = (3 \times 100) + (5 \times 10)$ $350 = 100 + 100 + 100 + 10 + 10 + 10 + 10$</p>

En CM1. Dans trois manuels sur quatre, le tableau évolue au cours de l'année : il est un tableau d'abord en rangs jusqu'au millier en début d'année, puis en rangs et classes pour placer des nombres supérieurs à 10 000.

Manuel A2	Manuel B2	Manuel C2	Manuel D2
<p>Le tableau évolue avec la taille des nombres : par rang pour les nombres <9999, puis par classes. Utilisation du nom des unités, des classes et de couleurs.</p> <p>Pour les nombres à 4 chiffres : couleurs pour chaque unité.</p>  <p>Avec les classes : des couleurs pour chaque unité (les mêmes qu'en début d'année).</p>  <p>Agrandissement vers la droite pour décimaux : une couleur pour partie entière une autre pour partie décimale.</p> 	<p>Toujours le même tableau pour les entiers jusqu'au milliard : avec nom des unités et classes, sans couleurs.</p> <p>Même pour les nombres <9999, les classes sont proposées.</p>  <p>Évolution par ajout de la classe des milliards en fin d'année.</p> <p>Évolution pour les décimaux : ajout de la partie décimale.</p> 	<p>Le tableau évolue avec la taille des nombres : par rang pour les nombres <9999, puis par classes.</p>  <p>Introduction des décimaux : ajout de colonnes pour la virgule et la partie décimale :</p> 	<p>nombres <9999 :</p>  <p>Classes :</p>  <p>Parfois, le matériel est représenté :</p> 

Partie entière		Partie décimale	
dizaine	unité	dixième	centième
	3	4	9

Dans les quatre manuels, les tableaux en classes sont assez proches. Le nom des unités (ou l'initiale des unités) et des classes est présent ; ils se différencient principalement par la présence de couleurs (dans un manuel), par une séparation des classes plus ou moins marquée (trait gras ou pas), par la représentation d'un matériel de numération (dans un autre manuel, une seule fois dans l'année).

Dans les pratiques déclarées des enseignants

Les enseignants déclarent largement utiliser les unités de numération dans l'entête ligne du tableau (97 % en cycle 2 et 93 % en CM).

Parmi les enseignants de CM, 91 % font apparaître des classes dans le tableau (classe des unités simples, des milliers, des millions). Même si, en cycle 2, le programme préconise l'étude des nombres jusqu'à 9 999 seulement, 40 % des enseignants de cycle 2 utilisent aussi le découpage en classes : 13 % des enseignants de cycle 2 n'ayant que des élèves de CP et/ou CE1 les utilisent ; de même que 78 % des enseignants de cycle 2 ayant des élèves de CE2 dans leur classe.

Les couleurs sont utilisées par 83 % des enseignants de cycle 2 et 59 % des enseignants de CM. En cycle 2, plus des deux tiers des enseignants utilisent des couleurs différentes pour chaque unité (67 %) et 16 % une couleur pour chaque classe. En CM, 44 % utilisent des couleurs différentes pour chaque classe et 15 % pour chaque unité.

Une grande partie des enseignants de cycle 2 (79 %) déclarent également faire évoluer le tableau en cours d'année (on peut supposer, par exemple, par l'ajout de la colonne des centaines en CE1 et de celle des milliers en CE2), ainsi qu'une grande majorité des enseignants de CM (90 %) : ceux-ci l'agrandissent en fonction de la taille des nombres rencontrés et lors de l'introduction des décimaux ; 23 % déclarent l'agrandir vers la droite (décimaux), 7 % vers la gauche (grands nombres) et 70 % des deux côtés.

Quelle est la fréquence d'usage du tableau de numération ?

Dans les manuels

En CE1. La présence du tableau de numération dans le manuel et/ou le guide est variable.

Manuel A1	Manuel B1	Manuel C1	Manuel D1
Tableau très présent dans le manuel, et nombreuses occurrences dans le guide. Aussi dans séances de calcul.	Tableau peu présent dans le manuel (pas du tout pour le calcul dans C1), pas cité dans le guide (B1 propose un exercice avec un tableau sous Excel dans le CD associé au guide).		Tableau absent du fichier élève mais présent dans le guide de l'enseignant, le plus souvent comme élément de synthèse parmi d'autres.

En CM1. Tous les manuels font référence au tableau de numération pour certaines tâches (lecture/écriture/décomposition). Dans trois manuels, il est systématiquement visible dans le manuel élèves dans les pages portant sur ces types de tâches. Pour le dernier, il faut aller voir le guide de l'enseignant pour voir le tableau de numération (et ses préconisations d'usage).

Manuel A2	Manuel B2	Manuel C2	Manuel D2
Le tableau de numération est très présent dans le manuel et le guide de l'enseignant.			Pas de tableau de numération visible dans le manuel élève (sauf dans le dico-maths) mais des indications nombreuses sur son usage dans le guide pour l'enseignant.
	Dans toutes les séquences du chapitre sur les entiers, le tableau de numération est proposé comme outil (dans le guide). Une fiche photocopiable est proposée pour que les élèves écrivent sur le tableau directement.		

Dans les pratiques déclarées des enseignants

Une majorité d'enseignants de cycle 2 (57 %) et de CM (68 %) affichent un tableau de numération collectif dans la classe en permanence. Certains enseignants l'affichent occasionnellement (34 % en cycle 2 et 24 % en CM) et très peu d'enseignants n'en affichent jamais (9 % en cycle 2 et 8 % en CM).

En cycle 2, les enseignants sont partagés entre proposer en permanence (41 %) et occasionnellement (46 %) un tableau de numération individuel. En CM, beaucoup d'enseignants déclarent donner accès à leurs élèves à un tableau individuel en permanence (69 %) et certains le proposent occasionnellement (28 %). Ceux qui ne proposent jamais de tableau individuel sont 13 % en cycle 2 et 3 % au CM. Cet usage plus important en CM pourrait être lié à l'aide apportée par le tableau dans l'écriture de grands nombres.

Moins de 3 % des enseignants déclarent ne jamais utiliser le tableau, que ce soit en collectif ou en individuel (4 % en cycle 2 et 1 % en CM).

