LES MATHÉMATIQUES POUR LA FORMATION DES ENSEIGNANTS DU PREMIER DEGRÉ REVISITÉES PAR LE SYSTÈME SÉCIMAL

Florence PETEERS[1]
CY Cergy Paris Université,
LDAR, Universités d'Artois, Cergy-Pontoise, Paris-Est Créteil, Rouen, Paris, F-75013 Paris, France

Laurent VIVIER[2]
Université de Paris,
LDAR, Universités d'Artois, Cergy-Pontoise, Paris-Est Créteil, Rouen, Paris, F-75013 Paris, France

Résumé. Dans cet article, nous présentons une séquence longue sur le système sécimal (base six) proposée en formation initiale des professeurs des écoles. Nous cherchons à reprendre l'ensemble des mathématiques rencontrées par les futurs enseignants du premier degré, des bases de l'arithmétique jusqu'aux nombres réels en passant par la géométrie et les mesures de grandeurs. Par ce moyen, nous souhaitons introduire une distance cognitive que nous jugeons nécessaire pour que les futurs enseignants comprennent les difficultés de certains concepts qu'ils devront enseigner qui leur sont devenus transparents. En outre, cette séquence semble permettre une compréhension plus en profondeur des mathématiques, faisant réémerger des difficultés qui devraient être dépassées pour ce public.

Mots-clés. Numération de position, base de numération, formation des enseignants, opérations, grandeurs.

Introduction

La numération décimale est une des notions clés de l'enseignement primaire, quel que soit le pays. Du point de vue de l'apprentissage des élèves, les difficultés sont nombreuses, que ce soit dans le travail des nombres proprement dit ou bien dans leurs applications : la compréhension du codage, les aspects ordinal et cardinal, la numération orale, les techniques des quatre opérations de base, les critères de divisibilité, les rationnels (fractions et décimaux), les mesures de grandeurs (longueur, aire, volume, masse, capacité, etc.), les nombres réels et leurs approximations (les racines carrées et π notamment), etc.

Toutes ces notions sont à travailler pour les futurs professeurs des écoles, les premières étant particulièrement cruciales étant donné qu'elles constituent un enjeu de l'apprentissage de toute première importance qui ne se limite pas à l'arithmétique. Après diverses expériences ces dernières années (Nikolantonakis & Vivier, 2009, 2016 ; Braconne-Michoux, Nikolantonakis & Vivier, 2018 ; Vivier, 2015), nous avons élaboré une séquence de 8 séances de 2 *h* pour de futurs professeurs d'école, en troisième année de licence pluridisciplinaire (Mathématiques Informatique Appliquées - Sciences Humaines et Sociales (MIASHS), parcours Professorat des Écoles, de l'Université de Paris), afin de faire redécouvrir aux étudiants ce qu'ils vont avoir à

[1] florence.peteers@cyu.fr

[2] laurent.vivier@u-paris.fr

enseigner (dans une autre base, pour éviter les automatismes) sur le système de numération et toutes ses implications. Nous décrirons dans cet article la séquence mise en place entre janvier et avril 2019, détaillerons quelques productions d'étudiants et questionnerons ses effets.

Le choix de la base six pour cette séquence est le fruit d'expérimentations menées depuis une quinzaine d'années. Nous voulions une base inférieure à dix pour éviter le problème cognitif, important pour ce public non scientifique, de considérer de nouveaux chiffres pour coder des nombres comme dix ou onze (Nikolantonakis & Vivier, 2013). Nous voulions en outre une base pas trop petite pour éviter d'avoir trop vite à travailler avec des nombres ayant beaucoup de chiffres ainsi qu'une base montrant une différence significative avec la base dix. Il ne restait donc que six, sept, huit et neuf. Cette dernière a été écartée pour sa place particulière avec dix (son prédécesseur) ce qui pouvait avoir comme conséquence l'émergence de stratégies efficaces fondées sur la base dix (les étudiants ont souvent tendance à s'appuyer sur la base dix qu'ils maîtrisent, Vivier, 2015). La base huit est très particulière car huit est le cube de deux[3]. Nous avons dans un premier temps opté pour la base sept, notamment parce qu'elle diffère significativement de la base dix du point de vue mathématique (par exemple, un nombre écrit en base sept est pair si et seulement si la somme de ses chiffres est divisible par deux). Toutefois, il nous semble que la base six est bien meilleure pour le travail envisagé de formation de futurs enseignants du premier degré. Principalement, il y a des phénomènes proches de la base dix (2 joue le même rôle dans les deux bases, les nombres pairs et impairs en base dix le sont également en base six) et cela favorise l'entrée des étudiants dans la situation (contrairement à la base sept). Dix et six ont la même structure arithmétique avec uniquement deux diviseurs propres distincts (3 en base six joue le rôle de 5 en base dix). En outre, la proximité des deux mots « six » et « dix » permet des transferts aisés de mots, comme *décimal* et *sécimal*. Notons également que c'est la base choisie par Anselmo & Zucchetta (2013) dans leur dispositif de formation sur l'apprentissage de la numération.

Les séances sont pensées de la façon suivante : des fiches de travail sont proposées aux étudiants qui doivent les compléter par groupes. Pour chaque exercice, il est également demandé de justifier et d'expliquer les procédures utilisées (afin d'amener les étudiants à porter un regard réflexif sur leur travail). Les groupes, composés de deux ou trois étudiants, sont constitués dès la première séance et restent fixes d'une séance à l'autre pour permettre une mise en place d'habitudes de travail. Les séances sont animées par les deux auteurs. Le fait d'animer la séance en binôme permet d'augmenter le temps d'échange avec chaque groupe afin, éventuellement, de réorienter le travail, et de prendre des notes sur le déroulement de la séance. Deux heures sont consacrées, en parallèle de chacune des séances dans le système *sécimal*, aux concepts didactiques mis en évidence, au travers notamment d'analyses d'erreurs d'élèves ou d'analyses de manuels scolaires. Le lien est ainsi fait entre les difficultés éprouvées par les étudiants dans le système *sécimal* et celles que sont susceptibles de rencontrer leurs futurs élèves en base dix.

L'objectif de cet article est de présenter la séquence (le détail séance par séance se trouve en annexe) telle que nous l'avons construite ainsi que sa mise en œuvre auprès de futurs professeurs des écoles. Il s'adresse principalement à des formateurs d'enseignants du premier degré. Nous décrirons les grandes étapes de la séquence en justifiant nos choix didactiques et en donnant quelques éléments relatifs à la mise en œuvre auprès de certains groupes et du collectif (procédures utilisées, difficultés observées, …). Nous nous appuyons sur des données expérimentales constituées des productions écrites des étudiants ainsi que de nos notes

[3] Les chiffres 2 et 4 en base huit jouent les mêmes rôles que les chiffres 2 et 5 en base dix, mais $4=2^2$, ce qui peut entraîner des confusions.

d’observation lors des séances. Cela nous permet de justifier la faisabilité et l’intérêt d’une telle séquence ainsi que de valider certaines hypothèses (voir ci-dessous). Il s’agit d’une première mise en œuvre et les résultats partiels que nous obtenons doivent être consolidés et complétés par une recherche plus approfondie.

