
SUPPORTS HISTORIQUES ET ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES : SUR LE RÔLE DE L'IMAGINATION

Thomas DE VITTORI¹

Laboratoire de Mathématiques de Lens - Université d'Artois

Marie-Pierre VISENTIN²

PEMF - École primaire Henri-Matisse - Saint-Sulpice (81)

Résumé. À partir d'une expérimentation réalisée auprès d'élèves de CM2, cet article questionne la place de l'imaginaire dans une activité de classe utilisant l'histoire des mathématiques. L'étude porte sur trois groupes d'élèves à qui ont été proposées trois variantes d'une même activité autour de la numération en base 60 (notre système de mesure des durées hérité des Babyloniens). Afin d'essayer d'identifier des différences ou similarités entre les trois scénarios, une analyse quantitative (*via* une analyse en composantes principales) a été menée à partir des productions des élèves et d'un questionnaire. L'effectif impliqué étant faible, l'approche reste exploratoire mais elle semble dessiner des pistes quant à un rôle clé joué par l'imagination dans les séances à supports historiques.

Mots-clés. Numération, histoire des mathématiques, imagination, imaginaire.

Introduction

Pointées et réaffirmées à chacune des évaluations nationales, l'entrée au collège révèle chez les élèves de nombreuses réticences à se lancer dans les recherches et des représentations négatives de la matière et de leurs propres compétences. Pour faire face à ces difficultés, les enseignants déploient sans cesse de nouvelles idées et innovations pédagogiques visant à remettre en phase les élèves et les apprentissages mathématiques. C'est dans cet esprit qu'est né en 2011, dans une commune semi-urbaine aux portes de Toulouse, le projet de mise en place d'un laboratoire de mathématiques³. D'abord lancé dans une classe de CM2, il a été ensuite étendu, selon les années,

¹ thomas.devittori@univ-artois.fr

² marie-pierre.visentin@ac-toulouse.fr

³ Signalons que, bien qu'ayant le même nom et partageant certaines caractéristiques, ce dispositif déployé dans une école primaire n'était pas lié, au départ du projet, au programme de développement de laboratoires de mathématiques suite à la mission Villani-Torrois. La création d'un lieu pour mener des expériences mathématiques n'est pas nouvelle. Pour l'enseignement dans le secondaire, on la trouve dès les recommandations d'Émile Borel lors de sa conférence de 1904 au Musée Pédagogique. Il expliquait alors que « *pour amener, non seulement les élèves, mais aussi les professeurs, mais surtout l'esprit public à une notion plus exacte de ce que sont les Mathématiques et du rôle qu'elles jouent réellement dans la vie moderne, il sera nécessaire de faire plus et de créer de vrais laboratoires de Mathématiques* » (Borel, 1904). Le cheminement de cette idée en France et dans le monde entier a rapidement suscité de nombreuses recherches (voir par exemple Maschietto & Trouche, 2010). Pour tous les détails sur le déploiement dans le secondaire, on pourra consulter la page internet dédiée aux laboratoires de mathématiques sur le site de l'APMEP (Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public) <https://www.apmep.fr/Les-laboratoires-de-mathematiques> ainsi que le recensement national effectué par le Ministère sur <http://labo-maths.fr>

à tous les niveaux de l'école du cycle 1 au cycle 3. Les activités du laboratoire sont des moments privilégiés au cours desquels les élèves prennent le temps d'expérimenter, de manipuler, de questionner, d'argumenter, de raisonner, et d'interagir entre eux lors de la résolution d'énigmes en lien avec l'histoire des mathématiques. Depuis le mois de septembre 2019, le laboratoire de mathématiques est devenu un espace aménagé (voir figure 1), dédié à l'enseignement scientifique, occupé par les élèves de la petite section au CM2. Cette unité de lieu favorise le travail d'équipe et permet parfois un travail inter-cycle comme lorsque les élèves de grande section et de CM2 ont pu relever ensemble, en binômes, des défis ancrés dans l'histoire de la numération.



Figure 1 : Vue d'ensemble du laboratoire de mathématiques.

Au fil des séances, un cahier de laboratoire de mathématiques personnalisé est établi, enrichi, et illustré (voir figure 2). Il est partagé avec les élèves de l'école et les familles. Les élèves construisent pas à pas cet outil scientifique et culturel auquel ils sont généralement très attachés.

La particularité du contexte évoqué ici réside dans une mise en œuvre des activités par l'imaginaire. En effet, dès les premières séances centrées sur l'apprentissage de la numération en 2011, le projet d'enseignement repose sur l'introduction de deux personnages imaginaires : Marguerite et Léonard. Ces deux personnages ne sont en fait que des prénoms mais ce sont eux qui proposent les problèmes aux enfants. Les élèves relèvent les défis de Marguerite et Léonard tout en suivant l'histoire de notre système de numération et ceux d'autres peuples. Ces personnages imaginaires, qui ne sont jamais décrits, semblent aider les élèves à s'investir dans le travail proposé, à dépasser leurs appréhensions en prenant du plaisir à apprendre et à gagner en confiance. Mais que dire d'autre de ce ressenti subjectif ? C'est ainsi qu'est née l'idée d'une recherche dont la question centrale porte sur la place de l'imaginaire dans un enseignement où l'histoire des mathématiques est utilisée. Initiées au cours de l'été 2019, les réflexions ont abouti à une expérimentation qui s'est développée sur le début de l'année 2020. La situation particulière liée à la crise sanitaire⁴ sur cette période a été l'occasion de travailler avec des demi-classes, ce qui a eu un avantage certain pour l'étude de différents scénarios que nous détaillons plus loin dans notre texte. Mais avant cela, il convient de préciser un peu le contexte scientifique de la recherche menée et ses méthodes.

⁴ En particulier, le confinement de huit semaines en mars et avril 2020 lors de la crise sanitaire de la COVID 19.



Histoire du Zéro.

Défi en base 4.



À partir de l'étude d'un document historique sur les Sumériens, chaque élève a trié, mémorisé dans son cahier, et selon la présentation de son choix, les données culturelles qui étaient importantes à ses yeux :

- « La grande invention sumérienne par excellence : l'écriture » ;
- « C'est peut-être pour leurs mythes de la création du monde et de la naissance de la civilisation » ;
- « Les Sumériens ont aussi légué à l'Humanité les concepts de loi, de gouvernement et de vie urbaine ».

Figure 2 : Extraits d'un cahier de laboratoire de mathématiques (CM2).

1. Le positionnement de la question de recherche et la méthode d'analyse choisie

1.1. L'histoire des mathématiques en classe : tour d'horizon

L'utilisation de l'histoire des mathématiques en classe est une modalité pédagogique dont il est difficile de situer précisément l'origine. En France, on peut néanmoins relever une structuration des questionnements liés à cette pratique à partir des années 1970 dans la dynamique de la réforme des mathématiques modernes et de la création des IREM qui lui est associée (IREM, 1988)⁵. Au fil des changements de programmes surtout dans l'enseignement secondaire, cette

⁵ Barbin (IREM, 1988) rappelle dans son avant-propos que « Depuis une douzaine d'année, la plupart des Instituts de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques (I.R.E.M.) ont constitué des équipes de recherche et de formation consacrées à l'épistémologie et à l'histoire des mathématiques ». Sont évoqués ensuite de nombreux stages, colloques et publications qui visent « à donner aux enseignants de mathématiques les moyens d'introduire une perspective historique dans leur enseignement ». L'introduction d'une perspective historique dans

approche fait régulièrement l'objet d'incitations fortes inscrites explicitement dans les instructions officielles⁶. La production de ressources destinées à ces niveaux est de ce fait en accord avec la demande. On trouvera ainsi des pages « Histoire » ou des activités dans tous les manuels de mathématiques de collège et de lycée ainsi que de nombreux ouvrages (Barbin, 2019) ou publications à destination des enseignants comme celles des IREM ou de l'APMEP⁷. La situation est bien différente à l'école où, même si l'histoire des mathématiques apparaît parfois à titre documentaire dans certains manuels, son utilisation comme support pédagogique relève encore souvent d'expérimentations faisant l'objet de rares publications (Cerquetti-Aberkane & Rodriguez, 2002 ; Moyon & Tournès, 2018) et de quelques analyses dans des travaux de recherches comme des thèses (Poisard, 2005 ; De Varent, 2018) ou des articles (Chorlay *et al.*, 2017 ; De Vittori & Leroy, 2017). À l'échelle internationale, de nombreux pays ont suivi la même trajectoire que la France et beaucoup d'entre eux ont maintenant introduit une demande institutionnelle pour l'utilisation de l'histoire dans l'enseignement des sciences et dans la formation des enseignants. Toutes les situations locales sont légèrement différentes mais de nombreux ouvrages (Fauvel & Van Maanen, 2002 ; Katz & Tzanakis, 2011 ; Katz *et al.*, 2014) donnent une très bonne idée de l'importance de cette question en tant que sujet de recherche. Ce panel de quelques décennies de travaux a permis de progressivement identifier les atouts potentiels de l'entrée dans les apprentissages mathématiques par leur histoire (Clark *et al.*, 2019). On constate désormais un consensus mondial sur les trois fonctions que peut jouer l'histoire en classe (vicariante, c'est-à-dire de remplacement de l'entrée habituelle, dépayssante, et culturelle), sur les types d'introduction (par des supports authentiques, par des anecdotes, par une reconstruction des concepts — approche dite génétique, etc.), et sur les grands domaines pour la recherche. Clark *et al.* (2019) ne manquent pas de relever aussi des critiques et limites déjà bien identifiées comme la déconnexion dans certains cas avec les enjeux scolaires, le temps que cela peut prendre en classe, la difficulté intrinsèque de certaines sources (textes anciens, contenus mathématiques difficiles), le manque de formation des enseignants, le manque de goût de certains élèves pour l'Histoire vue ici comme discipline scolaire, etc. Le questionnement développé dans cet article s'inscrit pleinement dans ce contexte international où la communauté des chercheurs impliqués s'alarme régulièrement du manque d'études empiriques permettant d'éclairer ou d'expliquer l'apparente pertinence de cette approche pédagogique. Parmi les nombreux thèmes à étudier pour tenter d'expliquer l'efficacité de l'utilisation de l'histoire des mathématiques en classe, le contexte présenté en introduction nous a incité à travailler plus spécifiquement sur l'histoire racontée/présentée aux élèves. Comme son nom l'indique, le support historique renvoie à une histoire. Dans le cadre de l'expérimentation qui est développée dans cet article, la dimension historique n'est cependant pas de la seule responsabilité de l'élève, elle existe dans la complémentarité du support donné à voir/lire et du discours de l'adulte. Nous le verrons dans le paragraphe suivant, une histoire imaginée est toujours partagée, elle existe

l'enseignement « était déjà le thème du premier colloque sur l'histoire des mathématiques organisé par l'I.R.E.M. de Caen en 1977 ».