Environ trois quarts des enseignants déclarent utiliser le tableau de manière différenciée, en fonction des difficultés rencontrées par les élèves (75 % en cycle 2 et 81 % en CM). Parmi ceux-ci, plus des deux tiers l'utilisent pour les élèves en difficulté (67 % en cycle 2, 78 % en CM).

Nous avons interrogé les enseignants sur la présence du tableau de numération lors des évaluations. Que ce soit en cycle 2 ou en cycle 3, environ 70 % des enseignants laissent le tableau à disposition des élèves en évaluation (pour certains parce qu'il est toujours affiché dans la classe). Lorsqu'ils fournissent un tableau de numération en évaluation, que ce soit en cycle 2 ou en cycle 3, la moitié des enseignants le donnent à tous les élèves (52 % cycle 2 et 50 % CM) et 40 % le proposent seulement à certains élèves.

Quelles fonctions didactiques sont attribuées au tableau ?

Pour analyser les fonctions didactiques du tableau de numération, nous avons étudié à quels moments de l'enseignement de la numération il est utilisé : introduction, exercices, explicitation des savoirs, évaluation.

Dans les manuels

Dans les manuels de CE1 et CM1, lorsque le tableau est utilisé, c'est dans des moments d'explicitation des savoirs (souvent dans des encadrés), comme élément de synthèse, et dans des exercices, souvent pour aider les élèves. Dans certains manuels de CM, il est visible dès

l'activité d'introduction.

En CE1.

Manuel A1	Manuel B1	Manuel C1	Manuel D1
Introduction : dans le manuel. Explication des savoirs : dans le mémo.	Exercices : en cas de difficulté. Présence du tableau de numération dans un exercice sous Excel (CD d'accompagnement).	Explication des savoirs : « Je retiens » dans le manuel.	Dans le guide : explication des savoirs (parfois aussi après des exercices).

En CM1.

Manuel A2	Manuel B2	Manuel C2	Manuel D2
Le tableau de numération est présent dans les moments d'explicitation des savoirs de la numération (encadrés « je retiens », memento ...).			
Le tableau est aussi proposé comme moyen d'aider les élèves dans le guide de l'enseignant.		Dans le guide, la présence d'un tableau photocopiable est rappelée au début des séquences de numération, ce qui laisse penser qu'il est à disposition. Peu d'informations sont données sur l'usage que peuvent en faire les élèves et l'enseignant.	Le tableau est aussi proposé comme moyen d'aider les élèves dans le guide de l'enseignant.
Le tableau est souvent cité dans le guide de l'enseignant comme outil pour faire travailler sur certaines tâches (les élèves ont à remplir un tableau par exemple).	Dans deux séances les élèves ont à compléter un tableau de numération sur fiche.		

Dans les pratiques déclarées des enseignants

Parmi les différentes fonctions du tableau de numération que nous avons proposées (plusieurs réponses étaient possibles), celles les plus citées par les enseignants sont, dans l'ordre décroissant de leur fréquence :

- pour aider un élève à réussir une tâche (respectivement 52 % en cycle 2 et 66 % en CM),
- comme support pour des exercices (resp. 43 % et 49 %),
- pour aider un élève à comprendre la numération (resp. 40 % et 29 %).

Il semble moins utilisé pour exposer des connaissances de numération à la classe (resp. 33 % et 27 %) que dans les manuels.

Quelles règles d'usage du tableau de numération ?

Dans les manuels

La plupart du temps, il n'y a pas d'explicitation des règles d'usage du tableau de numération dans les manuels ni les guides, mais les exemples visibles nous permettent d'inférer des règles implicites : *écrire un seul chiffre par colonne et un nombre s'écrit sur une seule ligne du tableau*. En CM1, dans trois manuels sur quatre, à partir des exemples proposés on relève également la règle implicite *écrire un zéro dans une case vide* : dans la colonne *unités simples* ou entre deux cases remplies (« zéro à droite » ou « zéro intercalaire » selon Soury-Lavergne *et al.* (2020)). En CE1, cette règle est difficile à déceler à cause du peu d'exemples présents.

En CE1.

Manuel A1	Manuel B1	Manuel C1	Manuel D1
Écrire une ligne par nombre, un zéro dans une case vide. Un chiffre par colonne explicitée tardivement.	Écrire une ligne par nombre, un chiffre par colonne. Et l'écriture du 0 ? non vraiment décelable. Mais pour réussir l'exercice du CD sous Excel : 0 obligatoire et plus d'un chiffre par colonne.	Écrire une ligne par nombre, un chiffre par colonne. Et l'écriture du 0 ? non vraiment décelable.	Écrire une ligne par nombre, un chiffre par colonne. Et l'écriture du 0 ? non vraiment décelable.

En CM1.

Manuel A2	Manuel B2	Manuel C2	Manuel D2
Les règles d'usage du tableau sont implicites. Sont communes à ces trois manuels : écrire un 0 dans une case vide et un seul chiffre par colonne.			Les règles sont apparentes dans les commentaires du guide pour l'enseignant (dans le travail sur différentes décompositions) : écriture sur plusieurs lignes d'un même nombre, pas de 0 dans les cases vides, possibilité d'écrire un nombre supérieur à 10 dans une colonne.
Un nombre peut être écrit sur plusieurs lignes du tableau : 200 ; 40 ; 1 pour 241.	Un nombre s'écrit sur une seule ligne.		

Dans les pratiques déclarées des enseignants

La plupart des enseignants (85 % en cycle 2 et 86 % en CM) déclarent consacrer au moins un temps dans l'année à expliquer des règles d'utilisation du tableau de numération. Le questionnaire ne nous permet pas de savoir quelles sont ces explications.

