ENJEUX LANGAGIERS, SITUATIONS DE FORMULATION ET DE VALIDATION EN GÉOMÉTRIE UN EXEMPLE DE TRAVAIL AUTOUR DU CERCLE EN CE2

Anne-Cécile MATHÉ[1]

IREM de Clermont Ferrand, Laboratoire ACTé, Université Clermont Auvergne

Valérie MAILLOT[2]

IREM de Clermont Ferrand, professeure des écoles

Julien RIBENNES[3]

IREM de Clermont Ferrand, professeur des écoles

Résumé. Depuis une quinzaine d'années, un certain nombre de recherches en didactique de la géométrie s'emploient à interroger les enjeux d'enseignement de la géométrie à l'école et à explorer les potentialités de situations de reproduction de figures. Ces travaux s'intéressent en particulier à la dimension instrumentale des pratiques de la géométrie physique de l'école, en pensant l'usage géométrique des instruments comme levier pour la conceptualisation des objets de cette géométrie. Nous proposons de prolonger ces travaux, en nous intéressant cette fois-ci à la dimension langagière de ces pratiques et aux enjeux d'apprentissage afférents. Des allers-retours entre réflexion théorique et expériences de classe nous conduisent en particulier à interroger les enjeux et modalités possibles d'une articulation entre situations d'action, de formulation et de validation en géométrie à l'école. Dans cet article, nous donnerons à voir l'état de cette réflexion en prenant l'exemple d'une séquence autour des notions de disque et cercle expérimentée en CE2. Cette séquence prend comme point de départ les situations de reproduction de figures, avec jeu sur les instruments, proposées par Bulf et Celi (2016).

Mots-clés. Géométrie, langage, formulation, validation, disque, cercle.

Introduction

Le travail que nous présentons dans cet article est issu de la rencontre d'enseignants et d'une enseignante-chercheure autour de questions relatives à l'enseignement et l'apprentissage de la géométrie à l'école. Anne-Cécile Mathé développe des recherches en didactique de la géométrie depuis une quinzaine d'années. Elle a notamment collaboré aux travaux développés dans les années 2000 par un groupe dit *de Lille* autour des enjeux de l'enseignement de la géométrie à l'école, de l'analyse géométrique de figures matérielles en lien avec la notion de déconstruction dimensionnelle, du rôle des instruments et des potentialités de situations de reproduction de figures (Duval & Godin, 2005 ; Keskessa, Perrin-Glorian & Delplace, 2007 ; Offre, Perrin-Glorian & Verbaere, 2006 ; Perrin-Glorian, Mathé & Leclercq, 2013 ; Mangiante-Orsola & Perrin-Glorian, 2014 ; Mathé, Barrier & Perrin-Glorian, 2020). Elle a également contribué au

[1] a-cecile.mathe@uca.fr

[2] valerie.maillot@ac-clermont.fr

[3] julien.ribennes@ac-clermont.fr

développement de recherches autour du rôle du langage dans les apprentissages géométriques à l'école (Bulf, Mathé & Mithalal, 2014, 2015 ; Mathé & Barrier, 2014, Mathé & Mithalal, 2019). Valérie Maillot et Julien Ribennes sont deux professeurs des écoles. Les trois auteurs appartiennent à un groupe de l'IREM de Clermont Ferrand qui réunit huit professeurs d'écoles, une enseignante du second degré, une enseignante-chercheure et une formatrice d'enseignants autour de l'enseignement de la géométrie, du cycle 1 à la fin du cycle 3. Dans le prolongement des travaux du groupe *de Lille*, ce groupe s'emploie depuis quelques années à l'élaboration, l'expérimentation et l'analyse de balises de progression et de situations d'apprentissage autour de différents thèmes de géométrie (solides, figures planes et figures usuelles, analyse de figures composées et émergence progressive de notions de segments, droites et points, alignement, perpendicularité, disque et cercle...), en essayant de penser une continuité des apprentissages du cycle 1 au cycle 3. Nous avons d'abord porté une attention particulière à la déclinaison de situations de reproduction de figures et au rôle des instruments dans l'évolution progressive du regard géométrique des élèves sur les figures et dans l'émergence de connaissances et savoirs géométriques[4].

Assez vite, les allers-retours entre réflexion théorique et expériences de classe nous ont conduits à nous intéresser aux aspects langagiers de l'enseignement-apprentissage de la géométrie. Nos expériences de classe nous montrent que les élèves éprouvent de grandes difficultés à passer de la reproduction ou construction instrumentée de figures à une activité géométrique langagière. Pourtant, la pratique géométrique attendue au cycle 3 puis au collège se joue sur le terrain du langage. Or les propos de Colette Laborde, datant du début des années 80, nous semblent toujours d'actualité :

> *À partir de la 6e, les élèves ont à fournir une explication écrite ou orale de la résolution d'un problème. Mais cette activité est conçue essentiellement comme un moyen de contrôle pour l'enseignant. Les élèves la ressentent souvent comme une mise en mots venant après la véritable résolution. Ils sont rarement placés dans des situations où la qualité de leur formulation ne soit pas seulement mise en jugement de l'enseignant mais conditionne la réussite de leur activité. En un mot, l'apprentissage de l'expression mathématique n'est pas facilité en général, dans l'enseignement des mathématiques actuel. Pourtant l'usage du langage en classe de mathématiques demande aux élèves une élaboration verbale de haut niveau, puisqu'il s'agit d'organiser une argumentation hors situation, à propos d'objets entretenant parfois des relations complexes et à propos d'opérations sur ces objets (Laborde, 1982, p. 13).*

Nous souhaitons prendre à bras le corps cette question et interroger la manière dont on pourrait penser un travail progressif d'acculturation des élèves à un langage géométrique spécifique, lieu de conceptualisation et de traitement des objets de la géométrie. Cet enjeu nous paraît d'autant plus important que nous y voyons la source d'un continuum possible entre géométrie instrumentée de l'école et géométrie théorique du collège. La question que nous explorons est alors la suivante : comment penser un travail progressif permettant d'apprendre aux élèves un langage géométrique susceptible de porter l'analyse et la caractérisation de figures géométriques ?

Cette exploration nous conduit à replacer les situations de reproduction de figures dans le cadre plus général de la dialectique de l'action, de la formulation et de la validation offerte par la théorie des situations didactiques (Brousseau, 1998). L'étude de ces situations et de leurs potentialités pour l'apprentissage de la géométrie a déjà fait l'objet de travaux fondateurs en didactique de la géométrie (Laborde, 1982 ; Berthelot & Salin, 1992). Toutefois, force est de constater que ces situations ont peu diffusé dans les pratiques de classe. Le travail mené en

[4] Le lecteur pourra trouver quelques éléments issus de ces travaux dans Mathé *et al.* (2020).

didactique de la géométrie ces vingt dernières années, notamment autour des situations de reproduction de figures, peut être l'occasion de redonner une certaine actualité à cette réflexion. Plus récemment, le travail de recherche de Petitfour (2017) autour d'un dispositif de travail en dyade a permis d'avancer dans l'analyse des connaissances en jeu dans des situations que l'on pourrait rapprocher de situations de formulation verbale orale à autrui autour de constructions ou reproductions instrumentées de figures. Nous nous appuierons, modestement, sur quelques outils offerts par ces travaux dans ce texte. De manière connexe, notre objectif consiste à (ré)interroger la manière dont des situations de formulation et de validation, en appui sur la reproduction de figures, sont susceptibles d'accompagner les élèves dans la construction d'un langage géométrique et l'entrée dans une activité géométrique langagière. Nous étudions également la faisabilité de leur mise en œuvre en classe.

Au sein de notre groupe IREM, nous explorons cette question de la maternelle au début du collège. Dans cet article, nous proposons de partager des éléments de cette réflexion et de présenter un exemple de séquence expérimentée autour des notions de disque et de cercle en CE2[5]. Le travail autour de la notion de cercle nous semble en effet constituer un bon candidat pour amorcer cette réflexion, large, concernant les potentialités et modalités possibles d'une articulation entre situations d'action, de formulation et de validation en classe, et ce pour plusieurs raisons. D'une part, comme le montraient déjà Artigue et Robinet (1982), de la maternelle au cycle 3, les élèves rencontrent différentes définitions du cercle, en lien avec différentes conceptions de celui-ci. Au CE2, les élèves doivent être capables d'articuler différentes manières de voir le cercle, que l'on peut mettre en relation avec différentes techniques instrumentées de construction ou reproduction de cercles. Bulf et Celi (2016) ont par ailleurs déjà publié dans le numéro 97 de cette revue une étude très intéressante autour de l'enseignement de la notion de cercle à l'école. Elles y proposent des balises de progression visant à faire émerger successivement les différentes conceptions du cercle visées à l'école en appui sur des situations de reproduction de figure, en jouant sur les instruments à disposition des élèves. Notre article se situe dans le prolongement de ce travail. D'autre part, les élèves de CE2 doivent non seulement savoir tracer des cercles avec des instruments mais également être capables de parler de ces cercles, en utilisant notamment les mots centre et rayon. On peut donc viser avec les élèves l'emploi à bon escient d'expressions du type « un cercle de centre ... et de rayon ... » ou « un cercle de centre ... passant par ... (un point) ». Or désigner un cercle donné nécessite d'être capable de prendre conscience des éléments nécessaires (et suffisants) à la caractérisation d'un cercle. Les difficultés récurrentes des élèves sur l'emploi de ce langage géométrique montrent le saut que représente le passage de propriétés descriptives d'un cercle à une désignation définitoire. Comment confronter les élèves à ces questions, afin de leur apprendre à désigner des cercles ? Le travail autour du cercle au cycle 2 nous semble pouvoir constituer un premier lieu où l'on puisse interroger, sur un objet relativement petit, les enjeux et modalités possibles d'un travail autour de la désignation, la caractérisation et l'entrée dans de premières démarches de preuve en géométrie à l'école.

Nous reviendrons en début d'article sur les points de départ de notre réflexion. Nous préciserons tout d'abord quelques principes qui guident notre approche de l'enseignement de la géométrie à l'école. Nous expliciterons ensuite nos objectifs d'apprentissage autour des notions de disque et cercle en classe de CE2. Nous reviendrons enfin sur nos expérimentations de la progression proposée par Bulf et Celi (2016), sur nos constats et les questions qui nous ont amenés à envisager un prolongement aux situations proposées par ces auteures. Nous présenterons dans

[5] Nous précisons que, si notre expérimentation se situe en CE2, le niveau de classe concerné est adaptable en fonction de la progression globale envisagée en géométrie, tout au long de l'école.

une seconde partie quelques concepts théoriques qui outillent notre réflexion, et en particulier les notions de situations d'action, de formulation et de validation (Brousseau, 1998) et les déclinaisons que nous avons envisagées dans le cadre qui nous intéresse ici. Dans une troisième partie, nous présenterons les choix didactiques que nous avons opérés pour la séquence expérimentée en CE2 et proposerons quelques éléments d'analyse des situations expérimentées.

1. Points de départ

Il nous faut tout d'abord préciser quelques principes généraux qui fondent la manière dont nous pensons l'enseignement de la géométrie à l'école. Nous esquissons d'abord une description synthétique de cette approche, plus amplement détaillée dans Mathé *et al.* (2020). Nous nous intéresserons ensuite plus particulièrement aux notions de disque et de cercle. Nous préciserons les enjeux d'apprentissage poursuivis. Nous reviendrons ensuite rapidement sur les propositions de Bulf et Celi (2016), qui ont servi de point de départ à notre travail. Nous expliquerons alors les constats, questions et objectifs qui ont motivé le travail que nous présentons dans cet article.

1.1. Notre approche de l'enseignement de la géométrie de l'école

Que recouvre la géométrie de l'école ? Comme l'avaient clairement mis en évidence Houdement et Kuzniak (2006), la géométrie élémentaire, enseignée tout au long de la scolarité obligatoire, n'est pas *une* mais plurielle. Elle recouvre deux types de géométrie, aux fondements épistémologiques et pratiques bien différents. L'enseignement primaire relève d'une géométrie que nous qualifierons de *physique* (Géométrie I pour Houdement et Kuzniak). Cette géométrie se propose de résoudre des problèmes portant sur des objets matériels, objets de l'espace sensible ou figures matérielles de l'espace graphique, à l'aide d'instruments matériels. Les problèmes posés consistent à décrire, reproduire ou construire des figures matérielles, à l'aide d'instruments. Les objets de savoir de cette géométrie sont des objets mentaux construits en appui sur ce que nous appelons un *usage géométrique* des instruments, que nous définirons dans la suite ce paragraphe. Cette géométrie physique de l'école prend pour modèle une géométrie que nous avons appelée géométrie des tracés (Mathé *et al.*, 2020, p. 56).

