UNE ACTIVITÉ... LES NOMBRES GLISSANTS

ACTIVITÉ PUBLIÉE DANS LE N° 107
ÉLÉMENTS DE SOLUTION

Valentina CELI
ESPE d'Aquitaine, Université de Bordeaux

Jean-Christophe SALMON
IREM de Grenoble, Collège Geneviève Anthonioz-de Gaulle - Cluses

Avertissement : Tous les nombres dont il est question dans cet énoncé sont des nombres écrits en base 10.

Définition d'un nombre **glissant** :

Le nombre G, entier naturel à n chiffres (n, entier naturel non nul), est **glissant** s'il peut s'écrire comme la somme de deux entiers naturels a et b, pas nécessairement égaux, et de sorte que la somme des inverses de a et b soit égale à $\frac{G}{10^n}$.

Si G un nombre entier naturel à *deux* chiffres, on dira alors que G est **glissant** s'il peut s'écrire comme la somme de deux entiers naturels a et b, pas nécessairement égaux, et de sorte que la somme des inverses de a et b soit égale à $\frac{G}{10^2}$

Par exemple, 20 est un nombre **glissant** (à deux chiffres), avec $a=b=10$, car $20=10+10$ et $\frac{1}{10}+\frac{1}{10}=\frac{20}{100}$.

1. Trouver tous les nombres *glissants* à deux chiffres

D'après les informations fournies, on peut écrire : $\begin{cases} a+b=G \\ \frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{G}{100} \end{cases}$, d'où $\begin{cases} a+b=G \\ \frac{a+b}{a\times b}=\frac{G}{100} \end{cases}$

Pour que la seconde égalité soit vraie, il faut et il suffit que $a\times b=100$. On cherche donc deux nombres entiers naturels dont le produit est égal à 100 et tels que $10\leqslant a+b<100$.

Pour cela, on considère tous les diviseurs de 100, à savoir 1, 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50 et 100.

On écrit alors : $100=1\times100=2\times50=4\times25=5\times20=10\times10$.

On obtient donc les solutions suivantes :

$1+100=\cancel{101}$ (nombre à 3 chiffres, ne convient pas) ; $2+50=52$; $4+25=29$; $5+20=25$; $10+10=20$.

2. Il existe aussi des nombres *glissants* à trois chiffres

a. 101 est-il un nombre glissant (avec a=1 et b=100) ?

Si $G=101$ et $a=1$ et $b=100$, alors la condition $a+b=G$ est respectée.

D'après la seconde équation du système écrit en 2a), il faut que $a\times b=1000$. Puisque $1\times 100=100$, on conclut que 101 n'est pas un nombre **glissant**.

b. Déterminer tous les nombres glissants à trois chiffres

Le système obtenu est : $\begin{cases} a+b=G \\ \dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=\dfrac{G}{1\,000} \end{cases}$, soit $\begin{cases} a+b=G \\ \dfrac{a+b}{a\times b}=\dfrac{G}{1\,000} \end{cases}$

Pour que la seconde égalité soit vraie, il faut et il suffit que $a\times b=1\,000$. On cherche donc deux nombres entiers naturels a et b dont le produit est égal à 1 000 et tels que $100\leqslant a+b<1\,000$.

On considère donc tous les diviseurs de 1 000, à savoir 1, 2, 4, 5, 8, 10, 20, 25, 40, 50, 100, 125, 200, 250, 500 et 1 000.

On écrit alors :
$1\,000=1\times 1\,000=2\times 500=4\times 250=5\times 200=8\times 125=10\times 100=20\times 50=25\times 40$.

On obtient donc les solutions suivantes :

$1+1\,000=\cancel{1\,001}$ (nombre à 4 chiffres, ne convient pas) ; $2+500=502$; $4+250=254$; $5+200=205$; $8+125=133$; $10+100=110$; $20+50=\cancel{70}$ (nombre à 2 chiffres, ne convient pas) ; $25+40=\cancel{65}$ (nombre à 2 chiffres, ne convient pas).

> *De cette manière, on prouve aussi que le nombre 101 n'est pas un nombre* ***glissant****. On peut d'ailleurs se poser la question si le nombre 1001, avec a=1 et b=1000, est un nombre* ***glissant*** *à quatre chiffres.*

3. Existe-t-il des nombres *glissants* à un chiffre ? Si oui, lesquels ?

Le raisonnement précédent conduit à chercher deux nombres entiers naturels a et b dont le produit est égal à 10 et dont la somme est strictement inférieure à 10.