Les déclarations des enseignants sur les règles qu'ils utilisent confortent ce qui est en usage dans les manuels étudiés. Les enseignants déclarent s'appuyer très majoritairement sur ces deux règles : *on écrit toujours un seul chiffre par colonne* (90 % en cycle 2 et 96 % en CM) et *un nombre donné s'écrit sur une seule ligne du tableau* (85 % en cycle 2 et 86 % en CM). Environ deux tiers des enseignants (72 % en cycle 2 et 61 % en CM) considèrent que *chaque colonne doit être remplie par un chiffre entre 0 et 9* et donc qu'il faut écrire un 0 entre les chiffres non nuls, voire à gauche du plus grand chiffre non nul. Un peu plus de la moitié des enseignants (49 % en cycle 2 et 60 % en CM) considèrent que *l'élève doit écrire la réponse finale hors du tableau* et environ la moitié des enseignants (49 % en cycle 2 et 52 % en CM) considèrent que *l'on écrit les chiffres en commençant par la droite*.

Pour quels types de tâches mathématiques le tableau est-il utilisé ?

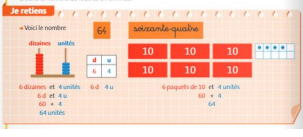
Nous avons analysé à quel niveau de l'organisation mathématique est convoqué le tableau de numération. Pour quels types de tâches de numération est-il utilisé ? Est-il convoqué comme outil pour réaliser ces tâches — niveau de la technique (Bosch & Chevillard, 1999), pour des explications ou justifications — niveau de la technologie (*ibid.*) ? Existe-t-il des tâches

spécifiques d'apprentissage de l'utilisation du tableau de numération ?

Dans les manuels

En CE1. Le tableau de numération est majoritairement une représentation sémiotique parmi d'autres (illustré ci-dessous) : il illustre d'abord l'aspect position de la numération, du moins dans les leçons *Nombres*. Il peut fonctionner comme technique (pour décomposer), mais aussi comme technologie des opérations (dans les leçons *Calcul*).

Le principe décimal de la numération est soit non pris en compte, soit renvoyé à des échanges avec du matériel (A1 et B1), voire au *Tableau des Nombres de 0 à 99* (B1), soit complètement pris en charge par le langage (D1).

Manuel A1	Manuel B1	Manuel C1	Manuel D1
<p>Tableau présent avec plusieurs fonctions :</p> <ul style="list-style-type: none"> • tâche spécifique au tableau : écrire une quantité dans le TN, • technique : tableau pour lire, décomposer en cdu, • technologie : tableau pour addition, soustraction à retenue, multiplication par dix. 	<p>Tableau assez peu utilisé dans l'ordinaire, proposé comme aide technique pour décomposer.</p> <p>Tableau convoqué sous le nom « <i>Cadre pour ...</i> » comme technique pour calculer.</p> <p>Le tableau est une représentation sémiotique du nombre parmi d'autres.</p>	<p>Tableau peu utilisé, sauf comme technique pour repérer <i>nombre de</i> et <i>chiffre des</i>.</p> <p>Tableau anecdotique, une représentation sémiotique parmi d'autres.</p> 	<p>Tableau de numération proposé à l'enseignant dans le guide en synthèse après un exercice.</p> <p>Le tableau est proposé comme technique pour décomposer et comparer ; comme technologie pour la règle des zéros (c'est le langage qui porte l'aspect décimal, par exemple 1 dizaine = 10 unités).</p>

En CM1. Le tableau de numération est presque exclusivement utilisé pour les tâches décomposer/recomposer et lire/écrire où il apparaît souvent comme une aide (niveau de la technique). Il est très rarement utilisé pour les tâches sur l'ordre (*comparer, ranger, encadrer, ...*).

Au niveau de la technologie, il apparaît comme un élément permettant d'indiquer la position des unités dans l'écriture chiffrée. Il sert à définir les classes pour les grands nombres. En fait, le tableau de numération devient à lui-seul le contenu de l'institutionnalisation pour le principe de position. La seule « forme » d'exposition de savoirs sur la position des chiffres est le tableau ; par exemple, celui-ci n'est pas accompagné de formulation du type « les milliers s'écrivent au 4^e rang » ou bien « en cas d'absence de centaines isolées, on écrit un 0 » ; la question du rôle du zéro n'est pas formulée.

Même si dans tous les manuels, des tâches (au moins dans le travail sur les nombres inférieurs à 10 000) mettent en jeu des relations entre unités (*nombre de*, décompositions variées), dans trois manuels sur les quatre, ces relations entre unités ne sont pas institutionnalisées car ce sont des *techniques positionnelles* qui permettent de réaliser ces tâches, souvent en appui sur le tableau de numération.

Dans les pratiques déclarées des enseignants

Voici une liste de tâches par ordre décroissant des fréquences d'utilisation, pour lesquelles les enseignants déclarent utiliser le tableau de numération :

- Pour composer/décomposer des nombres, par exemple $321 = 3 \text{ centaines } 2 \text{ dizaines } 1 \text{ unité}$, le tableau est souvent utilisé par deux tiers des enseignants (68 % en cycle 2 et

62 % au CM).

- Pour lire/écrire des nombres, le tableau est souvent utilisé par 62 % des enseignants de cycle 2 et 59 % des enseignants de CM.
- Pour convertir des unités de numération (par exemple : 3 centaines=30 dizaines), le tableau est souvent utilisé par la moitié des enseignants (53 % en cycle 2 et 56 % au CM).

Les autres tâches ci-dessous sollicitent moins l'usage du tableau :

- Pour comparer/ranger des nombres, le tableau est souvent utilisé par 26 % des enseignants de cycle 2 (40 % parfois et 26 % jamais) et 21 % des enseignants de CM (54 % parfois et 21 % jamais).

Parmi ces dernières, certaines occasionnent aussi des différences notables entre cycle 2 et CM.

- Pour effectuer un calcul mental ou en ligne, 19 % l'utilisent souvent en cycle 2 (36 % parfois et 38 % jamais) et seulement 2 % en cycle 3 (31 % parfois et 61 % jamais).
- Pour effectuer un calcul posé, 30 % des enseignants de cycle 2 l'utilisent souvent (39 % parfois et 23 % jamais) et 6 % des enseignants de CM l'utilisent souvent (52 % parfois et 36 % jamais).
- Pour dénombrer une collection, 20 % l'utilisent souvent en cycle 2 (29 % parfois et 40 % jamais) et 9 % l'utilisent souvent au CM (26 % parfois et 58 % jamais).