L'enseignement secondaire met quant à lui en jeu une géométrie *théorique*, ou géométrie *à la Euclide* (Géométrie II pour les auteurs suscités). Cette géométrie prend pour objets d'étude des figures théoriques et comme moyen d'action et de validation le raisonnement hypothético-déductif. Distinguer ces deux paradigmes géométriques (Houdement & Kuzniak, 2006) est essentiel pour bien comprendre « le jeu auquel on joue » lorsque l'on fait de la géométrie à l'école (et au début du collège) et la nature des connaissances et savoirs que l'on peut viser à ce niveau de la scolarité.

Quels sont alors les enjeux fondamentaux de l'enseignement de la géométrie à l'école[6] ?

La première idée fondatrice de notre approche est celle de la nécessité d'apprendre aux élèves à construire un rapport géométrique aux figures matérielles. La géométrie de l'école consiste à construire, reproduire, décrire des figures matérielles en mobilisant des objets, propriétés et relations géométriques via des instruments. Pour autant, analyser géométriquement une figure matérielle n'est pas inné. Cela suppose une capacité à mobiliser une manière de voir les figures matérielles tout à fait spécifique de la géométrie, dans un mouvement de déconstruction et

[6] Nous ne traitons pas dans cet article du champ de la structuration de l'espace (repérage) ni des questions de géométrie comme modélisation de l'espace sensible. Nous restreignons à la géométrie plane et au travail sur des figures matérielles « déjà là ».

reconstruction dimensionnelle (Duval & Godin, 2005). Accompagner les élèves dans un enrichissement progressif du regard porté sur les figures pour, à terme, être capables d'articuler des visions surfaces (2D), contours (1D/2D), segments, lignes (1D) et points (0D)[7] des figures matérielles constitue pour nous un enjeu fondamental de la géométrie de l'école primaire (et du début du secondaire).

La seconde idée trouve sa source dans le rôle que peut jouer l'usage des instruments dans la conceptualisation en géométrie. Le traitement instrumenté de figures matérielles à l'école vise pour nous une finalité conceptuelle. Les instruments[8] utilisés pour reproduire et construire une figure matérielle sont inextricablement liés à l'analyse de la figure opérée, les objets et relations géométriques mobilisés. Enseigner la géométrie à l'école, c'est permettre une conceptualisation qui repose sur un *usage géométrique des instruments*, c'est-à-dire un usage juste, où l'instrument représente un concept géométrique (plutôt que précis) (Petitfour, 2015). Faire évoluer la capacité d'analyse des figures en jouant sur les instruments à disposition, faire émerger les règles d'un usage géométrique des instruments et poursuivre un travail langagier permettant l'émergence d'objets et de relations géométriques en appui sur l'usage des instruments constituent pour nous l'essence de l'enseignement de la géométrie du début du primaire au début du secondaire. Proposer des problèmes de reproduction de figure à l'aide d'instruments, en jouant sur les variables didactiques de ces problèmes, est un moyen d'y parvenir. Ces situations occupent d'ailleurs désormais une place de choix dans les programmes, notamment de cycle 2 :

> *La reproduction de figures diverses, simples et composées est une source importante de problèmes de géométrie dont on peut faire varier la difficulté en fonction des figures à reproduire et des instruments disponibles. Les concepts généraux de géométrie (droites, points, segments, angles droits) sont présentés à partir de tels problèmes (MEN, 2020, p. 62).*

Le problème générique consiste à réaliser une copie d'une figure matérielle donnée. Cette copie peut être à la même échelle, selon la même orientation que la figure modèle ou non. Cette question est importante car soit l'on vise la reproduction de la même figure matérielle (caractérisée par des propriétés géométriques et des propriétés graphiques), soit l'on vise la construction d'une figure matérielle représentant la même figure géométrique, caractérisée par des propriétés géométriques. La figure matérielle modèle et la figure matérielle produite sont alors deux dessins d'une même figure, au sens de Laborde et Capponi (1994)[9]. Cette reproduction s'effectue à l'aide d'instruments. Le choix des instruments à disposition des élèves, les contraintes portant sur ces instruments constituent bien sûr une variable didactique importante de ces situations. Selon les instruments mobilisés, la reproduction de figure ne nécessitera pas la même analyse de la figure, en termes de surfaces, lignes points, et la

---

7 Les notions de visions surfaces, contours, lignes, points seront illustrées dans le paragraphe suivant, à propos de différentes manières de voir le cercle. Pour une description plus détaillée de ces notions, nous renvoyons le lecteur à des publications passées (Mangiante-Orsola & Perrin-Glorian, 2014) ; Mathé, Barrier & Perrin-Glorian, 2020).

8 Nous entendons par « instruments » non seulement les instruments de géométrie classiques (règle, équerre, compas...) mais aussi des gabarits, pochoirs, papier calque...

9 Conformément aux usages du groupe *de Lille*, nous avons choisi dans ce texte d'utiliser les expressions « figures matérielles » pour désigner l'objet graphique constituée par la trace laissée sur une feuille de papier et construite aux instruments ; figure géométrique pour désigner l'objet géométrique, idéel, caractérisé par des propriétés géométriques et dont la figure matérielle est une représentation dans l'espace graphique. Pour ne pas alourdir la rédaction, nous utilisons également parfois le mot « figure », sans adjectif, pour figure matérielle, au sens commun du terme. D'autres pratiques, plus répandues sans doute en didactique de la géométrie, utilisent les mots « dessin » pour l'objet graphique, « figure » pour l'objet géométrique. Pour plus de précision sur ce point et les raisons de ce choix, le lecteur pourra par exemple se référer à Mathé *et al.* (2020, p. 30).

mobilisation des mêmes propriétés de la figure modèle. Un système de coûts sur l'usage des instruments peut même être envisagé, afin d'amener les élèves à mobiliser certains instruments plutôt que d'autres (Keskessa, Perrin-Glorian & Delplace, 2007 ; Perrin-Glorian, Mathé & Leclercq, 2013 ; Mathé, Barrier & Perrin-Glorian, 2020) ; enfin, la reproduction peut se faire à partir d'une amorce (partie du dessin modèle) ou non. Lorsque l'on part d'une amorce de la figure, on parle parfois de *restauration* de figures.

La troisième idée importante sur laquelle repose la manière dont nous pensons l'enseignement de la géométrie à l'école et ses enjeux porte sur le rôle d'un travail langagier dans la conceptualisation en géométrie. Enseigner la géométrie suppose d'engager un travail langagier permettant aux élèves d'aller à la rencontre des objets et relations géométriques en jeu dans l'usage géométrique d'instruments. Enseigner la géométrie vise aussi la construction d'un langage spécifique permettant de porter l'analyse géométrique de figures, de décrire et caractériser des objets et relations géométriques. Au fil de la scolarité, ce langage deviendra un lieu et un moyen d'action et de raisonnement sur les objets de la géométrie. Les enjeux langagiers poursuivis dépassent alors de loin ceux de la leçon de vocabulaire, nous développerons ceci dans ce texte.

Conformément à ces principes généraux, notre travail autour des notions de disque et cercle consiste ainsi à cerner les connaissances et savoirs visés autour de ces notions puis à penser des situations nécessitant la mobilisation de ces connaissances et savoirs par le biais, d'une part, de traitements instrumentés de figures matérielles, d'autre part, d'un travail langagier autour de ces procédures instrumentées. Nous proposons dans le paragraphe suivant de préciser nos objectifs d'apprentissage.

1.2. Connaissances et savoirs visés autour des notions de disque et cercle

Distinction entre disque et cercle et différentes conceptions du cercle, en lien avec l'usage d'instruments

Les premiers enjeux d'apprentissage que nous poursuivons relèvent de connaissances et de savoirs sur le disque et le cercle à proprement parler, en lien avec l'usage géométrique d'instruments permettant de représenter graphiquement ces objets.

Le disque désigne une surface (objet de dimension 2, ou 2D), que l'on reconnaît perceptivement. On le matérialise souvent par une forme ou gabarit, que l'on peut déplacer ou non.

Au cycle 2, nous souhaitons ensuite accompagner les élèves à la rencontre de différentes conceptions du cercle (Artigue & Robinet,1982), chacune pouvant être mise en relation avec un usage de l'instrument mobilisé pour le construire ou le reproduire :

- On peut tracer un cercle en faisant le contour d'un gabarit de disque. Le cercle est alors vu comme le *contour d'un disque*, c'est-à-dire la ligne frontière de cette surface (objet de dimension 1 lié à un objet de dimension 2, noté 1D/2D). Le centre n'apparaît pas.
- Lors d'un tracé à main levée, on essaie de produire une ligne (1D) qui « tourne régulièrement ». Le cercle est alors vu comme une *ligne de courbure constante*. Le cercle est encore vu comme un objet de dimension 1 et n'a toujours pas de centre.
- Lors d'un tracé au compas (ou encore avec un piquet et une corde), le cercle s'appréhende par une relation entre une ligne (1D) et un point (0D), comme la trace laissée par l'extrémité d'un segment qui tourne autour de son autre extrémité ou comme une ligne équidistante d'un point. Tous les points que l'on place sur cette ligne sont à la

même distance du centre. Cette distance s'appelle rayon du cercle (nous noterons rayon[longueur] dans la suite du texte). Tout segment joignant un point du cercle et son centre est également appelé rayon du cercle (noté rayon[segment]). De même, le mot diamètre désigne deux types d'objet. On appellera diamètre du cercle tout segment joignant deux points du cercle et passant par son centre (diamètre[segment]). La longueur de chacun de ces segments est également appelée diamètre du cercle (diamètre[longueur]).

En mathématiques, le cercle est souvent défini comme ensemble de points équidistants de son centre. Voir le cercle comme un ensemble de points nécessite d'être capable de penser la ligne comme ensemble de points (dense et continu). Nous pensons que cette conception du cercle n'est pas accessible à l'école, où la construction des objets géométriques s'appuie sur un usage des instruments. Nous nous restreignons à l'idée du cercle vu comme une ligne, ligne sur laquelle on peut concevoir des points, tous à la même distance du centre.

Caractérisations et désignations d'un cercle, des enjeux langagiers

Au cycle 2, les élèves doivent non seulement savoir construire ou reproduire des cercles avec divers instruments, mettre en relation ces différentes techniques de tracé avec différentes conceptions du cercle, mais aussi savoir « décrire » des cercles, utilisant le vocabulaire « cercle, centre, rayon, diamètre » (MEN, 2020, p. 64). Décrire un cercle, isolé ou dans une figure composée, met en jeu des connaissances relatives à la caractérisation d'un cercle. Cette question de la caractérisation d'un cercle est cruciale car elle fonde la manière dont les cercles sont désignés. Elle suppose de se poser la question des informations nécessaires et suffisantes pour définir un cercle. Apprendre aux élèves à désigner des cercles constitue pour nous un enjeu d'apprentissage langagier important, qui conduit à de premières réflexions sur la définition des objets en géométrie et de premiers raisonnements.

Les contraintes instrumentales inhérentes à l'usage d'un compas, les caractérisations d'un cercle et les désignations d'un cercle sont intimement liées. Pour tracer un cercle donné au compas, on a besoin de connaître deux informations. Il faut en effet savoir où placer la pointe du compas puis :

- soit avoir l'information de la longueur qui doit séparer la pointe et la mine : la donnée concerne alors un rayon [longueur] ;
- soit savoir que l'on doit placer la pointe à l'extrémité où doit être le centre et la mine à l'autre extrémité d'un segment donné : l'information concerne un rayon [segment] ;
- soit connaître un endroit où placer la mine : on s'intéresse alors à un point du cercle.

Bien entendu, ces usages du compas sont intimement liés et relèvent souvent de gestes très proches, mais diffèrent sur un point qui nous semble important : le regard porté sur la figure et l'attention portée à des sous-unités du cercle de nature et de dimension différentes. Ces différentes caractérisations et usages du compas donnent lieu à différentes manières possibles de désigner un cercle, en langage géométrique. On parlera :

- de cercle de centre [point] passant par [point],
- de cercle de centre [point] et de rayon [longueur],
- ou encore de cercle de centre [point] et de rayon [segment].

