

LE RAISONNEMENT PAR L'ABSURDE UNE ÉTUDE DIDACTIQUE POUR LE LYCÉE

Dominique BERNARD
IREM de Lyon

Denis GARDES
IREM de Dijon

Marie-Line GARDES
Institut des Sciences Cognitives, Université de Lyon

Denise GRENIER
Institut Fourier, Université Grenoble-Alpes

Résumé : Le raisonnement par l'absurde (*reductio ad absurdum*) a de multiples intérêts, tant pour son efficacité — voire sa nécessité — dans certaines démonstrations que pour son apport dans la compréhension d'une preuve. Il semble mal connu ou peu travaillé dans l'enseignement, parfois confondu par les élèves et étudiants avec le raisonnement par contraposition, ou considéré comme incompatible avec un raisonnement par récurrence. Dans cet article, après avoir caractérisé le raisonnement par l'absurde, nous proposons une classification de ses différents aspects et domaines d'application, et quelques éléments d'épistémologie permettant d'aider à une mise en œuvre judicieuse dans l'enseignement. Nous donnons ensuite les résultats de notre étude de plusieurs collections de manuels de lycée — définitions, exemples et exercices d'application proposés — et l'analyse de leur pertinence. Enfin, nous proposons quelques problèmes pour une meilleure compréhension et utilisation de ce type de raisonnement en classe.

Mots-clés : raisonnement par l'absurde, contraposition, logique, démonstration, analyse de manuels.

Abstract : Reasoning by contradiction (*reductio ad absurdum*) has multiple interests, for its effectiveness — and even its necessity — in certain proofs, as well as for its contribution to their understanding. It seems to be hardly known or even set aside in teaching, sometimes confused by students with reasoning by contraposition, or considered incompatible with reasoning by induction. In this article, after defining reasoning by contradiction, we propose a classification of its various aspects and fields of application, and some elements of epistemology to promote a judicious implementation in teaching. Then, we present the results of our study of several series of high school textbooks — through the proposed definitions, examples, applications and exercises — and an analysis of their relevance. Finally, we propose some problems for a better understanding and use of this type of reasoning in class.

Keywords : *reductio ad absurdum*, contraposition, logic, proof, analysis of school books.

Introduction

Cet article ne reprend pas les notions de base de la logique des propositions, pour lesquelles de nombreux travaux épistémologiques et didactiques ont été publiés (Durand-Guerrier, 2005 ; Fabert & Grenier, 2011 ; Grenier, 2012 ; Mesnil, 2014). Un numéro spécial de la revue *Petit x* a été consacré à la logique et au raisonnement mathématique, à destination des enseignants et des formateurs (Hérault et al., Gardes et al., Murphy et al., in *Petit x*, 2016). Ces notions sont inscrites dans les programmes des trois années de lycée en France depuis 2009, en particulier les principaux « types » de raisonnement, le *modus ponens* (direct) et *modus tollens* (par

contraposition), pour démontrer des propositions écrites sous forme d'implications, ainsi que les raisonnements par condition nécessaire/suffisante ou par l'absurde.

Le raisonnement par l'absurde permet d'étudier aussi bien des propositions élémentaires (c'est-à-dire non décomposables en plusieurs propositions), que des propositions composées, construites avec les connecteurs « et », « ou », « implique », *etc.* Il a été beaucoup utilisé par les mathématiciens grecs. On peut citer plusieurs démonstrations¹ de l'irrationalité de $\sqrt{2}$ mettant en jeu des concepts arithmétiques ou géométriques différents, mais qui sont toutes basées sur une *reductio ad absurdum* ; ou encore, la démonstration d'Euclide que l'ensemble des nombres premiers est infini. À ce jour, ces démonstrations sont toujours considérées comme efficaces et convaincantes. Nous les décrivons ci-après.

Pour certains mathématiciens et philosophes, il est toujours possible d'éviter ce type de raisonnement, il pourrait être remplacé par un raisonnement direct (Gardies, 1991 ; Lombardi, 1997) en tout cas pour toute proposition qui n'implique pas l'infini (Arnauld & Nicole, 1992). Cependant, le raisonnement par l'absurde peut parfois simplifier de manière significative une démonstration, ou la rendre plus convaincante parce qu'il consiste à confronter une hypothèse qui va se révéler fautive avec la conséquence de cette hypothèse — une proposition fautive — (voir par exemple Lombard (1996), ou un texte de Bkouche disponible en ligne)². Cet aspect du raisonnement par l'absurde peut jouer un rôle non négligeable sur le sens et la compréhension de la proposition étudiée. Nous sommes convaincus que ce type de raisonnement a de multiples intérêts, tant pour son efficacité dans certaines démonstrations que pour son apport dans la compréhension d'une proposition. L'objectif de cet article est d'apporter quelques éléments épistémologiques et didactiques pour redonner à ce type de raisonnement une vraie place en tant qu'outil de démonstration et objet d'apprentissage de la logique. Après avoir défini le raisonnement par l'absurde, nous proposons une classification de ses différents aspects et domaines d'application. Nous donnons ensuite les résultats de notre analyse de plusieurs collections de manuels de lycée (définitions, exemples et exercices d'application). Enfin, nous proposons quelques problèmes pouvant apporter une meilleure compréhension de ce raisonnement en classe.

Partie I. Le raisonnement par l'absurde, un outil de la logique classique

1. Définition, caractérisations et exemples

1.1. Définition

Le raisonnement par l'absurde est une forme de raisonnement mathématique qui consiste à démontrer la vérité d'une proposition A ³ en prouvant que sa négation entraîne la vérité d'une proposition que l'on sait fautive, ou en contradiction avec l'hypothèse que (*non A*) est vraie. Ce raisonnement en logique classique repose sur deux principes :

- Le principe de tiers exclu : pour toute proposition A , (A ou *non A*) est vraie — autrement dit, A est vraie, ou (*non A*) est vraie. Le tiers exclu ne dit pas que le « ou » est exclusif.

¹ Nous n'avons pas distingué dans cet article les termes « preuve » et « démonstration » (Balacheff, 1987).

² <http://michel.delord.free.fr/rb/rb-absurd.pdf> (consulté le 21 avril 2019).

³ La proposition A peut être une proposition élémentaire ou une proposition composée, par exemple une implication ou une conjonction de plusieurs propositions.

- Le principe de non-contradiction : pour toute proposition A , $(A \text{ et } \text{non } A)$ est fausse — autrement dit, A ne peut pas être à la fois vraie et fausse.

La conséquence de ces deux principes est que toute proposition mathématique est soit vraie soit fausse. Ainsi, comme on a $A \text{ vraie} \Rightarrow (\text{non } A) \text{ fausse}$, démontrer par l'absurde que A est vraie, c'est démontrer que $(\text{non } A)$ est fausse en exhibant une proposition C telle que :

- (1) $[(\text{non } A) \Rightarrow C]$ vraie et C fausse ou encore $[(\text{non } A) \Rightarrow C] \text{ et } (\text{non } C)$
- (2) $[(\text{non } A) \Rightarrow (C \text{ et } (\text{non } C))]$ vraie ou encore $[(\text{non } A) \Rightarrow (C \text{ et } (\text{non } C))]$

Précisons que quelle que soit la proposition C , $[C \text{ et } (\text{non } C)]$ est une proposition fausse par le principe de non-contradiction. D'après les règles de l'implication logique représentées par la « table de vérité » ci-après, si l'implication est vraie et le conséquent faux alors nécessairement la prémisse est fausse. De plus, les deux dernières colonnes sont identiques, ce qui établit l'équivalence : $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow [(\text{non } A) \text{ ou } B]$.

On en déduit : $\text{non}(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow A \text{ et } (\text{non } B)$.

A	B	$\text{non } A$	$\text{non } B$	$A \text{ ou } B$	$A \text{ et } B$	$A \Rightarrow B$	$\text{non } A \text{ ou } B$
V	V	F	F	V	V	V	V
V	F	F	V	V	F	F	F
F	V	V	F	V	F	V	V
F	F	V	V	F	F	V	V

Rappelons que pour toute proposition universellement quantifiée $\forall x, A(x)$, sa négation est une proposition existentielle $\exists x, \text{non } A(x)$. Dans le cas d'une implication $\forall x, A(x) \Rightarrow B(x)$, sa négation n'est pas une implication et s'écrit $\exists x, A(x) \text{ et } \text{non } B(x)$.

1.2. Cas où la proposition est élémentaire

Le raisonnement « par l'absurde » s'applique bien sur certaines propriétés relativement simples qui ne font pas intervenir les quantificateurs ou l'implication. En voici trois exemples. Bien sûr, d'autres types de démonstration sont possibles, il peut être intéressant de les confronter du point de vue de la compréhension du résultat démontré.

Exemple 1

- Proposition

Le nombre 0 n'a pas d'inverse dans \mathbb{R} .

- Démonstration

On suppose que 0 a un inverse dans \mathbb{R} . On le note a . Par définition de l'inverse, $0 \times a = 1$.

Or pour tout réel x , $0 \times x = 0$. On en déduit que $0 = 1$. Ce qui est faux.

On en déduit que 0 n'a pas d'inverse dans \mathbb{R} .

On a le schéma (1) avec la proposition A : « zéro n'a pas d'inverse dans \mathbb{R} » et la proposition C : « $0 = 1$ », qui est fausse.

Exemple 2

- Proposition

Il existe une infinité de nombres premiers.

- Démonstration

On suppose qu'il existe un nombre fini de nombres premiers. Notons p_1, p_2, \dots, p_n ces nombres, $n \in \mathbb{N}^*$. Considérons l'entier $N = p_1 \times p_2 \times \dots \times p_n + 1$. Par définition, $N \geq 2$, donc il admet un diviseur premier appartenant à l'ensemble $\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$. Soit p_i ce diviseur premier, $1 \leq i \leq n$. Alors, p_i divise N et p_i divise $p_1 \times p_2 \times \dots \times p_n$. Donc p_i divise leur différence, égale à 1, On en conclut que $p_i = 1$, proposition fautive car 1 n'est pas un nombre premier. L'hypothèse qu'il existe un nombre fini de nombres premiers est donc fautive.

On a le schéma (1) avec la proposition A : « *il existe une infinité de nombres premiers* » et la proposition C : « *1 est un nombre premier* » qui est fautive.

Exemple 3

- Proposition

$\sqrt{2}$ est irrationnel.

- Démonstration

On suppose que $\sqrt{2}$ est rationnel. On sait que tout nombre rationnel peut s'écrire sous la forme d'une fraction irréductible : il existe deux entiers p et q premiers entre eux, tels que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$. On a alors $p^2 = 2q^2$, p^2 est donc divisible par 2 (pair), et par suite p est pair. Il existe r entier tel que $p = 2r$. D'où $q^2 = 2r^2$, ce qui implique que q est pair. On a alors p et q pairs, en contradiction avec p et q premiers entre eux. Donc p et q n'existent pas et la supposition $\sqrt{2}$ est rationnel est fautive. $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel.

On a le schéma (2) avec la proposition A : « *$\sqrt{2}$ est irrationnel* » et la proposition C : « *p et q sont premiers entre eux* ». La proposition ($\text{non } A$) est « *il existe deux entiers p et q premiers entre eux et $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$* ».

Note

Il existe d'autres démonstrations de l'irrationalité de $\sqrt{2}$. Dans un texte intitulé « *Autour du raisonnement par l'absurde* » (Cambresy-Tant et al., 1998), les auteurs proposent trois démonstrations.

1. La démonstration d'Euclide, dite « démonstration par le pair et l'impair » (celle proposée ci-dessus).
2. La démonstration qui repose sur le procédé par antiphrèse, développé par les Grecs et lié à la proposition II du livre X des *Éléments d'Euclide*, qui caractérise les grandeurs incommensurables.
3. La démonstration par « descente infinie ». La contradiction vient du fait qu'une suite strictement décroissante d'entiers naturels est nécessairement finie alors que la construction géométrique peut être réalisée indéfiniment. La preuve que pour toute fraction (représentant un nombre rationnel), il existe une écriture irréductible de $\frac{a}{b}$ est basée sur l'axiome dit « de récurrence »: il n'existe pas de suite infinie strictement décroissante dans \mathbb{N} . Pour les auteurs :

Le procédé de démonstration par antiphrèse est bien un raisonnement par l'absurde : la contradiction vient du fait que, si les deux grandeurs avaient une commune mesure, le

⁴ La proposition ($\text{non } A$) est la conjonction de deux propositions : $\left(\sqrt{2} = \frac{p}{q}\right)$ et (p et q sont premiers entre eux).

procédé serait fini (Cambrésy-Tant et al., 1998, p. 14).

Ces démonstrations diffèrent clairement par leur approche conceptuelle : parité des nombres entiers et nombres premiers, grandeurs incommensurables, suites décroissantes dans \mathbb{N} , axiome de récurrence, mais elles sont toutes basées sur un raisonnement par l'absurde.

1.3. Cas où la proposition est une implication

Les propositions mathématiques sont souvent données sous forme d'implication « si ..., alors ... ». Le schéma du raisonnement par l'absurde présente dans ce cas un réel intérêt pour travailler des notions de logique fondamentales, en particulier les connecteurs « et » et « ou », la négation d'une proposition, et les quantificateurs « quel que soit » et « il existe ».

Notons « $P \Rightarrow Q$ » cette implication. Pour prouver que $(P \Rightarrow Q)$ est vraie, on établit que $[non(P \Rightarrow Q)]$ est fausse. Or la négation de $(P \Rightarrow Q)$ est $(P \text{ et } non Q)$. On cherche donc à établir que $(P \text{ et } non Q)$ est fausse en trouvant une proposition C telle que :

- (1 bis) $[(P \text{ et } non Q) \Rightarrow C]$ vraie et C fausse
ou (2 bis) $[(P \text{ et } non Q) \Rightarrow (C \text{ et } non C)]$ vraie

Les cas (1 bis) et (2 bis) sont évidemment les cas particuliers de (1) et (2) respectivement, lorsque A est une implication. Nous illustrons ci-dessous chacun d'eux avec des exemples de propositions pour lesquelles des démonstrations par l'absurde nous semblent intéressantes.

Exemple 4

- Proposition

Quels que soient les entiers relatifs a et b , $(a + b\sqrt{2} = 0) \Rightarrow b = 0$.

- Démonstration

On suppose qu'il existe a et b entiers relatifs tels que $a + b\sqrt{2} = 0$ et $b \neq 0$. Ceci est équivalent à $\sqrt{2} = \frac{-a}{b}$, ce qui entraîne que $\sqrt{2}$ est rationnel, or cette proposition est fausse.

Donc $b = 0$.