⁶ Les programmes actuels de mathématiques du lycée en série générale comprennent tous un paragraphe entier, par grand domaine (algèbre, analyse, géométrie, probabilité, ...), présentant des temps forts de l'histoire des notions abordées ainsi que quelques auteurs majeurs. Concernant la mise en œuvre en classe, on peut lire dans le préambule commun en seconde, première et terminale : « Il peut être judicieux d'éclairer le cours par des éléments de contextualisation d'ordre historique, épistémologique ou culturel. L'histoire peut aussi être envisagée comme une source féconde de problèmes clarifiant le sens de certaines notions. Les items Histoire des mathématiques identifient quelques possibilités en ce sens. Pour les étayer, le professeur peut s'appuyer sur l'étude de documents historiques » (BO spécial n° 1 du 22 janvier 2019 et BO spécial n° 8 du 25 juillet 2019).

⁷ Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public.

dans un collectif ou une culture qui lui donne sens. Dès lors, l'utilisation d'un support historique authentique engage aussi un ensemble de connaissances scientifiques qui n'est pas neutre. Nous proposons ainsi de distinguer dans la suite, à titre méthodologique, une activité accompagnée d'une histoire fictive d'une autre qui trouverait ses contenus dans l'histoire des mathématiques. Mais est-ce l'histoire des mathématiques, c'est-à-dire la reconstruction rationnelle de ce qu'ont fait d'autres hommes dans les temps passés, ou simplement l'histoire au sens d'un récit conté consubstantiel à elle, qui rend une séance pertinente et accrocheuse ?

1.2. L'imagination, l'imaginaire et les apprentissages

Comme le savent bien les professeurs des écoles, les apprentissages aux cycles 1-2-3, plus qu'au cycle 4 et après, doivent prendre en compte le fait qu'il s'agit autant d'enfants que d'élèves. L'intérêt est ici de souligner que le travail avec des élèves jeunes va permettre de rendre saillantes certaines dimensions psychologiques qui sont peut-être moins visibles avec des adolescents ou de jeunes adultes. Comme nous allons le détailler ci-après, notre étude n'est pas une recherche en psychologie mais certaines idées élémentaires issues de la psychologie du développement ont contribué à l'élaboration de l'expérimentation. Un rapide parcours de l'histoire des réflexions scientifiques et philosophiques (Archambault & Venet, 2007) montre que l'imagination oscille selon les auteurs et les époques entre une compétence passive reproduisant de manière plus ou moins déformée notre expérience du réel et une faculté de notre intellect à recombinaison des idées en ce qu'on nomme parfois l'imagination créatrice. Cette dernière position, plus récente dans l'histoire, est aussi la plus intéressante lorsqu'on s'intéresse aux apprentissages. En effet, comme soulignent Archambault et Venet (2007, p. 7) reprenant à leur compte des analyses de Sauvageot (2002), « *l'imaginaire représente une autre façon de percevoir la réalité, une autre logique, nécessaire à une meilleure compréhension du monde* ». Nous ne rentrons pas ici dans une distinction entre imagination et imaginaire où la première serait vue comme un processus ou un mode de pensée alors que le second serait plutôt le produit obtenu. Pour Sauvageot, si l'imaginaire est bien « *une banque de toutes les images possibles, passées, présentes et à venir* », c'est « *également le procès dynamique selon lesquelles celles-ci sont mentalement produites, retenues et transformées* ». Dans la suite de cet article, nous utiliserons donc indifféremment les deux termes. Notre propos portera sur l'imaginaire tel qu'il est à l'œuvre chez les enfants lorsqu'ils rencontrent sous forme écrite, orale ou vécue, une histoire. Concernant les enfants et leur psychologie, une lecture des travaux de Piaget et de Vygotsky est toujours riche d'enseignements. Sur la question de l'imagination, ces deux auteurs vont s'opposer en proposant deux lectures théoriques très différentes.

Pour Piaget, le développement de l'intelligence s'organise de la petite enfance à l'adolescence autour de la construction progressive d'une pensée rationnelle et formelle. Dans cette structuration, l'imagination est plutôt conçue par Piaget comme antinomique de la pensée structurée. Archambault et Venet (2007, p. 10) expliquent que « *Piaget oppose imagination créatrice et pensée logique* » et que ses études

ne permettent pas de suivre directement le développement de l'imagination chez l'enfant, mais ses recherches sur le développement cognitif situent la période la plus prolifique de l'imagination à l'arrivée du langage, du jeu symbolique et de l'imitation représentative.

Les expérimentations en classe de CM2 nous placent bien loin de ces premiers développements. Néanmoins, la pensée formelle n'étant, selon Piaget, pleinement opératoire que vers l'adolescence, il n'est pas inintéressant de garder en tête cette place de l'imaginaire dans la structuration de la pensée des très jeunes enfants avec des élèves de 10-11 ans. La fréquentation de l'histoire des mathématiques, c'est-à-dire celle d'un monde passé à tout jamais inaccessible,

ne nous paraît pas si éloignée des jeux symboliques mettant à l'œuvre une imagination créatrice. Ceci est particulièrement marquant lorsque la tâche consiste à faire des mathématiques comme les anciens. Piaget a peu de considération pour l'imagination car, selon lui, elle ne participe pas de manière productive à l'intelligence et est amenée à disparaître « *au profit de moyens de représentation plus adaptés au réel* » (Piaget, 1972, p. 138). Il écrit ainsi « *Au fond, l'enfant n'a pas d'imagination et celle que le sens commun lui attribue se réduit à l'incohérence et surtout à l'assimilation subjective dont témoignent ses transpositions* » (*ibid.*). Pour aller plus loin dans le rôle que peut jouer l'imaginaire pour notre thématique, c'est désormais vers Vygotsky qu'il convient de se tourner. Ses travaux sont d'autant plus pertinents que ce dernier a effectué des recherches sur des enfants plus âgés, donc plus proche des élèves impliqués dans l'expérimentation.

Contrairement à Piaget qui fait de l'imagination un caractère du petit enfant, Vygotsky la considère comme « *un processus directement lié à la création de sens - une fonction psychologique supérieure qui a des liens non seulement avec les émotions mais aussi avec les fonctions intellectuelles* » (Gajdamaschko, 2006, p. 37, notre traduction). Il y aurait ainsi un développement en parallèle de la pensée rationnelle et de la pensée imaginaire jusqu'à la fin de l'adolescence. Plus précisément, comme le souligne Gajdamaschko (2006), pour Vygotsky,

ce qui est substantiellement nouveau dans le développement de la fantaisie pendant l'âge de transition est précisément contenu dans le fait que l'imagination d'un adolescent entre en relation étroite avec la pensée en concepts ; elle est intellectualisée et incluse dans le système de l'activité intellectuelle et commence à remplir une fonction complètement nouvelle dans la nouvelle structure de la personnalité de l'adolescent (ibid., p. 36, notre traduction).

Plus en phase avec les recherches récentes, cette posture permet d'interroger le rôle de l'imagination tant chez l'enfant que chez l'adulte. Pour Vygotsky, l'imagination est une force créatrice qui est d'autant plus puissante qu'elle s'appuie sur une expérience riche. Le contrôle de l'imagination vient donc avec la maturité et le développement (Gajdamaschko, 2006, p. 38). Elle s'articule autour de deux phases, la première permettant de produire à partir du réel des éléments de pensée altérés, et la seconde proposant une recombinaison de ces éléments, mais aussi de sensations passées, en une production imaginaire. Dans tout ce processus, pour Vygotsky qui, rappelons-le, est l'un des pères fondateurs du socioconstructivisme, l'enfant ou l'adulte n'est pas seul. Le développement s'inscrit dans des rapports sociaux⁸ (Gajdamaschko, 2006) qui contribuent à donner corps à l'imagination comme fonction mentale supérieure (par le partage d'idées par exemple). L'adulte, comme l'enfant, est capable de faire comme si, ce qui a son importance lorsqu'on propose une situation d'apprentissage des mathématiques qui suggère un changement de posture (prendre la posture du chercheur ou d'un savant du passé) ou de conception (en reprenant par exemple à son compte un ensemble d'idées ou de conceptions relatives à des notions). Face à une acception commune qui fait de l'imagination uniquement le lieu d'élucubrations sur ce qui n'existe pas, Vygotsky (2004) explique que

en réalité, l'imagination, en tant que base de toute activité créative, est une composante importante d'absolument tous les aspects de la vie culturelle, permettant la création artistique, scientifique et technique (Vygotsky, 2004, p. 9, notre traduction).

Dans le cadre des théories de Vygotsky, « *l'imagination, dans sa forme la plus accomplie, ne se manifeste qu'avec la maîtrise des concepts* » (Archambault & Venet, 2007) ce qui offre des perspectives intéressantes en termes d'expérimentations ou de pratiques pédagogiques. En effet,

⁸ « *This idea is central to Vygotsky's views on development in general and development of imagination in particular. Only the acquisition of cultural tools allows the transformation from lower natural functions to higher (cultural) functions* » (Gajdamaschko, 2006, p. 35).

en plaçant l'aboutissement de l'imaginaire plutôt du côté du monde des adultes, Vygotsky justifie ainsi le passage d'une imagination subjective (le monde des rêves et des jeux des enfants) à une imagination objective qui permet l'innovation et la création d'idées scientifiques et techniques nouvelles. Notons pour terminer ce panorama des réflexions psychologiques que les recherches récentes dans ce domaine tendent à attribuer un rôle cognitif fort à l'imagination dès l'enfance. Pour Harris (2002), l'un des aspects importants de l'imagination est qu'elle permet aux enfants de faire comme si ce qui les place dans un univers où « *ils interpolent dans le cadre de cette situation imaginaire les mêmes processus et nécessités causals qu'ils savent être à l'œuvre dans la réalité* » (Harris, 2002, p. 237). Dans ce sens, l'imagination peut devenir porteuse de raisonnements. Notons alors que, comme nous invite à le penser Gajdamaschko (2006, p. 40), avec la perspective vygotkienne selon laquelle les histoires peuvent servir d'outils pour stimuler l'imagination, « *il reste à savoir quels types d'histoires nous devrions utiliser dans l'éducation de nos élèves* » (notre traduction). L'histoire des mathématiques a peut-être cette faculté d'entrer en résonance avec l'imagination créative dont Vygotsky dit explicitement qu'elle est « *cette capacité à combiner des éléments pour produire une structure, à combiner l'ancien de manière nouvelle* » (Vygotsky, 2004, p. 12, notre traduction).

1.3. L'approche quantitative en didactique des mathématiques

Assez peu présente dans les travaux de didactiques des mathématiques dans la tradition française, l'approche quantitative n'est pourtant pas étrangère à la réflexion sur les apprentissages scolaires. Souvent vue uniquement au travers du prisme des études à très grandes échelles comme PISA ou TIMMS, l'utilisation d'outils issus de la statistique constitue pourtant une part assez importante des recherches actuelles en éducation à l'échelle mondiale. Fort de l'expérience d'une utilisation massive dans d'autres sciences humaines (économie, psychologie, sociologie, ...), il ne s'agit évidemment pas de céder à une forme de fascination béate pour des méthodes mathématiques sophistiquées. Comme on peut le lire dans une synthèse européenne récente sur les méthodes utilisées dans les recherches en éducation,

en termes de méthodologie de recherche, les dernières décennies montrent clairement que la recherche empirique est importante, mais nous devons veiller à maintenir l'équilibre entre des recherches quantitatives statistiques, des études qualitatives et des travaux conceptuels et théoriques dans le domaine de la didactique des mathématiques (Blum et al., 2019 p. 137, notre traduction).