On considère donc tous les diviseurs de 10, à savoir 1, 2, 5 et 10, et on écrit $10=1\times 10=2\times 5$.

On obtient donc une seule solution : $1+10=\cancel{11}$ (nombre à 2 chiffres, ne convient pas) ; $2+5=7$.

4. Trouver au moins un nombre *glissant* à quatre chiffres

On cherche deux nombres entiers naturels a et b dont le produit est égal à 10^4 ou 10 000 et tels que $1\,000\leqslant a+b<10\,000$.

En considérant donc tous les diviseurs de 10 000, on trouve par exemple $1+10\,000=\cancel{10\,001}$ (nombre à cinq chiffres, ne convient pas) ; $4+2\,500=2\,504$; $10+1\,000=1\,010$; $20+500=\cancel{520}$ (nombre à trois chiffres, ne convient pas).

5. Trouver au moins un nombre *glissant* à plus de quatre chiffres

- un nombre **glissant** à cinq chiffres : 20 005,
- un nombre **glissant** à six chiffres : 125 008,

• un nombre **glissant** à sept chiffres : 2 500 004.

Complément :

Nous proposons ci-dessous des éléments de démonstration du cas général

◆ On cherche, pour $n \in \mathbb{N}^*$, deux nombres entiers naturels a et b dont le produit est égal à 10^n et tels que $10^{n-1} \leqslant a+b < 10^n$.

On considère donc tous les diviseurs de 10^n, soit $\{2^p 5^q, (p,q) \in \{0,1,\dots,n\}^2\}$

On obtient ainsi, pour $(p,q) \in \{0,1,\dots,n\}^2$, la décomposition $10^n = (2^p 5^q) \times (2^{n-p} 5^{n-q})$,

et donc un candidat $G^n_{(p,q)} = 2^p 5^q + 2^{n-p} 5^{n-q}$, qui convient ss'il est tel que $10^{n-1} \leqslant G^n_{(p,q)} < 10^n$.

◆ Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n \geqslant 8$ (les cas $n < 8$ sont traités plus bas).

On remarque d'abord que pour $(p,q) \in \{0,1,\dots,n\}^2$, $G^n_{(p,q)} = G^n_{(n-p,n-q)}$, on peut donc limiter l'étude à $p \leqslant m$, où $m = max\{k \in set\, N, 2k \leqslant n\}$ — en fait $m = E\left(\frac{n}{2}\right)$.

- $G^n_{(0,0)} = 2^0 5^0 + 2^{n-0} 5^{n-0} = 10^n + 1$, $G^n_{(0,0)} > 10^n$, donc $G^n_{(0,0)}$ ne convient pas (il a $n+1$ chiffres).
- $G^n_{(0,1)} = 2^0 5^1 + 2^{n-0} 5^{n-1} = 5 + 2 \times 10^{n-1}$; $n \geqslant 2$, donc $n-1 \geqslant 1$, donc $5 < 10^1 \leqslant 10^{n-1}$,
  donc $10^{n-1} < G^n_{(0,1)} < 3 \times 10^{n-1} < 10^n$. Donc $G^n_{(0,1)}$ convient.

  Remarque : Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $G^n_{(0,1)}$ s'écrit 7, 25, 205, 2**0...0**5 (avec $n-2$ zéros en gras).
- $G^n_{(1,0)} = 2^1 5^0 + 2^{n-1} 5^{n-0} = 2 + 5 \times 10^{n-1}$; $n \geqslant 2$, donc $n-1 \geqslant 1$, donc $2 < 10^1 \leqslant 10^{n-1}$,
  donc $10^{n-1} < G^n_{(1,0)} < 6 \times 10^{n-1} < 10^n$, donc $G^n_{(1,0)}$ convient.

  Remarque : Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $G^n_{(1,0)}$ s'écrit 7, 52, 502, 5**0...0**2 (avec $n-2$ zéros en gras).
- $G^n_{(1,1)} = 2^1 5^1 + 2^{n-1} 5^{n-1} = 10 + 10^{n-1}$; $n \geqslant 2$, donc $n-1 \geqslant 1$, donc $10^1 \leqslant 10^{n-1}$,
  donc $10^{n-1} < G^n_{(1,1)} \leqslant 2 \times 10^{n-1} < 10^n$, donc $G^n_{(1,1)}$ convient.