La séquence s’appuie sur un certain nombre de choix et d’hypothèses :

1. Nous faisons le choix d’entrer par le code écrit et l’aspect ordinal du nombre conformément à Nikolantonakis et Vivier (2016), car entrer par le dénombrement aurait inévitablement pour conséquence l’utilisation de la base dix. Or nous voulons repousser le plus loin possible le recours à la base dix afin de montrer la portée de la numération de position dans sa généralité, bien que spécifiée à la base six. C’est seulement ainsi que l’on pourra faire un réel travail avec les professeurs des écoles sur la numération de position, en lien avec leur futur métier, sans reposer sur des techniques routinisées et naturalisées, des théorèmes-en-actes et concepts-en-actes (Vergnaud, 1991). Nous faisons également le choix de n’aborder explicitement les conversions avec la base dix qu’en fin de séquence afin de permettre aux étudiants de s’imprégner du système de numération en base six et de montrer la cohérence interne de ce système, équivalent à celui de base dix. Nous faisons l’hypothèse que cela permettra de mettre du sens sur les algorithmes de conversions entre deux bases de numération.
2. Nous choisissons de travailler les techniques opératoires en début de séquence afin de mettre en place des automatismes chez les étudiants et de renforcer leur compréhension du système de numération en l’opérationnalisant. L’hypothèse est qu’il ne suffit pas d’avoir une écriture chiffrée pour avoir un nombre, il faut aussi, et surtout, pouvoir faire des opérations sur ces écritures chiffrées.
3. Nous nous appuyons sur cette numération entière pour questionner et expliciter les liens avec les unités de mesures de grandeurs — nous reprenons les hypothèses de Chambris (2010) et Tempier (2013).
4. Enfin, nous souhaitons étendre cette numération aux nombres rationnels, en écritures à virgule et fractionnaire, puis aux nombres réels en nous appuyant sur les grandeurs géométriques pour montrer le besoin d’extension des nombres et de leurs écritures. Nous faisons l’hypothèse que cela permettra une meilleure compréhension des nombres.

Globalement, on peut comprendre l’ensemble de la séquence comme la constitution d’un registre de représentation des nombres (Duval, 1993) : d’abord la formation des représentations sémiotiques, en explicitant les règles, puis les différents traitements possibles avec ces signes et enfin les conversions entre différentes représentations.

1. Numérations écrite et orale, aspects ordinal et cardinal

1.1. Objectifs et choix opérés

La séance 1 (voir annexe) a pour objectif de faire travailler les aspects ordinal et cardinal du nombre entier en utilisant uniquement la numération écrite chiffrée. La numération orale nécessitant des choix au niveau des terminologies utilisées, nous choisissons de différer ce questionnement à la séance 2 après avoir senti le besoin de dire les nombres en séance 1.

On débute par un travail sur l’algorithme de formation des nombres écrits à partir de la notion de successeur en nous basant sur des études antérieures (Nikolantonakis & Vivier, 2016) qui ont montré qu’une tâche de ce type permet aux étudiants de se confronter aux principes de formation des écritures de ce nouveau système de numération. La première tâche proposée aux étudiants consiste donc à compléter, par groupes, la suite écrite des nombres telle que présentée à la figure 1 sans leur préciser qu'il s'agit de la base six[4].

Le tableau choisi est suffisamment long pour faire apparaître la nécessité de l'introduction d'un troisième chiffre, le passage à deux chiffres étant pris en charge par les codages donnés, ainsi que le changement de ce troisième chiffre de 1 à 2. De plus, le tableau est ordonné, par six colonnes, pour mettre en évidence les régularités et montrer ainsi l'importance du nombre six. Ce tableau peut servir de référence dans la suite de la séance pour coder les quantités par énumération (en pointant une à une, et de manière synchrone, les éléments à dénombrer et les cases du tableau) ou encore pour effectuer des sommes : le tableau peut devenir un instrument pour coder et calculer. Etant donné l'importance de cette tâche initiale pour la suite de la séquence, nous prévoyons une première mise en commun à ce stade.

Nous proposons ensuite une série de tâches relevant de l'aspect cardinal du nombre en nous appuyant sur la situation de Tempier (2013) adaptée à la base six ainsi que sur les travaux de Chambris (2010) qui a mis en évidence l'importance des unités de numération, en lien avec le système métrique. On y travaille notamment le dénombrement et plus généralement le codage de collections avec différentes contraintes et en lien avec les unités de numération (notées u_0, u_1, u_2, …). Des additions de quantités exprimées en unités de numération sont également proposées pour lancer une réflexion sur les techniques de calcul, notamment la gestion des retenues. L'objectif est de faire émerger le principe positionnel de cette numération mais également « *sécimal* » (six unités d'un certain rang équivalent à une unité d'un rang supérieur). Tempier (2013) a montré que ce dernier principe était peu travaillé, en base dix, dans les manuels de CE2 et qu'il constituait un obstacle pour les élèves. Nous souhaitons donc amener les étudiants à expliciter ces deux principes pour la base six.

La numération orale et les difficultés de passage d'une numération à l'autre (de l'oral vers l'écrit ou de l'écrit vers l'oral) sont abordées au début de la séance 2. Mounier (2016) a en effet montré, pour la numération décimale, que les deux numérations (orale et écrite) constituent deux systèmes sémiotiques bien distincts qui fonctionnent de manières différentes et que le passage de l'une à l'autre comporte de nombreuses difficultés (notamment pour les nombres comportant des zéros en écriture chiffrée). L'objectif est également d'amener les étudiants à prendre conscience que la numération orale ne va pas de soi, qu'elle n'est pas donnée mathématiquement, mais constitue une construction sociale[5].

1.2. Déroulement

Tous les étudiants ont déjà effectué un travail principalement calculatoire sur les bases au premier semestre de l'année universitaire (de type conversion d'une base *a* vers une base *b* — généralement, une des deux bases étant la base dix, voir la partie 4.). Ce travail effectué en amont leur permet d'entrer rapidement dans la tâche. Des difficultés attendues, mises en évidence dans Nikolantonakis et Vivier (2016), apparaissent cependant, comme pour l'obtention du successeur de 55 et la nécessité d'ajouter un troisième chiffre (100, au lieu de 60, proposé par

[4] Pour une question de cohérence avec notre propos, nous préférons éviter d'utiliser le signe « 6 » pour désigner le nombre six, qui s'écrit 10 en base six, tout comme dix qui n'a pas de symbole spécifique pour le désigner en base dix. Dans cet article, quand il est question du contenu des séances et sans autre précision, 10 désigne le nombre six et 100 son carré.

[5] À ce propos, Radford, dans sa théorie de l'objectivation, précise que *« le savoir est considéré comme un système de systèmes : systèmes de pensée et d'action constitués culturellement et historiquement »* (Radford, 2020, p. 25).

certains étudiants, voir les rectifications après mise en commun en figure 1). Une mise en commun, anticipée, est nécessaire pour tous sur ce tableau avant de passer à la suite. Il constitue une référence essentielle pour coder des collections, faire le lien entre les aspects ordinal et cardinal, effectuer des comparaisons et des opérations.

	1	2	3	4	5
10	11	12	13	14	15
20	21	22	23	24	25
30	31	32	33	34	35
40	41	42	43	44	45
50	51	52	53	54	55
100	101	102	103	104	105
110	111	112	113	114	115
120	121	122	123	124	125
130	131	132	133	134	135
140	141	142	143	144	145
150	151	152	153	154	155
200	201	202	203	204	etc.

Figure 1 *: Suite écrite des nombres en base six (groupe VO).*

Après une question, non problématique et très largement réussie, sur l'ordre des nombres dans cette écriture chiffrée, deux questions sont posées sur le dénombrement d'une collection. Plusieurs stratégies apparaissent comme la correspondance terme à terme avec les éléments de la suite écrite des nombres (*cf.* figure 1), le groupement par six ou encore le passage par la base dix. Le fait d'avoir commencé la séance par un travail sur la suite écrite nous permet d'amener les étudiants à chercher d'autres stratégies dans le cas où ils se limitent à un passage par la base dix.

Nous mettons en évidence l'importance des codages intermédiaires en base dix lors d'addition de deux nombres. Par exemple, les étudiants écrivent $4+5=9$ avant de coder ce résultat en base six ($=13$) pour en venir ensuite aux gestes usuels « je pose 3 et je retiens 1 ». Cet appui sur les symboles 6, 7, 8 et 9 est important pour les étudiants et valide le recours à une base inférieure à neuf. Par ce moyen, dès cette séance, ils peuvent se rendre compte de la difficulté cognitive importante de la technique opératoire de l'addition, objet naturalisé pour eux, et qu'ils auront à enseigner.