Ce langage géométrique peut être construit en lien avec ces différents usages du compas et la verbalisation de ces usages, dans ce que nous appellerons un langage technique géométrique (Petitfour, 2015). Ce travail langagier de conversion d'un langage à l'autre peut par exemple prendre appui sur le tableau suivant, construit en classe en appui sur les procédures instrumentées des élèves (l'élément entre parenthèses est donné aux élèves) :

Langage technique ***Comment je trace***	**Langage géométrique** ***Ce que je dois tracer***
Avec le compas, je mets la pointe sur le centre ... [un point], j'écarte le compas pour que la distance entre la pointe et la mine soit [le rayon].	Un cercle de centre ... [un point] et de rayon ... [une longueur]
Avec le compas, je mets la pointe sur le centre, j'écarte le compas pour que la pointe et la mine soient placées aux deux extrémités du rayon.	Un cercle de centre ... [un point] et de rayon ... [un segment]
Avec le compas, je mets la pointe sur le centre, j'écarte le compas, placer la mine sur le point du cercle donné.	Un cercle de centre ... [un point] et passant par ... [un point].

Figure 1 *: Mise en correspondance d'usages du compas et de désignations d'un cercle.*

Construire une désignation des cercles en mobilisant deux informations peut donc être porté par un travail de conversion d'un langage technique à un langage géométrique. Mais les difficultés récurrentes et persistantes des élèves à désigner des cercles nous montrent que le travail ne s'arrête pas là. Permettre aux élèves de prendre conscience des conditions qui pèsent sur cette désignation du cercle passe également par leur mise en confrontation à la question des informations nécessaires et suffisantes à la caractérisation d'un cercle. Non seulement le langage géométrique permet de traduire un usage géométrique du compas mais il répond également à une nécessité. L'enjeu consiste donc ensuite à engager un travail sur le caractère nécessaire et suffisant de ces informations, et donc à accompagner les élèves dans de premières démarches de preuve, élémentaires, dans lesquelles ils pourront par exemple produire des contre-exemples permettant d'invalider des désignations lacunaires.

Des connaissances et savoirs autour du cercle au service de l'analyse de figures composées

Nous l'avons dit, notre travail s'ancre dans une perspective générale visant à apprendre aux élèves à analyser des figures matérielles, souvent composées. Analyser géométriquement une figure nécessite d'être capable d'articuler des visions en termes de surfaces (2D), de lignes (1D) et de points (0D) et de s'intéresser aux propriétés et relations géométriques entre des sous-unités de la figure de dimensions différentes. L'enrichissement des connaissances des élèves sur le cercle, à travers les différentes conceptions visées, met déjà en jeu ce mouvement de déconstruction-reconstruction dimensionnelle. Mais le travail autour du disque et du cercle ne peut se limiter à l'étude de figures isolées. Nous attachons une importance particulière à ce que les élèves puissent mettre ces connaissances au service de l'analyse, la reproduction, la construction et la description de figures composées. À l'instar de Bulf et Celi (2016), nous faisons donc le choix d'accorder dans notre séquence une place importante à l'étude de figures composées (comprenant des cercles ou parties de cercle).

Nous allons voir cela dans la partie qui suit, en revenant sur les situations de reproduction de figures proposés par ces collègues. La richesse de ces situations nous a conduits à suivre leurs recommandations et à consacrer le début de notre séquence à ces situations.

1.3. Faire émerger différentes conceptions du cercle de l'usage d'instruments : de premières situations de reproduction de figures proposées par Bulf et Celi (2016)

Poursuivant des objectifs d'apprentissage proches des nôtres, Bulf et Celi (2016) proposent une progression autour de situations de reproduction de figures visant à faire émerger la distinction entre disque et cercle et à accompagner les élèves à la rencontre des différentes conceptions du cercle que nous venons d'évoquer. L'originalité de cette progression tient au fait que la majeure partie des situations proposées repose sur la reproduction d'une seule et même figure, dite rosace (figure 2). L'idée consiste à faire varier les instruments à disposition des élèves afin de les amener à un enrichissement progressif de l'analyse de la figure et de leurs connaissances sur le cercle.

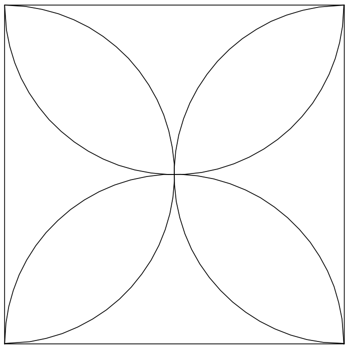

Figure 2 : La rosace.

Nous invitons le lecteur à consulter l'article de référence pour une description et analyse des situations proposées, auxquelles nous consacrerons les trois premières séances de notre séquence.

Nous mettons en œuvre chaque année, depuis quatre ans, ces situations de reproduction de figure dans une classe de CE2[10]. Ces situations, auxquelles nous consacrons trois séances, constituent encore aujourd'hui les premières étapes du travail autour du disque et du cercle. Nous rendons ici compte d'un rapide retour sur expérience puis explicitons les constats qui nous ont amenés à vouloir poursuivre un travail langagier, en appui sur les premiers apprentissages permis par ces situations.

Des savoirs géométriques sur le disque et le cercle qui émergent de l'usage des instruments

Les élèves, très investis dans les défis qui leur sont lancés, éprouvent souvent, dans un premier temps, des difficultés à percevoir les demi-disques dans la rosace, analysant d'abord la figure en termes de juxtapositions de surfaces et évoquant volontiers une fleur, des pétales, parfois même des ballons du rugby. Toutefois, la reproduction de la figure à l'aide d'un gabarit de carré et de quatre gabarits de demi-disques leur permet, après un temps de recherche, de percevoir la figure comme juxtaposition et superposition de surfaces et à identifier les demi-disques. Reproduire la figure en la dessinant à côté du modèle, avec un gabarit de carré et un gabarit de demi-disque, permet ensuite de faire émerger le cercle (ou partie du cercle) comme le contour du disque (ou partie du disque). La reproduction de la figure à l'aide d'un compas amène enfin les élèves à chercher le centre des demi-cercles et à faire évoluer leur conception du cercle, qui peut maintenant être vu comme « ligne à équidistance d'un point », son centre. Au terme de la confrontation des élèves à chacune de ces situations, en appui sur une verbalisation des procédures instrumentées mises en œuvre, une nouvelle conception du cercle peut être institutionnalisée. Les contraintes sur les instruments constituent donc indéniablement un levier didactique précieux permettant d'accompagner les élèves dans un enrichissement de l'analyse de la figure et de leurs connaissances sur le cercle. Nous complétons parfois ces situations par des problèmes de reproduction d'autres figures composées comprenant des cercles ou parties de cercles, à l'aide de gabarits de figures usuelles, d'un compas et d'une bande de papier pliable. Avec un peu d'entraînement, les élèves se montrent rapidement assez habiles pour repérer des

[10] Les premières situations de cette progression constituent également depuis plusieurs années la base d'un travail sur disque et cercle dans une classe de GS, une classe de CP, une classe de CE1 d'enseignants de notre groupe IREM.

sous-unités figurales (cercles, parties de cercle, autres figures simples, segments, points...) et les relations géométriques entre ces sous-unités.

Au fil de ces situations, les élèves apprennent ainsi à construire et reproduire des disques, cercles ou parties de cercles à l'aide d'instruments divers, à reproduire des figures composées en identifiant centre et éléments caractéristiques de cercles. Tout au long de ce travail, l'enseignant construit avec les élèves une trace écrite permettant de fixer et garder mémoire des savoirs à retenir concernant le cercle, en appui sur les procédures de reproduction des figures, par exemple du type suivant (figure 3).

1 Le cercle est le contour d'un disque.

2 Le cercle est une ligne de courbure constante (la courbure de la ligne est toujours pareille).

3 Le cercle est une ligne située toujours à la même distance d'un point. Ce point s'appelle son centre.

On appelle rayon du cercle tout segment reliant un point du cercle et son centre. La longueur de chacun de ces segments s'appelle aussi le rayon du cercle.

On appelle diamètre du cercle tout segment reliant deux points du cercle et passant par son centre. La longueur de ces segments s'appelle aussi diamètre du cercle.

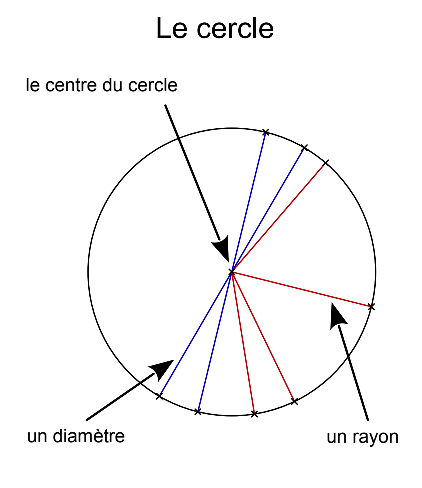

***Figure 3** : Exemple de trace écrite.*

Par le biais d'un travail de conversion entre un langage technique permettant de décrire les actions instrumentées et un langage géométrique, en appui par exemple sur le tableau présenté en figure 1, l'enseignant introduit également des expressions telles que « nous construisons le cercle de centre... et de rayon... (ou passant par...) ».

D'un langage technique décrivant les actions instrumentées à l'installation d'un langage géométrique : un premier travail langagier

Nos expériences de classes ont mis en lumière le rôle essentiel du travail langagier dans les processus d'évolution des procédures des élèves comme dans l'identification, par les élèves, des connaissances et savoirs géométriques en jeu. Ceci nous a amenés, au fil des années, à anticiper ce travail langagier. Nous favorisons d'une part les échanges entre élèves en les faisant travailler en binômes et nous portons d'autre part une attention particulière à la phase de dévolution du problème, aux mises en commun intermédiaires et bien sûr à la mise en commun finale. Celle-ci est le lieu d'un travail autour de la verbalisation des procédures instrumentées des élèves puis de l'institutionnalisation des savoirs visés en appui sur ces procédures. Nous ne développerons pas davantage ce point dans cet article, que nous voulons consacrer à la suite donnée à ce travail. Toutefois, soulignons que l'importance de ce travail langagier autour de la verbalisation des procédures est mise en avant dans les recherches en didactique de la géométrie (Bulf & Celi, 2016 ; Bulf, Mathé & Mithalal, 2014 ; Bulf & Mathé, 2018 ; Petitfour, 2017) mais qu'il est souvent peu anticipé dans les classes. Il participe pourtant à l'évolution des procédures et à la découverte des objets géométriques par les élèves. Désigner les sous-unités de la figure et leurs relations identifiées, entendre ces désignations sont des moyens pour les élèves de prendre conscience de ces objets et propriétés, et de faire évoluer leurs analyses des figures. Ces interactions accompagnent la construction d'un premier langage géométrique, nécessaire pour communiquer sur les procédures. Ce travail langagier porte également le passage des procédures instrumentées à l'identification et à la formulation des connaissances et savoirs géométriques en jeu, lors des phases orales et écrites d'institutionnalisation.

Apprendre à désigner des cercles et utiliser un langage géométrique portant l'analyse de figures : un travail qu'il reste à mener

À la suite de ce travail, nous avons voulu proposer aux élèves une situation les amenant à mobiliser le langage géométrique introduit lors de la phase d'institutionnalisation pour décrire des cercles. Pour ce faire, nous leur avons demandé de produire un texte qui permette à quelqu'un qui ne l'a pas vue de construire une figure modèle, à partir d'une amorce donnée (à l'émetteur et au récepteur du message). Ils disposaient alors d'instruments (règle, compas, ...) afin de pouvoir commencer par reproduire effectivement la figure. Les figures et amorces étaient choisies de façon que le travail des élèves consiste à désigner les cercles ou parties de cercle, en les caractérisant par leur centre et une seconde information choisie parmi leur rayon [longueur], leur rayon [segment] ou un point du cercle.

Si les élèves réinvestissaient souvent quelques mots du vocabulaire introduit précédemment, aucun d'entre eux ne parvenait dans son message à désigner de façon opératoire les cercles ou parties de cercle par les deux informations nécessaires, comme en témoigne l'exemple ci-joint (figure 4).