On a le schéma (1 bis), P est la proposition « il existe a et b entiers relatifs tels que $a + b\sqrt{2} = 0$ » et Q la proposition « $b = 0$ ». C est la proposition « $\sqrt{2}$ est rationnel ».

Exemple 5

- Proposition

Dans l'ensemble des suites réelles, pour toute suite (u_n) , **si** $u_0 > 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n^2$, **alors** (u_n) diverge.

- Démonstration

On suppose qu'il existe une suite (u_n) vérifiant $u_0 > 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n^2$ **et** (u_n) converge vers une limite ℓ finie. Comme $u_{n+1} = u_n^2$, $\ell^2 = \ell$. Donc $\ell = 0$ ou $\ell = 1$, ce qui entraîne $\ell \leq 1$. D'autre part, on peut démontrer aisément que (u_n) est croissante et $u_0 > 1$, donc $\ell \geq u_0 > 1$. On aboutit à deux propositions contradictoires, $\ell \leq 1$ et $\ell > 1$. Donc (u_n) diverge.

On a le schéma (2 bis) avec la proposition P : « $u_0 > 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n^2$ » et la proposition Q : « (u_n) diverge ». Les propositions C et $(non C)$ sont « $\ell \leq 1$ » et « $\ell > 1$ ».

Supposer l'existence d'une limite ℓ permet de travailler avec des égalités et inégalités, ce

que l'on sait faire. Raisonner directement avec l'hypothèse de la divergence de la suite semble plus difficile à gérer. Notons que la proposition C du cas (2 bis) peut être la proposition ($\text{non } P$) mais aussi la proposition Q comme dans les exemples suivants.

Exemple 6

[pour le cas (2 bis) où C est la négation d'une composante de P]

- Proposition

Si une suite est croissante et convergente vers une limite finie ℓ , alors tous ses termes sont inférieurs ou égaux à ℓ .

- Démonstration

Soit (u_n) une suite croissante et convergente vers ℓ et telle qu'il existe $p \in \mathbb{N}, u_p > 1$. Comme la suite (u_n) est croissante, on a pour tout $n \geq p, u_n \geq u_p > \ell$. L'intervalle ouvert $]\ell - 1; u_p[$ contient ℓ mais ne contient pas les termes u_n à partir du rang p . La suite ne peut donc pas converger vers ℓ . On aboutit à deux propositions contradictoires : la suite converge vers ℓ et la suite ne converge pas vers ℓ . Donc, pour tout $n, u_n \leq \ell$.

On a le schéma (2 bis) avec la proposition P : « (u_n) croissante et convergente vers ℓ » et la proposition Q : « pour tout $n, u_n \leq \ell$ ». La proposition C est « (u_n) est convergente vers ℓ ». Ici, le raisonnement par l'absurde consiste à démontrer qu'il n'existe pas de terme strictement supérieur à ℓ . Un raisonnement direct consisterait à démontrer que tous les termes sont inférieurs ou égaux à ℓ .

Exemple 7

[pour le cas (2 bis) où $C = Q$]

- Proposition (transitivité du parallélisme)

Si [une droite (D_1) est parallèle à une droite (D_2) et la droite (D_2) est parallèle à une droite (D_3)] alors la droite (D_1) est parallèle à la droite (D_3) .

- Démonstration

On suppose que [(D_1) est parallèle à (D_2) et (D_2) est parallèle à (D_3)] **et** (D_1) et (D_3) sont sécantes. Soit A le point d'intersection de (D_1) et (D_3) . (D_1) est alors la parallèle à (D_2) passant par A et (D_3) est la parallèle à (D_2) passant par A . Donc, par unicité de la parallèle à une droite passant par un point, (D_1) et (D_3) sont confondues. Donc elles sont parallèles. On aboutit à deux propositions contradictoires : (D_1) et (D_3) sont sécantes et (D_1) et (D_3) sont parallèles.

On a le schéma (2 bis) avec la proposition P : « la droite (D_1) est parallèle à la droite (D_2) et la droite (D_2) est parallèle à la droite (D_3) » et la proposition Q : « la droite (D_1) est parallèle à la droite (D_3) ». La proposition C est la proposition Q .

Note

Certains des exemples étudiés dans ce paragraphe sont « classiques », voire emblématiques de l'illustration du raisonnement par l'absurde dans l'enseignement au lycée (exemples 2, 3, 5 et 6). D'autres, au contraire, ne sont pas familiers des élèves parce qu'ils concernent des propositions considérées comme acquises (exemples 1 et 7) ou parce qu'ils font appel à des connaissances moins travaillées actuellement (exemple 4).

2. Raisonnement par l'absurde et raisonnement par contraposition

Le raisonnement par contraposition est basé sur l'équivalence d'une implication et de sa « contraposée » : A et B étant deux propositions quelconques, $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\text{non } B \Rightarrow \text{non } A)$.

Démontrer par contraposition l'implication $A \Rightarrow B$ consiste à démontrer l'implication $\text{non } B \Rightarrow \text{non } A$. Pour cela, on suppose $(\text{non } B)$ vraie et on en déduit $(\text{non } A)$ vraie.

Rappelons que démontrer l'implication $A \Rightarrow B$ par l'absurde consiste à démontrer une implication $(A \text{ et } (\text{non } B)) \Rightarrow C$, où C est une proposition fausse. On suppose que $(A \text{ et } (\text{non } B))$ est vraie ; les deux hypothèses A et $(\text{non } B)$ sont utiles (et utilisées) dans le raisonnement.

Dans le cas d'implications quantifiées universellement par une variable $\forall x, A(x) \Rightarrow B(x)$, la quantification est différente : le raisonnement par contraposition consiste à étudier une implication quantifiée universellement, $\forall x, \text{non } B(x) \Rightarrow \text{non } A(x)$, alors que le raisonnement par l'absurde consiste à étudier une proposition existentielle $\exists x, A(x) \text{ et } \text{non } B(x)$, dont on va conclure qu'elle est fausse. Tant du point de vue de l'écriture que du point de vue sémantique, ces deux types de raisonnements sont donc bien distincts. Illustrons cela.

Exemple 8

- Proposition

Quel que soit n entier, n^2 pair $\Rightarrow n$ pair.

- Démonstration par contraposition

Raisonnement par contraposition revient à établir que quel que soit n entier, n impair $\Rightarrow n^2$ impair.

Quel que soit n impair, il existe un entier relatif k tel que $n = 2k + 1$.

Alors $n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$. Donc n^2 est un nombre impair.

Ceci démontre que pour tout entier n , n impair $\Rightarrow n^2$ impair.

- Démonstration par l'absurde

On suppose qu'il existe n entier tel que n^2 pair et n impair. Puisque n est impair, il existe un entier relatif k tel que $n = 2k + 1$. On en déduit, comme précédemment, que $n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$, donc que n^2 est un nombre impair. On aboutit à deux propositions contradictoires : n^2 est pair et n^2 est impair. La proposition « il existe n entier tel que n^2 pair et n impair » est donc fausse.

Ceci démontre que pour tout entier n , n^2 pair $\Rightarrow n$ pair.

Dans cette deuxième démonstration, l'hypothèse « n^2 pair » n'a pas été nécessaire pour conclure. On peut dire que c'est un « faux » raisonnement par l'absurde. La démonstration par contraposition est plus convaincante ici.

Remarquons qu'un raisonnement direct sur l'hypothèse « n^2 pair » pour arriver à la conclusion « n pair » serait plus difficile à conduire. En effet, « n^2 pair » se traduit par « il existe k entier tel que $n^2 = 2k$ », il faut ensuite considérer la racine carrée positive de $2k$, or cette écriture ne dit rien ni sur k , ni sur la parité de n .

Exemple 9

- Proposition

Pour tout x réel, si quel que soit $\varepsilon > 0, |x| \leq \varepsilon$, alors $x = 0$.

Cet exercice est donné très souvent pour illustrer ou faire effectuer un raisonnement par l'absurde, alors qu'un raisonnement par contraposition est très adapté ici. Nous laissons au lecteur la soin de vérifier cela.

Reconnaître qu'une démonstration par l'absurde peut être remplacée avantageusement par une démonstration par contraposition est parfois difficile. Comme nous le verrons dans la partie II (p. 14), ces deux types de raisonnement sont souvent confondus (à tort) dans les manuels.

3. Raisonnement par l'absurde et raisonnement par récurrence

Ces deux types de raisonnement sont souvent perçus comme n'ayant aucun rapport, voire comme étant incompatibles. Dans ce paragraphe, nous allons donner des exemples où leur utilisation conjointe permet de démontrer de manière convaincante des propositions fondamentales. Ainsi, cette rencontre est fructueuse lorsque la proposition étudiée concerne des ensembles de cardinal infini (dénombrables), où le raisonnement par récurrence est un outil « naturel », basé sur l'axiomatique de \mathbb{N} . Le principe de Fermat peut se donner sous l'une des deux formes équivalentes suivantes :

(F_1) Tout ensemble non vide de \mathbb{N} admet un plus petit élément.

(F_2) Il n'existe pas de suite infinie strictement décroissante dans \mathbb{N} .

Une autre écriture équivalente de (F_2) est souvent utilisée dans certaines démonstrations de théorèmes fondamentaux en mathématiques discrètes.

(F_2 bis) Si, pour tout n tel que $P(n)$ soit vraie, il existe $m < n$ tel que $P(m)$ soit vraie, alors pour tout n , $P(n)$ est faux.

Nous en donnons un exemple ci-après.

Le raisonnement par l'absurde est adapté pour des conjectures qui concernent l'infini, il est peut-être même difficile à éviter. Par exemple, la preuve de l'irrationalité de \sqrt{n} lorsque l'entier n n'est pas un carré parfait est un « bon problème » pour cette rencontre.

Exemple 10

Démonstration par l'absurde de la validité du principe de récurrence

Dans l'axiomatique de \mathbb{N} , si on admet le « principe de récurrence » comme axiome, alors on peut démontrer que \mathbb{N} est bien ordonné⁵. Mais si on admet comme axiome que \mathbb{N} est bien ordonné, on peut prouver la validité du principe de récurrence. Dans les deux cas, un raisonnement par l'absurde est nécessaire. Pour ce dernier, voici une démonstration.

• Proposition

S'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $P(n_0)$ soit vraie et pour tout $n \geq n_0$, $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ soit vraie, alors pour tout $n \geq n_0$, $P(n)$ est vraie.

• Démonstration

Supposons qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $P(n_0)$ soit vraie et pour tout $n \geq n_0$, $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ soit vraie **et** qu'il existe un entier $n \geq n_0$ tel que $P(n)$ soit fausse. Soit $E = \{n \in \mathbb{N}, n \geq n_0, P(n) \text{ soit fausse}\}$. $E \neq \emptyset$ puisqu'il existe un entier $n \geq n_0$ tel que $P(n)$ soit fausse. E admet un plus petit élément m . Puisque $P(n_0)$ est vraie, on en déduit que $m > n_0$ et $P(m-1)$ est vraie, d'où comme $P(m-1) \Rightarrow P(m)$ est vraie, on obtient une contradiction avec la définition de m . Donc, il n'existe pas d'entier $n \geq n_0$ tel que $P(n)$ soit fausse. On en déduit que pour tout $n \geq n_0$, $P(n)$ est vraie.

On est dans le cas (2 bis) avec la proposition P qui est la conjonction de deux propositions P_1 : « il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $P(n_0)$ soit vraie » et P_2 : « pour tout $n \geq n_0$, $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ est vraie » et la proposition Q : « pour tout $n \geq n_0$, $P(n)$ est vraie ». La proposition C est Q .

• Question

Peut-on éviter le recours à l'absurde ?

⁵ Un ensemble ordonné (E, \leq) est bien ordonné ssi toute partie non vide de E possède un plus petit élément.

Un raisonnement par contraposition consiste à établir que $(\text{non } Q) \Rightarrow [(\text{non } P_1) \text{ ou } (\text{non } P_2)]$.

Soit $E = \{n \in \mathbb{N}, n \geq n_0, P(n) \text{ fausse}\}$. L'hypothèse $(\text{non } Q)$ entraîne que $E \neq \emptyset$, donc E admet un plus petit élément m .

- Si $m = n_0$, alors $P(n_0)$ est fausse. On obtient $(\text{non } P_1)$;

- Si $m > n_0$, alors $P(m-1) \Rightarrow P(m)$ est fausse (car $P(m-1)$ est vraie et $P(m)$ est fausse), ce qui prouve $(\text{non } P_2)$ (puisque'il s'agit d'un contre-exemple à P_2).

On a donc établi que $(\text{non } Q) \Rightarrow [(\text{non } P_1) \text{ ou } (\text{non } P_2)]$.

Dans ce cas, on peut réduire le raisonnement par l'absurde à un raisonnement par contraposition.

Note

Des études didactiques (Gardes et al., 2016 ; Grenier, 2003, 2012 ; Grenier & Payan, 1998) ont montré que le concept de récurrence et le raisonnement associé sont très mal compris par la grande majorité des élèves et des étudiants de licence scientifique. Le « sens » de la récurrence et son intérêt comme outil de démonstration sont absents. De plus, l'idée qu'un raisonnement par l'absurde est incompatible avec un raisonnement par récurrence est très répandue, parce que la récurrence n'est connue que sous la forme d'un principe en deux étapes qui n'est, de fait, pas transposable facilement pour mener un raisonnement par l'absurde.

4. Conclusion - Intérêt d'un raisonnement par l'absurde

Notre étude du raisonnement par l'absurde et les exemples qui l'illustrent montre sa richesse comme outil de démonstration et son apport pour l'apprentissage de la logique. Le raisonnement par l'absurde est particulièrement adapté pour démontrer des propositions élémentaires écrites sous forme négative. Par exemple, pour démontrer que zéro n'a pas d'inverse (exemple 1, p. 7), que $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel (exemple 3, p. 8) ou encore que la suite définie par $u_n = (-1)^n$ n'a pas de limite.

Nous avons mis en évidence de vraies différences entre le raisonnement par l'absurde et le raisonnement par contraposition (exemple 8, p. 11). En effet, le raisonnement par contraposition ne s'applique qu'à des propositions de type $(P \Rightarrow Q)$, et l'on va considérer une nouvelle implication $(\text{non } P) \text{ implique } (\text{non } Q)$ quantifiée universellement. Dans un raisonnement par l'absurde, la proposition étudiée, $(P \text{ et } \text{non } Q)$, n'est plus une implication, on ne nie qu'une seule des propositions (Q) , et la quantification est existentielle. Nous avons aussi illustré l'intérêt de croiser le raisonnement par l'absurde avec le raisonnement par récurrence dans lequel le principe de descente infinie est en jeu (exemple 10).