Que retenir ? Nouvelles questions

Les résultats de l'enquête montrent une présence massive du tableau de numération dans les classes et certaines régularités, sur la forme visuelle du tableau de numération (un nombre de colonnes fixé et des entêtes remplies par l'enseignant), sur le type de tâches dans lesquels il est sollicité (composer/décomposer, lire/écrire un nombre), sur ses règles d'utilisation (un et un seul chiffre par colonne, un nombre sur une seule ligne).

Ces règles rigidifient l'usage du tableau de numération : tout se passe comme si l'écriture d'un nombre dans le tableau devait calquer l'écriture décimale en ligne, ce qui suppose qu'il faudrait déjà avoir compris le fonctionnement de l'écriture en chiffres pour s'approprier le fonctionnement du tableau. Or, puisque l'entête de la colonne du tableau (une unité de numération) précise la valeur du nombre écrit dans la colonne, il est tout à fait licite de laisser une colonne vide ou d'écrire un nombre strictement plus grand que 9. Une trop grande rigidité risque de compromettre la compréhension des techniques opératoires de l'addition, de la soustraction, etc. qui engagent des nombres d'unités supérieures à dix : dans $147+68$, il faut par exemple prendre en compte 15 unités simples et 10 dizaines.

Les résultats montrent que les enseignants utilisent principalement le tableau dans le but d'aider leurs élèves ; cela leur apparaît même comme un moyen de prise en compte des besoins spécifiques de certains. Le tableau de numération semble donc, en l'état actuel de ses usages, être considéré comme un outil davantage pour aider à réussir des tâches que pour comprendre le fonctionnement de l'écriture en chiffres.

Ces constats interrogent les apports réels et possibles de cet outil pour l'appropriation des principes de la numération. Mais d'où vient cet objet aux multiples formes présent dans les pratiques des enseignants et dans des manuels pour l'enseignement de la numération ? Est-ce une invention purement didactique ou peut-on en déceler des traces dans l'histoire ? Qu'est-ce que cela nous apprend sur les potentialités du tableau de numération ? C'est l'objet des deux parties

qui suivent.

3. Aux origines du tableau de numération

Nous ouvrons une seconde enquête, épistémologique, en nous appuyant sur des textes d'historiens et/ou épistémologues, comme Schärlich et Guitel. Remarquons d'abord que leurs écrits ne mentionnent pas *stricto sensu* le tableau de numération.

3.1. Un lointain parent et des cousins : l'abaque et le boulier

On trouve cependant dans Schärlich (2006) un lointain parent du tableau de numération (figure 2). Il s'agit d'un abaque à cailloux des anciens Grecs, il se compose de colonnes juxtaposées avec une ligne d'entêtes. Cet abaque date sans doute du V^e siècle avant notre ère, comme le confirment les notations des entêtes et des allusions dans des textes littéraires de l'époque, notamment d'Hérodote (Schärlich, 2006).

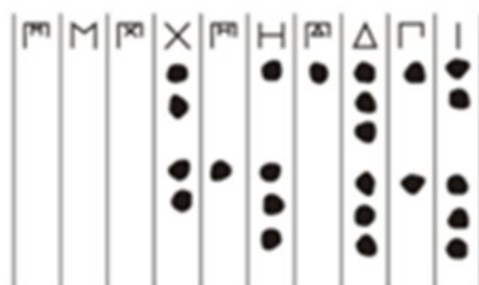


Figure 2 : Abaque à « cailloux » (Schärlich, 2006, p. 42).

Les symboles des entêtes, dans les colonnes *de rang impair* en partant de la droite, sont des nombres (et des *chiffres*) de la numération acrophonique³. On trouve ainsi : Ι pour *un* (ΙΩΤΑ, *ióta*), comme dans l'expression « un *iota* » ; Δ pour *dix* (ΔΕΚΑ, *déka*), comme dans *décamètre* ; Η pour *cent* (ΗΕΚΑΤΟΝ, *hekatón*), comme dans *hectare* ; Χ pour *mille* (ΧΙΛΙΟΙ, *khílioi*), comme dans *kilogramme* ; et enfin Μ pour *dix mille* (ΜΥΡΙΑΙ, *múrioi*), comme dans *myriade*⁴.

Dans les colonnes *de rang pair* en partant de la droite, on trouve des symboles qui sont spécifiques à l'abaque, correspondant à cinq fois le nombre situé immédiatement à droite : Γ n'est pas la lettre gamma, mais la lettre *pi* majuscule (Π avec une jambe plus courte) ; il désigne *cinq* (ΠΕΝΤΕ, *pénte*), comme dans *pentagone*. Π désigne le produit (Γ×Δ) et représente donc *cinquante*, etc.

Schärlich (2006) appelle « abaque »

un ensemble de lignes parallèles, définissant des colonnes en tête desquelles figurent des chiffres

³ Les Grecs ont utilisé pour désigner des nombres entiers (notamment au V^e siècle avant notre ère, en Attique) des numérations additives, basées sur des groupements par dix, et constituées de juxtapositions de symboles (les chiffres) dont les valeurs s'ajoutent pour donner celle du nombre. Certaines de ces numérations sont alphabétiques (les dix premières lettres de l'alphabet pour les nombres de un à neuf, les suivantes pour les multiples de dix, de dix à quatre-vingt-dix...). Il existe aussi une numération acrophonique : les premiers chiffres s'écrivent comme la première lettre de leur nom grec...

⁴ Source : https://fr.wikipedia.org/wiki/Num%C3%A9ration_grecque (consulté le 21 juillet 2021).

ou des lettres, et dans lesquelles on place des cailloux ou des jetons [ou des signes]. Par extension le support en bois ou en pierre sur lequel tout cela est gravé est aussi appelé abaque (Schärlig, 2006, p. 6 et [p. 26]).

La définition donnée par Schärlig permet de classer le tableau de numération parmi les abaqués.

Guitel (1975) s'est intéressée à l'évolution des symboles et des artefacts liés aux numérations écrites. Elle n'utilise pas le terme *abaque*, sauf quand elle fait référence aux noms des objets référencés dans des musées ou des collections (par exemple figure 3). Elle cite les *tables à compter* avec des cailloux et des jetons, et les *planches à poussière* des Arabes (avec des inscriptions graphiques pour les quantités). À ce propos, Schärlig (2006, p. 30) soulève la possibilité de l'origine du mot *abaque* : en langue sémitique, *abaq* signifie *poussière* (Schärlig, 2006, p. 30).