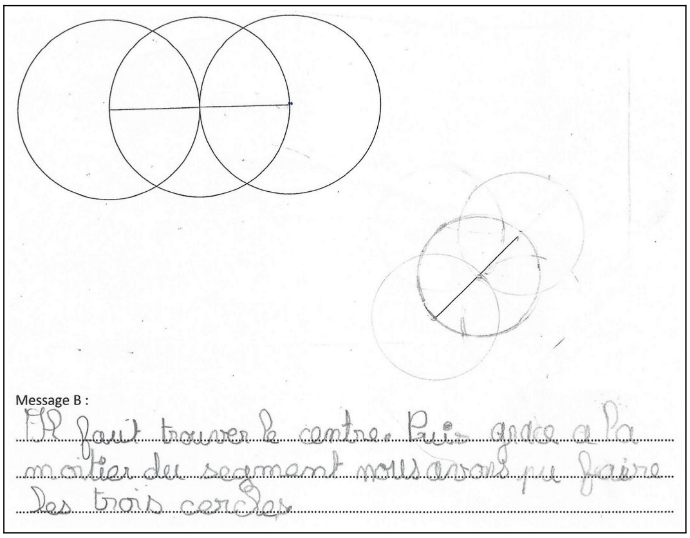

Figure 4 *: Exemple de message produit par un binôme d'élèves.*

Proposer ces premières situations nous a ainsi permis de mesurer le saut cognitif considérable que représente le passage de la verbalisation d'actions instrumentées — même reformulées en langage géométrique avec l'aide de l'enseignant — à la formulation d'une désignation opératoire de cercles, c'est-à-dire qui permette de les caractériser. Ces premières expériences, vécues de manière similaire par beaucoup d'enseignants s'étant essayés à ce type d'activité, nous ont amenés à nous interroger sur les connaissances géométriques en jeu dans ce type d'activité, sur leur pertinence en termes d'objectifs d'apprentissage et sur les moyens d'accompagner les élèves dans un apprentissage progressif de ces connaissances.

En premier lieu, les difficultés rencontrées nous semblent illustrer qu'être capable de désigner des cercles (ou parties de cercle) passe par une prise de conscience des informations nécessaires et suffisantes à leur caractérisation. Cette question de caractérisation se pose également dans les situations de reproduction de figures : pour pouvoir utiliser mon compas, j'ai besoin de connaître le centre du cercle et une autre information. Toutefois, passer de nécessités instrumentales, matérielles, à la question de la caractérisation des objets géométriques en jeu est loin d'être évident. Les productions des élèves nous laissent à penser que le fait que le cercle ait un centre, un rayon..., qui sont des propriétés qui ont émergé de l'usage du compas, était alors entendu par les élèves comme des propriétés descriptives du cercle. Désigner des cercles suppose de se poser la question des propriétés caractéristiques du cercle. Permettre aux élèves de construire un langage géométrique précis permettant de désigner des cercles, et plus largement des objets géométriques, des figures, nécessite un autre travail, spécifique.

Pourquoi ce travail langagier spécifique nous paraît-il important ? Désigner des cercles, et donc être capables de les caractériser par deux informations, constitue tout d'abord un attendu des programmes. Plus largement, construire un langage géométrique permettant de parler des cercles constitue une dimension importante de l'activité géométrique des élèves visée et participe de la conceptualisation de l'objet géométrique. Plus encore, au-delà de ce travail spécifique sur le cercle, engager les élèves dans un travail visant la construction d'un langage portant une analyse géométrique des figures, faire émerger une caractérisation de ces objets, un lien avec un usage géométrique des instruments, nous semble un enjeu important de l'enseignement de la géométrie à l'école. Réside d'une part ici pour nous une des finalités conceptuelles de la géométrie physique de l'école. Il s'agit d'autre part pour nous de préparer les élèves à l'activité géométrique, essentiellement langagière, de la géométrie théorique du collège, et d'envisager les possibilités d'un continuum entre géométrie physique et géométrie théorique. Notre objectif général consiste à penser la géométrie physique de l'école comme le lieu possible d'un enseignement progressif de ce que Laborde (1982) appelait *« un usage du langage en classe de mathématiques »* dans la citation mentionnée en introduction de ce texte. Nous pensons que cette géométrie peut également être le lieu de l'engagement des élèves dans de premiers raisonnements, en appui sur la construction ou la reproduction instrumentée de figures.

Notre question est alors celle des moyens d'envisager les modalités possibles de ce travail. Le seul but de reproduire matériellement une figure modèle ne rend pas nécessaire de formuler les objets et relations géométriques qui pourraient être au fondement des stratégies d'action, de mobiliser un langage portant une analyse géométrique des figures ou encore de faire émerger une caractérisation de ces objets, en lien avec un usage géométrique des instruments. Il nous a donc fallu prolonger ces situations par d'autres situations qui mettent en jeu la nécessité de ces connaissances spécifiques. Cette réflexion nous a amenés à mobiliser la notion de dialectique de l'action, de la formulation et de la validation (Brousseau, 1998) et à envisager les possibilités et potentialités d'une articulation entre situations de reproduction de figures, situation de formulation et de validation, en jouant sur les variations possibles autour de ces situations.

2. Situations d'action, de formulation et de validation autour de la reproduction instrumentée de figures

Nous ne prétendons pas proposer une présentation complète de la dialectique de l'action, de la formulation et de la validation introduite par Guy Brousseau et du cadre de la théorie des situations didactiques dans laquelle elle s'ancre (Brousseau, 1998). Si besoin, nous invitons le lecteur à se référer aux textes de référence (Brousseau, 1998 ; Bessot, 2011 ; Bosch & Perrin-Glorian, 2013 ; Margolinas, 2003) ou aux efforts d'adaptation de ces outils de pensée dans le cadre qui est le nôtre, que nous avons entrepris dans d'autres textes (Mathé & Mithalal, 2019 ; Mathé *et al.*, 2020, pp. 75-85). Nous nous limiterons ici aux éléments que nous jugeons nécessaires à la compréhension de notre réflexion et aux choix que nous avons faits pour la suite de notre travail autour des notions de disque et cercle en classe de CE2.

Nous considérons la reproduction de figure comme une situation fondamentale pour la géométrie des tracés. Une situation fondamentale constitue une matrice permettant de décliner plusieurs situations à usage didactique (des situations pour enseigner) visant des connaissances et des savoirs ayant une certaine proximité (ici les savoirs et connaissances relevant de la géométrie des tracés, modèle de la géométrie de l'école). Nous avons vu que les enjeux d'apprentissage de cette géométrie admettent différentes dimensions, et en particulier des dimensions instrumentales et langagières. Se dessinent ainsi différents types de connaissances, notamment instrumentales et langagières, qui pourront vivre au sein de différents types de situations à usage didactique.

2.1. Situations d'action

Dans les situations d'action associées à la situation fondamentale de reproduction de figure, le but de l'élève[11] est de reproduire une figure donnée, avec les instruments à disposition. Les élèves ont sous la main la figure modèle, les instruments et la feuille sur laquelle ils doivent reproduire la figure. Ils peuvent agir et éprouver la validité de leurs stratégies directement, par exemple par comparaison perceptive de la figure modèle avec la figure produite ou par superposition d'un modèle produit sur papier calque. Les situations de reproduction de figures proposées par Bulf et Celi, auxquelles sont consacrées les premières séances de notre séquence, sont des situations d'action.

2.2. Situations de formulation et variations possibles

Les situations de formulation sont des situations dans lesquelles, pour réussir, l'élève doit expliciter le modèle implicite de ses actions (Bessot, 2011). L'élève va ainsi être contraint de formuler les connaissances nécessaires à la reproduction de figures, c'est-à-dire les reprendre (les reconnaître, les identifier, les décomposer et les reconstruire dans un système linguistique). (Brousseau, 1997, p. 7).

La formulation est nécessaire si l'action directe sur le milieu — ici la prise d'informations sur la figure modèle — est empêchée ; par exemple parce que la figure modèle est éloignée, dans l'espace ou dans le temps, du lieu ou du moment où il faut la reproduire. Dans le cas d'un éloignement dans le temps, la tâche peut être de produire un message pour soi-même qui permette de garder mémoire des éléments significatifs de l'analyse de la figure (formulation à soi-même). Dans d'autres cas, l'émetteur et le récepteur du message peuvent être des personnes différentes (formulation à autrui). Les deux joueurs doivent coopérer. La formulation doit alors être plus explicite et partagée.

Une autre variable clé de ces situations concerne les moyens utilisés pour communiquer. Il peut s'agir d'un langage graphique (par exemple un dessin à main levée ou une figure codée mettant en évidence les informations nécessaires à la reproduction) ou d'un langage verbal. Lorsqu'il s'agit d'une formulation verbale, celle-ci peut être orale ou écrite. Enfin, l'on peut envisager de faire des choix quant aux contraintes posées sur la nature du discours verbal produit, par exemple entre langage technique et langage géométrique.

Outre le choix de la figure modèle et les instruments à disposition, on peut ainsi envisager une grande variété de situations de formulation autour de la reproduction de figures. Nous aurions

[11] Nous parlons ici d'élève au sens générique du terme, il peut s'agir d'un élève, de plusieurs élèves travaillant en groupe, ou plus généralement d'un sujet.

d'ailleurs pu prendre en compte encore d'autres variables didactiques dans la déclinaison de ces situations, prendre en compte les gestes comme une forme de langage par exemple, etc. Celles que nous venons de mentionner offrent déjà un large éventail de situations, que nous pouvons par exemple représenter de la manière suivante (figure 5).

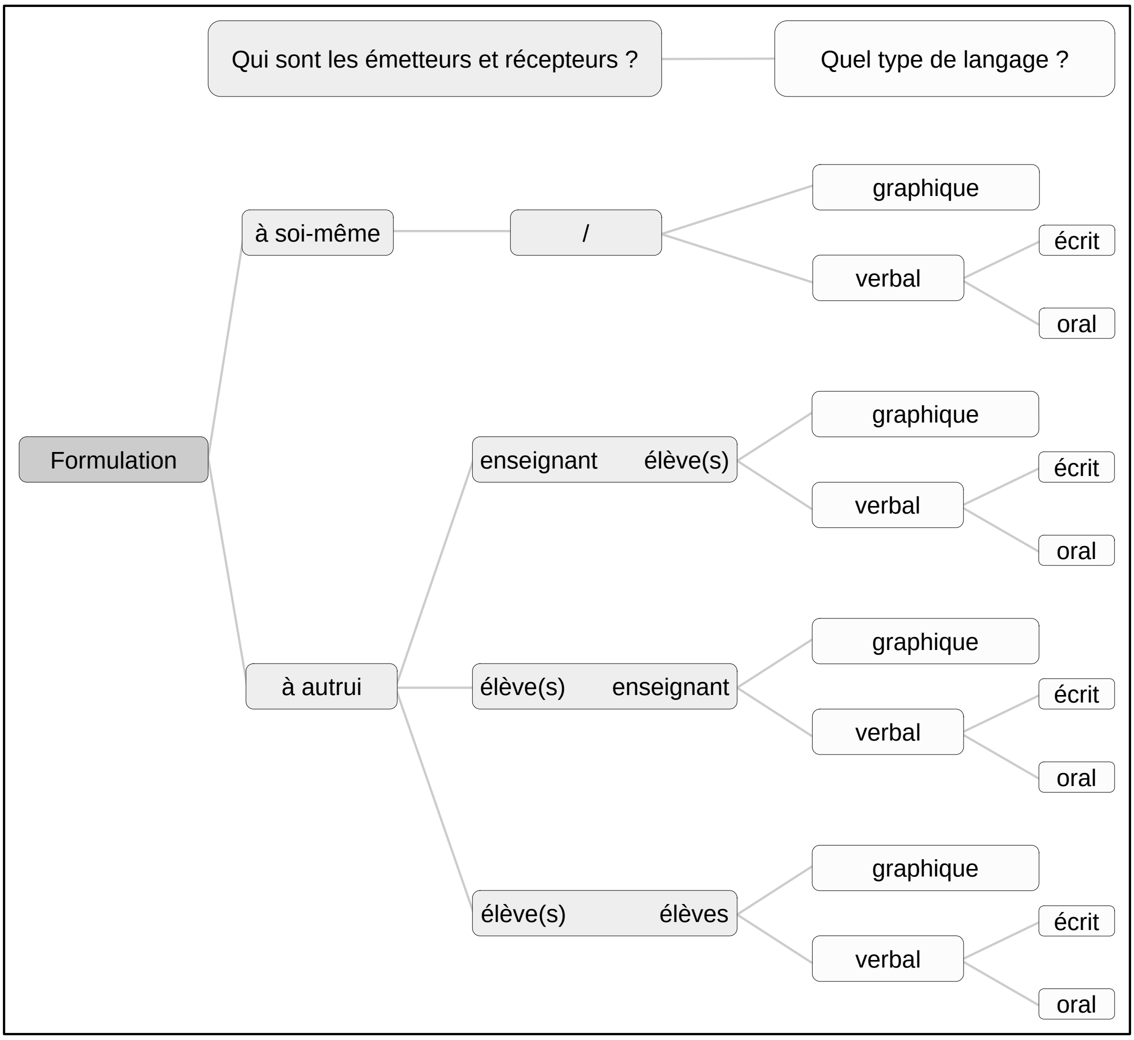

Figure 5 *: Déclinaison de situations de formulation.*

Chacune de ces situations met en jeu des connaissances de natures différentes. Nous ne pouvons ici mener une analyse *a priori* fine de chacun de ces types de situations, mais envisager cette grande variété de situations de formulation laisse déjà entrevoir le jeu qu'il est possible d'opérer sur les variables de ces situations pour penser une progressivité des apprentissages des élèves. C'est cette réflexion que nous menons au sein de notre groupe IREM.