La séance 1, avec les différentes mises en commun, fait également émerger le besoin d'un codage oral commun à tous pour pouvoir communiquer, comme anticipé. Le code est débattu en début de séance 2 avec l'ensemble des groupes jusqu'à ce qu'un consensus soit trouvé (voir les deux premières colonnes de la figure 2). En particulier, une discussion s'amorce sur le choix des régularités et des irrégularités avec, comme résolution, le fait de conserver des noms particuliers aux sizaines de 10 à 50.

10 : six	20 : twix	u_0 : unité	1/10 : 1 sixième	m/10 : 1 sécimètre (*scm*)
11 : six un	30 : trix	u_1 : sizaine	1/100 : 1 sitième	m/100 : 1 sitimètre (*stm*)
12 : six deux	40 : tetrix	u_2 : sitaine	1/1000 : 1 sillième	
13 : six trois	50 : pentix	u_3 : sillier		
14 : six quatre	100 : sit			
15 : six cinq	1000 : sil			

Figure 2 *: Numération orale choisie avec les étudiants (les deux dernières colonnes sont discutées dans les séances suivantes).*

On retrouve les mêmes irrégularités que dans la précédente implémentation de la séance (Braconne-Michoux, Ninolantonakis & Vivier, 2018) avec un suffixe différent (*-ix* au lieu de *-ouze*). Un mot nombre spécifique est introduit pour chaque nombre de 1 à 10 (interprétés par Mounier (2012) comme des *comptant*s de la numération), pour les multiples de 10 jusque 100 et pour les puissances de 10 (interprétés par Mounier (2012) comme des *repérants* de la numération). Le nom des autres nombres sont obtenus par compositions additives de ces mots-nombres particuliers. Les autres irrégularités orales que l'on pourrait imaginer (par exemple l'ajout de mots nombres spécifiques supplémentaires) ne seront pas reprises ici contrairement à ce qui apparaît dans l'étude de Anselmo & Zucchetta (2013).

Des exercices de passage du code oral au code écrit en chiffres et inversement sont proposés afin de familiariser les étudiants avec cette nouvelle numération. Cela permet également aux étudiants de se rendre compte de la charge mentale nécessaire à ces conversions de représentation des nombres, notamment pour les grands nombres et quand un rang est lacunaire comme par exemple pour « sil six cinq » codé 1015. On retrouve ici le poids cognitif des conversions entre registres avancé par Duval (1993) alors que les conversions en système décimal sont automatisées pour les étudiants de l'étude. Nous observons que les temps de conversion écrit-oral en base six sont allongés de manière flagrante.

2. Opérations

2.1. Objectifs et choix opérés

Nous proposons aux étudiants une série d'exercices relatifs aux techniques opératoires (addition, soustraction, multiplication dans la séance 2 et division dans la séance 3) et à la résolution de problèmes additifs et multiplicatifs (selon la classification de Vergnaud, 1991). On attend d'eux un réinvestissement, avec adaptation, des techniques de la base dix, avec une prise de conscience et de la nécessaire justification des opérations et des gestes. Nous souhaitons les amener à prendre conscience des fondements des techniques opératoires dans la numération de position usuelle.

Pour la somme et la différence, il s'agit surtout de mettre en évidence l'importance du principe « sécimal » d'échanges et d'emprunts dans la gestion des retenues. Les opérations à effectuer sont donc choisies de manière à nécessiter ces opérations de conversion entre unités de rang. En ce qui concerne la multiplication, le principe de position engendre également un décalage en fonction des valeurs des unités de numération que nous souhaitons que les étudiants explicitent.

Nous voulons également leur faire prendre conscience du poids cognitifs des calculs intermédiaires et l'intérêt d'automatiser certains résultats (tables d'addition et de multiplication) ainsi que des spécificités de la technique opératoire utilisée en France de la division posée :

- le résultat est composé de deux nombres (le quotient et le reste) ;
- elle fait intervenir plusieurs opérations différentes (multiplications du diviseur par un nombre à 1 chiffre, des soustractions mais aussi des décompositions additives du dividende en somme de deux nombres) ;
- elle nécessite plusieurs étapes ;
- elle possède une disposition traditionnelle particulière (il faut considérer le dividende « de gauche à droite » et poser l'opération à l'horizontale) ;
- elle nécessite de procéder par essais/erreurs (sauf si on se donne la table du diviseur).

Un travail est également mené sur les critères de divisibilité (en base six) par 2, 3, 4, 5 et 10, ainsi que par 11 pour les groupes les plus avancés, et sur la signification mathématique du terme « diviseur ». Pour cela, une liste de nombres est proposée aux étudiants qui doivent trouver leurs diviseurs parmi ceux proposés (2, 3, 4, 5 et 10) pour essayer de dégager ensuite les critères de divisibilité.

2.2. Déroulement

La pose des opérations est généralement bien réussie même si la retenue engendre quelques difficultés pour la soustraction. En revanche, les étudiants éprouvent des difficultés à expliquer et justifier les techniques utilisées, notamment pour la soustraction pour laquelle la technique par compensation, favorisée par l'institution scolaire, est moins naturelle que la technique par emprunt qui ne nécessite pas de changer les nombres de l'opération avec la propriété $a-b=(a+c)-(b+c)$. Il est ainsi primordial de discuter des justifications et d'expliciter les principes de la numération de position, car ce sont ces arguments, dans le contexte de la base dix, que les futurs PE auront à utiliser dans leur enseignement.

	(+0)	(+1)	(+2)	(+3)	(+4)	(+5)
×	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5
2	0	2	4	10	12	14
3	0	3	10	13	20	23
4	0	4	12	20	24	32
5	0	5	14	23	32	41

Figure 3 *: Table de multiplication (groupe MHV).*

Des régularités sont observées dans la table de multiplication comme on peut le voir en figure 3 et le groupe AB identifie plus spécifiquement les régularités suivantes :

- table de 1 : on avance toujours d'une unité entre deux termes successifs ;

• table de 2 : elle finit toujours par un chiffre pair (0, 2, 4 : schéma suivi) ;
• table de 3 : elle finit toujours par un 0 ou un 3 ;
• table de 4 : elle finit toujours par un chiffre pair (0, 4 puis 2) ;
• table de 5 : l'addition entre le chiffre des unités et des sizaines est toujours égal à 5. Au fur et à mesure que l'on avance, l'unité décroît de 1 et la sizaine croît de 1.

La technique de la division posée ne pose pas de difficulté en elle-même mais le fait de travailler dans une base différente de la base dix permet aux étudiants de se rendre compte de la complexité de l'algorithme (nombre d'étapes, calculs intermédiaires comme les soustractions (qu'il est préférable de poser), anticipation de certains résultats intermédiaires, aide apportée par l'écriture de la table du diviseur, …).

Une discussion collective est menée autour des critères de divisibilité en repartant des régularités observées par le groupe AB (voir ci-dessus) permet de trouver l'ensemble des critères (d'abord par 10, 2 et 3 et ensuite par 4 et 5). La justification mathématique (en passant par l'écriture polynomiale notamment) reste difficile. Ces critères sont mis en parallèle avec ceux de la base dix[6] et notamment en lien avec :

• les diviseurs de la base (2, 4 et 3 pour la base six et 2, 4, 8 et 5 pour la base dix) où c'est uniquement le chiffre des unités (ou les chiffres des sizaines et des unités pour 4) que l'on considère ;
• les diviseurs du prédécesseur de la base (5 pour la base six et 9 et 3 pour la base dix), où c'est la somme des chiffres que l'on considère.