En France, les recherches publiées se concentrent plutôt sur les deux derniers aspects en produisant sans conteste des cadres théoriques mondialement reconnus ainsi que des analyses qualitatives très fines des apprentissages mathématiques. On trouve néanmoins aussi des publications comportant une approche quantitative, comme dans les *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives* par exemple (voir Emprin, 2018). Parfois moins connue des enseignants et des formateurs, l'analyse quantitative a pourtant été vue depuis longtemps comme potentiellement pertinente pour des questionnements en didactique des mathématiques. Née dans les recherches mathématiques du tout début du XX^e siècle, l'analyse de données prend son essor en France surtout autour des années 1960 (Husson, Lê & Pagès, 2016) et seulement quelques décennies plus tard les premières pistes d'utilisation en didactique sont proposées. Après plusieurs travaux liant méthodes statistiques et sciences humaines dans les années 1980, Gras estime que l'analyse de données peut s'avérer « *très pertinente pour questionner des faits didactiques quantifiés et pour formuler des hypothèses* » (Gras, 1992, p. 59). L'objectif est alors de « *fonder scientifiquement, en dépassant la simple opinion [...] des hypothèses correspondant à ces questions* » (*ibid.*, p. 61). Comme nous l'avons souligné précédemment en rappelant la complémentarité des études quantitatives et qualitatives, le projet pourrait paraître trop

ambitieux, voire naïf. Il n'en est en fait rien car, dès l'évocation des premières pistes d'un usage didactique de la statistique, sont pointés deux caractères importants d'une telle méthode. D'abord, « *les méthodes ayant des fondements mathématiques différents [...] conduisent à des résultats qui, certes fréquemment se confortent, mais le plus souvent se complètent ; ceci doit nous encourager à doubler telle méthode par telle autre* » et, d'autre part, « *l'interprétation ne peut se faire qu'à partir de questions préalablement posées* » (*ibid.*, p. 71). Ainsi, loin de s'opposer à d'autres approches, les études quantitatives viennent en complément tant dans des phases exploratoires que dans des phases de validation. Dans ce qui suit, nous allons utiliser une analyse en composantes principales (ACP) qui est l'une des formes des analyses factorielles dont l'objectif est de rendre les données lisibles tout en conservant un maximum d'information. Dans la pratique, ces méthodes « *permettent d'utiliser les facultés de perception dont nous usons quotidiennement* » afin de voir dans des graphiques « *des regroupements, des oppositions, des tendances impossibles à discerner sur un grand tableau* » (Escofier & Pagès, 2016, p. 2).

2. Contenu de l'expérimentation et données recueillies

2.1. La base 60 : un enjeu d'apprentissage en numération

Dès le cycle 2, en parallèle de l'apprentissage du système de numération en base 10, les élèves côtoient, au travers de la mesure du temps, un autre système, en base 60. Au cycle 2, pour « *comparer, estimer, mesurer des durées* », les élèves travaillent spécifiquement les « *unités de mesure usuelles de durées : j, semaine, h, min, s, mois, année, siècle, millénaire* » et les « *relations entre ces unités* » (MEN, 2018). Dans le paragraphe « *Résoudre des problèmes impliquant des longueurs, des masses, des contenances, des durées, des prix* » (MEN, 2018), les programmes ne font ensuite aucune distinction entre les différentes manières d'écrire les nombres. Toutes ces notions seront simplement approfondies au cycle 3. Ainsi, pour la base 60, utilisée pour les durées comme pour la base 10, utilisée pour tous les autres contextes, il s'agit bien d'un système dont les élèves doivent d'abord comprendre les règles, puis les réinvestir lors de la manipulation des nombres dans des situations problèmes. Sur ce chapitre, plus encore qu'en base 10, on retrouve chez les élèves les mêmes difficultés lors des changements de rang (Tempier, 2016). Avec la valeur 60 pour la base, contrairement à l'écriture décimale, à chaque rang ne correspond pas forcément un seul chiffre. On écrit par exemple 12 *min* 43 *s*. Les différents chiffres du système sexagésimal (ici 43 pour les secondes et 12 pour les minutes) gardent une écriture décimale, ce qui ajoute de la confusion. L'intérêt d'un travail avec des sources puisées dans l'histoire des mathématiques est alors de souligner temporairement cette particularité en proposant un autre système pour l'écriture décimale. Notre choix s'est évidemment porté sur l'écriture cunéiforme développée en Mésopotamie il y a plusieurs milliers d'années. Dans toute la suite, il nous faut préciser que plusieurs simplifications ont été opérées afin de rendre le contenu aisément accessible aux élèves mais aussi pour permettre l'élaboration de contenus suffisamment proches pour être intégrés dans une même analyse didactique. La première simplification concerne les civilisations dont il est question. Si la civilisation extraterrestre imaginaire (les Zalussiens, voir ci-après) ne porte en elle aucune contrainte, parler des Babyloniens sous un seul et même vocable est, en soi, très réducteur pour décrire les activités humaines en Mésopotamie pendant près de trois millénaires. Ne voulant pas créer tout un univers aussi riche pour le peuple imaginaire, nous avons fait le choix d'évoquer les Babyloniens sans entrer dans les détails. La seconde liberté prise avec les connaissances scientifiques sur cette période réside dans l'utilisation d'une forme d'écriture des nombres hors de son champ d'application historique (Proust, 2008, pp. 146-147). Comme l'explique Proust

(2008)⁹ plusieurs systèmes de numération ont coexisté, dont en particulier un système additif (pour le comptage ordinaire) et un système positionnel (pour les calculs mathématiques). Pour des raisons de proximité avec notre manière de représenter le temps (heures, minutes, secondes), nous avons pris le parti d'introduire en classe le système positionnel même si nos exemples relèvent plus du comptage ordinaire. Comme nous allons le voir ci-après dans la description des supports distribués aux élèves lors de l'expérimentation, l'écriture cunéiforme babylonienne obligera les élèves à coder les différents groupements d'unités, puis de soixantaines, et enfin de soixantaines de soixantaines.

2.2. Les supports de classe

Afin d'étudier le rôle de l'histoire dans un apprentissage s'appuyant sur l'histoire des mathématiques, une activité à destination d'élèves de CM2 a été déclinée en trois versions différentes. Les deux premières comprennent de l'histoire (version 1 et version 2) et la troisième, de contrôle, est sans support historique (version 3). Dans les trois cas, le scénario s'organise autour de trois temps successifs : une activité spécifique à chaque scénario permettant de manipuler la base 60, une série d'exercices décontextualisés commune aux trois versions, et enfin un questionnaire.

L'activité d'approche dans les versions 1 et 2

Pour limiter au maximum les biais liés à des supports différents, les deux activités comportant un volet histoire sont identiques dans leur organisation, dans les nombres et énoncés proposés, ainsi que dans les tâches demandées. L'unique différence a été de substituer au contexte historique réel des mathématiques babyloniennes (version 1) un contexte fictif évoquant une civilisation extraterrestre du vingt-quatrième millénaire, les Zalussiens (version 2). Ces modifications ont porté sur les textes d'introduction et d'explication, l'une des images d'illustration, un nom propre et les objets à dénombrer dans le problème de fin d'activité.



Figure 3 : Textes d'introduction et illustrations des deux versions avec histoire.

Le choix d'une date très éloignée dans le futur et l'utilisation de mots clairement inventés pour la galaxie et la civilisation visent à ne laisser aucun doute quant au côté imaginaire de la situation dans la version 2. L'ancrage dans un univers de fiction est par ailleurs accentué par une image représentant une planète inconnue et une galaxie. Par contre, la première image qui donne à voir des caractères cunéiformes authentiques gravés dans la pierre sont identiques pour chacun des deux scénarios. Ce support est un tremplin pour l'introduction du système d'écriture en base 60.

⁹ Voir aussi toutes les contributions de Christine Proust sur <http://images.math.cnrs.fr/>.

Pour toute la suite de l'activité, dans les deux versions 1 et 2, l'écriture cunéiforme est présentée exactement de la même manière par l'explicitation des règles, l'illustration sur des exemples et des questions d'application. Entre les deux versions, seul le mot « Babylonien(ne)(s) » a été remplacé par le mot « Zalussien(ne)(s) ».

Pour les mathématiques, si le nombre est inférieur à 60, les [Babyloniens/Zalussiens] utilisent deux symboles, les clous \uparrow et les chevrons \langle :

- \uparrow qui vaut 1,
- \langle qui vaut 10.

On écrit ensuite autant de fois le symbole qu'il faut en utilisant le moins possible et en réduisant éventuellement la taille des symboles.

Par exemple, 17 s'écrit $\langle \# \uparrow$ et 44 s'écrit $\# \#$.

Question 1 :

À quel nombre correspond l'écriture [babylonienne/zalussienne] $\{ \# \uparrow$?

Comment écrire 46 en [babylonien/zalussien] ?

Les nombres ont été choisis de manière à ne pas créer de difficultés particulières quant à la compréhension et aux calculs. En particulier, les exemples 17 et 44 permettent de faire apparaître le rôle du chevron dans l'écriture cunéiforme¹⁰. L'application ensuite sur le nombre 46 offre aux élèves l'opportunité de s'appuyer à la fois sur la règle et sur l'exemple 44 donné juste avant. On notera que les élèves n'ont pas exprimé de difficultés dans la compréhension de l'aspect additif du système. Ils ont perçu intuitivement que les quatre petits chevrons dessinés pour 44 représentaient quatre dizaines, de même pour les assemblages de clous malgré une modification de graphie dans laquelle on ne garde que la tête du clou. Après ce premier temps sur ce qui constitue en fait le chiffre en base 60, la suite de l'activité propose d'entrer dans le cœur du travail sur les changements de rang dans un système de numération sexagésimal. Comme pour la question 1, la question 2 est introduite par une présentation de la règle suivie de deux exemples.

Si le nombre est supérieur à 60, les [Babyloniens/Zalussiens] font des groupements de 60 qu'ils écrivent à part. Le nombre de groupes de 60 est écrit avec le système précédent.

Par exemple, 85 s'écrit $\uparrow \{ \# \uparrow$ car $85 = 1 \times 60 + 25$ et 201 s'écrit $\# \{ \uparrow$ car $201 = 3 \times 60 + 21$.

Question 2 :

À quel nombre correspond l'écriture [babylonienne/zalussienne] $\uparrow \{ \# \uparrow$?

Comment écrire 285 en [babylonien/zalussien] ?