Plusieurs points nous semblent émerger de ce rapide tour d'horizon de divers types de situations de formulation possibles.

Tout d'abord, les textes visés dans la situation proposée aux élèves dans le paragraphe précédent ne sont qu'une forme de message possible, répondant aux problèmes de formulation verbale et écrite à autrui. Ces textes peuvent être assimilables à des programmes de construction, au sens de texte donnant des instructions pour tracer une figure. Notons que les activités autour des programmes de construction sont classiques dans les classes, mais elles consistent le plus souvent à proposer aux élèves de construire une figure à partir d'un programme donné. Ce type d'activité ne nous paraît pas confronter l'élève aux nécessités et contraintes qui pèsent sur le langage géométrique. Penser ces programmes de construction comme des messages produits dans un certain type de situations de formulation permet d'envisager ce travail, en pensant une progressivité possible des apprentissages. Ce travail nous semble ainsi pouvoir être préparé, en exploitant la palette des types de situations de formulation possibles. Nous le voyons dans la figure 5, il est par exemple possible de jouer sur la distribution des rôles : l'émetteur du message peut être l'enseignant ou un élève, ou encore les élèves placés en groupes plus ou moins grands et inversement le récepteur peut être l'enseignant, un ou d'autres élève(s).

Penser des situations de formulation graphique, pour soi-même ou à autrui, nous semble aussi intéressant. Nous n'exploiterons pas ce type de situations dans notre séquence sur disque et cercle en CE2, nous ne nous étendrons donc pas davantage sur les potentialités de ces situations ici. Toutefois, ces situations figurent dans nombre de nos progressions, de la fin de la maternelle au cycle 3, dans des visées différentes. Nous évoquerons ceci dans la conclusion de l'article.

Au regard de nos visées d'apprentissage concernant le cercle et ses désignations au CE2, nous nous intéresserons dans cet article plus précisément aux situations de formulation verbale.

Dans ce champ, les situations de formulation à autrui, verbale et *orale*, ont plusieurs avantages. Elles facilitent l'entrée des élèves dans la tâche, parce qu'elles contournent la difficulté d'expression des élèves à l'écrit. Par ailleurs, alors que les situations de formulation à autrui verbales écrites nécessitent de produire du premier coup un texte complet, en anticipant les contraintes pesant sur le message, les interactions orales permettent une rétroaction directe des instructions, par rétroaction du récepteur au fur et à mesure de l'énonciation des instructions. Petitfour (2017) montre bien dans ses travaux les potentialités de ce type de situations. Toutefois, l'inconvénient de la formulation orale est bien sûr qu'elle ne laisse pas de trace. On pourrait imaginer effectuer des enregistrements audio des interactions entre émetteurs et récepteurs, mais l'exploitation de ces enregistrements nous semble compliquée dans des conditions « ordinaires » d'enseignement. La mise en œuvre de telles situations nécessite donc de penser et d'anticiper des phases de mise en commun, dans lesquelles l'enseignant devra gérer la restitution des messages oraux, leur mise en regard et la construction d'un message valide partagé et prendre en charge le passage d'un langage verbal oral à un langage verbal écrit. Encore une fois, s'annonce ici un travail riche de mise en relation entre un langage technique, qui sera très certainement spontanément mobilisé par les élèves, et un langage géométrique permettant de décrire et caractériser les objets géométriques en jeu. Nous illustrerons ceci dans la suite de ce texte.

2.3. Situations de validation

Dans les situations d'action comme dans les situations de formulation que nous venons d'envisager, l'évaluation des stratégies de tracé ou des formulations visant à communiquer ces stratégies relève d'une preuve pragmatique, c'est-à-dire repose sur une action particulière. Il s'agit de la superposition entre deux figures matérielles, construite directement par l'élève ou après échange d'un message. Les situations de validation s'inscrivent quant à elles dans une perspective de preuve intellectuelle. L'objectif est de mener un travail autour de la construction d'explications, l'identification de raisons pour lesquelles la stratégie utilisée et formulée permet effectivement, à coup sûr, la reproduction de la figure.

Dans le cas de formulations verbales écrites, les questions sont : ce texte peut-il permettre de construire une figure matérielle ne vérifiant pas les propriétés géométriques de la figure modèle ? Permet-il à coup sûr de reproduire la figure ? Donne-t-il les informations nécessaires et suffisantes pour cette fin ? L'objet de travail est donc ici le texte, dont la figure matérielle devient un représentant auxiliaire. S'engagent alors des démarches de preuve, dans lesquelles la figure matérielle peut servir par exemple d'illustration ou de contre-exemple pour invalider un message.

La problématique générale de notre travail, explicité dans l'introduction de ce texte, consistait à interroger les possibilités d'un travail progressif visant à apprendre aux élèves à utiliser un langage géométrique susceptible de porter l'analyse et la définition de figures géométriques. Cette analyse des potentialités offertes par l'imbrication de situations de reproduction de figures, de situations de formulation diverses et de situations de validation nous semble livrer des pistes. Cette réflexion dépasse bien sûr le cas particulier du travail autour du cercle et de l'analyse de figures composées contenant des cercles ou parties de cercle. Elle nourrit d'ailleurs notre travail en dehors de ce thème particulier et nous sert de point d'appui pour penser un travail plus large, du cycle 1 au cycle 3.

Dans la suite de ce texte, nous présenterons la manière dont cette réflexion a nourri le travail mené autour du cercle en classe de CE2, visant en particulier la description de cercles, isolés ou imbriqués dans des figures composées et toutes les connaissances et savoirs afférents, précisés en partie 1.2.

3. Nos choix didactiques pour un travail langagier autour du cercle en CE2

Les allers-retours entre expérimentations en classe et réflexion théorique que nous venons de présenter nous outillent pour opérer des choix didactiques pour la suite de notre séquence sur les notions de disque et cercle. Nous tenons à souligner que ces choix ne sont en rien prescriptifs. Comme tout un chacun, nous réfléchissons, expérimentons, analysons et ajustons au fil des années. La suite de l'article vise simplement à soumettre à la réflexion collective nos choix actuels.

L'objectif du travail qui suit consiste, nous l'avons vu, à apprendre aux élèves à désigner un cercle (ou une partie de cercle) donné(e), simple ou intégré(e) dans une figure composée. En géométrie, la désignation d'un cercle mobilise deux informations : soit son centre et son rayon [longueur], soit son centre et son rayon [segment], soit son centre et un point du cercle. À terme, les cercles pourront être désignés par des expressions du type « cercle de centre ... et de rayon [longueur] ... » ou « cercle de centre ... et de rayon [segment] ... », ou « cercle de centre ... passant par [point] ... ». Etre capable de parler ainsi d'un cercle, comprendre les contraintes qui pèsent sur ces désignations géométriques, suppose de se poser la question des informations nécessaires et suffisantes pour définir un cercle. Plus largement, ce travail langagier sur le cercle est pour nous une occasion d'engager les élèves dans la construction d'un langage géométrique susceptible de porter l'analyse de figures et d'une première entrée dans le raisonnement mathématique. Nous avons expliqué en introduction pourquoi le thème « disque et cercle » constitue un bon candidat pour engager ce travail à la fin du cycle 2. Celui-ci sera poursuivi et étendu à d'autres thèmes au cycle 3.

Nous précisons qu'à ce niveau de la scolarité, nous faisons le choix de n'introduire ni codage des figures, ni notations. Les figures seront donc choisies de manière à pouvoir contourner de tels besoins.

La question posée est celle de la manière dont nous choisissons à présent d'articuler les différents types de situations de formulation et de validation, dans la perspective d'aménager une progressivité des apprentissages. Nous ne nous lancerons pas dans une analyse *a priori* et *a posteriori* fine de chacune des situations proposées dans ce texte. Nous nous attachons ici à rendre compte de la logique générale adoptée, après quatre années d'essais, d'analyse et d'ajustement dans une classe de CE2, puis proposerons une brève description des situations proposées, quelques éléments d'analyse *a priori* nous permettant de situer chacune de ces situations par rapport à nos objectifs d'apprentissage, puis quelques éléments de déroulement, issus de nos dernières expérimentations en classe.

3.1. Présentation globale de notre progression

Afin de permettre au lecteur une vue d'ensemble de la progression imaginée, nous en proposons ici une vision « macro ».

Les trois premières séances de notre séquence sont consacrées aux situations de reproduction de la rosace proposées par Bulf et Celi (2016), à l'installation d'un langage géométrique en appui de l'usage des différents instruments mobilisés et à l'institutionnalisation de différentes conceptions du cercle, telles que présentées dans la première partie de ce texte. Suite à ces trois séances, quatre séances sont consacrées au travail langagier à proprement parler autour du cercle. Nous y articulons différents types de situations de formulation et de validation, de la manière suivante :

1. situation de formulation à autrui, verbale, écrite ;
2. situation de validation ;
3. situations de formulation à autrui, verbale, orale ;
4. situations de formulation à autrui, verbale, écrite.

Après avoir construit une trace écrite autour des différentes conceptions du cercle en appui sur l'usage d'instruments, comme montré en partie 1.2., nous confrontons d'abord les élèves à une situation de formulation à autrui, verbale écrite. Ce choix pourrait paraître surprenant puisque nous venons de montrer que produire un texte écrit, complet, en langage géométrique, était l'exercice le plus difficile à résoudre pour les élèves, et que notre objectif consiste à penser une progressivité des apprentissages. Tout cela est vrai, mais nous ne nous attendons pas à ce que les élèves parviennent à produire un texte écrit opératoire ici. Il s'agit plutôt d'une première situation qui doit nous permettre de problématiser, avec les élèves, la question de la désignation de cercles (ou de partie de cercles). Il nous paraît en effet important de donner d'emblée l'occasion aux élèves de se confronter au problème posé, aux difficultés que représente la formulation d'un message devant permettre à quelqu'un qui ne l'a pas vu de construire une figure et aux contraintes qui pèsent sur ce type de message. Les messages produits par les élèves seront très probablement incomplets, ils serviront de point d'appui pour la suite du travail.

La situation de validation permet ensuite d'organiser un travail sur le texte et d'explorer avec les élèves la question des informations nécessaires et suffisantes pour désigner un cercle.

Les situations de formulation à autrui, verbale orale, ont pour objectif de permettre aux élèves de s'engager dans la tâche de production de discours, en contournant les difficultés de mise à l'écrit d'un texte complet, en favorisant des rétroactions sur le message produit instruction par instruction et en permettant ainsi aux élèves d'éprouver plus facilement les contraintes qui pèsent sur le message. Nous jouons ici sur la répartition des rôles d'émetteurs et de récepteurs, entre élèves et enseignant. Les phases de mise en commun et de bilan de ces situations de formulations sont par ailleurs le lieu d'un travail de conversion entre langage verbal oral et écrit, entre langage technique et langage géométrique. Des contraintes grandissantes sont pensées sur le type de langage accepté.

Nous revenons en fin de séquence sur des situations de formulation à autrui, verbale écrite.

3.2. Une première situation de formulation à autrui, verbale écrite

La situation

Les élèves travaillent en binômes. La classe est partagée en deux. Chaque moitié de classe reçoit deux fiches. L'une contient une figure modèle et éventuellement une amorce qu'il s'agira de compléter. L'autre est le support du message à produire, un espace « commentaires », destiné aux récepteurs du message, est laissé en bas de cette fiche. Des instructions concernant les instruments à disposition sont donnés. Voici un exemple de telles fiches, distribuées à une moitié des binômes de la classe (figure 6).