3. Lien avec les unités de mesure et extension aux nombres rationnels

3.1. Objectifs et choix opérés

Dans la séance 4, on donne à chaque groupe d'étudiants une feuille de format A3 sur laquelle est tracée un hexagone régulier de 1 *mètre* de périmètre (information donnée). Il leur est demandé de donner la mesure de la longueur d'un côté de cet hexagone (en base six) pour faire émerger une nouvelle unité ou de nouveaux nombres avec une écriture fractionnaire ou à virgule. En effet, différentes réponses sont possibles : soit un sixième de m, ou 0,1 m, ou $\frac{1}{10}m$, ou encore 1 (m/10), m/10 étant la première sous-unité du mètre correspondant à 1 sixième de mètre[7]. Ensuite, on demande de tracer, toujours sur des feuilles A3, un triangle équilatéral et un carré dont le périmètre est le même que celui de l'hexagone (1 *mètre*) et de donner la mesure de la longueur de leurs côtés (les figures peuvent être tracées en reportant un certain nombre de fois le côté de l'hexagone, ou de sa moitié avec le tracé d'une médiatrice, mais on espère faire émerger le besoin de construire un outil de mesure, une règle graduée). Le triangle a pour côté 1/3 m, soit encore 0,2 m, ou $\frac{2}{10}m$, ou 2 (m/10) et le carré a pour côté $\frac{1}{4}m$, ou encore 0,13 m ou 1,3 (m/10) ou encore 13 (m/100).

Enfin, les étudiants doivent calculer la mesure de l'aire des trois figures, ce qui introduit la recherche de valeurs approchées de la racine carrée de 3 (lors du calcul de la mesure de l'aire du

[6] Le critère pour le successeur de la base (le nombre codé 11 dans chacune des deux bases), où c'est la somme alternée des chiffres que l'on considère, n'a pas été abordé.

[7] Nous conservons l'unité internationale de longueur, le mètre, malgré ses liens historiques avec le système décimal.

triangle avec le théorème de Pythagore) ainsi que les produits de nombres à virgule codés en base six avec une extension des techniques opératoires.

L'objectif de cette séance ici est double (ce qui correspond aux deux types de procédures de résolution possible) :

- Faire émerger les liens existants entre le système de numération et les unités de mesure (et donc la nécessité de développer de nouveaux outils de mesure). Chambris (2008) montre que le travail dans chacun des deux domaines peut apparaître aux élèves (voire au professeur) comme indépendant. La juxtaposition des connaissances des deux domaines affaiblit alors chacun d'eux car il n'est pas nourri par l'autre. Sont visées ici la signification des préfixes métriques et le rapport six entre les unités successives connaissances.
- Introduire les fractions et sécimaux par fractionnement de l'unité (ici le mètre qui correspond au périmètre des figures) avec une extension du codage des nombres. Nous choisissons des polygones réguliers (hexagone, carré et triangle équilatéral) pour faire travailler les étudiants sur des fractions simples ($\frac{1}{10}$, $\frac{1}{4}$ et $\frac{1}{3}$) et leurs valeurs sécimales en commençant par l'hexagone pour faciliter ce passage (cette figure possédant un nombre de côtés égal à la base de numération). Nous visons également l'extension des techniques opératoires sur les nombres sécimaux (avec les calculs d'aire proposés) pour le carré. Pour le triangle, l'aire peut être obtenue en utilisant la formule de géométrie usuelle avec, pour déterminer la hauteur, soit le théorème de Pythagore (trouver une valeur approchée d'une racine carrée, extension des nombres en considérant un irrationnel) soit la mesure directe de la hauteur qui nécessite l'usage d'une règle graduée adaptée à la base six (*cf.* point précédent sur l'articulation entre unités de numération et unités de mesure).

3.2. Déroulement

Nombres à virgule et sous unités

Pour l'hexagone, certains étudiants repensent les conversions mètre/décimètre et mètre/centimètre (le *dm* est le dixième de mètre et *cm* le centième de mètre) en base six (autrement dit $1\,m = 14\,dm = 244\,cm$), ce qui traduit une perception indépendante des deux systèmes (numération et mesure). On leur fait remarquer que les sous-unités usuelles du système métrique sont en lien avec le système décimal et que ça facilite les calculs, ce qui fait émerger le besoin d'un nouveau système. L'explicitation des liens entre les unités de numération et les unités de mesure pointés par Chambris (2008) est nécessaire et non spontanée pour les étudiants. De nouvelles unités apparaissent pour les premières sous-unités du mètre : *m*/10 et *m*/100 avec, après accord collectif, les dénominations sécimètre et sitimètre, et les abréviations *scm* et *stm* (figures 2 et 4). Les écritures à virgule font également leur apparition de manière spontanée dans certains groupes.

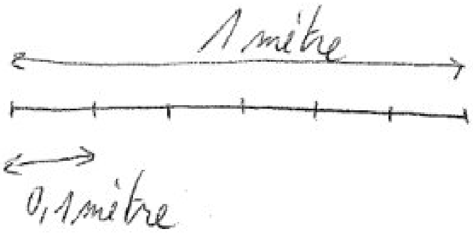
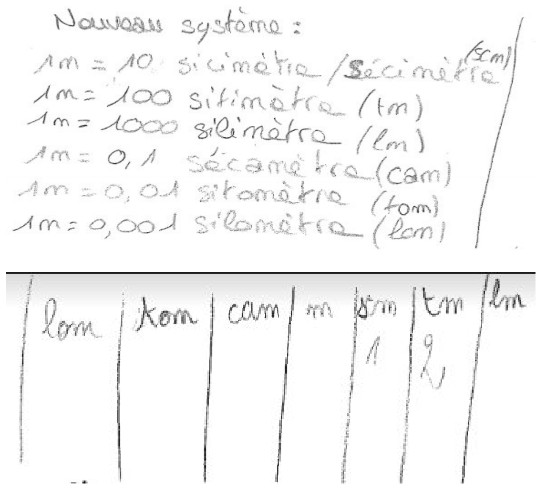
<table>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Groupe PAF.</td><td>Proposition du groupe MHV, avant débat collectif.</td></tr>
</table>

Figure 4 *: Système métrique en base six.*

Outil de mesure

Le côté de l'hexagone est utilisé pour la construction du triangle et du carré (différentes méthodes sont utilisées pour reporter les longueurs : compas, calques, règles non graduées, …). Pour le report de l'angle du triangle équilatéral, certains étudiants utilisent un gabarit ou un agrandissement d'un petit triangle équilatéral.

Un groupe (PAF) part du principe que la mesure de l'amplitude des angles d'un triangle équilatéral est de 60° (« soixante degré », ce qui est correct en base dix), qu'ils convertissent en 100° en base six au lieu de 140. Cette erreur de conversion est intéressante car les étudiants ont décomposé 60 en 6×10 et ont uniquement converti le 6_{dix} en 10_{six} comme si multiplier par 10 en base dix équivalait à multiplier par 10 en base six. Or, si le produit par 10 a les mêmes effets sur les codages (en base six, 5×10 est bien égal à 50), il n'en est pas de même de la valeur des nombres (50 en base six correspond à 5 paquets de six unités). Ensuite, pour le report de l'angle et la construction du triangle, le groupe élabore un rapporteur allant jusque l'angle droit qui vaut bien 230° en base six ($230_{six}=90_{dix}$) comme on peut le voir sur la figure 5. Cette construction, en graduant par sizaine de degrés, rend alors visible leur erreur de conversion et les conduit à la bonne mesure de l'angle d'un triangle équilatéral (140° en base six) après interaction avec les chercheurs.

Figure 5 *: Le rapporteur du groupe PAF.*

Le groupe VO, pour déterminer la longueur de la hauteur du triangle équilatéral de périmètre $1\,m$, ne fait pas appel au théorème de Pythagore et commence la construction d'une règle graduée : un sécimètre divisé par deux et encore divisé par deux dans un souci (explicitement déclaré) d'avoir une meilleure précision. Une intervention finale permet de préciser l'intérêt d'avoir un outil pour avoir directement la mesure par dénombrement des graduations… une règle graduée donc divisée en six, $six \times six$, etc., comme schématisé en figure 6.