Dans certains cas, le raisonnement par l'absurde est difficile à remplacer par un autre type de raisonnement. Le lecteur est invité à chercher comment démontrer autrement la proposition de l'exemple 1 : « 0 n'a pas d'inverse dans \mathbb{R} ». Dans d'autres cas, il existe d'autres types de preuve qui peuvent être plus difficiles à appréhender, comme pour la démonstration de la proposition de l'exemple 2 : « Il existe un nombre infini de nombres premiers ».

Si le raisonnement par l'absurde est largement utilisé en arithmétique et en géométrie euclidienne non repérée — hélas absents des programmes de lycée —, il est pertinent aussi pour l'étude des fonctions et de l'ensemble des nombres réels, et particulièrement adapté pour les problèmes concernant l'infini.

Pour l'apprentissage de la logique et du raisonnement, le raisonnement par l'absurde présente de nombreux points d'intérêt :

- il mobilise de nombreux concepts de logique : proposition, négation d'une proposition ; connecteurs (« et », « ou »), quantificateurs (quel que soit, il existe) ;
- il nécessite de travailler sur une hypothèse fautive — la négation de la proposition étudiée —, ce qui conduit à explorer cette proposition sous des points de vue opposés (finalement, est-elle vraie ou fautive ?).

Pour poursuivre notre étude, nous nous sommes intéressés à ce qui peut être proposé aux élèves de lycée concernant le raisonnement par l'absurde. Pour cela, nous avons analysé les programmes en vigueur en 2018 et des collections de manuels scolaires.

Partie II. Programmes et manuels scolaires

1. Programmes et documents ressources

Dans les programmes (MEN, 2009a, 2010, 2011), le raisonnement par l'absurde est donné dans un tableau réservé aux notions de logique, identique pour les trois années de lycée. Aucune progression pour l'enseignement de ces notions sur les trois années n'est indiquée. Faut-il par exemple introduire l'équivalence avant l'implication (ce que font certains manuels) ? Comment aborder ces notions, les définir, les illustrer ? On trouve peu de réponses à ces questions. Enfin, l'enseignement de la logique n'étant pas aussi bien installé que celui des notions « classiques » (arithmétique, analyse, algèbre, géométrie), les enseignants ne peuvent s'appuyer que sur des documents ressources et les manuels.

À notre connaissance, il n'existe qu'un seul document « ressource » mentionnant explicitement le raisonnement par l'absurde : celui pour la classe de 2^{nde}, *Notations et raisonnement mathématiques* (MEN, 2009b, p. 6). Il ne donne qu'un seul exemple :

Soit ABC un triangle. Si D est une droite qui partage le triangle en deux triangles de même aire, alors D est une médiane de ce triangle.

Ce document affirme « *qu'un raisonnement par l'absurde est possible* » pour démontrer cette propriété mais il ne détaille pas la démonstration. Et notre analyse nous conduit à penser qu'un raisonnement par contraposition serait plus pertinent : en effet, il est facile de démontrer que « *quelle que soit la droite passant par un sommet, si elle n'est pas une médiane, alors les aires des deux triangles obtenus ne sont pas égales* ». Il est regrettable que les documents ressources ne proposent pas d'autres exemples, ce raisonnement étant explicitement dans les programmes.

Nous avons également cherché, dans les sujets de baccalauréat série scientifique entre 2008 et 2017, où pouvait être convoqué de façon pertinente un raisonnement par l'absurde. Nous avons trouvé trois sujets comportant un exercice où une démonstration par l'absurde nous semble pertinente, voire nécessaire (Liban, juin 2008, exercice 3 ; Métropole, juin 2010, exercice 2 ; Centres étrangers, juin 2012, exercice 2). Tous ces exercices portent sur les suites, et aucun de ces énoncés ne mentionne qu'un tel raisonnement peut être employé.

Notons aussi que dans certains corrigés, disponibles sur Internet, les auteurs ne mentionnent pas qu'ils effectuent un raisonnement par l'absurde. Notre analyse montre la place réduite accordée au raisonnement par l'absurde dans les sujets de baccalauréat. Ceci peut s'expliquer par la disparition, dans les programmes, de champs de mise en œuvre de ce raisonnement, tels que l'arithmétique (excepté en spécialité) ou la géométrie non repérée. De plus, la logique ne devant

pas faire l'objet d'un chapitre particulier (MEN, 2009a, 2010, 2011), le raisonnement par l'absurde ne semble vivre qu'à travers quelques exemples, sans être un objet d'étude, à la différence du raisonnement par récurrence (Gardes et al., 2016).

Il nous a semblé que les manuels avaient donc un rôle particulier à jouer pour donner des pistes d'enseignement. Sans indications claires sur la progression et l'importance à accorder à chacune des notions « au programme », nous avons cherché à repérer les choix des auteurs de manuels scolaires pour le raisonnement par l'absurde : définitions, place et rôle attribués à ce type de raisonnement, exercices, etc. Nous donnons ici le résultat de notre étude de quelques collections, portant essentiellement sur les définitions dans les parties « cours », les exemples qui illustrent et suivent les définitions, et les « exercices d'application » lorsqu'il y en a. Nous présentons les résultats de notre étude d'abord par niveau (2^{nde}, 1^{re} S, T^{ale} S), avant de décrire la progression à l'intérieur d'une même collection.

2. Analyse de manuels scolaires

Nous avons étudiés les manuels de chaque année de lycée pour les six collections suivantes :

- *Déclic*, Hachette, 2^{nde} (2014), 1^{re} S (2015) et T^{ale} S (2012) ;
- *Hyberbole*, Nathan, 2^{nde} (2014), 1^{re} S (2015) et T^{ale} S (2017) ;
- *Indice*, Bordas, 2^{nde} (2017 et 2014), 1^{re} S (2015) et T^{ale} S (2016) ;
- *Math'x*, Didier, 2^{nde} (2014), 1^{re} S (2015) et T^{ale} S (2016) ;
- *Repères*⁶, Hachette, 2^{nde} (2010), 1^{re} S (2011) et T^{ale} S (2012) ;
- *Transmath*, Nathan, 2^{nde} (2010), 1^{re} S (2011) et T^{ale} S (2012).

2.1. Les manuels de 2^{nde}

La diversité des manuels sur le RpA⁷ est évidente : absent de la partie « cours » d'un des six manuels (*Hyberbole 2014*), il occupe une très grande place dans le manuel *Indice 2017*, les quatre autres l'abordant de manière insuffisante (*Déclic 2014*, *Math'x 2014*, *Repères 2010*, *Transmath 2012*). Précisons.

Le manuel *Hyberbole 2014* propose (dès le début) trois pages « *Logique et raisonnement* » mais le RpA est absent. Il n'apparaît qu'une seule fois dans ce manuel : dans un titre d'exercice (p. 264, exercice 61), annoncé dans l'index. Aucune définition n'est donnée et, de plus, son utilisation dans l'exercice est délicate à mettre en œuvre (même pour nous !) (annexe II.1.).

Le manuel *Déclic 2014* présente le RpA dans la rubrique *Quelques outils pour raisonner* d'une page intitulée *Logique*, suivi d'un exemple dans la marge du manuel. Il est écrit :

Le manuel *Déclic 2014* présente le RpA dans la rubrique *Quelques outils pour raisonner* d'une page intitulée *Logique*, suivi d'un exemple dans la marge du manuel. Il est écrit :

Le raisonnement par l'absurde : on suppose que la conclusion attendue est fautive ; si on arrive à un résultat absurde (faux) on peut en déduire que la conclusion attendue est vraie. Exemple : Pour montrer que 0 n'a pas d'inverse, on suppose qu'il en a un noté a. Par la définition d'un inverse, on a $0 \times a = 1$ ou encore $0 = 1$ ce qui est absurde : on conclut que 0 n'a pas d'inverse.

Dans la définition, on retrouve ce vocabulaire flou adopté par de nombreux manuels : de quelle

⁶ La collection *Repères* n'a pas édité de manuel depuis 2012.

⁷ Nous nous sommes autorisés à désigner le « raisonnement par l'absurde » par les lettres « RpA », en particulier dans cette partie II où il est très souvent nommé. Évidemment, nous l'avons laissé tel quel dans les extraits cités.

conclusion s'agit-il (en fait, la proposition à démontrer) ? Qu'est-ce qu'un résultat « absurde » ? Comment interpréter cette « conclusion » dans le cas d'une implication, les formulations « si ..., alors ... » étant très courantes en classe ?

L'exemple qui suit permet de mieux repérer la structure du RpA : ce que l'on veut démontrer est explicite, ce que l'on suppose aussi (même s'il n'est pas dit que c'est la *négation* de la proposition), mais $0=1$ est déclaré « absurde » alors que c'est une proposition fausse.

Le manuel *Math'x 2014* propose (à la fin du livre) quatre pages intitulées « *Raisonnement logique* » où le RpA apparaît dans le paragraphe « *Autres types de raisonnement* ». Une définition et un seul exemple sont donnés (figure 1).

Raisonnement par l'absurde

Pour démontrer qu'une proposition est vraie, on montre qu'elle ne peut pas être fausse.
On suppose donc que sa négation est vraie et on montre que c'est impossible !

Énoncé : Démontrer $\sqrt{2} \neq 1,414\ 213\ 562$.

Démonstration : Supposons que $\sqrt{2} = 1,414\ 213\ 562$.
Alors $\sqrt{2}^2 = 1,414\ 213\ 562^2$. Or $\sqrt{2}^2 = 2$ et $1,414\ 213\ 562^2$ a pour dernier chiffre 4. On arrive à une contradiction.
Il est donc impossible que $\sqrt{2} = 1,414\ 213\ 562$ (ce n'est qu'une valeur approchée).

$\sqrt{(2)}$ 1.414213562

Figure 1 : Extrait *Math'x 2^{nde} 2014*.

Cette définition n'est pas opératoire, elle ne précise pas ce qu'est une impossibilité et d'où elle peut provenir. En revanche, les auteurs emploient le terme de « *négation* » d'une proposition. L'exemple n'est pas judicieux puisque la démonstration peut se ramener facilement à une démonstration par contraposée. Un seul exercice dans le manuel fait référence au RpA (dans son titre), dans la rubrique « *Logique* » (exercice 85 p. 331). Une aide est proposée pour amorcer la démonstration, mais la proposition à démontrer est fausse sans information supplémentaire sur les quatre points ! (annexe II.2.).

Le manuel *Repères 2010* a fait le choix de décrire « *La démonstration par l'absurde* » dans la même page que « *Appartenance et inclusion* », dans le chapitre 6 : « *Géométrie dans l'espace* ». Elle est présentée comme un « *principe* » (figure 2).

Principe

Démontrer qu'une proposition B est vraie sous certaines hypothèses A revient à démontrer que, si A est vraie, alors cela implique que B est vraie.

Pour le démontrer, on peut utiliser un **raisonnement par l'absurde** :

1. On suppose à la fois que les hypothèses A sont vérifiées et que la proposition B est fausse.
2. On utilise les propriétés, définitions et théorèmes dont on dispose pour aboutir, au bout d'une chaîne logique, à une nouvelle proposition C qui est **absurde** ou **contradictoire** avec nos hypothèses A.
3. Cette contradiction nous permet de conclure que la proposition B est nécessairement vraie.

Figure 2 : Extrait *Repères 2^{nde} 2010*.

La définition est donc donnée seulement pour une implication. La structure du RpA est reconnaissable, mais il n'est pas dit que $(A \text{ et } \text{non } B)$ est la négation de $(A \Rightarrow B)$. Les deux conclusions possibles (une « *proposition absurde* » ou une contradiction avec les hypothèses) sont évoquées. Mais il n'est pas non plus dit ce qu'est une « *proposition absurde* » (en fait, une proposition fausse). Le seul « exemple » qui suit est la démonstration que « *si n^2 est pair, alors n est pair* » (annexe II.3.). Nous jugeons que le RpA n'est pas vraiment utile ici, un raisonnement par contraposée suffit (voir exemple 8 de cet article, p. 11).

Dans le manuel *Transmath 2010* (§8.2, p. 265), après un exemple accompagné d'une bulle où on peut lire : « « Absurde » signifie « contraire à la raison, au bon sens » », la démonstration par l'absurde est définie dans le « cas général » :

Pour démontrer par l'absurde une implication : « (P) implique (Q) », on conserve l'hypothèse (P) et on ajoute à cette hypothèse, l'hypothèse supplémentaire : (non Q) (négation de la conclusion).

Puis à partir de (P) et (non Q), on déroule un raisonnement qui aboutit à une contradiction. Il en résulte alors que l'hypothèse (non Q) est fautive, donc que (Q) est vraie, lorsque (P) est vraie.

Outre les mêmes remarques sur le flou du vocabulaire rencontré dans les manuels précédents, la définition est donnée seulement pour une implication. Il n'est pas explicité pourquoi c'est (non Q) qui est fautive.

L'exemple choisi pour accompagner cette définition est la démonstration de la proposition : « Pour tout entier n , la proposition (P) : « n^2 est un entier pair » implique la proposition (Q) : n est un entier pair ». La négation est écrite avec le quantificateur « il existe », la démonstration que n impair implique n^2 impair est détaillée. Puis il est dit que « n^2 impair » contredit « n^2 pair », mais l'hypothèse « n^2 pair » n'a jamais été utilisée. Ce n'est donc un véritablement un RpA.

Le manuel *Indice 2017* se distingue des manuels précédents par la place et l'attention qu'il accorde au RpA. Celui-ci est en effet répertorié dans l'index et illustré dans plusieurs pages et différents registres : un exercice sur les fonctions, un problème du second degré, deux propriétés en géométrie dans l'espace. De plus la définition est claire, située dans les pages logiques du début du manuel, avec un exemple pertinent en géométrie plane. Nous allons détailler tout cela.

- En page 43, chapitre 2 - *Fonctions numériques*. Dans « le savoir-faire du cours » intitulé « Identifier la variable et l'ensemble de définition », une étiquette « Logique » indique la présence d'un raisonnement par l'absurde dans l'exercice proposé. Il s'agit de montrer qu'une distance entre un point fixe A et un point courant M ne peut être égale à 4, sachant que M appartient au segment $[AI]$ et que $AI=3$! (cf. annexe II.4.). Mais, ici, un raisonnement direct suffit.

- En page 114, partie « Cours » du chapitre 5 - *Problèmes du second degré*. Tout de suite après la définition de la fonction « carré », on trouve, sous le logo « Logique » :

Pour prouver que la fonction « carré » n'est pas linéaire, on effectue un raisonnement par l'absurde. Soit f la fonction « carré » ; supposons que f soit linéaire : il existe alors un nombre réel k tel que $f(x)=k \cdot x$. Donc $f(1)=k \cdot 1$ et $f(2)=k \cdot 2$. Or on sait que le carré de 1 est égal à 1, c'est-à-dire $f(1)=1$; k est donc égal à 1 d'où $f(2)=2$, ce qui est absurde car $f(2)=4$.