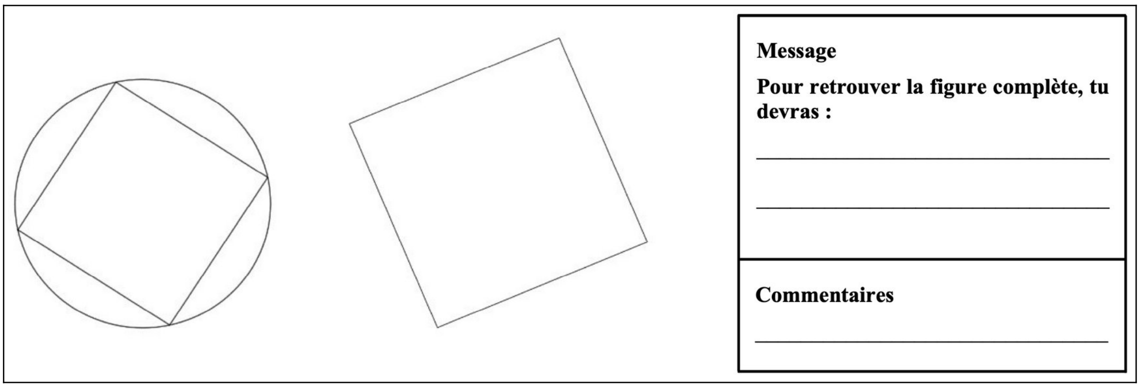

Figure 6 *: Les deux fiches distribuées aux élèves.*

La consigne est la suivante :

> *Vous allez commencer par reproduire la figure modèle, en complétant l'amorce qui vous est donnée. Pour ce faire, vous avez le droit d'utiliser votre compas, une règle (non graduée)[12]. Vous devez ensuite rédiger un message qui devra permettre à quelqu'un qui n'a pas vu votre figure modèle de reproduire cette figure. Ce binôme disposera des mêmes instruments que vous et d'une amorce semblable. Attention, l'amorce ne sera peut-être pas à la même échelle ni disposée selon la même orientation que la vôtre.*

Les messages sont ensuite échangés au sein de la classe. Chaque binôme essaie de construire une figure à partir du message produit par un groupe, à propos d'une figure qu'il n'a pas vue.

Une phase de mise en commun des messages et figures produites, des difficultés rencontrées permet ensuite d'engager un travail sur les messages produits et les contraintes qui pèsent sur la désignation du cercle, d'un cercle.

Eléments d'analyse

Le travail des élèves, émetteurs du message, s'articule autour de deux tâches : reproduire la figure à partir de l'amorce avec les instruments imposés puis formuler un texte écrit devant permettre à des camarades, qui n'auront pas vu la figure modèle, de la reproduire à partir d'une amorce, un carré.

Reproduction de la figure

Donner l'amorce du carré nous permet de décharger les élèves de la construction de cette figure et de centrer le travail des élèves sur les caractérisations possibles du cercle, en lien avec l'usage

[12] On peut autoriser davantage d'instruments.

du compas, et sa désignation. Cette amorce nous permet également de fixer l'échelle et l'orientation de figure à produire, d'éviter ainsi la nécessité de reports de longueur de la figure modèle vers l'amorce et, ici, d'engager les élèves vers la construction d'une figure matérielle non superposable à la figure modèle mais représentant la même figure géométrique, caractérisée par des propriétés géométriques. La dernière phrase de la consigne vise enfin à rendre inopérant le recours à des instructions s'appuyant sur le positionnement spatial de sous-unités de l'amorce.

Reproduire la figure modèle nécessite en premier lieu d'articuler une analyse spontanée de la figure en termes de surfaces superposées, un carré et un disque, à une analyse plus fine de la figure permettant de tracer le cercle avec le compas à partir du carré, mettant en jeu des éléments de dimension 1 (les diagonales du carré) et de dimension 0 (leur point d'intersection et un sommet du carré vu comme un point du cercle), comme illustré en figure 7.

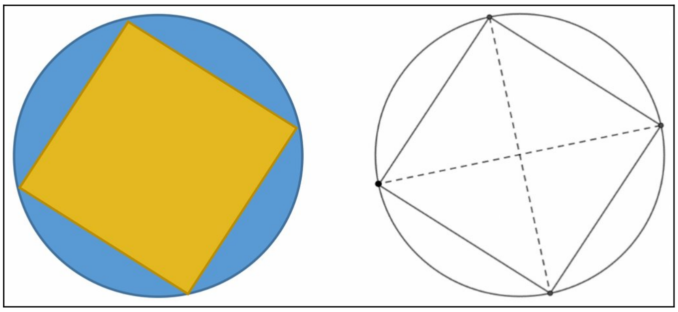

***Figure** 7 : Différentes visions de la figure.*

Pour pouvoir reproduire le cercle avec le compas, il s'agit en effet d'identifier où placer la pointe du compas, donc de voir que le centre du cercle est le centre du carré, c'est-à-dire le point d'intersection des diagonales du carré. Cette analyse de la figure conduit à commencer la reproduction par le tracé des diagonales du carré, pour obtenir son centre. Il faut ensuite savoir où placer la mine ou savoir comment écarter les branches du compas. Plus que le geste ici, c'est la sous-unité de la figure sur laquelle on porte le regard qui peut différer. Soit on s'intéresse au fait que le cercle passe par les sommets du carré. Pour utiliser le compas, considérer un seul des sommets suffit. On place la mine sur un sommet choisi. Soit on s'intéresse au fait que le rayon du cercle est donné par les demi-diagonales du carré. De même, pour utiliser le compas, considérer une seule demi-diagonale suffit. On s'intéresse alors à la longueur d'une demi-diagonale qui nous donne l'écartement des branches du compas. On peut aussi porter le regard sur le segment tracé et faire en sorte que la pointe et la mine du compas soient placées aux deux extrémités de ce segment.

Production d'un texte

Outre la capacité à déconstruire puis reconstruire dimensionnellement la figure puis à reproduire le cercle avec le compas, produire un tel texte suppose d'anticiper le lecteur et de produire un texte écrit, complet et non redondant, qui définisse sans ambiguïté le cercle, en langage géométrique.

Comme le pointait Brousseau (1997), rédiger un message écrit permettant de décrire le cercle à tracer conduit à reprendre les connaissances mises en jeu dans l'action, *« les reconnaître, les identifier, les décomposer et les reconstruire dans un système linguistique »*. Plusieurs types de textes sont alors envisageables, en fonction du type de langage mobilisé ou encore de la caractérisation du cercle choisi. Si nous optons pour une caractérisation du cercle par son centre et un point, un message opératoire pourrait par exemple être : « Trace les diagonales du carré.

Elles se coupent en un point. Trace un cercle. Son centre est le point d'intersection des diagonales et il passe par un sommet du carré. » ou « Trace un cercle dont le centre est le centre du carré et qui passe par un sommet du carré ». D'autres textes sont possibles, suivant que l'on s'intéresse au rayon [longueur] ou au rayon [segment], qui vont amener à parler d'une demi-diagonale du carré (sans doute plus difficile à désigner pour des élèves de CE2). On peut s'attendre à ce que, dans cette première situation, les élèves mobilisent un langage technique, décrivant l'action instrumentée. À terme, l'objectif est que les élèves mobilisent un langage géométrique.

Les connaissances en jeu sont alors les suivantes :

1. sélectionner les objets et relations nécessaires et suffisants à la caractérisation de la figure ;
2. désigner les sous-unités de dimensions 2 (carré, cercle), 1 (diagonale ou demi-diagonale) et 0 (sommet, centre du carré, centre du cercle) retenues ;
3. décrire les relations entre ces sous-unités. Ici, en particulier, comme c'est souvent le cas lorsqu'il s'agit de figures composées comprenant des cercles ou parties de cercle, mettre en mots ces relations rend nécessaire une double désignation de mêmes sous-unités, c'est-à-dire une interprétation multiple d'un même objet, en jouant sur la figure de dimension supérieure qui l'englobe (Duval, 2014). Par exemple, un même point est tour à tour point d'intersection des diagonales du carré et centre du cercle ou encore sommet du carré et point du cercle. Cette opération est particulièrement difficile pour les élèves, mais fondatrice de l'activité géométrique. La double désignation de sous-unités jouera un rôle central dans les démonstrations en géométrie à partir du collège.
4. ordonner et hiérarchiser l'analyse de la figure afin d'en produire une description organisée et opératoire pour permettre sa construction (il faut commencer par tracer les diagonales pour obtenir leur point d'intersection, qui sera centre du cercle).

Cette analyse montre à quel point l'exercice est difficile. Elle montre aussi que les connaissances en jeu dans ce type de situation sont riches, importantes pour l'engagement des élèves dans une conceptualisation géométrique. En les rendant nécessaires pour la résolution du problème posé, ce type de situation nous paraît offrir la possibilité d'engager les élèves sur ce terrain. Bien sûr, nous rappelons qu'il s'agit ici d'une première confrontation des élèves avec ce type de situation. Cette première séance s'inscrit dans un processus d'apprentissage long. Notre objectif est ici de problématiser avec les élèves cette question de désignation et de caractérisation du cercle.

Comme évoqué au dernier point du paragraphe 1.2., la mise en œuvre de cette situation en classe, pendant quatre années consécutives, confirme que produire un tel texte est souvent très difficile pour les élèves. La majorité des binômes résolvent le problème de reproduction de figures aux instruments, après un temps de recherche et d'analyse de la figure. Mais peu de binômes (voire aucun) parviennent à exprimer deux des informations nécessaires à la caractérisation du cercle. Dans certains messages, du type « trace un cercle qui touche le carré », « trace un cercle à l'extérieur du carré », on voit par exemple des élèves ne parvenant pas à dépasser une analyse de la figure en termes de surfaces, à exprimer de manière opératoire les positions relatives entre le carré et le cercle. Lorsque les messages sont un peu plus aboutis, les élèves utilisent par ailleurs un langage technique, décrivant où positionner « la pointe » et/ou « la mine » du compas, parlant parfois d'écartement.

Exécution d'un message

Construire le cercle avec le compas à partir d'un texte nécessite une conversion d'instructions données en langage géométrique en actions instrumentées. Ici, il va s'agir par exemple d'associer centre du cercle et pointe du compas, point du cercle et mine. Nous irons un peu plus vite sur ce point, mais ne négligeons pas l'analyse syntaxique parfois complexe que ce type d'activité met en jeu.

Dans cette première situation de formulation, comme attendu, la grande majorité des élèves se trouvent par ailleurs dans l'incapacité de compléter le carré pour construire la figure attendue, à partir des messages produits par les élèves émetteurs. Les élèves récepteurs éprouvent donc les contraintes qui pèsent sur les textes à produire et sont invités à expliciter les informations qui leur manquent pour tracer le cercle au compas dans la partie « commentaires » des messages. Cette phase est importante car elle permet aux élèves de se rendre compte des contraintes définitoires qui pèsent sur ce type de texte. Cette première analyse des textes par les élèves servira de point d'appui à la phase de mise en commun.

Mise en commun

Dans une phase de mise en commun, l'enseignante dévoile la figure modèle et organise la comparaison avec les figures produites par les récepteurs (souvent en utilisant un visualiseur qui permet de projeter au tableau les productions des élèves). La question posée est alors la suivante : les deux figures matérielles représentent-elles la même figure géométrique ? Autrement dit, vérifient-elle les mêmes propriétés géométriques ? Cette question est en général assez rapidement réglée par les élèves dans le cas de la figure choisie ici. Les commentaires des récepteurs sur les messages sont également partagés, exprimant souvent l'impossibilité des élèves à construire « à coup sûr » le cercle et la figure modèle attendus. L'intérêt de cette phase tient au débat qui s'installe alors sur le texte produit, sur les informations nécessaires et suffisantes pour décrire le cercle à tracer. S'engage alors un travail collectif autour des textes. Il s'agit d'une phase de verbalisation de *ce qu'il faut faire* pour obtenir la figure et de différents usages possibles du compas. En appui sur cette verbalisation, un travail de mise en relation entre langage technique et langage géométrique, en appui sur le tableau à deux colonnes de la figure 1, rappelé ci-dessous, est mené par l'enseignant.

Langage technique ***Comment je trace***	**Langage géométrique** ***Ce que je dois tracer***
Avec le compas, je mets la pointe sur le centre ... [un point], j'écarte le compas pour que la distance entre la pointe et la mine soit [le rayon].	Un cercle de centre ... [un point] et de rayon ... [une longueur]
Avec le compas, je mets la pointe sur le centre, j'écarte le compas pour que la pointe et la mine soient placées aux deux extrémités du rayon.	Un cercle de centre ... [un point] et de rayon ... [un segment]
Avec le compas, je mets la pointe sur le centre, j'écarte le compas, placer la mine sur le point du cercle donné.	Un cercle de centre ... [un point] et passant par ... [un point].