Pour Schärlig (2006, 2014), les abaqués sont des instruments de calcul comme les bouliers. *A priori*, ils sont conçus pour accueillir des nombres écrits dans une numération déterminée et permettre aux calculateurs de travailler de façon efficace. Les comptables antiques grecs et romains ne disposaient pas d'une numération adaptée au calcul, ils recouraient alors à un abaque à cailloux (cf. figure 2). L'abaque de la Figure 2 serait celui d'un comptable, pour du calcul sur des sommes atteignant 50000 drachmes (Schärlig, 2006). La disposition de cailloux prépare au calcul de la somme des deux nombres⁵ : 2187 et 2838.

On peut trouver sur la Toile des objets baptisés *abaqués*, comme l'Abaque Romain en bronze de la collection IBM Europe, daté entre le II^e et le V^e siècle (figure 3), dans lequel des perles en ivoire peuvent glisser dans des rainures. Mais pour Schärlig, il s'agit d'un boulier, au même titre que les bouliers chinois (*suan-pan*), japonais (*soroban*).

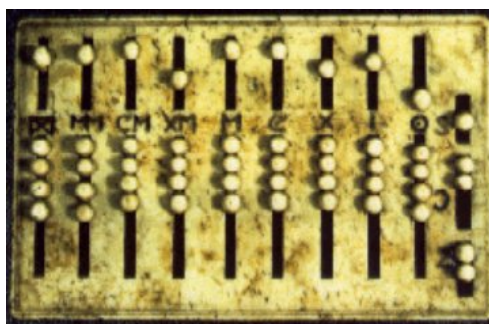


Figure 3 : Boulier romain⁶.

Un boulier est en effet « un cadre comprenant des tringles sur lesquelles glissent des boules » (Schärlig, 2006, p. 29) : c'est un dispositif matériel fixe ou transportable.

L'abaque supporte des variations sur le nombre de colonnes, sur le remplissage des entêtes, sur les symboles entêtes, au gré des pratiques de calcul et/ou des besoins du calculateur. Schärlig décrit l'abaque de la figure 2 comme abaque à *colonnes alternées* (puissances de dix et quintuples de ces puissances), par comparaison à un abaque à *colonnes décimales*, qui ne comporterait que les colonnes de rang impair en partant de la droite, de la figure 2. L'abaque est qualifié d'*instrument ouvert* par Schärlig pour cette variabilité. Cette souplesse d'usage est visible dans la figure 2, on peut laisser dans une colonne, en cours de calcul, un nombre d'unités supérieur à cinq ou à deux : en partant de la droite, la première colonne contient 5 I (qui sera converti en 1 Γ) ; la seconde laisse 2 Γ visibles (qui pourra être converti en 1 Δ) ; dans la troisième se trouve 6 Δ (qui sera converti en 1 F et 1 Δ).

A contrario, le boulier est un *instrument fermé* : le nombre de tiges et le nombre de boules par

⁵ Par exemple, la disposition des cailloux du haut dans la figure 2 correspond à $2 \times 1000 + 1 \times 100 + 1 \times 50 + 3 \times 10 + 1 \times 5 + 2$, soit à 2187.

⁶ <http://www-sop.inria.fr/amisa/piece2.html> (consulté le 21 juillet 2021).

tige sont fixés. Il n'a pas d'entête. Ce qui ne l'empêche pas d'être doté d'un grand *potentiel instrumental*, une capacité à traiter les quatre opérations sur entiers et décimaux.

3.2. Que retenir de cette enquête épistémologique pour le tableau de numération dans l'enseignement ?

Le tableau de numération est un abaque à colonnes décimales. Pourtant, son usage scolaire semble rigidifié (voir partie 2.), calqué sur les règles qui président à la numération décimale de position, notamment l'écriture de zéros intermédiaires et de nombres à un seul chiffre pour chaque rang.

Nous faisons l'hypothèse que c'est l'assimilation de l'écriture d'un nombre dans le tableau de numération à l'écriture en chiffres usuelle de ce nombre qui entraîne cela. Or cette assimilation est loin d'être évidente comme le signalent Mariotti et Maracci (2010) qui soulignent la nécessité

de distinguer entre les significations émergeant de l'utilisation d'un artefact et le savoir mathématique développé en relation avec cette utilisation. De ce point de vue, le cas des bouliers est paradigmatique : des siècles de pratique du calcul à l'aide du boulier n'ont pas été suffisants pour déclencher le passage à la notation positionnelle des nombres (Mariotti & Maracci, 2010, p. 91).

L'abaque est un instrument ouvert, inventé à l'origine pour le calcul chez les marchands et les savants, bien avant l'utilisation commune d'une numération décimale de position. L'utilisateur a la possibilité d'ajouter des colonnes et des entêtes ou d'écrire sur plusieurs lignes pour faciliter le traitement de la tâche qui lui est proposée. Des colonnes peuvent rester vides, sans que cela signifie nécessairement l'absence d'un *groupement* de cette colonne dans le nombre. Il est possible d'écrire deux chiffres ou plus par colonne. La disposition dans l'abaque évolue grâce à des déplacements de jetons (ou de signes) visant à minimiser la collection totale de jetons (ou les nombres de chaque colonne), tout en conservant le nombre initial, et utilisant les règles de changement de colonne. La relation qui lie deux colonnes consécutives peut ne pas être constante (dans la figure 2, le passage d'une colonne à une autre est alternativement *5 pour 1* et *2 pour 1*). L'abaque n'est pas nécessairement en relation directe avec l'écriture en ligne du nombre (la figure 2 montre un abaque utilisé pour une numération additive).

Ces potentialités *a priori* du tableau de numération nous amènent à proposer, dans la partie suivante, des usages *alternatifs* aux pratiques relevées en partie 2.