Et dans la marge, un encadré intitulé « Logique » donne la définition suivante du RpA : « Pour prouver qu'un énoncé est faux, on peut supposer qu'il est vrai, puis aboutir à une contradiction. Ce type de raisonnement est appelé **raisonnement par l'absurde** ».

Mais cette définition n'explique pas ce qu'est une contradiction ni comment l'obtenir.

- En page 316, partie « Cours » du chapitre 14 - *Géométrie dans l'espace*, on trouve deux démonstrations dites « par l'absurde », pour démontrer la propriété (2) suivante :

(1) Si deux droites (D_1) et (D_2) sont parallèles à une même droite (D_3) , alors les droites (D_1) et (D_2) sont parallèles entre elles.

(2) Si deux plans P et Q sont strictement parallèles, alors tout plan qui coupe le plan P coupe le plan Q et les droites d'intersection sont parallèles.

Et il est écrit dans la marge, sous le logo « Logique » : « Dans cette démonstration, on

utilise deux raisonnements par l'absurde ». Et tout de suite après la démonstration, toujours sous l'étiquette « *Logique* », les auteurs proposent une autre définition du RpA : « *Un raisonnement par l'absurde consiste à démontrer une proposition en prouvant que la proposition contraire conduit à une absurdité* ». Cette définition est, de manière surprenante, différente de celle proposée en page 114. Le vocabulaire est différent, « *énoncé* » versus « *proposition* », « *contradiction* » versus « *absurdité* » et apparition de « *proposition contraire* ». Là encore, cette définition ne précise pas ce qu'est une « *proposition contraire* » ou une « *absurdité* », ni comment les obtenir.

- En page 348, dans la partie « *Ensembles - Raisonnement logique* », dans un paragraphe sur le raisonnement par l'absurde, on peut lire une troisième définition de ce raisonnement (!), avec de nouveaux termes utilisés : « *proposition vraie* », « *proposition fausse* », « *hypothèse* ». La voici :

Montrer qu'une proposition P est vraie en raisonnant par l'absurde consiste à supposer que P est fausse et à montrer qu'avec cette hypothèse, on aboutit à une contradiction.

Comme dans les deux autres définitions, les auteurs n'explicitent pas ce qu'est une contradiction ni comment on peut l'obtenir. Nous pouvons ajouter qu'aucune des trois définitions proposées ne précise la nature de la proposition, qui peut être élémentaire (comme dans les exemples p. 43 et 114) ou une implication (comme dans l'exemple p. 316).

Remarque

Dans l'édition précédente (2014), ce manuel proposait, dans le chapitre « *Fonctions* », la démonstration par l'absurde classique de l'irrationalité de $\sqrt{2}$ (exercice 85, p. 31), puis, sous le logo « *Logique* », le commentaire suivant :

Dans cet exercice, pour démontrer que $\sqrt{2}$ est irrationnel, on a supposé qu'il était rationnel et on a abouti à une absurdité. On dit qu'on a effectué un raisonnement par l'absurde.

L'édition 2017 n'a pas retenu cet exemple — pourtant pertinent de notre point de vue.

Pour conclure sur l'analyse des six manuels de Seconde, nous pouvons mettre en évidence plusieurs points :

- Un seul manuel utilise l'expression « *négation d'une proposition* » alors que plusieurs la définissent par ailleurs, ils auraient donc pu la réutiliser. Un manuel évoque la « *négation de la conclusion* ». Aucun exercice permettant de travailler l'écriture et le sens de la négation d'une proposition n'est proposé, et pourtant cela ne va pas de soi.
- Aucun manuel n'explique, dans sa définition du RpA, ce qu'est une contradiction ni d'où elle peut provenir.
- Le vocabulaire employé entre les manuels, voire au sein d'un même manuel, est très divers, alors que les termes « *proposition* » et « *négation* » suffisent.
- Aucun manuel ne précise que le RpA peut s'appliquer sur une proposition élémentaire ou une proposition composée, en particulier une implication, et que le travail d'écriture est différent, ce qui permettrait en particulier d'éviter de le confondre avec une contraposition.
- Les exemples et les exercices d'application ne sont pas toujours pertinents, par exemple lorsque des raisonnements par contraposition ou par équivalence seraient plus faciles à conduire. Ou encore, lorsque, en supposant (*P* et *non Q*), on arrive à une contradiction de type (*P* et *non P*) sans en fait avoir utilisé l'hypothèse *P* dans la démonstration.

2.2. Les manuels de 1^{re} S

Les manuels de 1^{re} S des collections consultées sont aussi très différents sur la place accordée au raisonnement par l'absurde. Ainsi, nous n'avons trouvé aucune référence à ce raisonnement dans le manuel *Hyperbole 2015*, même dans les pages « Exercices ». Mais ce manuel n'évoque pas aucun autre type de raisonnement, ni dans les pages « Logique », ni dans l'index. Dans trois autres manuels (*Math'x 2015*, *Déclic 2015* et *Indice 2015*), le raisonnement par l'absurde est abordé de manière plus détaillée bien que succincte.

Le manuel *Transmath 2011* reprend la définition du manuel de 2^{nde} (p. 352 : « Quelques types de raisonnements »), en introduisant la notion de « proposition impossible » (figure 3). En fait, il s'agit là encore d'une proposition fautive.

De plus, l'idée d'ajouter une hypothèse à (P) n'est pas très heureuse : il s'agit en fait de considérer la conjonction $[(P) \text{ et } (\text{non } Q)]$, négation de l'implication $[(P) \text{ implique } (Q)]$.

1.4) Par l'absurde

Pour démontrer par l'absurde l'implication « (P) implique (Q) », on conserve l'hypothèse (P) et on ajoute l'hypothèse $(\text{non } Q)$.

À partir de l'hypothèse $(P \text{ et } (\text{non } Q))$, on déroule un raisonnement qui aboutit à une contradiction ou à une proposition impossible. Il en résulte que $(\text{non } Q)$ est fautive, donc que (Q) est vraie.

Figure 3 : Extrait *Transmath 1^{re} S 2011*.

Le manuel *Déclic 2015* propose, dans une page intitulée « Notations et logique, outils pour démontrer : contre-exemple, raisonnement par l'absurde, raisonnement par contraposition », au début du livre (p. XXIV), une définition suivie d'un exemple. Les voici (figure 4).

Raisonnement par l'absurde

Pour montrer qu'un énoncé est vrai, on peut supposer qu'il est fautive et aboutir à une absurdité (une contradiction, un résultat fautive).

Exemple

Pour montrer que 0 n'a pas d'inverse, on suppose qu'il en a un que l'on note a .

Par la définition d'un inverse, on a $0 \times a = 1$, ou encore $0 = 1$.

Cette égalité est fautive, donc 0 n'a pas d'inverse.

Figure 4 : Extrait *Déclic 1^{re} S 2015*.

La définition n'est pas utilisable, parce que la structure n'est pas évidente et le langage utilisé n'est pas précis : qu'est-ce qu'un « énoncé fautive » ? La « contradiction » est avec quoi ? En revanche, l'exemple est pertinent et illustre le cas où on arrive à une égalité fautive.

Dans le manuel *Math'x 2015*⁸, le RpA est abordé dans une page intitulée « Raisonnement logique » (p. 374) et dans un paragraphe sous-titré « Des raisonnements particuliers : raisonnement par contraposition, raisonnement par disjonction des cas, raisonnement par

⁸ L'index est très détaillé sur les notions de logique : toutes celles prévues au programme y figurent.

l'absurde ». Ce dernier est défini pour le seul cas d'une implication (figure 5).

Raisonnement par l'absurde

Pour démontrer que « $A \Rightarrow B$ » est vrai, on démontre que si A est vrai, il est impossible que B soit fausse. On suppose pour cela que A et la négation de B sont vraies et on arrive à une contradiction.

Énoncé : Soit A, B, C trois points non alignés. Démontrer que si \vec{u} est colinéaire à \overline{AB} et \overline{AC} alors $\vec{u} = \vec{0}$.

Démonstration : Supposons \vec{u} colinéaire à \overline{AB} et \overline{AC} et $\vec{u} \neq \vec{0}$. Soit D le point tel que $\overline{AD} = \vec{u}$. Alors D appartient à (AB) et à (AC). Comme $\vec{u} \neq \vec{0}$, on a $D \neq A$ et donc D est un point commun aux droites sécantes (AB) et (AC) autre que A. C'est impossible. Par conséquent, $\vec{u} = \vec{0}$.

Figure 5 : Extrait *Math'x 1^{re} S 2015*.

Si la structure du raisonnement est visible, il n'est pas dit que (A et non B) est la négation de l'implication. Cependant la notion de négation d'une proposition est présente (ce qui est rare dans les manuels étudiés). Il reste toujours cet implicite : avec quoi y-a-t-il une « contradiction » ? L'écriture de la démonstration qui est donnée illustre bien la structure évoquée dans la définition, mais on arrive à une conclusion « impossible » (en fait, une proposition fausse), qui n'est pas explicitée comme une contradiction.

Nous avons également trouvé, dans une page « Travaux pratiques » (p. 283), une démonstration par l'absurde tout à fait pertinente (annexe II.5.).

Le manuel *Indice 2015* donne la même définition qu'en seconde, suivie d'un exemple en arithmétique où le RpA a un vrai intérêt de notre point de vue : la démonstration qu'« il y a une infinité de nombres entiers » (annexe II.6.). Si la « définition » est minimaliste et peu opératoire, l'exemple concerne une proposition pour laquelle le RpA évite le recours à la preuve sur des inégalités, ce que demanderait un raisonnement par contraposition. Mais nous n'avons pas trouvé d'exercices mettant en œuvre le RpA, contrairement au manuel de 2^{nde} de la même collection.

En revanche, le manuel *Repères 2011* dédie une page entière à ce raisonnement avec plusieurs exercices d'applications, dans une page intitulée « Logique et notations » (p. 186). Le RpA est décrit de manière un peu surprenante par un algorithme en trois étapes, suivi d'une explication donnée sous forme de « principe ». Les voici (figure 6).

Pour démontrer qu'une propriété (ou un résultat) est vraie on peut utiliser un raisonnement par l'absurde.

Étape 1 - On suppose que le résultat que l'on veut démontrer est faux (c'est-à-dire que le contraire est vrai).

Étape 2 - On utilise cette hypothèse : on effectue un raisonnement ou un calcul. On aboutit à une absurdité.

Étape 3 - On conclut : La propriété est vraie.

Principe : L'hypothèse faite à l'étape 2 conduit à une absurdité (une contradiction ou une impossibilité) donc cette hypothèse est fausse.

Figure 6 : Extrait *Repères 1^{re} S 2011*.

Du point de vue langagier, la multiplicité des termes ou expressions pour parler des propositions rendent la lecture difficile :

- Confusions entre « proposition », « propriété », « résultat ».
- Dans l'étape 1, les auteurs utilisent « contraire » d'un résultat : de quel résultat est-il question ? La négation d'une proposition n'ayant pas été définie, quel sens donner à « contraire » ?
- Utilisation de trois termes différents pour évoquer la conclusion du RpA : « absurdité »,

« contradiction », « impossibilité ». Mais qu'est-ce qu'une impossibilité en mathématiques ? Une phrase fautive ? Autre ? Et avec quoi y a-t-il une « contradiction » ?

Deux exemples d'application suivent immédiatement. Les voici (figure 7).

Exemples

Application concrète :

Mon professeur nous a dit qu'il ferait peut-être un contrôle lundi.
Malheureusement j'ai été malade ce jour-là et n'ai pas pu aller en cours.
En revenant mardi mes camarades m'ont dit ne pas avoir eu le contrôle.
Montrer que le professeur n'a pas fait son contrôle lundi.

Application mathématique :

Montrer que pour tout $x \neq -5$ on a $\frac{2x-1}{x+5} \neq 2$.

Figure 7 : Extrait *Repères 1^{re} S 2011*.

Le premier exemple, dit « application concrète », pose vraiment question ! Il ne convaincra personne de l'intérêt de ce type de raisonnement et risque même de le désavouer auprès des élèves. Que démontre-t-il de plus que les affirmations des camarades, puisque pour faire ce raisonnement, il est nécessaire de supposer que ceux-ci disent vrai ? On est dans un cas fréquent d'exemples « de la vie courante » très mal choisis. Dans le second exemple, pour expliciter l'étape 1, il faut savoir écrire la négation de la proposition à démontrer. Or celle-ci contient un « pour tout » et deux symboles « \neq ». Quelles définitions ou propriétés permettront de trancher entre la phrase correcte et les phrases suivantes ?

- « il existe x , $x \neq -5$, tel que $\frac{2x-1}{x+5} \neq 2$ »,
- « il existe x , $x = -5$, tel que $\frac{2x-1}{x+5} \neq 2$ »,
- « il existe x , $x = -5$, tel que $\frac{2x-1}{x+5} = 2$ ».

La pertinence de la résolution de ces deux exemples proposée dans le manuel, illustrant les trois étapes de la « définition », est laissée au lecteur (figure 8).

Application concrète	Méthode	Application mathématique
Le professeur a fait son contrôle lundi.	On suppose que la conclusion est fautive.	Il existe un réel $x \neq -5$ tel que $\frac{2x-1}{x+5} = 2$.
Alors mes camarades me diraient l'avoir fait, ce qui est contradictoire.	On obtient une absurdité.	Alors $2x - 1 = 2(x + 5)$ soit $2x - 1 = 2x + 10$ d'où $-1 = 10$ ce qui est impossible.
Le professeur n'a pas fait son contrôle lundi.	On conclut.	Pour tout un réel $x \neq -5$ on a $\frac{2x-1}{x+5} \neq 2$.

Figure 8 : Extrait *Repères 1^{re} S 2011*.

Dans cette même page, quatre exercices d'application sont proposés (figure 9).

→ À vous de jouer

- 1 a) En utilisant une calculatrice, donner une valeur approchée de $\frac{941\ 664}{665\ 857}$ et de $\frac{1\ 414\ 213\ 562}{10^9}$.
- b) En utilisant un raisonnement par l'absurde, démontrer que $\frac{941\ 664}{665\ 857} \neq \frac{1\ 414\ 213\ 562}{10^9}$.
- 2 a) Montrer que si n est pair alors n^2 est pair.
- b) Montrer, en utilisant un raisonnement par l'absurde, que si n^2 est pair alors n est pair.
- c) Énoncer l'équivalence démontrée.
- 3 Montrer que $\sqrt{2}$ n'est pas un rationnel. Pour cela, on utilisera une démonstration par l'absurde en partant de l'hypothèse : $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ où p et q ($q \neq 0$) sont premiers entre eux, et on s'aidera du résultat de l'exercice 2.
- 4 En utilisant la figure ci-contre, dire si le point D est l'image du point C par la translation de vecteur \overline{AB} .