Figure 1 *(rappel)*

Ce travail permet de se mettre d'accord sur un ou plusieurs messages possibles. L'objectif de cette phase de mise en commun et de validation, partielle, est pour l'enseignant de problématiser la désignation d'un cercle. Le bilan porte ensuite sur le fait qu'il faut deux informations pour caractériser un cercle. L'enseignant fixe ensuite une règle : utiliser un langage géométrique, « sans mention des instruments ».

3.3. Une situation de validation

La situation

Les élèves sont ensuite confrontés à une situation de validation. Toujours en binôme, ils reçoivent un message, une amorce et la figure modèle visée (figure 8). La question posée est la suivante : « Est-ce que ce message permet, à coup sûr, d'obtenir une même figure que la figure modèle ? Il vous faudra justifier votre réponse ».

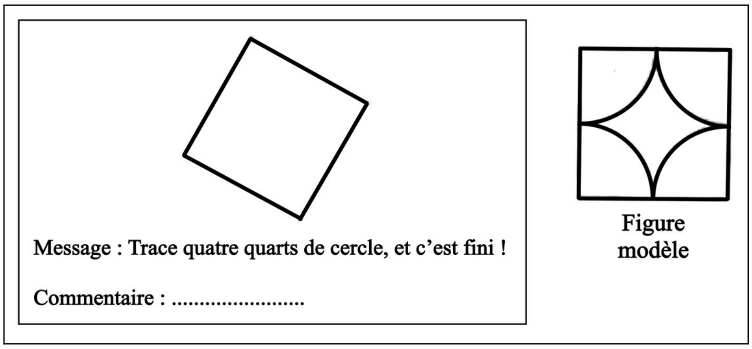

Figure 8 *: Amorce et figure modèle fournies au binôme.*

Eléments d'analyse

Les élèves sont placés en position d'opposant à l'émetteur (fictif) du message. Il s'agit d'explorer s'il est possible de construire une figure matérielle ne vérifiant pas les mêmes propriétés géométriques que la figure modèle donnée. En binôme, ils construisent alors une figure, voire différentes figures, adéquate(s) au message proposé et explicitent les informations qui leur manquent pour construire à coup sûr la figure attendue.

Au regard de la nature du message proposé, volontairement très incomplet mais souvent proche des messages produits par les élèves dans la situation précédente, les figures produites par les élèves sont très variées. En voici quelques exemples (figure 9).

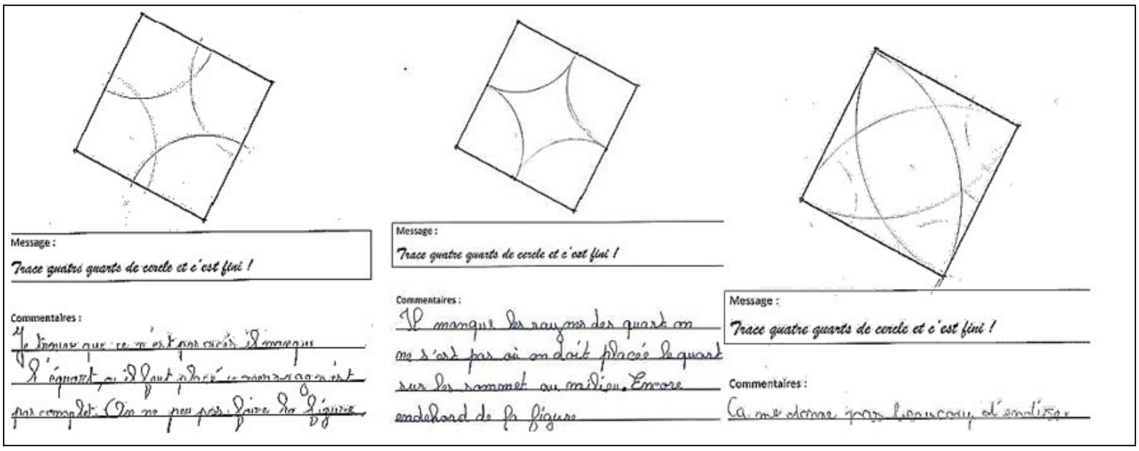

Figure 9 *: Exemples de figures produites et de commentaires notés par les élèves.*

Une phase de mise en commun permet de mettre en regard les figures produites par les élèves.

Afin d'enrichir les échanges, l'enseignant propose d'autres figures, dont l'adéquation avec le message est vérifiée en classe entière (figure 10).

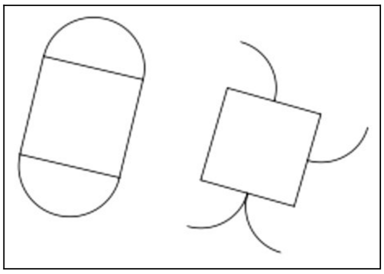

Figure 10 *: Autres figures adéquates au message proposées par l'enseignant.*

Dans le prolongement du travail mené lors de la mise en commun de la situation précédente, le travail porte ici sur le texte et sa capacité à caractériser une figure, et engage les élèves dans ce que nous reconnaissons comme de premières activités de preuve. Le problème consiste en effet à tester la validité d'un texte qui doit permettre de caractériser la figure. Conformément au principe du tiers exclu, s'il est possible de produire une figure matérielle conforme au texte mais ne vérifiant pas les propriétés géométriques de la figure modèle, le texte est invalide. La figure matérielle joue le rôle d'exemple ou de contre-exemple. Le travail de la classe consiste ensuite à compléter le texte de manière à y faire apparaître les informations nécessaires et suffisantes à la caractérisation des quarts de cercle.

Par rapport aux premières situations de reproduction de figures, et dans le prolongement de la situation de formulation précédente, notre objectif est ici d'accompagner les élèves dans une modification de l'objet d'étude et des fonctions relatives de la figure matérielle et du texte. Dans les situations de reproduction de figures, le problème porte sur la reproduction aux instruments de propriétés géométriques lues (de manière perceptive ou instrumentée) sur une figure matérielle donnée. La verbalisation des procédures instrumentées, même si ces discours sont ensuite convertis en langage géométrique, remplit principalement une fonction de description, au moins pour les élèves. Cette fois-ci, c'est le texte qui est considéré comme représentation principale et autosuffisante de la figure (Duval, 2005, p. 34). La figure matérielle a désormais une fonction d'illustration.

3.4. Quelques situations de formulation à autrui verbale, orale

Les situations

Nous choisissons ensuite d'entraîner les élèves à la désignation de cercles et à la formulation d'analyse de figures. Nous optons pour des situations de formulation à autrui, verbale orale, pour les raisons avancées en partie 2.2. Nous jouons sur la distribution des rôles d'émetteur et de récepteur.

Dans le but d'installer chez les élèves des habitudes d'opposant et l'idée que le but du récepteur n'est pas de s'accommoder d'implicites mais d'éprouver la validité de la description (définitoire) de la figure, nous privilégions d'abord des situations dans lesquelles l'enseignant est le récepteur d'instructions données par les élèves. L'activité se déroule alors en classe entière. Les élèves reçoivent une figure modèle, des indications éventuelles concernant les instruments. Ils disposent d'abord d'un moment pour reproduire la figure. Ils ont ensuite pour mission de donner des instructions à l'enseignant pour lui permettre, au tableau (ou sur feuille projetée par visualiseur), de reproduire la figure « sans l’avoir vue ». L’enseignante joue alors le rôle d’opposant en mettant au jour les imprécisions et lacunes des instructions données à l’oral par les élèves.

S’en suit une petite série de situations de formulation verbale orale entre pairs. Les élèves, en binômes, sont séparés par un classeur ou objet opaque empêchant l’un de voir la table de l’autre. L’un reçoit une figure modèle et doit formuler oralement des instructions pour permettre à son camarade de construire la figure aux instruments. Le récepteur construit la figure au fur et à mesure des instructions données, ce qui donne la possibilité de rétroactions directes sur chacun de ces instruments. Les rôles s’échangent tour à tour, dans un enthousiasme toujours partagé. Voici un exemple de figure modèle utilisée, associée aux instruments à disposition (figure 11).

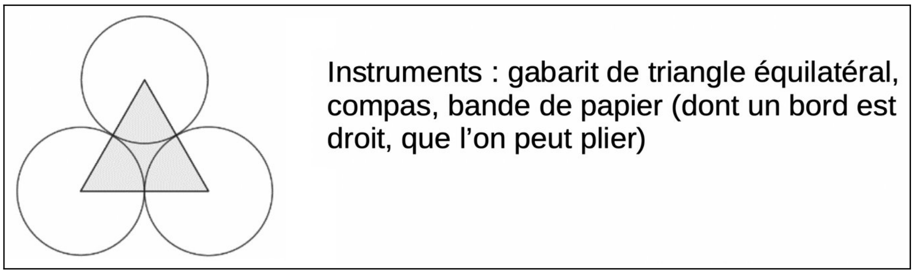

Figure 11 *: Exemple de figure modèle avec les instruments à disposition.*

Précisons que l’émetteur du message dispose des mêmes instruments (gabarit de triangle équilatéral, compas, bande de papier dont un bord est droit que l’on peut plier) et d’une feuille sur laquelle il peut essayer de reproduire la figure. Il est ainsi confronté lui-même de manière effective au problème de reproduction avec les instruments donnés. Il peut effectuer des tracés sur la figure modèle, puis reproduire la figure aux instruments. Il formule donc les instructions à son camarade au fur et à mesure des étapes de sa propre reproduction instrumentée.

Éléments d’analyse

Prenons l’exemple de la situation de formulation verbale orale entre pairs prenant appui sur la reproduction de la figure 11, pour donner à voir la teneur du travail engagé.

Les émetteurs du message doivent formuler, à l’oral, à leur camarade des instructions lui permettant de la reproduire. Dans le cas de la figure en question, il va s’agir pour l’élève émetteur :

- d’*analyser* la figure et passer d’une analyse première en termes de quatre surfaces (2D) superposées (par exemple le triangle superposé à trois disques juxtaposés) à une déconstruction dimensionnelle de la figure le conduisant à s’intéresser aux cercles comme ligne à équidistance d’un point et à identifier des sous-unités et relations entre ces sous-unités lui permettant de caractériser les propriétés de ces surfaces et leurs positions relatives. Un gabarit de triangle étant donné, il s’agit ici en particulier d’identifier les centres des cercles comme sommets du triangle et le fait que les cercles passent par le milieu des côtés du triangle équilatéral ;
- de *hiérarchiser* l’analyse de la figure afin d’en reconstruire une *analyse séquentielle* concernant *« l’ordre de construction d’une figure »* (Duval, 1994). Se pose alors la question des objets premiers à partir desquels on va pouvoir construire (et définir) les autres, question cruciale de la définition des objets en géométrie. Il faut aussi *sélectionner* les objets et relations qui seront nécessaires et suffisantes à la caractérisation de la figure. Dans le cas présent, il est bien plus simple de commencer

par construire le triangle[13]. Il faudra ensuite construire les milieux des côtés, puis choisir un mode de caractérisation des cercles (centre et point ou centre et rayon [longueur], voire centre et rayon [segment]). Nous opterons ici pour centre et point mais d'autres choix sont possibles ;

• de *désigner les sous-unités*, de différentes dimensions, identifiées et nécessaires à la construction de la figure : triangle, cercle, sommet du triangle, centre du cercle, milieu des côtés du triangle, point du cercle ;

• de *mettre en mots les relations* entre ces sous-unités sélectionnées. Ici, décrire ces relations passe en particulier par des opérations de *double désignation* de points, en jouant sur la figure qui les englobe : les sommets du triangle sont centres de cercles, les milieux des côtés du triangle des points de cercles.

Bien sûr, le fait que la formulation soit orale et que le récepteur reçoive les instructions une à une, fasse la construction pas à pas et puisse réagir à chaque instruction facilite grandement la résolution de cette tâche, très complexe. Nous voyons alors fréquemment des élèves se chamailler parce qu'« il manque le rayon pour pouvoir construire cercle ! » ou que l'émetteur « ne dit pas où passe le cercle ! ». La tentation de contourner les difficultés de formulation rencontrées par des gestes est alors grande, et est ici empêchée autant que faire se peut. L'inconvénient de ces situations est, nous l'avons dit, que les productions de message ne laissent pas de trace, et qu'il est difficile pour l'enseignant de suivre le travail de chaque binôme. En particulier, on ne peut ignorer quelques accommodations avec des implicites au sein des binômes et la difficulté des élèves à se cantonner à un langage géométrique. Ces points devront faire l'objet d'un travail attentif lors des phases collectives de mise en commun. Nos expériences de classe nous laissent toutefois à penser que ces situations ont l'avantage de permettre à une large majorité d'élèves d'entrer dans la tâche.