  Remarque : Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $G^n_{(1,1)}$ s'écrit 20, 110, 1 010, 1**0...0**10 (avec $n-3$ zéros en gras).
- $G^n_{(2,0)} = 2^2 5^0 + 2^{n-2} 5^{n-0} = 4 + 25 \times 10^{n-2}$; $n \geqslant 2$, donc $n-1 \geqslant 1$, donc $4 < 10^1 \leqslant 10^{n-1}$,
  donc $G^n_{(2,0)} \leqslant 10^{n-1} + 30 \times 10^{n-2} = 4 \times 10^{n-1} < 10^n$.

  De plus, $4 + 25 \times 10^{n-2} > 20 \times 10^{n-2} = 2 \times 10^{n-1} > 10^{n-1}$,
  donc $10^{n-1} < G^n_{(2,0)} < 10^n$, donc $G^n_{(2,0)}$ convient.
- $G^n_{(2,1)} = 2^2 5^1 + 2^{n-2} 5^{n-1} = 20 + 5 \times 10^{n-2}$; $n \geqslant 3$, donc $n-2 \geqslant 1$,
  donc $20 = 2 \times 10^1 \leqslant 2 \times 10^{n-2}$, donc $G^n_{(2,1)} \leqslant 2 \times 10^{n-2} + 5 \times 10^{n-2} = 7 \times 10^{n-2} < 10^{n-1}$.

  Donc $G^n_{(2,1)}$ ne convient pas.
- $G^n_{(3,0)} = 2^3 5^0 + 2^{n-3} 5^{n-0} = 8 + 125 \times 10^{n-3}$; $n \geqslant 2$, donc $n-1 \geqslant 1$, donc $8 < 10^1 \leqslant 10^{n-1}$,
  donc $G^n_{(3,0)} \leqslant 10^{n-1} + 200 \times 10^{n-3} = 3 \times 10^{n-1} < 10^n$.

  De plus, $8 + 125 \times 10^{n-3} > 100 \times 10^{n-3} = 10^{n-1}$,
  donc $10^{n-1} < G^n_{(3,0)} < 10^n$, donc $G^n_{(3,0)}$ convient.

- $G^n_{(3,1)} = 2^3 5^1 + 2^{n-3} 5^{n-1} = 40 + 25 \times 10^{n-3}$; $n \geqslant 3$, alors $n-2 \geqslant 1$,
  donc $40 = 4 \times 10^1 \leqslant 4 \times 10^{n-2}$, donc $G^n_{(3,1)} \leqslant 4 \times 10^{n-2} + 30 \times 10^{n-3} = 7 \times 10^{n-2} < 10^{n-1}$.
  Donc $G^n_{(3,1)}$ ne convient pas.
- Il reste à démontrer que :
  - si $3 < p \leqslant m$, $G^n_{(p,q)}$ ne convient pas car il a moins de n chiffres ;
  - si $p \leqslant m$ et $q > 1$, ne convient pas car il a moins de n chiffres.

◆ Finalement, on dispose des tableaux ci-dessous pour $n \in \{0, \ldots, 7\}$, et pour $n \geqslant 8$:

- $G^n_{(0,1)}$, $G^n_{(1,0)}$, $G^n_{(1,1)}$, $G^n_{(2,0)}$ et $G^n_{(3,0)}$ conviennent et sont des nombres **glissants** à n chiffres;
- $G^n_{(0,0)}$, $G^n_{(2,1)}$ et $G^n_{(3,1)}$ ne conviennent pas car ils n'ont pas n chiffres.
- Il n'existe pas d'autres nombres glissants à n chiffres (reste à démontrer).

Conjecture : à part pour $n=1$, il existe exactement 5 nombres glissants à n chiffres.