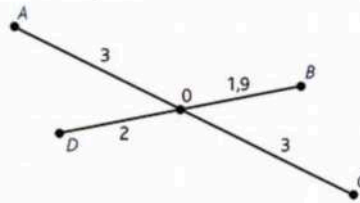


Figure 9 : Extrait *Repères 1^{re} S 2011*.

- Le premier exercice consiste à examiner si deux fractions sont égales. On a l'équivalence suivante : $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow a \times d = b \times c$. Ensuite, on utilise la contraposée de l'implication : « Pour tous a et b entiers naturels, $(a=b) \Rightarrow a$ et b ont le même chiffre des unités ». Le RpA n'est donc pas justifié ici.
- Pour le deuxième exercice, un raisonnement par contraposition est suffisant. Il est aisé de démontrer que pour tout n entier naturel, n impair implique n^2 impair (cf. exemple 8, partie I, p. 11).
- Le troisième exercice est la démonstration classique par le pair et l'impair de l'irrationalité de $\sqrt{2}$ (cf. exemple 3, partie I, p. 8) où le RpA prend tout son sens.
- Le quatrième exercice demande de vérifier si un point est l'image d'un deuxième point par une translation, ce qui revient à vérifier qu'un quadrilatère est un parallélogramme. Au vu des données, on peut affirmer que les diagonales du quadrilatère ne se coupent pas en leur milieu, propriété équivalente à ce que le quadrilatère soit un parallélogramme. Ici le RpA n'est pas légitime.

Seuls deux exercices de ce manuel font explicitement référence au RpA.

- Le premier (exercice 42, p. 164) demande de « montrer qu'il n'existe pas de valeur positive de x telle que la moyenne et l'écart type d'une série statistique (dépendante de x) soient égaux ». Il s'agit de la résolution d'une équation qui n'a pas de solution. Le RpA ne nous semble pas pertinent.
- Le second (exercice 106, p. 293) demande de démontrer par un RpA que pour a et b deux réels non nuls, $-1 \leq \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} \leq 1$. Or un raisonnement direct est possible et plus simple.

En effet, écrire la négation d'une double négation n'est pas vraiment facile.

Pour conclure sur l'analyse des six manuels de 1^{re} S, nous pouvons réitérer nos remarques concernant l'analyse des six manuels de 2^{nde}, tout en remarquant que le RpA est nettement moins présent, notamment dans les exercices proposés.

2.3. Les manuels de T^{ale} S

Dans toutes les collections étudiées, le RpA a très peu de place en T^{ale} S : parfois, il n'est pas du tout traité ni évoqué dans les pages dédiées à la logique, mais il apparaît toujours au moins une

fois dans une démonstration exigible d'un théorème sur les suites croissantes majorées.

Dans le manuel *Hyperbole 2017*, le RpA n'est pas défini. Il apparaît toutefois explicitement trois fois dans le manuel :

- En page 44, dans la démonstration du théorème « *Si une suite est croissante et converge vers un nombre réel L , alors tous ses termes sont inférieurs ou égaux à L* » ;
- En page 87, dans un exercice de la rubrique « *S'entraîner à la logique* » du chapitre 3 : « *Raisonnement par récurrence et suites* » (figure 10).
Dans ce cas, on a plutôt affaire à un raisonnement par contraposition : si la limite est non nulle alors le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ ne converge pas vers $\frac{3}{4}$.

87 Raisonner par l'absurde
 u est la suite définie, pour tout nombre entier naturel n non nul, par $u_n = \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} \times \frac{n+3}{4}$.

1. a) Vérifier que, pour tout nombre entier naturel n non nul, $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{3}{4} \left(1 + \frac{1}{n+3}\right)$.
b) En déduire que la suite u est convergente.
2. Raisonner par l'absurde et utiliser la limite de la suite $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ pour déterminer celle de la suite u .

Figure 10 : Extrait *Hyperbole T^{ale} S 2017*.

- En page 102, dans un exercice qui démontre le théorème du toit en géométrie dans l'espace. À l'occasion de cet exercice, une petite note rappelle ce qu'est le RpA. Comme très souvent, ce rappel n'est absolument pas opératoire et ne précise pas ce qu'est une contradiction ni comment l'obtenir (annexe II.7.).

Le manuel *Indice 2016* propose, dans pages intitulées « *Ensembles - Raisonnement logique* », la même définition du RpA suivie du même exemple que dans le manuel de *1^{re} S*. Outre cette définition, le RpA apparaît de manière presque toujours explicite sur cinq pages :

- En page 20, pour la démonstration concernant les suites croissantes et convergentes. Une petite note en bord de page affirme que le raisonnement effectué est un raisonnement par l'absurde.
- En page 41, dans l'exercice 124 intitulé « *Vers le supérieur* ». On demande de démontrer l'unicité de la limite d'une suite convergente.
- En page 108, dans la démonstration de l'unicité de la fonction exponentielle. En toute rigueur, les auteurs effectuent un raisonnement par contraposition : si le produit de deux nombres est différent de zéro alors ces deux nombres sont différents de zéro.
- En page 110, dans la démonstration de l'équivalence entre $\exp(a) = \exp(b)$ et $a = b$ pour tous réels a et b . L'utilisation du RpA n'est pas ici justifiée car il s'agit en fait d'un raisonnement par disjonction de cas — soit $\exp(a) > \exp(b)$, soit $\exp(a) < \exp(b)$, soit $\exp(a) = \exp(b)$ — puisque la stricte croissance de la fonction exponentielle est connue.
- En page 240, dans la démonstration de la propriété du cours « *si une droite (d_1) est parallèle à une droite (d_2) d'un plan (P), alors la droite (d_1) est parallèle au plan (P)* ». Cette démonstration est un bon exemple où le RpA est assez naturel dans la

phase de recherche, et finalement permet de se rendre compte qu'un raisonnement par contraposition suffit. (cf. annexe II.9.).

Le manuel *Math'x 2016* propose la même définition du RpA et le même exemple que dans le livre de *I^{re} S*. Le RpA apparaît lors des deux démonstrations habituelles (celle sur les suites croissantes et convergentes et celle du théorème du toit). Mais, pour la deuxième démonstration, aucune allusion explicite au RpA n'est mentionnée.

Une définition du RpA est proposée dans le manuel *Déclic 2012* à la fin du livre dans les cinq pages intitulées « *Logique et raisonnement mathématique* ». La voici (figure 11).

Par l'absurde

Au lieu de prouver $p \Rightarrow q$, on peut prouver que la conjonction p et non (q) conduit à une contradiction.

Figure 11 : Extrait *Déclic T^{ule} S 2012*.

La définition du RpA n'est donnée que pour une proposition implicative. Elle ne précise pas que (p et non q) est la négation de (p implique q). Rien n'est dit sur la contradiction. L'exemple qui suit est très mal choisi compte tenu de la définition précédente (figure 12). On demande de démontrer que l'ensemble des rationnels strictement supérieurs à 1 n'admet pas de plus petit élément. Cette proposition n'est pas une implication, ce qui amène les auteurs à écrire une proposition qui n'en est pas une. « *L'ensemble I des rationnels strictement supérieurs à 1* » n'est pas une proposition, quelle est sa valeur de vérité ?

EXEMPLE : On veut prouver l'ensemble I des nombres rationnels strictement supérieurs à 1 n'a pas de plus petit élément. On suppose l'existence d'un tel nombre rationnel qu'on nomme a . On construit alors le rationnel $b = \frac{1+a}{2}$. On a bien $b > 1$, donc $b \in I$, mais b est clairement plus petit que a , ce qui est contradictoire avec l'hypothèse « a est le plus petit élément de I ».
La preuve à produire est $I = \{x \in \mathbb{Q} / x > 1\} \Rightarrow I$ n'a pas de plus petit élément.
On a montré que ($I = \{x \in \mathbb{Q} / x > 1\}$) et (I a un plus petit élément) conduit à une contradiction.

Figure 12 : Extrait *Déclic T^{ule} S 2012*.

Le RpA est cité de manière explicite dans la démonstration du théorème sur les suites croissantes et convergentes. Dans deux autres cas, il n'est pas mentionné, même s'il est effectué dans la démonstration du théorème du toit ou s'il est fortement amené dans un exercice prouvant l'unicité de la limite d'une suite convergente.

Dans le manuel *Repères 2012*, la page consacrée au RpA (p. 547) commence ainsi :

*Il est parfois difficile de démontrer une affirmation en distinguant tous les cas possibles, et dans certains cas il peut s'avérer judicieux de démontrer l'absurdité du contraire. Cette démarche s'appelle le **raisonnement par l'absurde***

- on suppose le contraire d'une propriété,
- on démontre que tout raisonnement fondé sur cette supposition aboutit au moins à un **cas absurde**,
- on en déduit que la proposition contraire est absurde et donc que **la propriété est vérifiée**.

Cette présentation du RpA est surprenante : La première phrase semble dire que le RpA s'utilise quand on ne peut pas faire un raisonnement par exhaustivité des cas ! On retrouve les mêmes confusions des termes que dans le manuel *Repères 1^{re} S* pour désigner une proposition : « affirmation », « proposition », « propriété » ! On retrouve aussi les expressions utilisant le mot « contraire » pour désigner la négation d'une proposition alors qu'à la page précédente, la « négation d'une proposition » a été définie ! Qu'est-ce qu'un « cas absurde » ? En fait, ce qu'on déduit par ce type de raisonnement n'est pas que « la proposition contraire est absurde », mais que la négation de la proposition est fausse !

Les deux « applications » (annexe II.10.) qui suivent immédiatement sont :

- **Application 1** : démontrer que trois points définissent un plan si les vecteurs qu'ils définissent ne sont pas colinéaires. La démonstration est faite sur un exemple. En supposant que les vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires et donc qu'il existe k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$, on écrit cette relation sur les trois coordonnées et on conclut que k est égal en même temps à trois valeurs différentes. Ce qui est impossible. Il s'agit ici d'une démonstration présentée sous la forme d'un RpA. Mais celui-ci est peu judicieux. En effet, nous sommes en présence d'une proposition qui admet des propositions équivalentes aisément énonçables. Deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} non nuls sont colinéaires si et seulement s'il existe un réel k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$. On a donc utilisé l'équivalence suivante : \vec{u} et \vec{v} non nuls sont non colinéaires si et seulement s'il n'existe pas de réel k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$.
- **Application 2** : démontrer que l'écriture d'un vecteur de \mathbb{R}^3 dans un repère formé de trois vecteurs non coplanaires est unique. On suppose qu'il existe deux écritures différentes, pour aboutir à une combinaison linéaire nulle des trois vecteurs de la base. Les auteurs en déduisent que ces trois vecteurs sont coplanaires, or ils n'ont jamais affirmé ni démontré que la combinaison linéaire écrite n'est pas la combinaison linéaire triviale. Là encore, l'exemple n'est pas judicieux car la démonstration repose sur l'indépendance des vecteurs de la base.

Cette page se termine par quatre exercices, dans la rubrique « À vous de jouer », qui soulèvent chacun de vraies questions (annexe II.11.).

- Pour l'exercice 1, il est clair que $\frac{1}{2}q^n$ n'est jamais nul. Essayons d'effectuer un RpA. On suppose donc qu'il existe un entier naturel n tel que $u_n = 0$. On a $n \neq 0$ (car $u_0 \neq 0$), donc n admet un prédécesseur $n-1$. On obtient $u_n = q \times u_{n-1}$ et on en déduit que $u_{n-1} = 0$. On réitère ce raisonnement pour l'entier $n-1$. On construit ainsi une suite strictement décroissante d'entiers naturels telle que $u_i = 0$. Ceci est impossible puisque $u_0 \neq 0$.
On pourrait aussi considérer l'ensemble des entiers n tel que $u_n = 0$. Cet ensemble admet un plus petit élément noté n_0 qui est différent de 0. On aboutit à une contradiction avec l'égalité $u_{n_0} = q \times u_{n_0-1}$ où $u_{n_0} = 0$ et $u_{n_0-1} \neq 0$ par définition de n_0 .
- Pour l'exercice 2, qui penserait à effectuer un RpA pour démontrer que $\left(\frac{1}{2}\right)^n \leq 1$ pour tout entier naturel n ? Même si l'on n'admet pas que $\forall n \in \mathbb{N}^*, 2^n \geq 1$, on peut démontrer aisément cette inégalité par récurrence, et on en déduit le résultat par passage à l'inverse. Si on choisit un RpA, on suppose que $\exists n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\left(\frac{1}{2}\right)^n > 1$. En effectuant un raisonnement analogue à celui de l'exercice précédent, on aboutit à

$\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} > \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)} = 2 > 1$. On construit ainsi une suite strictement décroissante d'entiers

naturels i telle que $\left(\frac{1}{2}\right)^i > 1$, et on obtient une contradiction avec $\frac{1}{2} \leq 1$. Nous aurions pu

aussi raisonner avec le plus petit élément de l'ensemble des indices i tels que $\left(\frac{1}{2}\right)^i > 1$.

- L'exercice 3 est de nature différente. Il s'agit de démontrer une proposition qui admet des propositions équivalentes aisément énonçables. En effet pour $x \neq -3$, on a les équivalences :

$$\frac{x+2}{x+3} \neq 1 \Leftrightarrow x+2 \neq x+3 \Leftrightarrow 2 \neq 3 \text{ ou } \frac{x+2}{x+3} = 1 \Leftrightarrow x+2 = x+3 \Leftrightarrow 2 = 3$$

Il n'est pas évident qu'un RpA donne plus de sens à une proposition qui se démontre par équivalence.

- L'exercice 4 est du même type avec en plus une disjonction de cas (x positif ou x négatif).

Dans le *Transmath T^{ale} S 2012*, les pages sur le RpA sont les mêmes que celles du manuel de 1^{re} S, dans une partie identique, intitulée « *Quelques types de raisonnement* ». Nous citerons juste ici un théorème et sa démonstration (cf. annexe II.12.).

Théorème 2 Il existe une unique fonction f dérivable sur \mathbb{R} telle que :

pour tout nombre x , $f'(x) = f(x)$, et $f(0) = 1$.

La démonstration est indiquée comme « exigible ». Elle est présentée en deux parties : la démonstration par un raisonnement « direct » qu'une telle fonction ne s'annule pas en 0, puis une « démonstration par l'absurde » de l'unicité de cette fonction : on suppose qu'il existe deux fonctions différentes, on aboutit à leur égalité, ce qui est désigné comme un résultat « absurde », en fait une contradiction avec l'hypothèse.