Là encore, les nombres manipulés par les élèves sont simples. Ils sont choisis pour faire apparaître le premier changement de rang (le rang des soixantaines) dans ce système de numération. Pour des questions de lisibilité, un espace a été introduit entre le rang des soixantaines et celui des unités. Le travail portant surtout la règle d'échange un pour soixante en vue de son réinvestissement dans les calculs de durées, nous n'avons pas utilisé le système babylonien strict dans lequel tous les signes sont accolés. De même, nous avons veillé à ne pas faire apparaître de rang vide pour ne pas avoir à introduire un signe supplémentaire (le marqueur du zéro apparaît dans les écrits babyloniens tardifs) ou créer une difficulté qui n'existe pas dans notre système par l'absence d'un tel signe comme on peut le voir dans des écrits babyloniens anciens. La présentation du système d'écriture en base 60 se termine par une phrase expliquant l'extension des règles au-delà du premier changement de rang.

¹⁰ Pour des raisons de qualité de support à distribuer, une police de caractères spécifique a été utilisée. Bien qu'elle permette une écriture facile des caractères, elle ne saurait être pleinement conforme à la graphie ancienne.

S'il y a plus de 60 groupements de 60, les [Babyloniens/Zalussiens] continuent à décaler l'écriture sur le même principe et ainsi de suite à chaque fois qu'on atteint 60 dans les différents rangs.

L'objectif de ce texte est surtout de faire le lien plus tard avec notre système heures /minutes/secondes. En effet, dans le cadre de l'activité, les nombres restent inférieurs à 3 600 pour ne travailler que sur le premier changement de rang. Le dernier temps de l'activité est un problème multiplicatif suivi d'une comparaison de deux nombres. Comme précédemment, l'énoncé, sans sa structure, est rigoureusement identique, seul le contexte est modifié.

Version 1	Version 2
<i>Le roi babylonien Hammourabi possède 𐎶 𐎠 diamants.</i>	<i>Le roi zalussien Garmilik possède 𐎶 𐎠 vaisseaux de transport.</i>
<i>Après une bataille, Hammourabi demande au souverain vaincu de lui apporter 𐎶𐎶 rubis par jour pendant une semaine. Combien de rubis recevra le roi Hammourabi ?</i>	<i>Après une bataille, Garmilik demande au souverain vaincu de lui apporter 𐎶𐎶 navettes stellaires par jour pendant une semaine. Combien de navettes stellaires recevra le roi Garmilik ?</i>
<i>À la fin, le roi Hammourabi a-t-il plus de diamants ou plus de rubis ?</i>	<i>À la fin, le roi Garmilik a-t-il plus de vaisseaux de transport ou plus de navettes interstellaires ?</i>

Figure 4 : Texte du problème d'application en fin d'activité pour les deux versions.

Les nombres sont parfaitement identiques dans les deux versions. Avec ou sans traduction dans notre système décimal, il s'agit de calculer le nombre de rubis/navettes, $25 \times 7 = 175$, puis de le comparer au nombre de diamants/vaisseaux, c'est-à-dire 196.

À l'issue de ce travail sur le système sexagésimal, la fiche d'activité présente un petit paragraphe qui précise, dans les deux cas, l'intérêt historique de ce type de numération. L'apport culturel présent est ainsi maintenu dans toutes les approches par l'histoire des mathématiques. Dans le cas de la version 2, le texte est complété par l'enseignant sous forme orale ou écrite.

Version 1	Version 2
<i>Bien qu'étrange, ce système d'écriture des nombres est le même que celui que nous utilisons pour les durées. En effet, 60 secondes font 1 minute, 60 minutes font 1 heure. Très utilisé pour les calculs astronomiques, c'est bien le système babylonien qui s'est transmis au fil des âges et dont nous avons hérité.</i>	<i>Bien qu'étrange, ce système d'écriture des nombres est le même que celui que nous utilisons pour les durées. En effet, 60 secondes font 1 minute, 60 minutes font 1 heure.</i> <i>Exemple de complément par l'enseignant : « Notre système d'écriture des nombres pour les durées est très ancien. Il nous vient des Babyloniens, une civilisation qui s'est développée en Mésopotamie (l'Irak actuel) au II^e millénaire av. J.C. et qui écrivait exactement comme dans l'activité. Très utilisé pour les calculs astronomiques, le système babylonien s'est transmis au fil des âges. Nous en avons hérité et c'est pour cela que 60 secondes font 1 minute, 60 minutes font 1 heure ».</i>

Figure 5 : Texte de conclusion de l'activité dans les deux versions avec histoire.

L'activité d'approche dans la version 3

La troisième version du scénario est une déclinaison sans référence à une histoire de l'activité. Il n'y est faite aucune mention de l'histoire des mathématiques ou d'une histoire fictive et les calculs se font directement dans le système heures/minutes/secondes. En lieu et place de l'introduction du système babylonien, une phrase rappelle simplement les règles d'échanges

« Dans le système d'écriture que nous utilisons pour les durées 60 secondes font 1 minute, 60 minutes font 1 heure ». Elle est suivie directement d'exemples car il n'est pas nécessaire de vérifier ici la bonne compréhension des signes utilisés dans l'écriture. Les exemples numériques sont, bien entendu, les mêmes que pour les deux premières versions ($85s=1min\ 25s$ et $201s=3min\ 21s$). Les exercices se présentent sous la forme de classique de questions de conversions « Combien de secondes font 2 minutes et 27 secondes ? Convertis 285 secondes en minutes et secondes ? » Pour finir, le problème garde la structure et les valeurs des versions 1 et 2 mais le contexte est contemporain :

Version 3
<i>Pendant la semaine, Marc a téléphoné en tout durant 3 minutes et 16 secondes.</i>
<i>Son ami Diégo a, quant à lui, téléphoné 25 secondes chaque jour de la semaine. Combien de temps (en minutes et secondes) a-t-il téléphoné cette semaine ?</i>
<i>À la fin, qui de Marc ou Diégo a téléphoné le plus longtemps ?</i>

Figure 6 : Énoncé du problème de fin d'activité dans le scénario sans histoire.

Là encore, les données numériques sont les mêmes. Pour cette version 3 comme pour les versions 1 et la 2, l'activité d'approche est suivie par une série d'exercices d'applications sur des conversions et des calculs de durées sans mention des systèmes de numération sexagésimale travaillés précédemment.

La fiche d'exercices décontextualisés

Même si ce n'était pas l'objet principal de l'expérimentation, il est toujours intéressant de voir si les élèves sont en mesure de réinvestir des notions ou méthodes vues lors d'une activité à support historique. De plus, l'entraînement sur des exercices plus traditionnels et conformes aux attendus des programmes permet de justifier, si besoin, l'absence de temps perdu lors du choix de l'approche par l'histoire des mathématiques. Si les élèves réussissent au moins aussi bien que s'ils n'avaient pas vécu cette forme d'activité, c'est que cette dernière ne nuit pas aux apprentissages. *A minima*, elle permet de faire aussi bien qu'une situation usuelle, au mieux, elle permet d'enrichir les connaissances, compétences, et conceptions des élèves. Comme dans toute innovation pédagogique, c'est évidemment cette dernière situation qui est généralement souhaitée par les enseignants. Il convient néanmoins de toujours le vérifier afin à ne pas se restreindre à un ressenti subjectif quant à la réussite de la séance. Du fait du contexte (contraintes sanitaires liées au COVID 19) notre expérimentation comporte une part assez courte d'exercices mais ces derniers visent à être conformes à ce qui peut être habituellement fait dans une classe de CM2 tant sur la quantité que sur la qualité. La fiche d'exercices comporte ainsi deux exercices de conversions suivis d'un problème. Pour les exercices 1 et 2, il s'agit de convertir en heures, minutes et secondes plusieurs durées. Dans l'exercice 1, les valeurs ($18min\ 85s$, $70min\ 8s$, $65min\ 67s$, $124min\ 72s$) sont choisies de manière à faire apparaître deux des trois rangs du système $h/min/s$. Par contre, l'exercice 2 propose de convertir des durées données uniquement en secondes ($3212s$, $4000s$, $7290s$, $11000s$) afin de vérifier progressivement la bonne compréhension du passage d'un rang à l'autre sur les trois rangs. À la suite de ces tâches décontextualisées, l'exercice 3 présente un court problème multiplicatif et de conversion sans histoire support :

Exercice 3

L'Hyperloop est un projet de train encore plus rapide que le TGV. On pourrait aller de Paris à Limoges en 25 minutes. Aujourd'hui, le train proposé met en moyenne huit fois plus de temps.

Quelle est la durée du trajet Paris-Limoges aujourd'hui ?

Ce problème mettant en œuvre une multiplication (ou une addition itérée), il entre en résonance avec celui rencontré dans l'activité d'approche dans chacun des trois scénarios.

2.3. Le questionnaire et les données recueillies

Structure du questionnaire

Pour évaluer cette expérimentation en classe de CM2, à la suite de l'activité et des exercices, plusieurs questions ont été posées aux élèves. Le questionnaire est un QCM construit autour de deux grandes thématiques. La première est plutôt de type scolaire et concerne le ressenti des élèves à propos des différents exercices. Dans cette thématique, nous avons demandé un avis global sur l'activité : « *Comment as-tu trouvé cette activité (entoure ta réponse) ? Pas intéressante / Peu intéressante / Assez intéressante / Très intéressante* » ainsi qu'un retour sur la difficulté perçue pour chacun des trois exercices scolaires via une échelle de Likert à cinq degrés (étoiles à colorier, 1 étoile = très facile ; 5 étoiles = très difficile). Dans le traitement des données, à ces premières questions viennent s'adjoindre les résultats de chaque élève sur chaque exercice en utilisant un barème par exercice et par question. Les exercices 1 et 2, ont été notés sur la base de 0,25 point par bonne réponse et l'exercice 3 avec 1 point si le problème est pleinement résolu, 0,5 point s'il manque la conversion finale. La deuxième thématique du questionnaire porte sur le contenu historique de l'activité et sur la fréquentation de l'Histoire et des mondes imaginaires par les élèves. Pour le contenu historique abordé dans l'activité, dans les scénarios 1 et 2, une première question porte sur le réinvestissement par l'élève du système de numération découvert dans l'activité : « *Est-ce que tu as repensé au système de numération babylonien/zalussien pour faire les exercices ? Pas du tout / Un peu / Beaucoup* ». Notons dès à présent que cette question a été peu comprise par les élèves, ce que nous avons pu observer par un nombre important de prises de parole spontanées pour demander ce qui était attendu. Cette incompréhension aura de l'importance pour le traitement ultérieur des données du questionnaire. Pour le scénario 3, qui ne comporte pas de système exotique, cette question est supprimée. Toujours à propos de l'histoire des mathématiques présente dans l'expérimentation, nous avons interrogé les élèves sur leur envie d'en savoir plus « *Aimerais-tu en savoir plus sur les mathématiques des Babyloniens / Zalussiens et leur histoire ? Non / Oui, un peu / Oui / Oui, ça m'intéresse beaucoup* ». Pour le scénario 3, cette question est modifiée afin de la connecter aux compléments faits par l'enseignant à l'issue de l'activité (voir partie 2.2. *L'activité d'approche dans les versions 1 et 2*). Un court texte de cinq lignes expliquant le rôle de la civilisation babylonienne dans notre système de mesure du temps est suivi de la question « *Aimerais-tu en savoir plus sur les mathématiques et leur histoire ? Non / Oui, un peu / Oui / Oui, ça m'intéresse beaucoup* ». La fin du questionnaire est consacrée à une tentative d'évaluation du temps que les élèves peuvent consacrer à des activités mettant en jeu l'Histoire ou des histoires. Pour la série de six activités reprise ci-dessous, les élèves doivent indiquer le temps moyen hebdomadaire qu'il y consacre :

Combien de temps par semaine, en moyenne, passes-tu à :

- regarder des vidéos documentaires (histoire, sciences, etc.) ?
- regarder des films, des séries et des dessins animés ?
- jouer à des jeux vidéo d'aventure ou de rôle ?
- jouer à des jeux vidéo de stratégie ou de gestion ?