4. Vers d'autres usages du tableau

L'objet de cette partie est de « doper » le tableau, de libérer ses usages, pour qu'il participe davantage aux apprentissages des nombres. Même si nous avons montré dans la partie précédente le lien entre le tableau de numération et le calcul, nous ne proposons ici que des tâches visant à la compréhension des unités de numération. Ce travail est utile pour le calcul dans lequel le tableau de numération sera réinvesti.

Un premier type de tâche : recomposer un nombre dans un tableau sans entêtes

Cette tâche est proposée par Soury-Lavergne *et al.* (2020) dans un jeu nommé *Chiffroscope* (<https://chiffroscope.blogs.laclassed.com/>), dont le déroulement et le support sont partiellement décrits en annexe ; un guide pédagogique sur ce site propose différentes tâches liées à ce support.

Le support proposé est un abaque minimal : des colonnes juxtaposées, avec une ligne d'entêtes

vide. La tâche des élèves est constituée de deux étapes décrites en annexe. Au fur et à mesure des tirages d'une « carte nombre » (de deux chiffres au plus) et d'une « carte unité », il faut placer quelque part sur la première ligne (entêtes) du tableau « carte unité » (sauf si elle y est déjà présente) et dans la colonne la « carte nombre » (figure 4). Il s'agit ensuite de composer le nombre obtenu à partir des différents tirages pour fournir son écriture en chiffres en dehors du tableau.

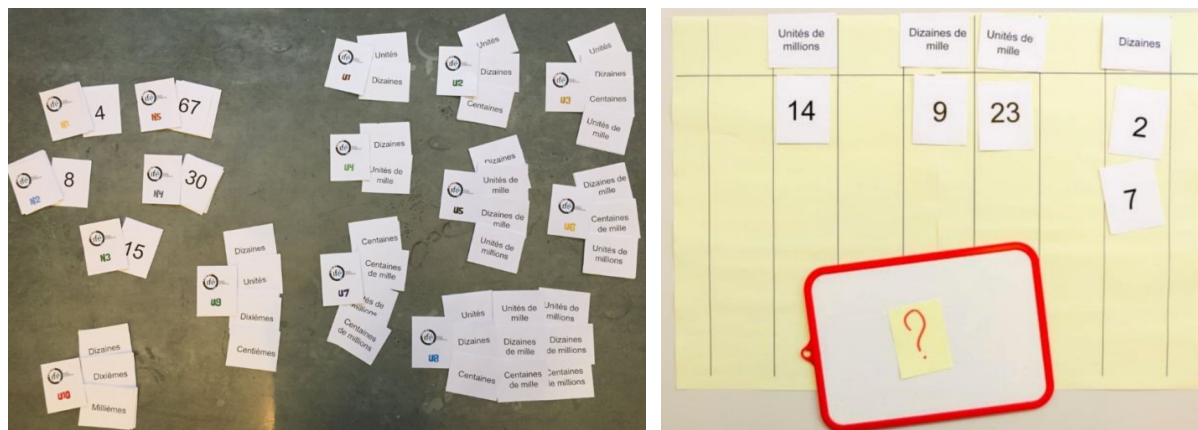


Figure 4 : Matériel du jeu du Chiffroscope.

Comme les entêtes du tableau sont vides, l'élève doit faire un choix pour positionner la première unité (en sollicitant éventuellement un ordre de grandeur de l'unité) puis positionner les unités suivantes en tenant compte de la position de celle(s) déjà placée(s). Il est possible d'agrandir le tableau vers la droite ou vers la gauche en ajoutant des colonnes.

Alors que dans un tableau de numération avec les unités déjà écrites dans les entêtes, pour placer 7 millions, il suffit de lire les entêtes, dans ce tableau sans entête, le travail de placement met en jeu des connaissances sur l'ordre des unités. L'élève peut ou doit, en effet, s'appuyer sur :

- l'ordre relatif des différentes unités entre elles, qui met en jeu des relations de proximités immédiate : par exemple les « millions » sont à gauche des « centaines de milliers » car il s'agit de l'unité d'ordre immédiatement supérieur,
- l'ordre relatif des différentes unités par rapport aux unités simples : par exemple les « millions » sont situés dans la 7^e colonne à partir de celle des unités simples.

L'écriture du nombre hors du tableau est une question déterminante.

Pour passer de l'écriture du nombre dans le tableau à son écriture en chiffres (hors du tableau), une bonne organisation des colonnes selon la liste ordonnée des unités de numération est nécessaire. Cette activité contribue à la mémorisation de la liste ordonnée des unités de numération (unités, dizaines, centaines, milliers, dizaines de milliers, centaines de milliers, ...) qui est un point d'appui important en numération, notamment dans le travail sur les grands nombres (Tempier, 2020).

Une condition pour sortir facilement le nombre du tableau est qu'il soit écrit sur une ligne, avec un nombre à un seul chiffre par colonne. Si un nombre supérieur ou égal à dix est présent dans une colonne, des conversions entre unités de numération voisines permettent de se ramener à un nombre à un seul chiffre par colonne (ce point sera plus développé dans le deuxième exemple). Si une colonne est vide, pour écrire le nombre hors du tableau, le zéro est nécessaire.

Un deuxième type de tâche : déterminer différentes décompositions d'un nombre sur plusieurs lignes d'un tableau

Il s'agit ici de tâches qui utilisent le tableau de numération comme *feuille de brouillon* et participent à la verbalisation de connaissances sur les unités de numération et leurs relations.

Pour la première tâche, à partir d'un nombre fixé, l'enseignant propose des façons correctes et incorrectes de remplir un tableau de numération. Les élèves sont répartis en groupes pour préparer un avis pour chaque ligne. Un seul groupe dispose de matériel de numération permettant des regroupements par dix et des dégroupements : il est chargé de vérifier empiriquement la validité de chaque *ligne* du tableau. Les autres groupes doivent verbaliser les raisons de leur avis sur la validité de chaque ligne. Après discussion l'avis, justifié de façon langagière et par un contrôle matériel, est écrit dans le tableau. Les variables didactiques en jeu sont le nombre de chiffres par colonne et la présence de cases vides.