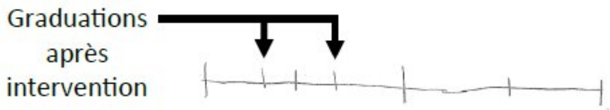


Figure 6 *: Tentative de règle graduée par le groupe VO (l'unité est d'abord divisée en 4 puis des graduations sont ajoutées pour diviser l'unité en six, néanmoins, les graduations ne sont pas régulières).*

Une règle graduée est ensuite construite lors de la séance 5 avec l'ensemble des étudiants (en utilisant le théorème de Thalès) et des règles imprimées sont distribuées aux étudiants (voir figure 7). Afin de se familiariser avec ce nouvel outil, il leur est demandé de mesurer les côtés des figures proposées à la séance précédente, ce qui permet également de valider leurs productions (il a été aussi demandé, par exemple, de calculer le volume de leurs téléphones portables).

Figure 7 *: Règle graduée donnée dès la séance 5 à tous les groupes (la graduation 10 correspond à un sixième de mètre, soit un sécimètre, soit encore environ dix-sept centimètres - figure non à l'échelle).*

Valeur approchée

Tous les groupes commencent par le calcul de l'aire du carré qui ne pose pas de difficulté particulière (en stm^2, avec des entiers donc : $13\,stm \times 13\,stm = 213\,stm^2$), en particulier pour la nouvelle unité d'aire. Le théorème de Pythagore est utilisé pour le calcul de l'aire du triangle (sauf le groupe VO, voir ci-dessous). On trouve alors soit $\sqrt{2^2-1^2}\,scm$ soit $\sqrt{20^2-10^2}\,stm$. Pour le calcul de la racine carrée, de 3 ou de 300 suivant l'unité utilisée, et en l'absence d'une calculatrice adaptée, tous se lancent dans des essais pour trouver la valeur approchée (avec des résultats plus ou moins précis, le groupe MHV va jusqu'à 3 sécimales[8] pour la racine de 300, figure 8).

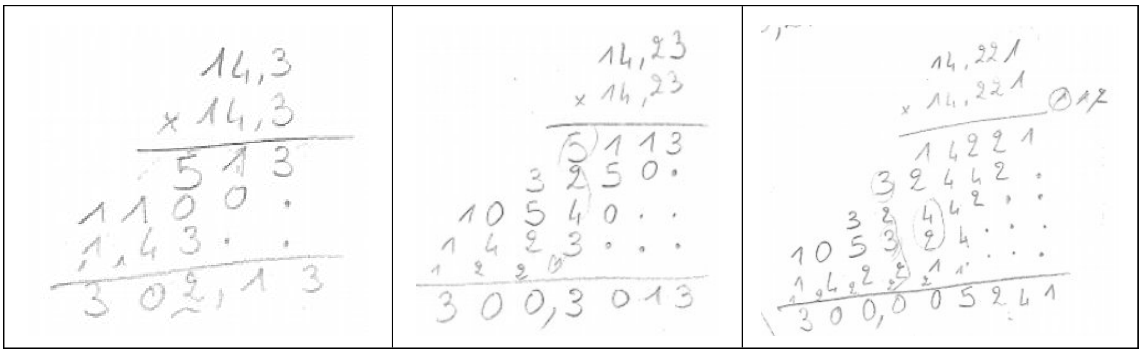


Figure 8 *: Calculs de carrés pour obtenir une valeur approchée de $\sqrt{300}$ par le groupe MHV.*

[8] C'est-à-dire 3 chiffres après la virgule.

De ces calculs longs, mais facilités après la routinisation des 3 premières séances, la nécessité d'un outil de calcul automatisé émerge. En raison des difficultés rencontrées par le public de l'étude pour programmer, nous leur proposons à la suite de cette séance un programme écrit avec Scratch (qui peut être utilisé dès l'école primaire) avec une librairie permettant de calculer le résultat des quatre opérations sur les entiers en base six.

On peut voir à l'œuvre, à ce stade, une conceptualisation des nombres en lien avec la mesure des grandeurs géométriques qui s'appuie fortement sur les quatre opérations de base. Nous interprétons cela comme une validation de l'importance de pouvoir opérer sur les écritures chiffrées avant tout autre développement.

4. Conversions d'une base à l'autre

4.1. Objectifs et choix opérés

Lors de la séance 5, il est demandé aux étudiants de déterminer la mesure du périmètre et de l'aire d'un cercle qui leur est fourni. Différents objets sont mis à leur disposition (ciseaux, fil de laine, lacet, ficelle) pour effectuer des mesures expérimentales. L'objectif étant de questionner l'écriture de π en base six et, plus généralement, de se questionner sur ce qu'est un nombre et de montrer la nécessité des conversions entre deux bases de numération puisque la seule connaissance opérationnelle que ces étudiants ont de π est sa valeur approchée à 2 décimales en base dix. Un autre choix possible est de déterminer des valeurs approchées de π directement en base six, par la proportionnalité entre diamètre et périmètre de cercles.

La séance 6 est consacrée à un travail sur les conversions de la base six vers une autre base et inversement. Les étudiants les ont déjà travaillées (de manière classique et purement calculatoire) au premier semestre mais avec beaucoup de difficultés. L'objectif est de mettre en évidence différentes procédures de conversion (décompositions en puissances de la base ou divisions successives) avec des calculs en base dix ou en base six (qu'ils sont censés maîtriser puisque travaillés dans les trois premières séances). Pour cela, nous avons choisi de faire un détour par la base 4 et la base 9. Nous avons choisi d'abord une base plus petite que six et ensuite une plus grande qui va nécessiter des conversions supplémentaires (voir déroulement). Pour mettre les étudiants en situation de communication, Laurent joue le rôle d'un invité qui était censé venir d'une autre planète où l'on se sert exclusivement du système sécimal.

En proposant des conversions vers la base six d'une autre base, nous espérons limiter la tentation d'un détour vers la base dix qui n'est pas nécessaire puisque les étudiants maîtrisent les calculs en base six. En outre, cela permet de comprendre l'usage traditionnel des conversions : de la base dix vers une autre base b, on fait des divisions successives par b en base dix et d'une base b à la base dix, on fait un calcul en base dix à partir de l'écriture polynomiale. Le fait est que l'on dispose de DEUX conversions possibles entre une base b et une base b' (comme illustré sur la figure 10), et le choix de l'une ou l'autre n'a rien de mathématique, contrairement à ce que l'on laisse penser aux étudiants en formation. Le choix est UNIQUEMENT un choix du sujet devant faire la conversion : dans quelle base maîtrise-t-il mieux les calculs ?

Nous proposons également des conversions de mesures d'angles lors de la séance 7 pour faire le lien avec la séance 4 et le rapporteur conçu par l'un des groupes. Contrairement aux unités de longueurs (on ne divise pas les degrés en sous-unités comme on l'a fait avec le mètre), il suffit de convertir la mesure connue en base dix dans la base six. Nous terminons par des conversions de fractions (de la base dix vers la base six pour laquelle nous demandons une écriture fractionnaire et à virgule). Nous choisissons les fractions à convertir de manière à ce que certaines ne puissent pas s'écrire sous forme d'un nombre sécimal. L'objectif est de faire réfléchir les étudiants sur les conditions permettant d'écrire une fraction sous forme d'un nombre sécimal (il faut que la fraction irréductible équivalente ne possède au dénominateur pas d'autres facteurs premiers que des diviseurs de la base à savoir 2 et 3).

4.2. Déroulement

Lors de la séance 5, on retrouve, parmi les propositions des étudiants, celle mise en évidence dans Braconne-Michoux, Nikolantonakis et Vivier (2018) : $\pi \approx 3{,}22$ (car 3 c'est 3 et 14 en base dix s'écrit 22 en base six) qui montre le caractère résistant de la conception d'un nombre décimal comme couple de deux entiers séparés par une virgule[9] (Perrin-Glorian, 1986) qui ressort dès que l'on quitte le confort de la base dix. Une intervention guidée sera nécessaire pour questionner la signification du « 14 » dans « 3,14 » (valeur approchée de π en base dix) et introduire une conversion en base six en passant par l'écriture fractionnaire : convertir en base six les nombres codés en base dix 314 et 100, soit, respectivement, 1242 et 244, puis calculer en base six le quotient $\frac{1242}{244}$, soit environ 3,05 (toujours en base six). Notons que nous n'avons pas mentionné les problèmes relatifs aux approximations et la sécimale « 5 » n'a pas été questionnée. Aucun étudiant n'opte pour un passage par des mesures expérimentales en vue de comparer diamètre et périmètre du cercle.