- jouer à des jeux d'action, de sport ou de combat ?
- lire des livres ou des BD ?
- lire des magazines ?

(NB : chaque item fait l'objet d'une question séparée)

Le questionnaire est présenté sous forme de tableau et les élèves peuvent choisir parmi différentes tranches « *Moins d'une heure (c'est-à-dire moins de 10 min par jour) / 3-4 heures (env. 30 min par jour) / 7-8 heures (env. 1 h par jour) / 14-15 heures (env. 2 h par jour) / Plus de 15 heures (plus de 2 h par jour)* ». Comme le souligne D'Amato (2007) :

Ce qui rend les jeux vidéo particulièrement attractifs, c'est la possibilité donnée à l'utilisateur de devenir le protagoniste des histoires racontées et d'agir à la première personne en changeant le cours des événements [...] exister dans un environnement fictif, où l'on projette son moi (D'Amato, 2007, p. 74).

Le monde du jeu vidéo est fait d'imaginaire et il constitue de plus en plus l'un des loisirs dominant chez les enfants, en particulier les adolescents et pré-adolescents. En plus des livres et des films, nous avons donc inclus ce loisir numérique dans notre questionnaire.

Structure des données recueillies

Même si les questions prennent une allure qualitative qui nous paraît plus facile à comprendre pour les élèves, les différentes réponses du questionnaire s'organisent finalement toutes sous la forme d'une échelle de Likert. Ceci facilite le traitement car il suffit de recoder les différentes appréciations (par exemple de 0 pour « *Non* » à 3 pour « *Oui, ça m'intéresse beaucoup* ») et de les insérer dans un tableau donnant en colonnes chacune des questions et en lignes chaque élève. Les effectifs sont les suivants : version 1 (10 élèves), version 2 (10 élèves) et version 3 (9 élèves). On obtient au final un tableau de 29 lignes et 17 colonnes (1 colonne pour l'identification de la version vécue, 3 colonnes pour les résultats aux exercices, 13 colonnes pour les résultats du questionnaire).

2.4. Un mot sur le déroulement des séances

Pour notre expérimentation, l'organisation de la mise en œuvre a été fortement tributaire des mesures sanitaires liées au retour en classe progressif des élèves suite au confinement. Comme seul le travail en demi-classe était possible, un groupe de 10 élèves a travaillé à partir du récit fictif et un groupe de 10 élèves à partir du récit historique authentique. Un dernier groupe de 9 élèves de CM2 d'une école voisine a travaillé quant à lui sur le scénario sans support historique. Dans chacune des trois situations, les réflexions se sont déroulées individuellement sur des tables séparées selon les mesures de distanciation en vigueur. Chaque élève avait son matériel. Le rythme de classe habituel étant perturbé par la nouvelle organisation des écoles, l'ensemble de l'expérimentation s'est finalement déroulée sur cinq séances. La séance 1 a porté sur la découverte collective des défis, à partir des documents individuels distribués puis projetés sur le TBI. Durant cette séance, mais aussi lors des suivantes, les recherches des élèves ont été réalisées individuellement sur leur cahier. La mise en commun collective a eu lieu en séance 2 sur le tableau noir de la classe. Durant cette séance, des élèves ont pu proposer leur démarche et la justifier en interaction avec les autres élèves du groupe. Dans tous les cas, une conclusion portant sur l'héritage babylonien de la base 60 pour mesurer les durées a été élaborée avec élèves puis notée dans leur cahier de laboratoire. La séance 3 a permis de revoir les conclusions mémorisées lors de la séance précédente et, ensuite, les élèves se sont plongés individuellement dans les exercices d'entraînement sur les durées. Les exercices ont été corrigés collectivement en séance 4. La dernière séance a eu lieu lors du retour en classe des 24 élèves (sur 26). Cette

séance fut l'occasion d'évoquer des prolongements à partir de l'analyse culturelle des instruments de mesure des durées à travers les âges (le gnomon, le cadran solaire, la clepsydre, le sablier et les horloges). C'est également au cours de cette séance qu'a été passé le questionnaire.

Avec la crise sanitaire et la période de confinement en arrière-plan, les élèves ont paru très heureux de relever de nouveaux défis et de retrouver « leur labo ». Notons que, dans une situation plus ordinaire, le grand espace du laboratoire de l'école aurait certainement permis l'organisation de travaux de groupes où les échanges auraient été très intéressants. Malgré l'absence de ce dispositif, les défis réalisés sur supports historiques réels, imaginaires ou sans histoire ont été réussis plus rapidement que ce que l'on aurait pu supposer suite aux deux mois de confinement.

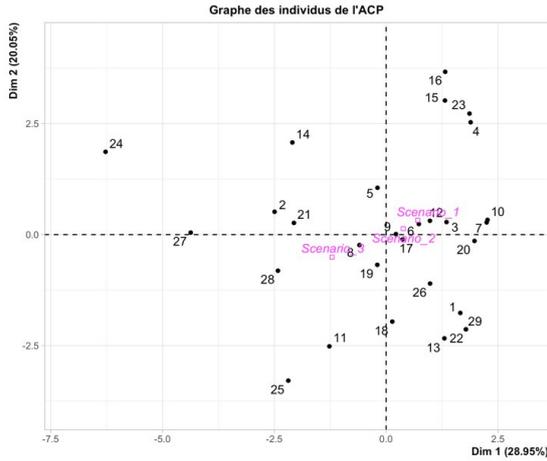
3. Analyse des données

3.1. L'analyse en composantes principales (premières interprétations)

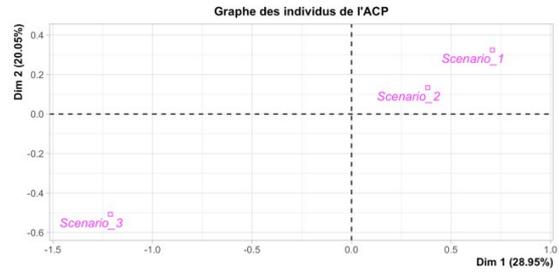
Sur les données recueillies, nous procédons à une analyse en composantes principales (ACP) qui doit nous permettre de rechercher des tendances générales et de voir si les trois scénarios y contribuent ou non de la même manière. Rappelons ici que, du fait d'effectifs faibles (seulement 29 élèves testés, répartis en trois groupes disjoints), l'analyse ne peut prétendre démontrer des effets forts et durables. Pour traiter les données, nous avons utilisé le logiciel libre de calculs statistiques *R* (*R Core Team, 2020*). Cet environnement permet de réaliser de multiples traitements statistiques sur des données dont, bien entendu, une ACP. Pour cette dernière, nous nous sommes appuyés sur le package *FactoMineR* (Lê, Josse & Husson, 2008) afin de mener les calculs et de produire tous les graphiques donnés ci-après. Notre tableau de données comprend une variable qualitative (la version du scénario) et seize variables quantitatives qui correspondent aux évaluations des exercices décontextualisés et aux réponses au questionnaire. Dans notre ACP, la première variable est déclarée comme supplémentaire. Elle n'entre donc pas dans les calculs mais elle permettra de voir où se situe chacun des scénarios dans le diagramme final des individus. De même, du fait des difficultés de compréhension importantes qu'elle a générées, la variable correspondant à la question « *Est-ce que tu as repensé au système [...]* » est déclarée comme supplémentaire elle aussi. Nous la faisons néanmoins apparaître en pointillés dans le graphique circulaire produit par l'ACP. Contrairement à d'autres traitements statistiques, l'ACP n'impose pas de contraintes fortes sur les données recueillies. Nous avons néanmoins réalisé quelques tests et compléments d'analyse afin de préciser la portée des analyses (voir annexes). Lorsqu'on réalise une ACP, celle-ci permet de produire deux principaux graphiques qui vont permettre l'analyse. Le premier (graphe 1.1) est le graphe des individus dans lequel est représenté, relativement aux données qui les caractérisent, chacun des élèves ayant participé à l'expérimentation (donc 29 points). Initialement défini par 17 valeurs, chaque élève est ramené à un point dans un plan (le plan de projection de l'ACP) dont les axes sont ceux calculés par l'ACP (appelés dimensions de l'ACP). Dans ce graphe, nous faisons figurer aussi la variable qualitative permettant d'identifier¹¹ chaque groupe correspondant à chacun des scénarios vécus. Pour plus de lisibilité, nous extrayons aussi une représentation de la seule variable qualitative donnant le scénario (graphe 1.2). Le deuxième graphique fourni par l'ACP est le graphe des variables (graphe 2). Il s'agit d'un diagramme circulaire appelé cercle des corrélations¹².

¹¹ Mathématiquement, il s'agit de la projection dans le plan de l'ACP du barycentre des points représentant les élèves de chacun des groupes dans l'espace global.