Pour conclure sur l'analyse des manuels de T^{ale} S, nous pouvons souligner les points suivants. Les manuels ne laissent pas beaucoup de place au raisonnement par l'absurde mais il est toujours présent, a minima dans la démonstration exigible d'un théorème sur les suites croissantes majorées. Lorsqu'il est présent, c'est souvent dans des exercices portant sur les suites ou sur la géométrie (par exemple dans la démonstration du théorème du toit). Les remarques pointées pour les classes de 2^{nde} et de 1^{re} S sont toujours valables, en particulier la diversité du vocabulaire employé entre les manuels ou au sein d'un même manuel et la non-pertinence de certains exercices d'application proposés. Notons aussi qu'aucun manuel ne précise que le RpA peut s'appliquer sur une proposition élémentaire ou une proposition composée, en particulier implicite.

3. Conclusion

L'analyse des ressources (documents institutionnels, sujets de bac et manuels scolaires) montre que très peu de place est laissée au raisonnement par l'absurde. En effet, les programmes ne le citent que comme type de raisonnement à reconnaître et utiliser mais ne l'inscrivent pas dans les contenus et capacités attendus ; un seul document ressources pour le lycée le mentionne brièvement et seulement trois sujets de bac depuis 2008 proposent un exercice où ce type de raisonnement est pertinent. Dans les manuels scolaires, le RpA a une place très variable entre les

parties *Logique, Cours* ou *Exercices*. De plus, certaines collections ne proposent aucune progression dans la présentation de ce raisonnement entre les classes de 2^{nde} et de T^{ale}, que ce soit dans la partie « cours » ou dans les exercices d'application. Le fait que les programmes aient le même contenu à propos du RpA de la 2^{nde} à la T^{ale} pourrait expliquer que les auteurs de manuels proposent aussi des contenus identiques sur les trois années.

En ce qui concerne la partie « cours » des manuels étudiés, nous avons constaté une grande diversité de la place du RpA et de sa présentation. Les définitions proposées du RpA sont presque toutes insuffisantes, non opératoires, elles sont énoncées pour des propositions « quelconques », sans distinguer les différents types de propositions (élémentaire, composée, implicite). De plus, elles sont parfois mal articulées avec les exemples proposés, pour lesquels il est difficile de les appliquer. Comme nous l'avons déjà mis en évidence pour le raisonnement par récurrence (Gardes et al., 2016), le vocabulaire utilisé n'est pas celui de la logique, il est d'une grande diversité (« proposition », « affirmation », « énoncé », « résultat ») sont employés indifféremment, parfois dans la même phrase, même quand il a été défini dans les pages précédentes, et comme synonymes (par exemple, « affirmation » à la place de « proposition », ou « contraire » à la place de « négation »). Certains termes ne sont jamais expliqués, en particulier « contradiction », « résultat absurde ». De plus, de nombreux implicites ont pu être relevés ; par exemple « proposition fautive » semble être associée à « négation » ; on dit qu'il faut étudier (P et non Q) sans dire que c'est la négation de (P implique Q). Les quantificateurs sont rarement explicités, or ils changent de statut entre une proposition et sa négation.

En ce qui concerne les exemples, nous avons pu mettre en évidence une grande diversité dans leur complexité et leur pertinence. Certains ne semblent pas éclairants sur l'utilité d'un RpA et d'autres pas du tout pertinents, notamment lorsqu'un autre type de raisonnement (direct, par contraposition ou par équivalence) permet une démonstration plus accessible.

Il semble difficile pour un enseignant de s'appuyer sur un manuel de Lycée pour construire un cours comprenant une définition opératoire, des exemples convaincants et des exercices pertinents.

Partie III. Problèmes où le raisonnement par l'absurde est convaincant

Nous sommes convaincus de l'intérêt et de la possibilité de donner une place au raisonnement par l'absurde en classe, à tous les niveaux du lycée. En effet, il met en jeu de manière naturelle de nombreuses notions fondamentales de la logique, nécessaires pour raisonner et faire des démonstrations. En commençant pas des exemples « simples », on peut travailler la négation d'une proposition élémentaire et les quantificateurs. Ensuite, on peut aborder la négation d'une proposition composée (avec des « et » des « ou »), puis la négation d'une proposition conditionnelle⁹. Bien sûr, il faut se servir de ce type de raisonnement lorsque c'est judicieux — cette remarque n'est pas anodine puisque notre analyse de son utilisation montre que ce n'est pas toujours le cas ! Nous considérons que les exemples donnés en partie I (excepté les exemples 8 et 9) sont pertinents, car ils peuvent apporter un point de vue intéressant à la compréhension du résultat démontré. Nous ajoutons à cette liste les problèmes suivants, qui ne sont pas présents dans les documents institutionnels ni dans les manuels scolaires.

⁹ Une brochure du groupe « Logique » de la commission Inter-IREM Lycée est en cours d'écriture, qui comprend une présentation théorique, avec de nombreux exemples, des notions de logique et des différents types de raisonnement.

Énoncé 1 (à partir de la 2^{nde}, ressource : rallye d'Aquitaine)

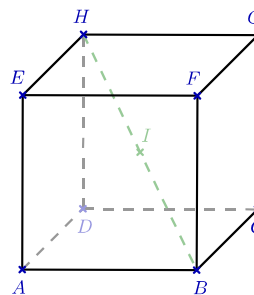
Les « bêtes à mauvais caractère » sont des animaux qui ne peuvent cohabiter que sous une condition : être éloignés les uns des autres d'au moins huit mètres. Peut-on faire cohabiter 10 « bêtes à mauvais caractère » dans un enclos rectangulaire de 18 mètres de longueur et de 15 mètres de largeur ?

On montre que c'est impossible en effectuant un raisonnement par l'absurde. On divise l'enclos en 9 petites parcelles rectangulaires de 6 m sur 5 m. Donc si 10 bêtes cohabitent dans l'enclos, d'après le principe des tiroirs, 2 bêtes seraient dans la même petite parcelle de 6 m sur 5 m. Or la plus grande distance dans cette parcelle est égale à $\sqrt{61}$ m qui est strictement inférieure à 8 m.

Cet exemple illustre l'intérêt de la « phase d'exploration » pour la recherche d'une solution : ici, on débute assez « naturellement » avec un raisonnement par l'absurde. On peut, dans certains cas, rédiger une solution par contraposition, ce qui nécessite de transformer la proposition élémentaire en proposition implicative. En effet, l'énoncé demande de prouver l'implication suivante : « si la distance minimale entre deux bêtes est supérieure ou égale à 8, alors le nombre de bêtes est inférieur ou égal à 9 ». La contraposée s'écrit : « si le nombre de bêtes est supérieur ou égal à 10, alors la distance minimale entre deux bêtes est strictement inférieure à 8 ».

Énoncé 2 (à partir de la 2^{nde})

Soit $ABCDEFGH$ un cube et I le milieu de $[HB]$.
Démontrer que I n'appartient pas au plan (ACH) .



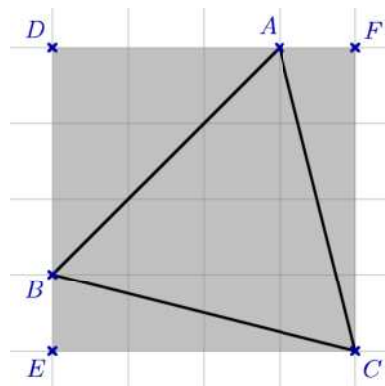
Raisonnons par l'absurde. Si I était dans le plan (ACH) , alors la droite (HI) serait dans ce plan et donc le point B aussi car B appartient à (HI) . Or A, B et C sont dans le même plan, celui de la face de dessous, mais pas H , donc ces points ne peuvent pas être dans un même plan. On a donc une contradiction. On en déduit que le point I n'est pas dans le plan (ACH) .

Il semble difficile dans cet exercice d'éviter le raisonnement par l'absurde, car la proposition à démontrer est formulée de manière négative.

Énoncé 3 (à partir de la 2^{nde})

Démontrer qu'un triangle équilatéral ne peut avoir ses trois sommets à coordonnées entières.

On suppose que le triangle, que l'on note ABC , a ses trois sommets à coordonnées entières. On construit le rectangle circonscrit au triangle aux côtés parallèles aux axes. L'aire du rectangle est entière, les aires des triangles rectangles ADB , BEC et AFC sont rationnelles. On en déduit par soustraction que l'aire du triangle ABC est rationnelle. Or l'aire d'un triangle équilatéral de côté c est égale à $\frac{\sqrt{3}}{2}c^2$. Comme c^2 est entier (calculé d'après le théorème de Pythagore), on aboutit à la conclusion que $\sqrt{3}$ est rationnel.



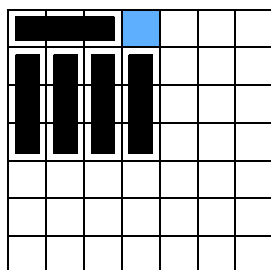
Ici aussi, il semble difficile ici d'éviter un raisonnement par l'absurde. Comment traduire

que des points ont des coordonnées non entières ?

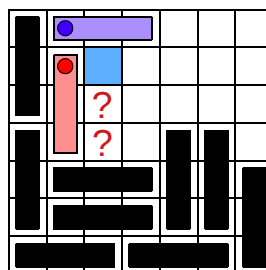
Énoncé 4 (à partir du collège, ressource : Maths à Modeler)

Pavage d'un carré avec des triminos longs.

Tout polymino carré 7×7 avec un trou d'une case est-il pavable par des triminos longs, quelle que soit la position du trou ?



Grille 1



Grille 2

Pour la position du trou dans la grille 1, la réponse est oui, il suffit d'exhiber un pavage pour le prouver. Pour la position du trou dans la grille 2, on examine pour la ligne du haut deux cas possibles (l'un des ces cas est illustré), et tous les deux conduisent à une impossibilité de paver. Le raisonnement pour chacun des deux cas est le suivant : « s'il existe un pavage pour cette position du trou, alors, *nécessairement*, les triminos doivent être posés comme sur la figure, et on arrive à une configuration qui ne permet pas de continuer (une ou deux cases sur lesquelles on ne peut pas poser un trimino). Donc l'hypothèse qu'il existe un pavage est fautive.

Le raisonnement par l'absurde est « naturel » ici, car dans la phase exploratoire, il faut bien supposer qu'il existe un pavage et le chercher (de manière exhaustive), pour établir qu'il n'en existe pas.

Énoncé 5 (à partir de la 1^{re})

Soient a, b et c trois réels de l'intervalle $[0; 1]$.

Démontrer que $\min\{a(1-b); b(1-c); c(1-a)\} \leq \frac{1}{4}$.

On suppose que ce minimum est strictement supérieur à $\frac{1}{4}$. On en déduit alors que le produit

P des trois nombres est strictement supérieur à $\frac{1}{64}$.

En réordonnant les facteurs de P , on écrit $P = a(1-a)b(1-b)c(1-c)$. Or on sait que pour tout x , $x(1-x) \leq \frac{1}{4}$. On obtient alors $P \leq \frac{1}{64}$ car a, b et c sont trois réels de l'intervalle

$[0; 1]$. Ce qui est en contradiction avec la proposition : $P > \frac{1}{64}$.

Un raisonnement direct est possible, mais il faut distinguer deux cas : $a \leq b \leq c$ et $a \leq c \leq b$ et par permutation circulaire on obtient tous les cas possibles.

Si par exemple $a \leq b \leq c$, on peut écrire $a(1-b) \leq b(1-b) \leq 1/4$ et si $a \leq c \leq b$, on écrit $a(1-b) \leq a(1-a) \leq 1/4$, toujours en utilisant le maximum de $x(1-x)$ sur $[0; 1]$.

Dans cet exemple, le raisonnement par l'absurde permet une démonstration plus courte et évite de penser à la symétrie des rôles joués par les trois variables a, b et c . De plus, la proposition à démontrer ne s'écrit pas sous une forme négative.

Énoncé 6 (à partir de la 1^{re})

Démontrer que pour tout entier naturel n , $\sqrt{n^2+6n+3}$ n'est pas un entier.

On suppose que $\sqrt{n^2+6n+3}$ est un entier naturel p . Ainsi $n^2+6n+3=p^2$.

Donc $(n+3)^2-6=p^2$ et donc $(n+3-p)(n+3+p)=6$. Le nombre 6 se décompose de quatre façons en produit de quatre facteurs : 1×6 ; 2×3 ; 3×2 et 6×1 . On montre aisément que ces quatre décompositions sont impossibles puisque n et p sont entiers.

Le raisonnement par l'absurde est ici « naturel » dans la mesure où la propriété à démontrer est exprimée de manière négative. Cependant, une démonstration « directe » est possible, plus complexe, elle consiste à démontrer que $\sqrt{n^2+6n+3}$ est un nombre strictement compris entre deux nombres entiers consécutifs :

$\forall n \in \mathbb{N}, n^2+6n+3=(n+3)^2-6 < (n+3)^2$. D'autre part, $n^2+6n+3-(n+2)^2=2n+1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, 2n+1 > 0$, d'où $\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 < (n+2)^2 < n^2+6n+3 < (n+3)^2$ et par conséquent, la fonction racine carrée étant strictement croissante, $n+2 < \sqrt{n^2+6n+3} < n+3$. Pour tout n non nul, $\sqrt{n^2+6n+3}$ est strictement compris entre deux entiers consécutifs donc $\sqrt{n^2+6n+3}$ n'est pas un entier. Pour $n=0$, $\sqrt{n^2+6n+3}=\sqrt{3}$ et $1 < \sqrt{3} < 2$ donc $\sqrt{3}$ n'est pas un entier. On en conclut que, pour tout entier naturel n , $\sqrt{n^2+6n+3}$ n'est pas un entier.

Énoncé 7 (à partir de la T^{ule})

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0=0$ et, pour tout n , $u_{n+1}=u_n+e^{-u_n}$. Démontrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge.

Raisonnons par l'absurde : on suppose que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ℓ ; alors u_n et u_{n+1} ont même limite ℓ et d'après la définition de la suite, ℓ vérifie l'égalité d'où $e^{-\ell}=0$, ce qui est impossible. Conclusion : la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge.

C'est une situation classique où le raisonnement par l'absurde est pertinent. En effet, il est plus facile d'écrire qu'une suite converge plutôt qu'une suite ne converge pas. Là encore, le raisonnement par l'absurde est convoqué de manière « naturelle ».

Énoncé 8 (à partir de la T^{ule}) (d'après le manuel Math'x)

1. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

a. $\sin(n+1) = \sin n \cos 1 + \cos n \sin 1$.

b. $\sin(n+1) - \sin(n-1) = 2 \sin 1 \cos n$.

2. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \sin n$ et $v_n = \cos n$.

On suppose désormais que (u_n) a une limite finie ℓ .

a. De la relation établie en 2.b., déduire que (v_n) converge et préciser sa limite.

b. De la relation établie en 2.a., déduire que $\ell=0$.

c. En considérant $u_n^2+v_n^2$, démontrer que $\ell^2=1$.

d. Qu'en déduit-on ?

Détaillons la réponse à la question 2.

a. Si $(\sin n)$ a pour limite finie ℓ , alors les suites $(\sin(n+1))$ et $(\sin(n-1))$ ont même limite finie ℓ et $\sin(n+1) - \sin(n-1)$ tend vers 0. D'après 1.b., $2 \sin 1 \cos n$ tend aussi vers 0, donc si $(\sin n)$ a pour limite finie ℓ , alors $(\cos n)$ a pour limite 0.

b. Si $(\sin n)$ a pour limite finie ℓ , alors $(\cos n)$ a pour limite 0 et il est possible de passer à la limite dans l'égalité 1.a. On obtient alors $\ell = \ell \cos 1$. Or $\cos 1 \neq 1$ d'où $\ell=0$.

c. Immédiat en considérant que $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ pour tout x réel.

d. Raisonnons par l'absurde : si $(\sin n)_{n \in \mathbb{N}}$ a pour limite finie ℓ , d'après 2.b., on a $\ell=0$ et

d'après 2.c., on a $\ell^2=1$. Par unicité de la limite, on obtient le résultat faux $1=0$.
Conclusion : $(\sin n)$ diverge.

Les mêmes remarques que pour l'énoncé 6 sont valables. On peut noter l'intérêt mathématique de l'exercice, il n'est pas aisé de démontrer que la suite $(\sin n)$ diverge même si cela se perçoit aisément.

Énoncé 9 (à partir de la T^{ule})

Démontrer que $\cos(1^\circ)$ est irrationnel.

On considère que les angles sont tous en degrés. On suppose que $\cos 1$ est rationnel.

Pour n entier naturel, $\cos(n+1) = 2 \cos n \cos 1 - \cos(n-1)$.

Grâce à un raisonnement par récurrence double, on montre alors que $\cos n$ est rationnel pour tout n entier naturel. Or $\cos(45^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ est irrationnel. On aboutit ainsi à une contradiction.

Cet exemple s'appuie sur deux types de raisonnement : par récurrence et par l'absurde.

Énoncé 10 (à partir de la T^{ule})

Soit $n \geq 1$ un entier naturel. Soient $n+1$ réels x_0, x_1, \dots, x_n de $[0,1[$ vérifiant $0 \leq x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_n < 1$. Démontrer la propriété suivante : il y a deux de ces réels distants de moins de $\frac{1}{n}$.

Voici trois démonstrations de ce résultat.

• Par le principe des tiroirs (Dirichlet)

On considère les n intervalles $I_1 = \left[0, \frac{1}{n}\right]$, $I_2 = \left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right]$, ..., $I_n = \left[\frac{n-1}{n}, 1\right]$. On veut y placer $(n+1)$ points. Un de ces intervalles au moins contient deux points. Ces deux points seront distants de moins de $\frac{1}{n}$.

• Par l'absurde

La traduction immédiate de la propriété est : $\exists (i, j) \in \{0, \dots, n\}^2, (i < j) \text{ et } \left(x_j - x_i < \frac{1}{n}\right)$.

Remarquons que si deux nombres sont distants de moins de $\frac{1}{n}$, alors il y aura deux nombres consécutifs qui seront distincts de moins de $\frac{1}{n}$. Ceci signifie : $\exists i \in \{1, \dots, n\}, \left(x_i - x_{i-1} < \frac{1}{n}\right)$.

Raisonnons par l'absurde : supposons vraie la négation de ce résultat, c'est-à-dire que :

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, x_i - x_{i-1} \geq \frac{1}{n}.$$

En écrivant $x_n - x_0 = (x_n - x_{n-1}) + (x_{n-1} - x_{n-2}) + \dots + (x_2 - x_1) + (x_1 - x_0)$, on obtient en utilisant la propriété précédente : $x_n - x_0 \geq n \times \frac{1}{n} = 1$, ce qui est faux puisque $0 \leq x_0 \leq x_n < 1$.

La propriété initiale est donc vraie.

• Par contraposition

On peut remarquer que l'énoncé demande de démontrer l'implication suivante :

Soit n un entier naturel non nul et $m+1$ réels x_0, x_1, \dots, x_m de $[0,1[$ vérifiant $0 \leq x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_m < 1$.

Si $m \geq n$, alors $\exists i \in \{1, \dots, m\}^2, \left(x_i - x_{i-1} < \frac{1}{n}\right)$.

La contraposée de cette implication s'écrit : Si $\forall i \in \{1, \dots, m\}^2, x_i - x_{i-1} \geq \frac{1}{n}$, alors $m < n$.

La démonstration est très proche de celle relevant du raisonnement par l'absurde :

On a $x_m - x_0 = (x_m - x_{m-1}) + (x_{m-1} - x_{m-2}) + \dots + (x_2 - x_1) + (x_1 - x_0) \geq m \times \frac{1}{n} = \frac{m}{n}$.

Or x_m et x_0 sont deux éléments de $[0, 1[$, donc $x_m - x_0 < 1$. Donc $\frac{m}{n} < 1$ et $m < n$.

La contraposée est démontrée.

Cet exemple est intéressant pour la variété des démonstrations qu'il offre.

Énoncé 11 (à partir de la Licence 1)

On considère, pour $n \geq 2$, le polynôme P à coefficients réels défini par $P(x) = \sum_{k=0}^{k=n} \frac{x^k}{k!}$.

Démontrer que le polynôme P n'a que des racines simples.

On suppose que P admet au moins une racine multiple a . Ainsi $P(a) = P'(a) = 0$.

Or $P(a) - P'(a) = \frac{a^n}{n!}$ et $P(a) - P'(a) = 0$. On en déduit que a est nul, ce qui est faux.

Dans cet exemple, on s'engage aisément dans un raisonnement par l'absurde car il est plus simple d'exprimer la négation de « P n'a que des racines simples ».

Énoncé 12 (à partir de la Licence 1, d'après Capes externe 2006, épreuve sur dossier)

On se donne une partie A de \mathbb{N}^* , finie et non vide. On suppose que pour tous éléments m et n de A , l'entier $\frac{m+n}{\text{pgcd}(m, n)}$ est encore dans A .

1. Démontrer que l'entier 2 est élément de A .
2. Démontrer que l'ensemble fini A ne contient que des entiers pairs.
3. Démontrer que l'ensemble A se réduit au singleton $\{2\}$.

Démonstrations

1. L'ensemble n'étant pas vide, on applique la proposition au couple (a, a) où a est élément de A . On obtient alors $2 \in A$.
2. Raisonnons par l'absurde. Supposons que A contienne un entier impair. En tant que partie finie non vide de l'ensemble des entiers naturels, la partie formée des éléments impairs de A possède un plus grand élément n ; il existe un entier k tel que $n = 2k + 1$. On applique la proposition au couple $(n, 2)$ ce qui donne $2k + 3$ puisque n et 2 sont premiers entre eux. Ceci contredit le fait que n soit le plus grand élément de A . Conclusion : l'ensemble A ne contient que des entiers pairs.
3. Raisonnons par l'absurde. Supposons que A contienne un entier autre que 2. En tant que partie finie non vide de l'ensemble des entiers naturels, la partie formée des éléments de A autres que 2 possède un plus petit élément qui sera pair d'après le résultat de la question 2. Soit $a = 2b$ cet entier. L'application de la proposition au couple $(a, 2)$ donne $b + 1 \in A$ puisque $\text{pgcd}(a, 2) = 2$. On a nécessairement $a \geq 4$, d'où $b \geq 2$, ce qui implique $2 < b + 1 < 2b = a$. Ceci contredit l'hypothèse selon laquelle $a = 2b$ est le plus petit élément de A autre que 2. Conclusion : $A = \{2\}$.

Là encore, le RpA est assez naturel : les deux raisonnements par l'absurde concernant des propositions formulées de manière négative, les négations s'écrivent relativement

simplement (« *A contient au-moins un entier impair* » et « *A contient un élément autre que 2* »).

Conclusion et perspectives

D'après le document ressources *Notations et raisonnement mathématiques* (MEN, 2009) valable pour la classe de seconde et au-delà,

La logique et le raisonnement concernent chaque partie du programme. [...] Il est exclu de consacrer un chapitre à ces notions de logique et raisonnement. Il s'agit de procéder par petites touches présentées sous forme de bilan, de synthèse et de généralisation.

Nous avons présenté la diversité des approches des auteurs de manuels en nous interrogeant sur la nature et la forme que prennent ces « *petites touches* ».

Nous avons montré que ces recommandations institutionnelles conduisent à une impossibilité d'enseigner correctement ce type de raisonnement (cette remarque vaut pour toutes les notions de logique au programme du lycée). Comment en effet reconnaître et utiliser un raisonnement qui n'est pas défini, ou qui est défini avec un langage flou sur lequel on ne peut pas s'appuyer ?

Nous avons montré, à travers cette analyse, les conséquences de décider que le RpA n'est pas un objet d'étude. Il est difficile d'en comprendre la structure, même en collectant les divers exemples à la fois rares, pas toujours pertinents et très éparpillés dans les manuels d'une même collection, quel que soit le niveau. Cependant, cette présentation élargie des différents manuels peut permettre de resituer ces divers exemples dans différents chapitres et montrer qu'il est possible de travailler sur le raisonnement par l'absurde tout au long de l'année. Nous espérons que les propositions d'exercices classiques et non classiques des parties I et II convaincront le lecteur de l'intérêt de faire travailler les élèves et étudiants sur le raisonnement par l'absurde, du collège à l'université. Au-delà de sa pertinence pour la résolution de certains problèmes — voire de sa nécessité —, l'autre utilité du raisonnement par l'absurde tient au fait qu'il est très formateur pour le raisonnement, car il met en jeu de manière imbriquée plusieurs notions de logique fondamentales : proposition, négation, proposition élémentaire ou composée dont l'implication, les connecteurs « et » et « ou » et les quantificateurs. C'est aussi une bonne occasion de travailler à la fois les points de vue sémantique et syntaxique des notions de logique et du raisonnement. Toutefois, le travail de bilan, de synthèse et de généralisation reste à la charge des enseignants.

Nous continuons notre étude de ce raisonnement dans le cadre de la transition lycée- université, avec notamment des analyses de productions d'élèves de T^{ale} S et d'étudiants de L1. Ce travail fera l'objet d'un prochain article.

Note de dernière minute... À propos des nouveaux programmes (BO du 22/01/2019)

Les programmes qui viennent d'être publiés prônent que les concepts de la logique et les principaux types de raisonnement doivent être

étudiés, après avoir été rencontrés plusieurs fois en situation dès la classe de seconde. Les élèves doivent apprendre à reconnaître, lire, écrire, formuler, mobiliser, produire, certains raisonnements.

Le nouveau programme est plus précis sur les notions de logique que celui qui était en cours dans notre étude. La notion de proposition est explicitée et déclinée (simple, quantifiée ou non, implicative ou non), la notion de variable est introduite. De plus, une progression est repérable

entre la 2^{nde} et la 1^{re} S pour ce qui concerne le niveau de complexité des propositions à étudier et pour leur négation. Le raisonnement par l'absurde pourra être abordé dès la classe de 2^{nde}, sur des propositions simples. Nous espérons que les nombreux exercices et exemples et les analyses qui en ont été faites dans cet article pourront être une base utile pour les enseignants.

Références bibliographiques

- Arnaud, N. & Nicole, P. (1992). *La Logique ou l'art de penser*. Gallimard. Paris.
- Balacheff, N. (1987). *Une étude des processus de preuve en mathématique chez des élèves de collège*. Thèse de l'Université Joseph Fourier.
- Cambrésy-Tant, V., Cambrésy, D. & Carpentier, S. (1998). *Autour du raisonnement par l'absurde*. IUFM Nord-Pas-de-Calais.
- Durand-Guerrier, V. (2005). *Recherches sur l'articulation entre la logique et le raisonnement mathématique dans une perspective didactique. Un cas exemplaire de l'interaction entre analyses épistémologique et didactique. Apports de la théorie élémentaire des modèles pour une analyse didactique du raisonnement mathématique*. HDR, Université Claude Bernard - Lyon I.
- Fabert, C. & Grenier, D. (2011). Une étude de quelques éléments de raisonnement mathématique et de logique. *Petit x*, 87, 29-30.
- Hérault, F., Huet, C., Kelnotter, G. & Mesnil, Z. (2016). À propos de quantification : quelques activités de logique dans nos classes. *Petit x*, 100, 35-65.
- Gardes, D., GARDES, M.-L. & Grenier, D. (2016). État des connaissances des élèves de terminale S sur le raisonnement par récurrence. *Petit x*, 100, 67-98.
- Gardies, J.-L. (1991). *Le raisonnement par l'absurde*. PUF. Paris.
- Grenier, D. (2003). The concept of « induction » in mathematics. *Mediterranean Journal For Research in Mathematics Education*, 3.
- Grenier, D. (2012). Une étude didactique du concept de récurrence. *Petit x*, 88, 27-47.
- Grenier, D., Payan, C. (1998). Spécificités de la preuve et de la modélisation en mathématiques discrètes. *Recherches en didactique des mathématiques*, 18(1), 59-100.
- Lombard, P. (1996). À propos du raisonnement par l'absurde. *Bulletin APMEP*, 405, 445-455.
- Lombard, H. (1997). Le raisonnement par l'absurde. *Repères IREM*, 29, 27-42.
- Mesnil, Z. (2014). *La logique : d'un outil pour le langage et le raisonnement mathématiques vers un objet d'enseignement*. Thèse de l'Université Paris 7.
- Murphy, C., Weima, S., Durand-Guerrier, V. (2016). Des activités pour favoriser l'apprentissage de la logique en classe de seconde. *Petit x*, 100, 7-34.

Documents institutionnels

MEN (2009a). Programme de mathématiques, enseignement commun, seconde générale et technologique. B.O. n° 30 du 23 juillet 2009.

MEN (2009b). Document Ressources pour la classe de seconde, Notations et raisonnement mathématiques. Eduscol.
http://cache.media.eduscol.education.fr/file/Programmes/18/0/Doc_ressource_raisonnement_109180.pdf

MEN (2010). Programme de mathématiques, première série scientifique, B.O. spécial n° 9 du 30 septembre 2010.