Les stratégies de conversions mises en place par les différents groupes en séance 6 permettent de faire émerger les deux procédures de conversions comme on peut le voir sur la figure 9.

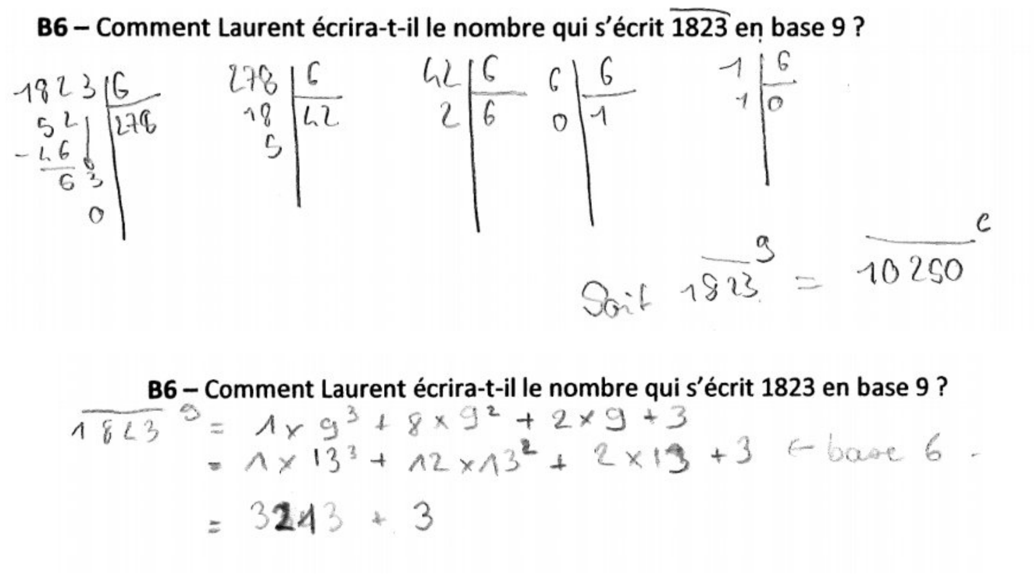


Figure 9 : *Les deux types de conversion de la base neuf vers la base six effectuées par les groupes PAF et MM.*

La première production (figure 9a) propose de faire des paquets de six par des divisions par 6 en base neuf. On remarque l'excellente adaptation des techniques opératoires connues en base dix et six à la base neuf. Le nombre qui s'écrit 1823 en base neuf est donc égal, en base neuf, à

[9] Dans 3,14 en base dix, 14 ne s'interprète pas comme un entier, mais comme une fraction, $\frac{14}{100}$, à moins de considérer les unités de numération : 14 centièmes, mais pas 14 unités.

$1\times6^4+0\times6^3+2\times6^2+5\times6+0$ qui se code automatiquement en 10250 en base six puisque 6 en base neuf s'écrit 10 en base six. Ce groupe a atteint un stade de conceptualisation où les principes, les propriétés et les techniques de la numération de position ne dépendent plus de la base de numération, il y a eu une décontextualisation, même si la base est toujours explicite (neuf dans ce cas).

La deuxième production (figure 9b), propose d'écrire en extension le nombre en base neuf (première ligne) puis de faire les conversions en base six de tous les nombres y figurant (deuxième ligne, la conversion en base six est explicitement indiquée). Le calcul en base six permet de conclure. Notons que le groupe n'a pas fini son calcul en troisième ligne qui donnerait $3213+3000+30+3$, qui donne bien 10250 (toujours en base six). Ce groupe donne une signification des écritures chiffrées dans une certaine base (neuf ici) et la base six est opérationnelle pour effectuer les calculs. Ils n'ont apparemment plus besoin de la base dix.

Etant donné le travail sur les conversions réalisé à la séance 6, la partie consacrée aux conversions de mesures d'angle est bien réussie par l'ensemble des groupes. Subsistent cependant quelques difficultés, notamment pour la conversion de 60 (en base dix) qui devient, pour certains étudiants, 100 en base six, ce qui montre que le rôle du zéro est aussi perçu de manière superficielle (cette erreur avait déjà été soulevée dans la partie 3.). Cela est à rapprocher du problème avec π car, dans les deux cas, il s'agit d'un problème du lien dans le codage entre la place d'un chiffre dans un rang et la valeur du nombre (un des principes de Tempier (2013)).

Pour les conversions de fractions, le passage de la fraction en base dix à la fraction en base six est facilité par le travail de conversion réalisé à la séance 6. Le passage à l'écriture sécimale est plus délicat (erreurs de type $\frac{1}{14}=0{,}14$, à nouveau on retrouve une erreur bien répertoriée sur les fractions, Perrin-Glorian, 1986).

5. Ouverture

En fin de séquence, notre objectif n'était pas d'évaluer les étudiants sur les connaissances qu'ils ont pu développer par rapport à la numération en base six mais plutôt d'essayer de dégager les avantages de ce type de numération (positionnelle avec un nombre limité de symboles) par rapport à d'autres que ce soit au niveau du codage des quantités qu'au niveau calculatoire. Différents systèmes sont comparés : base dix, égyptien, romain, sino-japonais, maya, babylonien et binaire. Les étudiants doivent, tout d'abord, convertir des nombres d'un système à l'autre. Ensuite, ils doivent préciser le fonctionnement des différents systèmes et identifier les intérêts et limites de chacun.

Nous avons également prévu une réflexion sur les opérations (avec analyse d'une tablette babylonienne et d'un boulier romain) et sur les grandeurs et mesures (avec l'étude de trois instruments de mesure : la corde à treize nœuds, la pige médiévale et la coudée égyptienne). Malheureusement, le temps consacré à cette ouverture n'a pas permis aux étudiants de travailler pleinement sur ces aspects.

Discussion et conclusion

L'objectif central de cette séquence n'est pas de travailler dans une base autre que dix, mais bien plutôt de proposer une reconstruction de connaissances mathématiques, naturalisées chez les étudiants, qui sont cruciales pour l'école primaire, avec une base autre que dix. Le développement des techniques et connaissances en base six est un moyen par lequel nous espérons atteindre nos objectifs.

À partir de nos études précédentes (voir par exemple Nikolantonakis et Vivier, 2016) et comme cela s'est confirmé dans la mise en œuvre présentée dans cet article, il semble que cela soit possible. Pour atteindre nos objectifs, des interactions formateur-groupes se sont cependant révélées nécessaires afin d'orienter le travail sans pour autant indiquer les connaissances visées. Cette séquence ne permet donc pas un fonctionnement adidactique strict. De plus, nous avons également constaté l'importance des échanges entre les différents groupes qui ont permis, par exemple, de faire émerger certains besoins (numération orale, unités de mesure, …) ou encore de mettre en évidence les différentes procédures de conversion dans la dernière partie de la séquence. Il nous semble donc important de penser l'émergence des connaissances sur l'ensemble des groupes et pas uniquement pour chaque groupe séparément.

À travers les 8 séances décrites ci-dessus, nous avons abordé les bases de l'arithmétique jusqu'aux nombres réels en passant par la géométrie et les mesures de grandeurs. Le fait de proposer une séquence atypique semble être un véritable facteur de motivation chez les étudiants qui se sont fortement impliqués tout au long des séances. Au niveau mathématique, nous constatons que les futurs professeurs d'écoles ont stabilisé certaines connaissances de manière superficielle, dans le cadre du système décimal. Ainsi, les tentatives de remédiation qu'ils auront à mettre en place auprès de leurs élèves concernant certaines difficultés usuelles, comme celle de « deux entiers séparés par une virgule », ne peuvent pas s'appuyer sur les véritables connaissances mathématiques en jeu. Le fait de travailler dans une base autre que dix semble avoir permis une prise de conscience des automatismes liés à la base dix, une compréhension plus profonde pouvant aller, pour quelques étudiants, jusqu'à l'émerveillement comme nous avons pu le constater lors de la mise en œuvre de cette séquence.