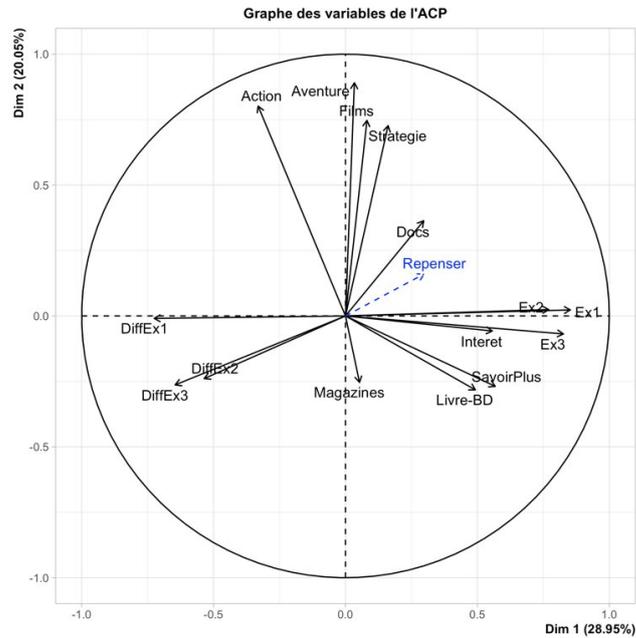
¹² Dans le cercle des corrélations, chaque variable quantitative est représentée par une flèche. Plus une flèche est



Graph 1.1 : *Graph des individus.*



Graph 1.2 : *Graph des individus (variable qualitative seule).*



Graph 2 : *Cercle de corrélation des variables.*

Débutons notre interprétation par le deuxième graphique car il permet de donner du sens aux axes déterminés par l'analyse en composantes principales. Pour l'axe des abscisses, on constate que les variables qui y contribuent le plus sont surtout les résultats aux différents exercices (*Ex1*, *Ex2* et *Ex3*) ainsi que les difficultés ressenties associées (*DiffEx1*, *DiffEx2* et *DiffEx3*). Cet axe

longue, meilleure est la qualité de la représentation de la variable. Comme notre ACP concentre l'information dans uniquement deux dimensions, on évitera de donner trop d'importance à l'interprétation de flèches qui seraient trop courtes. Pour les autres flèches, l'interprétation est possible en sachant que plus des flèches pointent dans la même direction (dans le cercle de corrélation) plus les variables sont corrélées (positivement ou négativement). Ceci est valable entre les flèches mais aussi entre les flèches et les axes, et entre les axes (par construction, les axes sont orthogonaux donc visent à séparer au maximum les deux composantes). Plus une flèche est proche d'un axe de l'ACP, plus elle est liée à lui ; ce qui permet en général de donner du sens aux axes.

concentre donc les informations plutôt liées à la fiche d'exercices de notre expérimentation. L'orientation des flèches indique que l'axe devrait permettre de positionner les élèves selon leur réussite plus ou moins grande aux exercices. L'opposition (corrélation négative) entre les flèches représentant les résultats aux exercices et les difficultés ressenties est cohérente avec le questionnaire. En effet, on pouvait s'attendre à ce que mieux un exercice a été réussi, moins la difficulté ressentie soit importante. On notera que la variable *Intérêt*, dans laquelle nous demandions aux élèves s'ils avaient trouvé l'activité intéressante, est très fortement corrélée avec le premier axe du côté positif. Ceci tend à montrer que les élèves qui ont le mieux réussi les exercices d'applications sont aussi ceux qui se sont le plus investis dans l'activité d'approche et qui y ont trouvé le plus d'intérêt. Ceci explique peut-être aussi la contribution forte de la variable *SavoirPlus* (« *Aimerais-tu en savoir plus sur les mathématiques des Babyloniens/Zalussiens et leur histoire ?* ») au premier axe. Pour le deuxième axe, celui des ordonnées, on constate que les variables qui y contribuent proviennent toutes de la partie du questionnaire sur la fréquentation des histoires (*Aventure, Films, Stratégie, Action* et, dans une moindre mesure, *Docs*). Cet axe caractérise, d'une certaine manière, la dimension imaginaire de notre expérimentation. Le positionnement des élèves selon cet axe donne ainsi une vue sur leur pratique de l'Histoire, des histoires, et des mondes imaginaires. La variable *Magazines* est corrélée négativement (flèche vers le bas) avec ce premier ensemble mais nous n'avons pas d'hypothèse quant à l'interprétation. Il convient de souligner que cette variable est assez mal représentée par notre ACP (flèche courte). Pour terminer, notons que la variable *Livre-BD* se situe dans un entre-deux sur le graphe, elle est donc plus difficilement interprétable. Néanmoins, comme elle est un peu plus proche de l'axe des abscisses que de celui des ordonnées, cela peut éventuellement signifier que la lecture est surtout une activité pratiquée par élèves en réussite scolaire indépendamment de son intérêt pour donner accès à des histoires et des mondes imaginaires. Nous n'avons pas fait de distinction entre les livres et les bandes dessinées dans notre questionnaire, ce qui aurait peut-être été souhaitable pour plus de précision. Pour conclure sur l'analyse de cette première représentation graphique, nous retiendrons que celle-ci a permis de faire réapparaître mathématiquement, sur les données brutes, les deux dimensions de l'expérimentation : l'enseignement des mathématiques (axe des abscisses) et la dimension historique (axe des ordonnées). Pour simplifier la lecture, dans la suite de ce texte nous utiliserons les expressions « axe mathématiques »¹³, respectivement « axe histoire », pour évoquer chacune des deux dimensions principales de notre ACP. L'apparition de l'axe histoire comme orthogonal (c'est-à-dire pleinement décorrélé) à l'axe mathématiques constitue un indicateur d'une déconnexion entre la dimension historique et l'activité mathématique des élèves. Même si notre objet est surtout de tester la proximité des scénarios impliquant une histoire, il convient de garder cette donnée en mémoire.

Une fois l'interprétation de la signification des axes terminée, nous pouvons passer à l'analyse du premier graphique dans lequel sont représentés les élèves relativement aux deux aspects : mathématiques et histoire. La répartition des points dans le graphe 1.1 ne fait pas apparaître de tendance forte. Les élèves se répartissent sur l'ensemble du plan sans qu'une structure n'émerge. En particulier, on constate que des élèves issus des différents scénarios apparaissent dans chacun des quarts de plan ce qui tendrait à montrer que le choix de l'approche n'influe pas sur les apprentissages individuels. Nous ne pouvons cependant pas aller plus avant¹⁴ dans ce genre

¹³ Nous conservons volontairement le pluriel du mot « mathématiques » car il s'agit ici de la discipline et non d'un adjectif.

¹⁴ Pour les lecteurs intéressés, à partir de l'ACP, nous avons néanmoins réalisé une classification hiérarchique ascendante donnée en annexe 3.

d'hypothèse car notre expérimentation n'a pas été conçue pour évaluer un impact (en termes de progrès sur la réussite scolaire avec pré-test/post-test par exemple) des différents scénarios. Notre questionnement initial portant sur le poids de l'authenticité du support historique, ce qui va nous intéresser ici est plutôt de voir la proximité ou non des scénarios 1 et 2. Or, ce qui apparaît dans le graphe des individus est la très faible séparation des deux scénarios mettant en œuvre de l'histoire. Dans le graphe 1.2, nous avons conservé uniquement la projection de la variable qualitative donnant la version du scénario et on constate que le scénario 1 et le scénario 2 sont très proches ; tous deux dans le premier quart de plan. Cette indistinction tend à montrer que, pour cette expérience, l'authenticité des contenus historiques n'a pas d'impact sur le vécu des élèves. La séparation dans le graphe de la version 3 par rapport aux deux autres conforte par contre l'idée que l'introduction d'une histoire dans une approche pédagogique crée une distance par rapport à une pratique plus ordinaire, ce qui, comme nous le rappelions en introduction, est assez couramment perçu subjectivement par les enseignants. Notre expérimentation interroge la nature de la dimension historique à l'œuvre et sa pertinence auprès d'élèves et la conclusion qui semble se dessiner à l'issue de l'analyse en composantes principales est que, dans une approche par l'histoire des mathématiques, ce qui prédomine avec des élèves jeunes c'est un ancrage dans l'imaginaire suggéré par les supports indépendamment de la vision humaniste de la discipline.

3.2. Une analyse qualitative complémentaire

Comme le précisent Blum *et al.* (2019), dans le cadre d'une analyse didactique, les traitements mathématiques constituent une étape préliminaire qui doit toujours être complétée par d'autres approches. En effet, même dans le cas d'études à grandes échelles, les apprentissages des élèves sont complexes à interpréter car de nombreux facteurs entrent en jeu. Notre expérimentation n'a pas cette dimension, mais c'est peut-être, de ce fait, une opportunité pour observer les élèves plus en détail. Les scénarios 1 et 2, qui constituent le cœur de notre travail, ont été menés dans la même classe. En fin de séance, dans le cadre du retour à la possibilité d'un travail en classe entière, des échanges ayant eu lieu entre les élèves et l'enseignante à propos de leur ressenti. L'enseignant les incite en particulier à s'exprimer sur ce qu'ils imaginent ou ont imaginé relativement aux histoires présentées. Rappelons que, conformément aux consignes sanitaires, les deux groupes étaient initialement pleinement disjoints mais, dans les deux cas, les élèves ont eu des apports sur les Babyloniens (soit directement dans le scénario 1, soit par des compléments dans le scénario 2). Il convient aussi de se souvenir que ces élèves ont un vécu très riche relativement à l'histoire des mathématiques et aux personnages imaginaires puisqu'ils ont participé au laboratoire toute l'année. Cette expérience leur a permis sans doute de s'exprimer plus facilement que d'autres élèves sur ce qu'ils pensaient de l'histoire, des histoires, de l'imaginaire, etc. Par certaines prises de parole, on perçoit vite l'impact fort produit par l'univers imaginaire des Zalussiens. Les élèves disent ainsi, par exemple, « *Je préfère l'histoire des Zalussiens parce que ça m'aide encore plus à imaginer des choses* », ou « *Moi aussi je préfère l'histoire des Zalussiens mais à la fin pour ma culture j'aime apprendre des choses vraies sur les maths* », ou encore « *Oui à la fin c'est bien de connaître la vraie histoire parce qu'on sait que les Zalussiens n'existent pas. Avec les Zalussiens on rentre plus rapidement dans l'imaginaire, je pense* ». Les élèves aiment les histoires et ils savent assez bien dire en quoi l'imaginaire les intéresse. Plusieurs fois, ils expliquent ainsi comment l'imagination est pour eux un moteur pour l'entrée dans l'activité. Nous avons pu relever quelques interventions où les élèves expliquent que « *Imaginer en maths, moi ça me rassure* », que « *Imaginer avec les histoires c'est plus marrant, rigolo, alors que sans histoire c'est triste... et nul...* », et que « *Les Zalussiens, qui vivent dans le futur ça fait vraiment imaginer* ». Par leur vécu particulier, les élèves de cette classe font aussi rapidement le lien avec l'histoire des mathématiques authentique. Une fois

passé l'intérêt spontané pour les mondes imaginaires, plusieurs prises de parole montrent que la connaissance du passé reste également une bonne source de motivation. Plusieurs élèves expriment ainsi leur intérêt pour l'histoire des mathématiques à la fois relativement au contenu travaillé dans l'expérimentation, « *Je sais que c'est grâce aux Babyloniens qu'on sait mesurer l'heure aujourd'hui, plus de 4000 ans après ! C'est génial quand même !* » ou « *Grâce à l'histoire des Babyloniens, on sait calculer en base 60* », mais aussi de manière plus générale. Un élève résume bien cette idée en disant que « *Avec l'histoire des maths, j'apprends que tout n'est pas tombé du ciel, que ça a existé depuis longtemps et ça m'aide* », ce sur quoi un élève questionne « *Est-ce qu'il existe des archéologues des maths ? Moi ça me plairait ce métier* ». Même si elles sont fortement influencées par un passif très spécifique à cette classe, les réactions des élèves invitent à poursuivre le travail autour de ce type d'approches pédagogiques riches au cycle 3 mais aussi dans l'ensemble de la scolarité car, comme le dit l'un des élèves « *On devrait apprendre comme ça les maths au collège parce que ma sœur au collège elle ne fait pas ça* ».