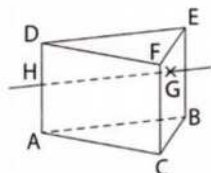
MEN (2011). Programme de mathématiques, terminale série scientifique, B.O. spécial n° 8 du 13 octobre 2011.

Annexe II.1.

Collection *Hyperbole 2^{nde} 2014*, p. 264

61 Raisonnement par l'absurde

ABCDEF est un prisme droit. H est un point de l'arête [AD]. G est un point du plan (BCE) sans appartenir aux droites (BC), (CF), (FE), (BE).



- a) On suppose que les droites (AB) et (HG) sont parallèles.
Démontrer que l'on arrive à une contradiction.
- b) Que peut-on en déduire ?

Annexe II.2.

Collection *Math'x 2^{nde} 2014*, p. 331

85 Raisonner par l'absurde

Soit A, B, C et D distincts tels que $\overline{AB} = \frac{3}{4} \overline{CD}$

1. Que peut-on dire des droites (AB) et (CD) ?
2. Justifier que (BC) et (AD) sont sécantes.

👉 Aide : on pourra supposer que (BC) et (AD) sont parallèles et montrer que l'on aboutit à une contradiction.

Annexe II.3.

Collection *Repères 2^{nde} 2010*, p. 221

→ Exemple

Hypothèse A : n est un entier naturel tel que n^2 est pair.

Proposition B : l'entier n est pair.

Démontrons que $A \Rightarrow B$ en raisonnant par l'absurde :

1. On suppose que n est un entier naturel non nul tel que n^2 est pair, et que n est impair.
2. Puisque n est supposé impair, on peut affirmer qu'il existe un entier naturel k tel que $n = 2k + 1$.
On a alors $n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1 = 2p + 1$, où p est un nombre entier.

Cela est contradictoire avec le fait que n^2 est un nombre pair.

3. On en conclut que le nombre n est nécessairement pair.



Un nombre n pair s'écrit $n = 2k$,
un nombre n impair s'écrit $n = 2k + 1$.

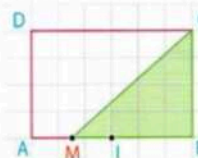
Annexe II.4. Indice 2^{nde} 2017, p. 43

Identifier la variable et l'ensemble de définition

Logique



Dans la figure ci-contre, ABCD est un rectangle tel que $AB = 6$ et $BC = 4$; I est le milieu de [AB] et M est un point qui décrit le segment [AI] privé de A.



1. Exprimer l'aire du triangle rectangle MBC en fonction de MB.
2. On note x la longueur AM.
 - a. Montrer, en raisonnant par l'absurde, que x ne peut pas être égal à 4.
 - b. À quel intervalle appartient x ?
3. La fonction f associe au réel x l'aire du triangle MBC. Donner l'expression de $f(x)$ et son ensemble de définition.

Solution commentée

1. L'aire du triangle MBC est égale à $\frac{4 \times MB}{2} = 2MB$.
2. a. On raisonne par l'absurde. Si $x = 4$, alors $AM = 4$.
Puisque I est le milieu de [AB], on a : $AI = \frac{1}{2} AB = 3$.
Par conséquent, $AM > AI$, donc le point M n'appartient pas au segment [AI], ce qui est contradictoire avec la construction de M. Ainsi, x ne peut pas être égal à 4.

Annexe II.5. Collection Math'x 1^{re} S 2015, p. 283

2 Démontrer : « il existe un unique... »

RAISONNER

OBJECTIF ► Démontrer la propriété 11 du cours.

PROBLÈME ÉTUDIÉ L'objectif de ce TP est de démontrer la propriété 11 du cours :

Soit A, B, C trois points non alignés du plan. Pour tout point M du plan,

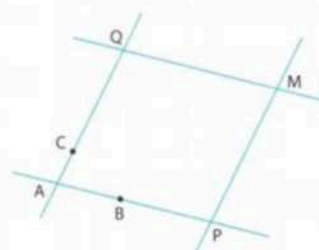
- il existe des réels x et y tels que $\vec{AM} = x\vec{AB} + y\vec{AC}$
- ce couple de réels est unique. ▮

On considère donc trois points du plan A, B et C, non alignés.
Soit M un point du plan.

1. Existence

La parallèle à (AC) passant par M coupe (AB) en P et la parallèle à (AB) passant par M coupe (AC) en Q.

- a. Montrer qu'il existe un réel x tel que $\vec{AP} = x\vec{AB}$ et un réel y tel que $\vec{AQ} = y\vec{AC}$.
- b. Quelle la nature du quadrilatère APMQ ? Justifier.
- c. En déduire l'expression de \vec{AM} en fonction de \vec{AB} et \vec{AC} .



2. Unicité

Supposons maintenant qu'il existe deux couples $(x; y)$ et $(x'; y')$ tels que $\vec{AM} = x\vec{AB} + y\vec{AC}$ et $\vec{AM} = x'\vec{AB} + y'\vec{AC}$.

- a. Démontrer que $(x - x')\vec{AB} = (y' - y)\vec{AC}$.
- b. En raisonnant par l'absurde, montrer que $x = x'$.
En déduire que $y = y'$. Conclure.

Annexe II.6. Collection *Indice 1^{re} S 2015*, p. 361

Raisonnement par l'absurde

Montrer qu'une proposition P est *vraie* en raisonnant par l'absurde consiste à supposer que P est *fausse* et à montrer qu'avec cette hypothèse, on aboutit à une contradiction.

EXEMPLE

Pour montrer que : « il y a une infinité de nombres entiers », on peut faire un raisonnement par l'absurde. On suppose qu'il y a un nombre fini d'entiers. On appelle A le plus grand de ces entiers. Mais $A + 1$ est aussi un entier, c'est l'entier qui suit A , et donc A n'est pas le plus grand des entiers puisque $A + 1$ est plus grand que lui.
On aboutit à une contradiction. On en déduit qu'il n'y a pas un nombre fini d'entiers.

Annexe II.7. Collection *Hyperbole T^{ale} S 2017*, p. 418

102 Démontrer le théorème du toit

\mathcal{P} et \mathcal{P}' sont deux plans sécants suivant une droite Δ .
 d est une droite de \mathcal{P} et d' une droite de \mathcal{P}' qui sont parallèles.



On note \vec{u} un vecteur directeur de Δ et \vec{v} un vecteur directeur commun aux droites d et d' .

À l'aide d'un raisonnement par l'absurde, démontrer que la droite Δ est parallèle aux droites d et d' .

Info

Raisonnement par l'absurde, c'est supposer vraie la négation de ce que l'on doit démontrer et aboutir à une contradiction.

Annexe II.8. Collection *Hyperbole T^{ale} S 2012*, p. 456

3

Démonstration par l'absurde

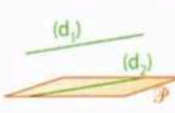
Le raisonnement par l'absurde consiste à prendre comme hypothèse la négation de la proposition à démontrer et à en déduire une contradiction.

Énoncé : A et B sont deux points distincts du plan et C est un point n'appartenant pas à la médiatrice de $[AB]$. Démontrer que le triangle ABC n'est pas isocèle en C .

Solution

On suppose que le triangle ABC est isocèle en C . Alors C est un point équidistant de A et de B , donc C appartient à la médiatrice de $[AB]$, ce qui est en contradiction avec l'énoncé. Donc la proposition « ABC est isocèle en C » est fausse.

Annexe II.9. Collection *Indice T^{le} S 2016*, p. 240



Logique
Ce type de raisonnement est appelé raisonnement par l'absurde.

Parallélisme d'une droite avec un plan

Propriété Si une droite (d_1) est parallèle à une droite (d_2) d'un plan \mathcal{P} , alors la droite (d_1) est parallèle au plan \mathcal{P} .

Démonstration
Si la droite (d_1) est incluse dans le plan \mathcal{P} , alors elle est parallèle à \mathcal{P} .
Si la droite (d_1) n'est pas incluse dans \mathcal{P} , alors (d_1) et (d_2) sont strictement parallèles et elles définissent un plan \mathcal{Q} . La droite (d_2) est donc l'intersection des plans \mathcal{P} et \mathcal{Q} .
Si la droite (d_1) coupait le plan \mathcal{P} en A, ce point commun à \mathcal{P} et \mathcal{Q} serait commun aux droites (d_1) et (d_2) , ce qui contredirait l'hypothèse.

Annexe II.10. Collection *Repères T^{le} S 2012*, p. 547

Application I : Montrer que trois points définissent un plan
Pour démontrer que trois points A, B et C définissent un plan, il suffit de démontrer que les vecteurs \vec{AB} et \vec{AC} ne sont pas colinéaires. En raisonnant par l'absurde, on suppose que les vecteurs \vec{AB} et \vec{AC} sont colinéaires.
On prend par exemple les points $A(1; 5; 3)$, $B(2; 7; 4)$ et $C(3; 8; 2)$.

On suppose que les vecteurs $\vec{AB} \begin{pmatrix} 2-1 \\ 7-5 \\ 4-3 \end{pmatrix}$ et $\vec{AC} \begin{pmatrix} 3-1 \\ 8-5 \\ 2-3 \end{pmatrix}$ sont colinéaires et donc qu'il existe un réel k tel que $\vec{AB} = k\vec{AC}$.

Dans ce cas, on a $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = -2k \\ 2 = 3k \\ 1 = -k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = -\frac{1}{2} \\ k = \frac{2}{3} \\ k = -1 \end{cases}$.

Ce raisonnement fournit plusieurs valeurs de k , ce qui est impossible.
 k ne peut être égal en même temps à -1 et $-\frac{1}{2}$, c'est absurde. Donc k n'existe pas.
Les vecteurs \vec{AB} et \vec{AC} ne sont alors pas colinéaires, il s'ensuit que les points A, B et C définissent un seul plan.

Application II : Montrer la proposition donnée
Soit \vec{u} un vecteur de l'espace et \vec{i}, \vec{j} et \vec{k} trois vecteurs non coplanaires.
Alors il existe un unique triplet de réels x, y et z tels que $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.
On admet l'existence, on veut démontrer l'unicité de l'écriture $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.
En raisonnant par l'absurde, on suppose qu'il existe au moins deux triplets de réels (x, y, z) et (x', y', z') tels que $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ et $\vec{u} = x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}$.
On peut donc écrire l'égalité : $x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}$
 $\Leftrightarrow (x-x')\vec{i} + (y-y')\vec{j} + (z-z')\vec{k} = \vec{0}$.
Et en posant $\alpha = x-x'$, $\beta = y-y'$ et $\gamma = z-z'$, on trouve trois réels α, β et γ tels que $\alpha\vec{i} + \beta\vec{j} + \gamma\vec{k} = \vec{0}$.
Ce qui signifie que \vec{i}, \vec{j} et \vec{k} sont trois vecteurs coplanaires, ce qui est impossible (car \vec{i}, \vec{j} et \vec{k} sont supposés trois vecteurs non coplanaires).
On en déduit donc que s'il existe un triplet de réel x, y et z tels que $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ alors ce triplet est unique.

Annexe II.11.

Collection *Repères T^{ale} S* 2012, p. 547

→ À vous de jouer

- 1 Démontrer par l'absurde que la suite (U_n) , définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $U_{n+1} = q \times U_n$ (q un réel non nul) et $U_0 = \frac{1}{2}$, n'est jamais nulle.
- 2 Démontrer par l'absurde que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\left(\frac{1}{2}\right)^n \leq 1$.
- 3 Démontrer par l'absurde que sur $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$, $\frac{x+2}{x+3}$ est différent de 1.
- 4 Démontrer par l'absurde que sur \mathbb{R}^* , $\frac{\sqrt{4x^2+6}}{x}$ est différent de 2.

Annexe II.12.

Collection *Transmath T^{ale}* 2012, p. 80

Théorème 2 Il existe une unique fonction f dérivable sur \mathbb{R} telle que :
pour tout nombre x , $f'(x) = f(x)$, et $f(0) = 1$.



ROC
→ Exercice 78
« Le jour
du BAC ».

Démonstration exigible

L'existence d'une telle fonction est admise. Démontrons son unicité.

• Soit f une fonction dérivable sur \mathbb{R} telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$.

Prouvons que f ne s'annule jamais sur \mathbb{R} .

Considérons la fonction ϕ définie sur \mathbb{R} par $\phi(x) = f(x) \times f(-x)$.

Produit de deux fonctions dérivables, la fonction ϕ est dérivable et pour tout nombre x ,

$\phi'(x) = f'(x) \times f(-x) + f(x) \times [-1 \times f'(-x)]$ d'après le théorème 1,

$\phi'(x) = f'(x) \times f(-x) - f(x) \times f'(-x)$.

Par hypothèse, pour tout nombre x , $f'(x) = f(x)$.

Il en résulte que pour tout nombre x , $\phi'(x) = f(x) \times f(-x) - f(x) \times f(-x) = 0$.

La fonction ϕ est donc constante sur \mathbb{R} .

Or, $\phi(0) = f(0) \times f(0) = 1$; donc pour tout nombre x , $\phi(x) = 1$, soit $f(x) \times f(-x) = 1$ [1].

On en déduit que pour tout nombre x , $f(x) \neq 0$ et $f(-x) = \frac{1}{f(x)}$.

• Supposons qu'il existe une fonction g , différente de f , dérivable sur \mathbb{R} telle que $g' = g$ et $g(0) = 1$.

Considérons la fonction ψ définie sur \mathbb{R} par $\psi(x) = g(x) \times f(-x)$.

La fonction ψ est le produit de deux fonctions dérivables sur \mathbb{R} , donc ψ est dérivable sur \mathbb{R} et pour tout nombre x , $\psi'(x) = g'(x) \times f(-x) + g(x) \times [-f'(-x)] = g(x) \times f(-x) - g(x) \times f(-x) = 0$.

ψ est donc constante sur \mathbb{R} . Sa valeur est définie par $\psi(0) = g(0) \times f(0) = 1$.

Ainsi, pour tout x de \mathbb{R} , $\psi(x) = 1$, soit $g(x) \times f(-x) = 1$ [2].

D'où, d'après [1] et [2], pour tout nombre x , $f(x) \times f(-x) = g(x) \times f(-x) = 1$.

Comme f ne s'annule pas sur \mathbb{R} , on peut simplifier l'égalité $f(x) \times f(-x) = g(x) \times f(-x)$, et pour tout nombre x , $f(x) = g(x)$. Or, ce résultat est absurde puisque, par hypothèse, $f \neq g$.

• Conclusion : la fonction f est l'unique fonction dérivable sur \mathbb{R} vérifiant $f' = f$ et $f(0) = 1$.

LOGIQUE

Démonstration
par l'absurde
→ p. 468