Des prolongements liés à cette séquence pourraient être envisagés avec, par exemple, un travail sur les probabilités (notamment avec un dé équilibré où chaque face a une probabilité d'apparaître de 0,1 en base six). Il faudrait également repenser la fin de la séquence afin de pouvoir évaluer les effets de celle-ci sur les connaissances mathématiques des étudiants. Enfin, il serait sans doute intéressant d'adapter cette séquence pour la formation continue des enseignants du premier degré.

Références bibliographiques

Anselmo, B. & Zucchetta, H. (2013). Du comptage à la numération : une formation sur l'enseignement de la numération. *Grand N, 91*, 71-91.

Braconne-Michoux, A., Nikolantonakis, K. & Vivier, L. (2018). La numération sécimale en formation initiale des enseignants du premier degré. *Actes du 45e colloque COPIRELEM* (pp. 649-654). Blois, France : ARPEME.

Chambris, C. (2010). Relations entre grandeurs, nombres et opérations dans les mathématiques de l'école primaire au 20e siècle : théories et écologie. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 30*(3), 317-366.

Chambris, C. (2008). *Relations entre les grandeurs et les nombres dans les mathématiques de l'école primaire. Évolution de l'enseignement au cours du 20e siècle. Connaissances des* *élèves actuels*. Thèse de l'Université Paris Diderot, Paris.

Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 5*(1), 37-65.

Mounier, É. (2016). Nouveaux outils d'analyse des procédures de dénombrement pour explorer leurs liens avec la numération écrite chiffrée et la numération parlée. *Recherches En Didactique Des Mathématiques, 36*(3), 347-396.

Mounier, É. (2012). Des modèles pour les numérations orales indoeuropéennes à usage didactique application à la numération parlée en France. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 17*, 27-58.

Nikolantonakis, K. & Vivier, L. (2016). El ETM de Futuros Profesores de Primaria en un Trabajo sobre los Números Naturales en Cualquier Base. *Boletim de Educação Matemática - BOLEMA, 30*(54), 23-44.

Nikolantonakis, K. & Vivier, L. (2013). Positions numeration in any base for future Elementary school teachers in France and Greece: one discussion via Registers and Praxis. *MENON: Journal of Educational Research, Full article: issue 2a*, 99-114.

Nikolantonakis, K. & Vivier, L. (2009). La numération en base quelconque pour la formation des enseignants du premier degré en France et en Grèce. Une étude articulant registres et praxéologies. In A Gagatsis, A Kuzniak, E Deliyianni et L Vivier (éds.), *Chypre et France, Recherche en didactique des mathématiques*. Lefkosia, Chypre.

Perrin-Glorian, M.-J. (1986). Représentation des fractions et des nombres décimaux chez des élèves de CM2 et du collège. *Petit x, 10*, 5-29.

Radford, L. (2020). Le concept de travail conjoint dans la théorie de l'objectivation. In M Flores González, A Kuzniak, A Nechache et L Vivier (éds.), *Regards croisés sur le travail mathématique en contexte éducatif - Deuxièmes Journées d'Études sur le Travail Mathématique. Cahier du LDAR, 21*, 19-41. IREM de Paris, 2020.

Tempier, F. (2013). *La numération décimale à l'école primaire. Une ingénierie didactique pour le développement d'une ressource*. Thèse de l'Université Paris Diderot, Paris.

Vergnaud, G. (1991). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en didactique des mathématiques, 10/2.3*, 133-170.

Vivier, L. (2015). Les analogies dans la découverte d'une autre base de numération - la base sept pour de futurs professeurs des écoles. *L'analogie : études sur son usage en didactique chimie, mathématiques, physique. Cahier du LDAR, 15*, 127-139.

Annexe
Les séances de la séquence

Note 1 : Cette annexe présente les questions données aux étudiants, dans un format adapté à cet article. En particulier, pour chaque question il y avait une place suffisante pour y répondre.

Note 2 : Toutes les feuilles de travail des séances 1 à 4 commençaient par les instructions suivantes :

- TOUS les nombres de cette fiche sont écrits dans ce nouveau système.
- TOUTES les réponses de cette fiche sont à écrire dans ce nouveau système.

Séance 1

A) La suite des écritures chiffrées

A1- Continuer la suite des nombres, de un en un, de ce tableau (lecture de gauche à droite et de haut en bas).

	1	2	3	4	5
10	11	12	13	14	15
20	21	22	23	24	25
30	31	32	33	34	
					etc.

<u>Comment faire pour trouver l'écriture chiffrée du successeur d'un nombre dans ce système ?</u>

A2- Comparer les nombres suivants (avec et selon le cas) :

12 ... 4   35 ... 42   100 ... 54   3240 ... 44   200 ... 300   241 ... 251

Comment faire pour comparer deux nombres dans ce système ?

B) Dénombrement d'une collection

B1- Combien y a-t-il de « o » dans ces deux cadres ? Donner le nombre dans le nouveau système.

o o o o o o o o o o o o o o o
o o o o o o o o o o o o o o

o o o o o o
o o o o o o
o o o o o o
o o o o o o o
o o o o o
o o o

B2- Donner, dans le nouveau système, le cardinal de la collection de « o » obtenue par la réunion des deux cadres :

<u>Comment peut-on faire pour dénombrer une collection avec ce système d'écriture des nombres ?</u> (Plusieurs procédures sont demandées.)

C) On définit les unités relatves à chaque rang de la manière suivante :

$$\boldsymbol{u_0=1\ ;\ u_1=10\ ;\ u_2=100\ ;\ u_3=1000\ ;\ u_4=10000\ ;\ \text{etc.}}$$

C1- Écrire les unités relatives aux quatre rangs suivants 5, 10, 11 et 12.

$\boldsymbol{u_5=}$; $\boldsymbol{u_{10}=}$; $\boldsymbol{u_{11}=}$; $\boldsymbol{u_{12}=}$

Comment s'écrit l'unité de rang *k*, notée u_k ?

C2- Trouver l'écriture chiffrée des nombres suivants : $1u_2$ et $4u_1$ et $3u_0$, $4u_3$ et $5u_2$ et $2u_0$, $5u_1$ et $2u_2$ et $1u_0$ et $4u_3$, $4u_2$ et $1u_3$ et $5u_1$.

Comment faire pour trouver l'écriture chiffrée d'un nombre donné avec les unités de rang ?

C3- Convertir les unités de rangs.

$1u_3=\qquad u_2$ $\qquad\qquad 1u_4=\qquad u_1$

D) On ajoute deux nombres donnés avec les unités de rang.

D1- Dans chacun des quatre cas suivants, on ajoute deux nombres donnés avec les unités de rangs. Trouver l'écriture chiffrée du résultat.

- $1u_2$ et $2u_1$ et $3u_0$ **+** $3u_2$ et $2u_0$
- $4u_2$ et $3u_1$ et $1u_0$ **+** $5u_1$ et $2u_0$
- $4u_1$ et $3u_0$ **+** $5u_1$ et $1u_0$
- $1u_3$ et $4u_2$ et $5u_1$ **+** $3u_3$ et $2u_2$ et $4u_1$ et $3u_0$
- $1u_2$ et $5u_1$ et $2u_0$ **+** $2u_2$ et $5u_1$ et $0u_0$

Comment faire pour ajouter deux nombres dans ce système ?

E) On veut commander des paquets de « o » (penser à ce que vous voulez, des timbres, des billes, des yaourts, …). Les « o » sont vendus par paquets de u_0, u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, etc.