◆ Exemples pour plusieurs valeurs de n

(en noir : nombres glissants ; en rouge : nombres n'ayant pas n chiffres, ne conviennent pas)

n=1 p⇢ q⇣

	0
0	11
1	7

n=2 p⇢ q⇣

	0	1
0	101	52
1	25	20
2	29	52

n=3 p⇢ q⇣

	0	1
0	1001	502
1	205	110
2	65	70
3	133	254

n=4 p⇢ q⇣

	0	1	2
0	10001	5002	2504
1	2005	1010	520
2	425	250	200
3	205	290	520
4	641	1258	2504

n=5 p⇢ q⇣

	0	1	2
0	100001	50002	25004
1	20005	10010	5020
2	4025	2050	1100
3	925	650	700
4	785	1330	2540
5	3157	6266	12508

n=6 p⇢ q⇣

	0	1	2	3
0	1000001	500002	250004	125008
1	200005	100010	50020	25040
2	40025	20050	10100	5200
3	8125	4250	2500	2000
4	2225	2050	2900	5200
5	3445	6410	12580	25040
6	15689	31282	62516	125008

n=7 p⇢ q⇣

	0	1	2	3
0	10000001	5000002	2500004	1250008
1	2000005	1000010	500020	250040
2	400025	200050	100100	50200
3	80125	40250	20500	11000
4	16625	9250	6500	7000
5	6325	7850	13300	25400
6	16265	31570	62660	125080
7	78253	156314	312532	625016

n=8 p⇢ q⇣

	0	1	2	3	4
0	100000001	50000002	25000004	12500008	6250016
1	20000005	10000010	5000020	2500040	1250080
2	4000025	2000050	1000100	500200	250400
3	800125	400250	200500	101000	52000
4	160625	81250	42500	25000	20000
5	35125	22250	20500	29000	52000
6	22025	34450	64100	125800	250400
7	79405	156890	312820	625160	1250080
8	390881	781378	1562564	3125032	6250016

n=9 p⇢ q⇣

	0	1	2	3	4
0	1000000001	500000002	250000004	125000008	62500016
1	200000005	100000010	50000020	25000040	12500080
2	40000025	20000050	10000100	5000200	2500400
3	8000125	4000250	2000500	1001000	502000
4	1600625	801250	402500	205000	110000
5	323125	166250	92500	65000	70000
6	79625	63250	78500	133000	254000
7	90925	162650	315700	626600	1250800
8	393185	782530	1563140	3125320	6250160
9	1953637	3906506	7812628	15625064	31250032

n=10 p⇢ q⇣

	0	1	2	3	4	5
0	10000000001	5000000002	2500000004	1250000008	625000016	312500032
1	2000000005	1000000010	500000020	250000040	125000080	62500160
2	400000025	200000050	100000100	50000200	25000400	12500800
3	80000125	40000250	20000500	10001000	5002000	2504000
4	16000625	8001250	4002500	2005000	1010000	520000
5	3203125	1606250	812500	425000	250000	200000
6	655625	351250	222500	205000	290000	520000
7	206125	220250	344500	641000	1258000	2504000
8	416225	794050	1568900	3128200	6251600	12500800
9	1958245	3908810	7813780	15625640	31250320	62500160
10	9766649	19531762	39062756	78125128	156250064	312500032

n=15 p⇢ q⇣

	0	1	2	3	4	5	6	7
0	1000000000000001	500000000000002	250000000000004	125000000000008	62500000000016	31250000000032	15625000000064	7812500000128
1	200000000000005	100000000000010	50000000000020	25000000000040	12500000000080	6250000000160	3125000000320	1562500000640
2	40000000000025	20000000000050	10000000000100	5000000000200	2500000000400	1250000000800	625000001600	312500003200
3	8000000000125	4000000000250	2000000000500	1000000001000	500000002000	250000004000	125000008000	62500016000
4	1600000000625	800000001250	400000002500	200000005000	100000010000	50000020000	25000040000	12500080000
5	320000003125	160000006250	80000012500	40000025000	20000050000	10000100000	5000200000	2500400000
6	64000015625	32000031250	16000062500	8000125000	4000250000	2000500000	1001000000	502000000
7	12800078125	6400156250	3200312500	1600625000	801250000	402500000	205000000	110000000
8	2560390625	1280781250	641562500	323125000	166250000	92500000	65000000	70000000
9	513953125	259906250	135812500	79625000	63250000	78500000	133000000	254000000
10	112165625	70731250	64662500	90925000	162650000	315700000	626600000	1250800000
11	69308125	107896250	200432500	393185000	782530000	1563140000	3125320000	6250160000
12	248236625	490329250	977586500	1953637000	3906506000	7812628000	15625064000	31250032000
13	1221522325	2441815850	4883017300	9765727400	19531301200	39062525600	78125012800	156250006400
14	6103679465	12207113170	24414103460	48828145480	97656260240	195312505120	390625002560	781250001280
15	30517610893	61035172634	122070320692	244140629096	488281252048	976562501024	1953125000512	3906250000256