Conclusion

L'étude menée dans le cadre de cette expérimentation à petite échelle avait pour but de questionner en profondeur un point particulier de la pratique pédagogique qui consiste à introduire de l'histoire des mathématiques dans des séances d'enseignement des mathématiques. Le contexte mis en place dans l'école a permis de se plonger dans le rôle joué par l'imagination lors de l'utilisation d'une histoire. Il est impossible de revivre au temps des Babyloniens ou de toute autre civilisation du passé, ce qui introduit nécessairement une part d'imaginaire dans la séance. Qu'ils aient existé ou non, les élèves ont besoin d'imaginer les mathématiciens du passé. L'analyse en composantes principales que nous avons réalisée sur les données tend à confirmer un rôle indistinct de l'imagination pour le fonctionnement en classe de la situation (histoire réelle / histoire fictive). La plus-value de l'imaginaire semble ainsi nourrir mais aussi sans doute transcender l'utilisation de l'histoire des mathématiques. Les données sont encore trop parcellaires pour conclure définitivement, mais l'absence de séparation des scénarios 1 et 2 tend à montrer que l'un des moteurs du fonctionnement d'une telle approche pédagogique réside dans son ancrage assumé dans un univers imaginaire (celui de nos ancêtres) au sein duquel, comme le suggère Vygotsky, on peut expérimenter de nouveaux modes de penser qui viennent ensuite nourrir le présent. En ce sens, l'imagination joue un rôle de catalyseur, très naturel chez les jeunes enfants, pour vivre une activité mathématique à support historique et assurer ainsi l'implication pleine des élèves dans ce nouvel univers historico-mathématique. Ceci pourrait expliquer les raisons du succès toujours relevé par les enseignants et les chercheurs de l'utilisation de l'histoire des mathématiques dans une séance. En effet, comme nous l'avons vu, les apprentissages trouveront toujours *in fine* leur cohérence dans l'interaction entre le support (historique et mathématique), l'histoire racontée ou reconstruite par l'enseignant (garant aussi des contenus scolaires), et l'imagination créatrice des élèves. Mais tout ceci reste évidemment à affiner. Avec cette approche statistique, au-delà de son intérêt pour la question spécifiquement abordée dans cet article, notre volonté est aussi de rappeler la pertinence de certaines méthodes quantitatives pour l'analyse didactique. Très demandée à l'échelle internationale, cette forme d'études permet d'objectiver certains ressentis ; même s'il convient de toujours contrôler les interprétations par d'autres voies (analyse qualitative en particulier). Les nombreux traitements statistiques aisément disponibles de nos jours peuvent s'avérer être des outils intéressants pour la réflexion sur les thématiques qui s'y prêtent. Comme dans toute étude de ce type, il reste de nombreux biais qu'il n'est pas toujours possible de supprimer. En particulier, dans notre cas,

l'échelle de notre expérimentation reste faible et la randomisation¹⁵ n'en est qu'à son balbutiement. Pour aller plus loin, il conviendra de reproduire l'expérience avec d'autres groupes d'élèves, si possibles avec l'ajout d'autres chapitres mathématiques. C'est sur quoi nous avons prévu de travailler les prochaines années et dont nous espérons pouvoir tirer des conclusions assez rapidement.

Références bibliographiques

- Archambault, A. & Venet, M. (2007). Le développement de l'imagination selon Piaget et Vygotsky : d'un acte spontané à une activité consciente. *Revue des sciences de l'éducation*, 33(1), 5-24.
- Barbin, E. (2019). *Faire des mathématiques avec l'histoire au lycée*. Ellipses.
- Blum, W., Artigue, M., Mariotti, M.-A., Sträßer, R. & Van den Heuvel-Panhuizen, M. (2019). *European traditions in didactics of mathematics*. Springer International Publishing Imprint, Springer.
- Borel, E. (1904). Les exercices pratiques de mathématiques dans l'enseignement secondaire. *Revue générale des sciences*, 431-440.
https://fr.wikisource.org/wiki/Les_exercices_pratiques_de_mathématiques_dans_l'enseignement_secondaire
- Bourque, J., Poulin, N. & Cleaver, A. F. (2006). Évaluation de l'utilisation et de la présentation des résultats d'analyses factorielles et d'analyses en composantes principales en éducation. *Revue des sciences de l'éducation*, 32(2), 325-344.
- Cerquetti-Aberkane, F. & Rodriguez, A. (2002). *Faire des mathématiques avec des images et des manuscrits historiques du cours moyen au collège*. Champigny-sur-Marne : CRDP de l'académie de Créteil.
- Chorlay, R., Mailloux, F. & Masselin, B. (2017). Tâches algorithmiques en cycle 3 : trois séances sur la multiplication par jalousie. *Grand N*, 100, 33-57.
- Clark, K., Kjeldsen, T., Schorcht, S. & Tzanakis, C. (2019). History of Mathematics in Mathematics Education - An Overview. *Mathematica didactica*, 42(1). Online first.
- D'Amato, M. (2007). L'imaginaire proposé par les jeux vidéo. *Le Télémaque*, 32(2), 73-82.
- De Vittori, T., & Leroy, A. (2017). Travailler la numération décimale avec les quipus incas : bienfaits et limites autour d'une expérience en classe de sixième. *Repères-IREM*, 107, 21-44.
- Emprin, F. (2018). Les apports d'une analyse statistique des données textuelles pour les recherches en didactique : l'exemple de la méthode Reinert. *Annales de Didactiques et de Sciences Cognitives*, 23, 179-200.

¹⁵ Une étude randomisée est une étude au cours de laquelle les participants sont répartis de façon aléatoire. Selon le domaine (médecine, sociologie, psychologie, etc.) il y a parfois créations de plusieurs groupes, certains expérimentaux et d'autres considérés comme témoins.

- Escofier, B. & Pagès, J. (2016). *Analyses factorielles simples et multiples : Cours et études de cas*. Dunod, Paris.
- Fauvel, J., Van Maanen, J. A. (éds.). (2000). *History in Mathematics Education - The ICMI Study*. Springer.
- Harris, P. L. (2002). Penser à ce qui aurait pu arriver si... *Enfance*, 54(3), 223-240.
- Husson, F., Lê, S. & Pagès, J. (2016). *Analyse de données avec R*. Presses Universitaires de Rennes.
- IREM. (éds.). (1988). *Pour une perspective historique dans l'enseignement des mathématiques*. Lyon : IREM.
<https://publimath.univ-irem.fr/numerisation/WH/IWH88023/IWH88023.pdf>
- Gajdamaschko, N. (2006). Theoretical Concerns: Vygotsky on Imagination Development. *Educational Perspectives*, 39(2), 34-40.
- Gras, R. (1992). L'analyse des données : une méthodologie de traitement de questions de didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 12(1), 59-72.
<https://revue-rdm.com/1992/1-analyse-des-donnees/>
- Kaiser, H. F. (1974). An index of factorial simplicity. *Psychometrika*, 39, 31-36.
- Kaiser, H. F. & Rice, J. (1974). Little Jiffy, Mark IV. *Educational and Psychological Measurement*, 34(1), 111-117.
- Katz, V. J., Jankvist, U. T., Fried, M. N. *et al.* (2014). Special Issue on History and Philosophy of Mathematics in Mathematics Education. *Sci & Educ*, 23.
- Katz, V. & Tzanakis, C. (éds.). (2011). *Recent Developments on Introducing a Historical Dimension in Mathematics Education*. MAA (Mathematical Association of America).
- Lê, S., Josse, J. & Husson, F. (2008). FactoMineR: An R Package for Multivariate Analysis. *Journal of Statistical Software*, 25(1), 1-18.
- Maschietto, M. & Trouche, L. (2010). Mathematics learning and tools from theoretical, historical and practical points of view: the productive notion of mathematics laboratories. *ZDM, The International Journal on Mathematics Education*, 42(1), 33-47.
- Moyon, M. & Tournès, D. (éds.). (2018). *Passerelles : enseigner les mathématiques par leur histoire au cycle 3*. ARPEME.
- Piaget, J. (1972). *La formation du symbole chez l'enfant. Imitation, jeu et rêve, image et représentation*. Neuchâtel : Delachaux et Niestlé.
- Poisard, C. (2005). *Ateliers de fabrication et d'étude d'objets mathématiques : le cas des instruments à calculer*. Thèse de l'Université de Provence.
- Proust, C. (2008). Quantifier et calculer : usages des nombres à Nippur. *Revue d'Histoire des Mathématiques*, 14(2), 143-209.

- R Core Team (2020). *R: A Language and Environment for Statistical Computing*. R Foundation for Statistical Computing, Vienna.
- Sauvageot, A. (2002). Imaginaire (structures et mécanismes de l'). In A Mucchielli (dir.), *Dictionnaire des méthodes qualitatives en sciences humaines et sociales*. Armand Colin.
- Tempier, F. (2016). Composer et décomposer : un révélateur de la compréhension de la numération chez les élèves. *Grand N*, 98, 67-90.
- De Varent, C. (2018). *Pluralité des concepts liés aux unités de mesure - Liens entre histoire des sciences et didactique, le cas de l'aire du carré dans une sélection de textes anciens*. Thèse de l'Université Sorbonne Paris Cité.
- Vygotsky, L. S. (2004). Imagination and Creativity in Childhood. *Journal of Russian and East European Psychology*, 42(1), 7-97. January-February 2004.
- MEN (2018). *Programmes du cycle 2*. Eduscol.

Annexe 1

Tableau des moyennes aux différents items (globaux et par groupe)

Variables	Ex1	Ex2	Ex3	Intérêt	DiffEx1	DiffEx2	DiffEx3	Repenser	SavoirPlus	Docs	Films	Aventure	Stratégie	Action	Livre-BD	Magazines
Moy. S1	0,90	0,68	0,85	3,75	1,80	2,70	1,30	1,90	3,40	2,70	2,90	2,00	1,80	2,40	3,00	2,20
Moy. S2	0,88	0,68	0,85	3,50	2,00	3,30	1,80	2,10	3,50	2,40	2,90	2,30	2,20	1,70	3,40	2,10
Moy. S3	0,61	0,47	0,67	3,00	2,22	3,11	2,00	n/a	3,11	1,44	2,89	1,22	0,78	2,22	2,67	1,67
Moy. Tot	0,80	0,61	0,79	3,43	2,00	3,03	1,69	2,00	3,34	2,21	2,90	1,86	1,62	2,10	3,03	2,00

Annexe 2

Critères de validité de la méthode

Il existe de nombreux critères mathématiques permettant de vérifier la validité d'une étude statistique tant dans le choix de la méthode que dans la fiabilité des conclusions tirées. Il n'y a cependant pas réellement de consensus international sur la prévalence de tel ou tel critère. On trouve ainsi des usages, plus ou moins stabilisés, selon les champs disciplinaires (psychologie, sociologie, éducation, marketing, etc.). Dans une méta-analyse concernant les recherches en éducation, Bourque *et al.* (2006) constatent une très grande variabilité des éléments permettant le contrôle d'une étude statistique. Cette méta-analyse, comme d'autres du même type, pointe surtout l'absence d'une présentation claire des critères de validité et des choix opérés. Dans le cas de l'étude exploratoire proposée dans cet article, nous savons dès le départ que l'effectif est trop faible pour tirer des conclusions définitives sur un effet de l'approche pédagogique présentée (ratio global effectif/items de 2:1). Il nous semble cependant que l'approche par analyse en composantes principales peut donner à entrevoir des éléments qui ne seraient pas aisément accessibles par une méthode qualitative classique de type analyse *a priori* / *a posteriori*. Dans cette annexe 2, nous présentons plusieurs critères statistiques en assumant que certains puissent être validés et d'autres non.