E1- On veut commander 24100 « o ». Comment peut-on faire la commande ?

E2- On veut commander 24100 « o », mais le magasin ne dispose que de paquets de taille u_1, u_2 et u_3. Comment peut-on faire la commande ?

E3- On veut commander 1410 « o », mais le magasin ne dispose que de paquets de taille u_1 et u_3. Comment peut-on faire la commande ?

F) SYNTHÈSE GÉNÉRALE

Comment peut-on nommer les nombres dans ce système ?

Expliquer comment fonctionne ce système de numération.

Séance 2

A) La suite verbale des nombres

A1- Écrire en toutes lettres les nombres suivants : 45, 134, 442, 2051, 3510.

A2- Écrire en chiffres les nombres dictés.

B) Sommes et différences

B1- Résoudre les problèmes suivants.

- Dans une école, on compte 133 filles et 124 garçons. Combien y a-t-il d'élèves dans l'école ?
- 230 coureurs prennent le départ d'une course. 53 coureurs abandonnent, combien terminent la course ?
- Julien a 35 ans. Il en a 12 de plus que son frère. Quel âge a son frère ?
- Parmi les 103 voitures d'un parking, il y a 45 voitures rouges, les autres sont noires. Combien y a-t-il de voitures noires ?
- Arthur vient de perdre 14 billes. Il en a maintenant 52. Combien en avait-il au départ ?
- Je possède une collection de 342 timbres. Ma voisine en a 122 de plus que moi. Combien en a-t-elle ?

<u>Tous ces problèmes sont-ils de même difficulté ? Expliquer.</u>

B2- Effectuer les opérations suivantes :

$231+1052=$ $\quad$ $1453+2223=$ $\quad$ $1453+254+131=$

<u>Expliquer et justifier les techniques utilisées pour effectuer une addition.</u>

B3- Effectuer les opérations suivantes :

$353-45=$ $\quad$ $234-151=$ $\quad$ $1022-324=$

<u>Expliquer et justifier les techniques utilisées pour effectuer une soustraction (en donner deux).</u>

C) Multiplication

C1- Résoudre les problèmes suivants :

- Pierre a 13 ans. Sa mère est 4 fois plus âgée que lui. Quel âge a-t-elle ?
- Combien y a-t-il de bouteilles de bière dans 25 caisses de 20 bouteilles de bière ?
- Une feuille de cahier a 23 carreaux sur sa largeur et 34 sur sa longueur. Combien y a-t-il de carreaux sur la feuille ?

C2- Effectuer les opérations suivantes :

$121\times12=$ $\quad$ $132\times3=$ $\quad$ $435\times320=$

$213\times23=$ $\quad$ $3214\times103=$ $\quad$ $1254\times115=$

<u>Expliquer et justifier la technique utilisée pour effectuer une multiplication.</u>

Tables d'addition et de multiplication

+	0	1	2	3	4	5
0						
1						
2						
3						
4						
5						

×	0	1	2	3	4	5
0						
1						
2						
3						
4						
5						

Séance 3

A) Division

A1- Résoudre les problèmes suivants :

- À la cantine, il y a 203 chaises. Il y en a 3 fois moins dans la classe de CP. Combien y a-t-il de chaises dans la classe ?
- Je range 140 œufs dans des boîtes de 10. Combien de boîtes vais-je remplir ?
- 12 enfants se partagent 200 bonbons. Combien chacun en aura-t-il ?
- Sur la planète de Laurent (en sécimal), la semaine est identique à la nôtre et comporte 11 jours, du lundi au dimanche. Une année comporte 523 jours (la durée de révolution autour de l'étoile). Aujourd'hui, mardi, c'est le 1er jour de la nouvelle année (c'est pour ça qu'il n'est pas avec nous !). Quel jour sera le premier jour de l'année prochaine ?

A2- Effectuer les opérations suivantes :

$552:4$ $2355:35$ $2520:12$ $3041:42$ $22304:15$

B) Critères de divisibilité

Compléter le tableau suivant :

	Divisible par 2	Divisible par 3	Divisible par 4	Divisible par 5	Divisible par 10
43					
54					
100					
352					
41050					
103243					

C) PGCD

Trouver le plus grand commun diviseur des deux nombres suivants : 352 et 302, 120 et 140, 1200 et 3020.

<u>Expliquer et justifier les techniques utilisées pour trouver le PGCD de deux nombres.</u>

Séance 4

A) Longueurs et mesures de longueurs

A1- Sur la feuille annexe est tracé un hexagone régulier de 1 mètre de périmètre. Quelle est la mesure de la longueur du côté de cet hexagone ?

A2- Tracer un triangle équilatéral dont le périmètre est identique à celui de l'hexagone (1 mètre). Quelle est la mesure de la longueur du côté de ce triangle ?

A3- Tracer un carré dont le périmètre est identique à celui de l'hexagone (1 mètre). Quelle est la mesure de la longueur du côté de ce carré ?

B) Mesures d'aires

B1- Quelle est la mesure de l'aire de chacune des trois figures de périmètre 1 mètre ?

Séances 5 et 6

A) Cercle

A1- Sur la feuille annexe est tracé un cercle. Quelle est la mesure de son périmètre ?

A2- Quelle est la mesure de l'aire de la surface délimitée par ce cercle ?

B) Conversions

B1- Le village de Laurent compte 51 342 habitants. S'ils viennent tous nous rendre visite, combien en compterions-nous (dans notre système habituel en base dix) ?

B2- Si je vais rendre visite à Laurent avec une boîte de 316 bonbons, combien comptera-t-il de bonbons ?

B3- Laurent écrit le nombre suivant : 531. Comment ce nombre s'écrit-il sur une planète dont le système numérique fonctionne en base 4 ?

B4- Comment Laurent écrira-t-il le nombre qui s'écrit 3 203 en base 4 ?

B5- Laurent écrit le nombre suivant : 423. Comment ce nombre s'écrit-il sur une planète dont le système numérique fonctionne en base 9 ?

B6- Comment Laurent écrira-t-il le nombre qui s'écrit 1 823 en base 9 ?

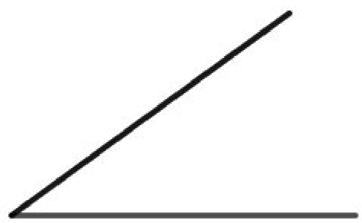
Défi- Quel est l'âge de Laurent sachant que sur sa planète il a 231 ans et que, sur cette planète, chaque année compte 532 jours (la durée d'un jour est la même que sur la Terre) ?

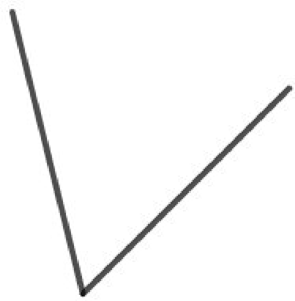
Séance 6

A) Angles

A1- Pour mesurer l'amplitude des angles, Laurent utilise également le degré comme unité. Quelle sera, pour lui, la mesure de l'angle plat, l'angle plein, l'angle nul, l'angle droit, l'angle du triangle équilatéral et l'angle de l'hexagone ?

A2- Quelle mesure Laurent trouvera-t-il pour les amplitudes des angles suivants ?





B) Rationnels

B1- Convertir, pour que Laurent puisse vous comprendre, les fractions suivantes données en base dix (donner la forme fractionnaire et sécimale) :

$\frac{1}{10}$ (un dixième) $\frac{1}{100}$ (un centième) $\frac{1}{36}$ $\frac{3}{20}$ $\frac{2}{9}$ $\frac{5}{12}$

B2- Sur la planète de Laurent, à quelle condition une fraction s'écrit-elle avec un nombre fini de chiffres ?

B3- Effectuer les opérations suivantes (en base six) :

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{3} \qquad \frac{3}{4}-\frac{2}{5} \qquad \frac{4}{24}+\frac{23}{4} \qquad \frac{3}{4}\times\frac{2}{5}$$