Voici un exemple pour le nombre 215. La question est la même pour chaque ligne du tableau : s'agit-il d'une écriture de ce nombre ? Oui ou non ? Justifiez-le. En conclusion, les élèves récapitulent les différentes écritures en unités de numération du nombre en chiffres étudié : 2 centaines 1 dizaine et 5 unités, 2 centaines et 15 unités, 1 centaine 11 dizaines 5 unités, 215 unités.

	centaines	dizaines	unités	Avis
215	2	1	5	a)
215	2	1	4	b)
215	2	0	15	c)
215	2	5	1	d)
215	2	15		e)
215			215	f)
215		21	5	g)
215	21		5	h)
215	1	11	5	i)

Les « découvertes » des élèves peuvent être : il y a toujours le chiffre 5 dans la colonne des unités (5, 15, 25...); trouver sur la ligne successivement 2, puis 1, puis 5 ne garantit pas que le nombre est 215 ; ne pas trouver les trois chiffres 2, 1 et 5 sur une ligne n'exclut pas le nombre 215. Certains usages du tableau peuvent émerger : on peut écrire plusieurs chiffres par colonne ; on peut écrire un nombre de plusieurs façons ; il peut y avoir des cases vides dans le tableau.

Le principe décimal permet de justifier les modifications de nombre dans une colonne. Le principe de position est pris en charge par l'ordre des unités de numération.

La seconde tâche consiste à trouver le maximum d'écritures différentes d'un même nombre en unités de numération. Le tableau de numération est utilisé comme feuille de brouillon, sa réalisation est à la charge des élèves. Lors de la mise en commun, le passage d'une ligne à l'autre est validé par un échange langagier sur les conversions et/ou par la production d'une organisation de la collection qui rend compte de cela.

Conclusion

Le tableau de numération est un outil familier dans les classes comme le confirme notre enquête. Si celle-ci montre une relative variété dans la forme des tableaux existants (entêtes, couleurs, matériel représenté ou non, des colonnes spécifiques...), elle pointe aussi des régularités importantes des usages dans l'enseignement : son utilisation pour les tâches de décompositions (et pour lire/écrire des grands nombres en cycle 3), comme support pour aider les élèves (et institutionnaliser des savoirs dans les manuels) et des règles implicites relativement partagées (un nombre s'écrit sur une seule ligne, avec un seul chiffre par colonne, sans laisser de case vide). Ces règles rigidifient l'usage du tableau et nuisent à son utilisation comme outil au service de l'apprentissage de la numération décimale de position. Le tableau de numération semble peu questionné par les enseignants ; parmi ceux interrogés, peu d'entre eux expriment le besoin d'une formation sur son utilisation.

L'enquête comporte toutefois quelques limites, liées au nombre de manuels étudiés, au choix des manuels, à la limitation à deux niveaux scolaires des manuels, à l'échantillon des professeurs ayant répondu au questionnaire dont nous ne savons pas s'il est représentatif, ainsi qu'au caractère déclaratif des pratiques décrites, soumises à certains biais classiques de réponse à un questionnaire.

Cette étude du tableau de numération nous permet aussi de revenir sur des savoirs en jeu dans l'apprentissage de la numération décimale de position, notamment ceux spécifiques aux unités de numération :

- d'une part, la liste ordonnée des unités de numérations (LOU) : unités (simples), dizaines, centaines, milliers, dizaines de milliers, centaines de milliers, millions, etc.,
- d'autre part, la relation qui lie *toujours* deux unités consécutives de la liste (RUC) : l'unité d'ordre n est égale à dix unités d'ordre $(n-1)$.

Ces savoirs sont mobilisés dans l'apprentissage de notre système de numération écrit (de position) où un nombre s'écrit en ligne comme juxtaposition de chiffres et l'unité d'ordre n est affectée au chiffre de rang n ($n \geq 1$) en comptant de la droite vers la gauche. Ces savoirs devraient être explicités ainsi en formation des enseignants, comme points de repère pour identifier les enjeux d'apprentissage de l'écriture en unités de numération. On pointera notamment que LOU existe aussi hors d'un tableau de numération et que RUC est une propriété qui lie deux unités de numération consécutives, quelles qu'elles soient : on a aussi 1 unité simple = 10 dixièmes, 1 dixième = 10 centièmes, ...

Le tableau de numération revisité dans cet article, par sa proximité avec le système des unités de numération, offre des potentialités pour faire émerger et travailler toutes ces connaissances. Il permet d'écrire un nombre en unités de numération sans réécrire systématiquement les unités, si celles-ci figurent dans les entêtes. L'écriture de zéros n'est pas nécessaire : cette question se pose quand on « sort » le nombre du tableau pour l'écrire comme juxtaposition de chiffres. Le tableau de numération peut être proposé vierge de toute inscription⁷ pour laisser le placement des unités à la charge de l'élève (voir l'exemple de la première tâche décrite dans la partie 4.) : cela peut éventuellement amener à « agrandir » le tableau (ajouter des colonnes). Faire travailler la connaissance LOU suppose de revoir la forme et les usages classiques du tableau.

Sans pouvoir se substituer aux activités de groupement, essentielles pour comprendre le concept d'unité de numération et les relations qui les lient, les déplacements de nombres d'une colonne à

⁷ Il sera d'ailleurs ainsi plus simple à dessiner par l'élève.

une autre à l'intérieur du tableau pourraient permettre d'accéder à un enrichissement de la compréhension des relations entre unités (RUC). Le passage d'un chiffre d'une colonne à celle située immédiatement à sa gauche (respectivement à sa droite) met en jeu la relation *dix unités d'un certain ordre sont égales à une unité de l'ordre supérieur* (respectivement *une unité d'un certain ordre est égale à dix unités de l'ordre inférieur*)⁸. Cela suppose d'une part d'écrire des nombres à plusieurs chiffres par colonne, d'autre part d'utiliser plusieurs lignes du tableau pour rendre compte du même nombre.

Ces réflexions sur les potentialités du tableau de numération comme outil au service des apprentissages sont à poursuivre dans d'autres domaines numériques (les grands nombres et les décimaux), le calcul (fonction première de l'abaque), mais aussi en relation avec le système métrique et les conversions, un thème crucial au collège et dans les enseignements professionnels.