Pour toute la suite, nous travaillons sur les données sans l'item « Repenser » qui a posé problème dans sa compréhension par les élèves (voir détail dans le texte de l'article).

A - Déterminant de la matrice de corrélations

Déterminant de la matrice de corrélations : $6,124366 \cdot 10^{-6}$

Pour mesurer le lien entre les variables, on peut calculer le déterminant de la matrice de corrélation. Fixer des valeurs seuils est difficile. Généralement, lorsque ce déterminant est inférieur à 0,000 01, on considère qu'il y a de très fortes redondances dans les données et donc qu'elles ne recèlent qu'un seul type d'information. On peut, dans ce cas, essayer d'étudier cette information, ce qui est le cas ici.

B - Test de Bartlett

L'ACP est une compression de l'information pour la ramener à un espace de plus petites dimensions que celui des données. Cette approche n'est possible que si les données sont suffisamment redondantes. Si les variables sont parfaitement corrélées, un seul axe factoriel suffit, il restitue toute l'information disponible. Par contre, si elles sont deux à deux

orthogonales, le nombre de facteurs à retenir est égal au nombre de variables. Dans ce dernier cas, la matrice de corrélation est la matrice identité. Le test de sphéricité de Bartlett permet de vérifier que la matrice de corrélation s'éloigne bien de la matrice identité.

Test de Bartlett : $\chi^2=247,5329$; $p\text{-value}=1,584725 \cdot 10^{-13}$; *degrés de liberté* = 105.

Comme notre $p\text{-value}$ vaut $1,584725 \cdot 10^{-13} < 0,05$, la matrice de corrélation s'écarte significativement de la matrice unité pour un test à 5 %. Selon ce critère, il est envisageable d'initier une ACP sur ces données.

C - Indice KMO (Kaiser-Meyer-Olkin)

Comme le test de Bartlett, l'indice KMO vise à se donner une indication quant à la possibilité d'une compression pertinente de l'information. Cet indice varie entre 0 et 1. Plus il est proche de 0, moins une compression efficace sera possible. *A contrario*, s'il est proche de 1, les premiers axes factoriels donneront un très bon résumé de l'information.

Indice KMO global : 0,37

Indice KMO pour chaque item :

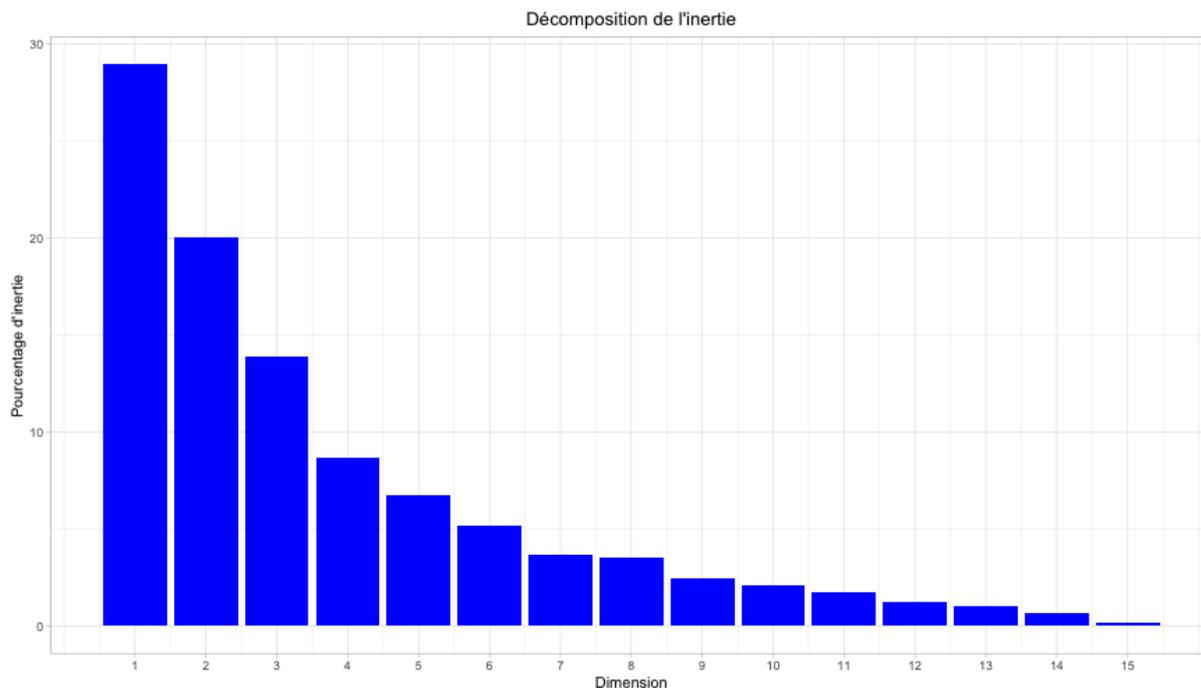
Items	Ex1	Ex2	Ex3	Intérêt	DiffEx1	DiffEx2	DiffEx3
KMO	0,42	0,35	0,41	0,54	0,35	0,22	0,74
SavoirPlus	Docs	Films	Aventure	Stratégie	Action	Livre.BD	Magazines
0,35	0,20	0,52	0,26	0,50	0,56	0,41	0,23

Pour l'indice KMO, la recherche utilise généralement la grille proposée par Kaiser (1974) et Kaiser et Rice (1974) qui le considèrent comme

- « unacceptable » en dessous de 0,5 ;
- « miserable » entre 0,5 et 0,6 ;
- « mediocre » entre 0,6 et 0,7 ;
- « middling » entre 0,7 et 0,8 ;
- « meritorious » entre 0,8 et 0,9 ;
- « marvelous » au-dessus de 0,9.

Dans notre cas, l'indice KMO global de 0,37 n'est pas bon et il n'est pas possible de l'améliorer en éliminant les variables problématiques car les indices individuels sont presque tous mauvais. L'idéal est, en général, de valider à la fois le test de Bartlett et l'indice KMO. Ce n'est pas le cas dans nos données. La faible taille de notre effectif est très certainement en cause ici.

D - Diagramme d'inertie de l'ACP



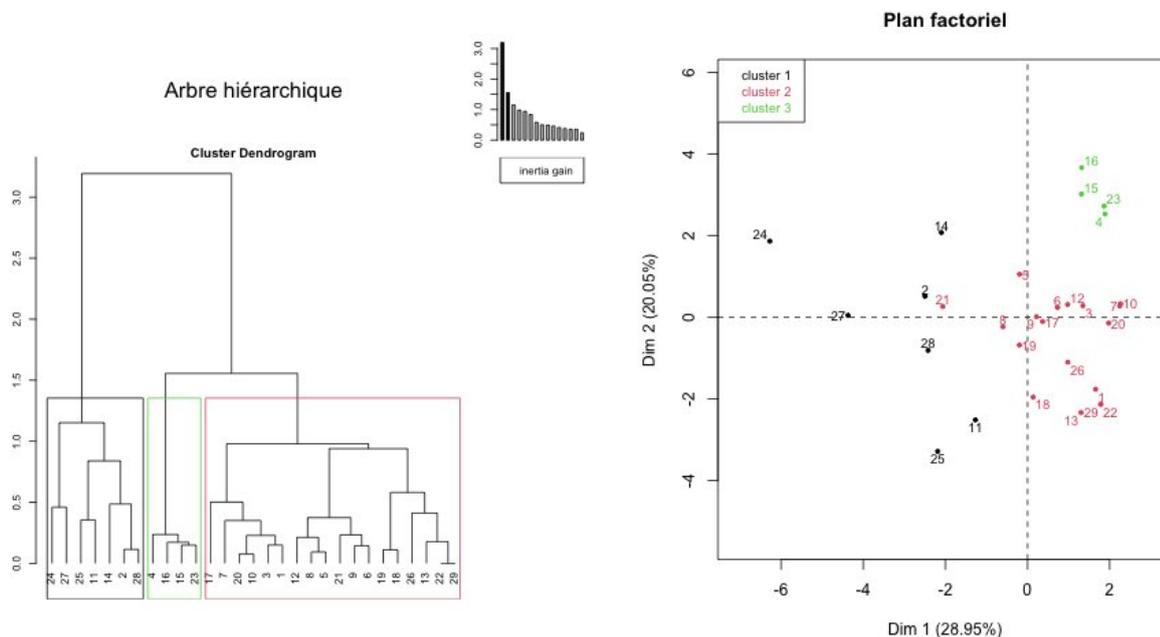
Notre ACP porte sur environ 30 individus décrits par 15 variables (variable « Repenser » retirée). Les calculs d'inertie donnent 28,95 % pour le premier axe et 20,05 % pour le deuxième. Dans les tables (Husson, Lê & Lepage, 2016, pp. 204-207), la valeur minimale pour que l'analyse ait un sens, c'est-à-dire qu'elle donne à voir autre chose qu'une distribution aléatoire de variables indépendantes, est de 33,2 % pour le plan. Dans notre cas, le pourcentage d'inertie est de $28,95 + 20,05 = 49\%$. Ce pourcentage est supérieur à 33,2 %, l'ACP est donc potentiellement significative.

Pour le lecteur intéressé, nous pouvons également préciser la qualité de la représentation de chaque variable (appelée « communalités » dans la littérature internationale) :

Items	Ex1	Ex2	Ex3	Interet	DiffEx1	DiffEx2	DiffEx3
\cos^2	0,77375	0,79481	0,72597	0,77353	0,65421	0,37537	0,64185
SavoirPlus	Docs	Films	Aventure	Strategie	Action	Livre.BD	Magazines
0,86865	0,75659	0,62480	0,84232	0,72754	0,79699	0,54270	0,83744

Annexe 3

Classification hiérarchique ascendante par la méthode de Ward



La classification hiérarchique réalisée dans le prolongement de notre ACP montre trois groupes qui semblent surtout organisés relativement à l'axe des abscisses. On trouve en effet deux groupes le long de cet axe, l'un très à gauche et un autre un peu excentré vers la droite. Dans les deux cas, la dimension histoire (c'est-à-dire la fréquentation, principalement hors de l'école, des histoires par les élèves) ne semble pas avoir d'effet structurant sur les profils des individus. Le troisième groupe se situe très nettement dans le premier quart de plan. Regroupant les élèves en forte réussite scolaire et portant un grand intérêt pour l'histoire, la classification semble simplement ici distinguer un petit groupe (4 élèves seulement) pour qui l'activité correspondait pleinement à leurs compétences et leurs goûts.