Références bibliographiques

- Bosch, M. & Chevillard, Y. (1999). La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. Objet d'étude et problématique. *Recherches en didactique des mathématiques*, 19(1), 77-123.
- Chambris, C. (2008). *Relations entre les grandeurs et les nombres dans les mathématiques de l'école primaire. Évolution de l'enseignement au cours du 20^e siècle. Connaissances des élèves actuels*. Thèse de l'Université Paris Diderot.
- Fosnot, C. T. & Dolk, M. (2001). *Young mathematicians at work. Constructing number sense, addition, and subtraction*. Portsmouth, NH: Heinemann.
- Guitel, G. (1975). *Histoire comparée des numérations écrites*. Paris : Flammarion Éditeur.
- Houdement, C. & Tempier, F. (2019). Understanding place value with numeration units. *ZDM Mathematics Education*, 51(1), 25-37.
- Mariotti, M.A., Maracci, M. (2010). Un artefact comme instrument de médiation sémiotique : une ressource pour le professeur ? In G Gueudet et L Trouche (dir.), *Ressources vives. Le travail documentaire des professeurs en mathématiques* (pp. 91-109). Rennes : Presses Universitaires de Rennes.
- Schärli, A. (2006). *Cailloux, jetons et bouliers, de Périclès à nos jours*. Lausanne : Presses polytechniques et universitaires romandes.
- Schärli, A. (2014). Les moyens de calcul du comptable antique. *Comptabilités* [Online], 6. <http://journals.openedition.org/comptabilites/1491>
- Soury-Lavergne, S., Croquelois, S., Martinez, J.-L. & Rabatel, J.-P. (2020). Conception des élèves de primaire sur la numération décimale de position. *Revue de Mathématiques pour*

⁸ Nous tenons à signaler une application nommée *Numération* (utilisable sur appareils *Apple*), mise au point par Ulrich Kortenkamp (2012-2018). Il s'agit d'un abaque décimal à jetons virtuel, un avatar de tableau de numération, qui permet notamment de visualiser l'effet démultiplicateur du glissement d'un jeton vers la colonne juste à droite et la transformation associée du nombre qui dénote la somme des valeurs des jetons. Consulter <https://apps.apple.com/fr/app/num%C3%A9ration/id568750442>

l'École, 233, 128-143.

Tempier, F. (2013). La numération décimale de position à l'école primaire. Une ingénierie didactique pour le développement d'une ressource. Thèse de l'Université Paris Diderot.

Tempier, F. (2016). Composer et décomposer : un révélateur de la compréhension de la numération chez les élèves. *Grand N*, 98, 67-90.

Tempier, F. (2020). Des pistes pour enseigner les grands nombres au cycle 3. *Grand N*, 105, 75-99.

Manuels scolaires

Bramand, N., Bramand, P., Lafont, E., Maurin, C., Peynichou, D. & Vargas, A. (2016). *Pour comprendre les maths CMI*. Paris : Hachette Éducation.

Bramand, P., Bramand, N., Lafont, E., Maurin, C., Peynichou, D. . Vargas, A. (2018). *Pour comprendre les maths CE1*. Paris : Hachette Éducation.

Charnay, R., Dussuc, M.-P., Combier, G. . Madier, D. (2016). *Cap Maths CE1*. Paris : Hatier.

Charnay, R., Dussuc, M.-P., Combier, G., Madier, D. & Anselmo, B. (2017). *Cap Maths CMI*. Paris : Hatier.

Gros, P. (2019, dir.). *Les nouveaux outils pour les maths CE1*. Paris : Éditions Magnard.

Lucas, J.-C., Leclec'h-Lucas, J., Meunier, R., Meunier, L. & Trossevin, M.-P. (2016). *À portée de maths CMI*. Paris : Hachette Éducation.

Meunier, R., Meunier, L., Lucas, J.-C., Leclec'h-Lucas, J. & Cohen, C. (2018). *À portée de maths CE1*. Paris : Hachette Éducation.

Petitjean, I. (2016, dir.). *Les nouveaux outils pour les maths CMI*. Paris : Éditions Magnard.

Instructions officielles

Ministère de la Jeunesse, de l'Éducation nationale et de la Recherche (MJENR 2002). *Documents d'application des programmes, Mathématiques cycle 3*. Paris : CNDP.

Annexe

Extraits de la description du jeu du *Chiffroscope*

<https://chiffroscope.blogs.laclassse.com/>



Présentation

Le jeu du Chiffroscope se joue à 2 joueurs de manière collaborative. Le but du jeu est d'écrire ensemble le nombre représenté par un tirage de plusieurs cartes « Unité de numération » et cartes « Nombre » associées, déposées sur le plateau. La durée moyenne d'une partie varie de 5 à 15 minutes.

Matériel

- Plateau figurant des colonnes (en plusieurs exemplaires).
- Une sélection de cartes « nombre ».
- Une sélection de cartes « unité de numération ».
- Un support pour écrire (ardoise, feuille, tableau...).

Déroulement du jeu

L'enseignant indique aux joueurs les deux sélections de cartes à utiliser, une pour les unités de numération, l'autre pour les nombres, ainsi que le nombre de tirages à effectuer.

1. Le premier joueur tire au hasard une carte « unité de numération ». Il la place en haut de l'une des colonnes du tableau qu'il choisit librement.
2. Le deuxième joueur tire au hasard une carte « nombre » et la place dans la colonne de l'unité de numération choisie par le 1^{er} joueur.
3. Le 1^{er} joueur tire une nouvelle carte « unité de numération ». Il la place en haut de l'une des colonnes du tableau en fonction de l'emplacement de la 1^{re} unité de numération tirée.
4. Le 2^e joueur tire une nouvelle carte « nombre » et la place dans la colonne de l'unité de numération tirée précédemment.
5. On procède ainsi pour 3 à 5 tirages de chaque type de cartes par partie (3 à 5 cartes « unité de numération » associées à une carte « nombre »).
6. Le tirage étant terminé, les joueurs doivent déterminer ensemble quel est le nombre désigné par l'ensemble des cartes déposées sur le plateau de jeu.

Fin de la partie

Une fois le nombre déterminé par les joueurs, la partie est terminée.