La mise en œuvre de ces situations en classe doit donc, nous semble-t-il, donner lieu à des phases de mise en commun et de conclusion, que nous anticipons avec soin. Celles-ci sont notamment le lieu d'un travail langagier qui va consister au passage à l'écrit d'un message complet, reconstruit de manière collective par les élèves et l'enseignante — qui se place encore ici en position d'opposante.

Ce travail s'accompagne d'une nouvelle mise en correspondance entre usage des instruments, langage technique et langage géométrique, en appui sur notre désormais familier tableau de la figure 1 (rappelée ci-après) qui reste continuellement affiché dans la classe lors des séances de géométrie et auquel nous nous référons à la moindre occasion.

[13] La mise en regard de programmes de construction prenant des voies différentes est très intéressante, en particulier pour penser une entrée dans la démonstration au collège.

Langage technique *Comment je trace*	Langage géométrique *Ce que je dois tracer*
Avec le compas, je mets la pointe sur le centre ... [un point], j'écarte le compas pour que la distance entre la pointe et la mine soit [le rayon].	Un cercle de centre ... [un point] et de rayon ... [une longueur]
Avec le compas, je mets la pointe sur le centre, j'écarte le compas pour que la pointe et la mine soient placées aux deux extrémités du rayon.	Un cercle de centre ... [un point] et de rayon ... [un segment]
Avec le compas, je mets la pointe sur le centre, j'écarte le compas, placer la mine sur le point du cercle donné.	Un cercle de centre ... [un point] et passant par ... [un point].

***Figure 1** (rappel)*

3.5. Retour sur une situation de formulation à autrui verbale, écrite

Nous revenons enfin à la situation de départ : la situation de formulation à autrui verbale écrite. Sur le même modèle que précédemment, chaque binôme d'élèves joue le rôle d'émetteur d'un message, destiné à un autre binôme de la classe qui n'a pas vu la figure modèle en question. Puis les messages et les rôles s'échangent. Les récepteurs construisent une figure en appui sur le message reçu, explicitent éventuellement des commentaires sur le message. Enfin, une phase de validation collective, animée par l'enseignant, permet la comparaison des figures construites avec les figures modèles puis un travail sur les programmes de construction proposés. La question de la caractérisation des cercles et de leur désignation, en lien avec les usages du compas, est encore ici au centre du débat et de la réflexion.

Produire des programmes de construction, écrits, complets, valides est encore difficile pour les élèves, malgré le travail mené précédemment. Alors que la reproduction instrumentée de figure ne pose très majoritairement plus de problème, produire un texte rendant compte de cette construction et des objets, relations, propriétés mises en œuvre est encore compliqué. Par exemple beaucoup d'élèves ne précisent toujours pas deux informations nécessaires à la caractérisation des cercles (centre et ...). Ces difficultés persistantes nous poussent bien sûr à réinterroger sans cesse nos progressions et situations et les modalités fines de leur mise en œuvre, du travail langagier mené lors des phases de mise en commun et conclusion. Elles nous semblent également témoigner de la complexité des activités de désignation et de caractérisation engagées, de l'importance de s'emparer de ces questions et de la nécessité de penser ces apprentissages sur des temps longs.

Malgré tout, les élèves progressent au fil des situations, et parviennent peu à peu à construire des textes valides, en témoignent les évaluations de fin de séquence. Voici un exemple de texte produit par des élèves. L'amorce donnée est le rectangle et les élèves disposent d'un compas (figure 12).

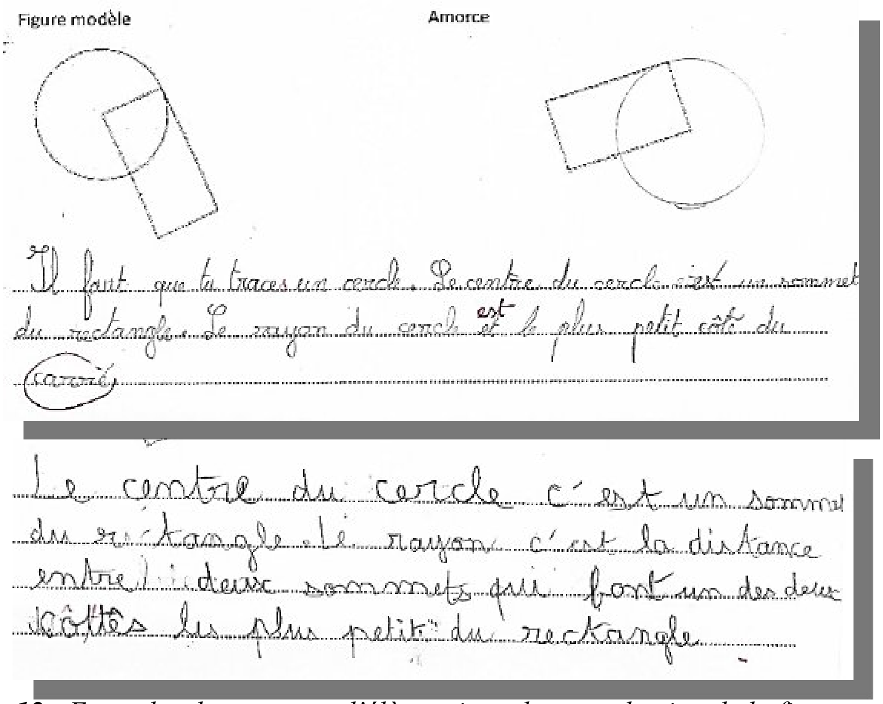

***Figure 12** : Exemples de messages d'élèves visant la reproduction de la figure modèle à partir de l'amorce « rectangle ».*

4. Retour à nos questions, bilan et perspectives

L'enseignement de la géométrie de l'école vise l'acquisition par les élèves d'un corpus de connaissances et de savoirs en appui sur le traitement instrumenté de figures matérielles. En reproduisant, construisant des figures aux instruments, les élèves enrichissent leurs analyses de figures, simples ou composées, et mobilisent objets, propriétés et relations géométriques. Un travail de verbalisation puis d'institutionnalisation permet ensuite une identification et une formulation des connaissances puis des savoirs à retenir. La dimension instrumentale des pratiques géométriques à l'école est donc primordiale. Nous insistons sur l'idée que, dans une visée d'enseignement, le travail autour des instruments poursuit avant tout une finalité conceptuelle (plus que des enjeux de tracés précis). Dans cet esprit, la séquence que nous présentons dans cet article débute par des situations de reproduction avec jeu sur les instruments, dont le but est de faire émerger la distinction entre disque et cercle et différentes conceptions du cercle, en lien avec différents usages de gabarits et du compas. Ces situations sont celles préconisées par Bulf et Celi (2016).

Les questions que nous proposions d'explorer dans cet article portent sur la manière dont on peut prolonger ces premières séances par un travail davantage tourné vers la dimension langagière de l'activité géométrique. Selon les programmes, les élèves doivent non seulement être capables de reproduire, construire des figures, mais également de les décrire. Au-delà d'enjeux relevant de la maîtrise d'un vocabulaire, la désignation des objets géométriques met en jeu une capacité à caractériser ces objets et peut/doit être le lieu d'un engagement progressif des élèves dans des raisonnements géométriques et démarches de preuve. Ce travail participe donc de processus de conceptualisation et s'insère dans une visée plus large de construction d'un langage géométrique portant l'analyse de figure. Ces réflexions nous ont amenés à mesurer à la fois la richesse et les difficultés que représente l'entrée dans ces pratiques langagières, spécifiques. Ces difficultés ne nous découragent toutefois pas. Au contraire, elles sont pour nous le signe de l'importance des enjeux d'apprentissage langagiers en géométrie à l'école et de la nécessité de prendre en charge cet enseignement, en le pensant sur du long terme, à travers une progressivité des apprentissages de la maternelle au collège. Nous rejoignons Laborde (1984), citée au début de ce texte, sur l'idée que si l'on ne confronte jamais les élèves à la nécessité de formuler, dans des situations *« où la qualité de la formulation n'est pas seulement mise en jugement de l'enseignant mais conditionne la réussite de l'action de leur activité »*, on peut facilement imaginer le saut colossal que l'on leur laisse à franchir lorsque l'activité géométrique devient principalement langagière. Ce travail est certes exigeant, mais incontournable à nos yeux, et en priorité pour les élèves les plus en difficultés. Faire de ces connaissances langagières un des enjeux de l'enseignement de la géométrie à l'école, avec la construction conceptuelle d'objets, de propriétés et de relations en appui sur l'usage géométrique des instruments, constitue pour nous par ailleurs une clé pour penser des possibilités de continuités entre géométrie physique de l'école et géométrie théorique du collège. Comment donc accompagner les élèves, progressivement, dans la construction de ce langage géométrique ?

Nous proposons d'insérer les situations de reproduction de figures dans des progressions plus globales imbriquant situations d'action, de formulation et de validation. L'étude de ces situations, de leurs adaptations possibles aux connaissances visées et de leurs différentes variations nous a permis de dessiner les potentialités didactiques de ces situations. Après quelques années d'expérimentation en classe, nous présentons dans cet article un exemple de progression articulant situations d'action, de formulation verbale orale ou écrite et de validation autour des notions de disque et cercle.

Ainsi, des situations permettant de travailler les aspects langagiers de l'activité géométrique sont à notre disposition. Nous en avons présenté et détaillé quelques-unes dans cet article. D'autres jeux autour de ces situations sont possibles. Nous n'avons, par exemple, pas exploité dans cette séquence les potentialités des situations de formulation graphique. Ces situations figurent dans bon nombre de nos progressions de fin de maternelle et de début de cycle 2 par exemple. Les élèves doivent dessiner un assemblage de formes (composés de gabarits en plastique) choisi afin de permettre à un camarade de le reproduire. Notre objectif est alors d'apprendre aux élèves à caractériser des formes par leur contour. Nous travaillons également ces situations aux cycles 2 et 3, en introduisant le dessin à main levée et les figures codées comme un moyen de garder en mémoire et de communiquer des propriétés caractéristiques de figures. Ces situations participent à l'évolution du statut du dessin pour les élèves. Si nous revenons aux situations de formulation verbales écrites, la formulation de programmes de construction peut également être étayée par l'utilisation de logiciels de géométrie dynamique, utilisant un langage géométrique. Ce travail est également le lieu de l'introduction des notations en cycle 3, qui apparaissent alors comme un outil nécessaire pour désigner sans ambiguïté des sous-unités de figures.

Enfin, nous avons voulu mettre en évidence que les phases de validation de situations de formulation et les situations de validation peuvent être le lieu d'un engagement des élèves dans des raisonnements géométriques. Cette réflexion est à poursuivre et suscite actuellement dans notre groupe un vif intérêt. Nous faisons l'hypothèse que la validation de textes et l'exploration de questions d'équivalence entre textes pourraient être le lieu d'un engagement progressif des élèves dans des démarches de preuve en appui sur la reproduction instrumentée de figure. Cette idée nous semble livrer des pistes pour penser un possible continuum entre géométrie physique de l'école et géométrie théorique du collège.

Ainsi, loin de nous l'idée de proposer des séquences et situations « clé en main », qui feraient abstraction du contexte d'enseignement, des programmations au sein de chaque école et généraliseraient sans doute hâtivement des expérimentations locales, fruits d'un travail collectif de plusieurs années. Les situations que nous présentons sont par ailleurs perfectibles et notre réflexion en constante évolution. Nous souhaitions dans cet article mettre en lumière des enjeux de l'enseignement de la géométrie à l'école qui nous semblent peu travaillés, mettre au débat des éléments de notre réflexion, partager le plaisir trouvé à voir les élèves s'atteler avec enthousiasme à des activités géométriques exigeantes et progresser, et peut-être contribuer à donner à quelques enseignants l'envie d'essayer.

Références bibliographiques

Artigue, M. & Robinet, J. (1982). Conceptions du cercle chez des enfants de l'école élémentaire. *Recherche en didactique des mathématiques, 3*(1), 5-64.

Berthelot, R., & Salin, M.-H. (1992). *L'enseignement de l'espace et de la géométrie dans la scolarité obligatoire*. Thèse de l'Université Bordeaux I.

Bessot, A. (2011). L'ingénierie didactique au cœur de la recherche en théorie des situations didactiques. In C. Margolinas *et al.* (éds.). *En amont et en aval des ingénieries didactique, Actes de la XV[e] école d'été de didactique des mathématiques*. Grenoble : La Pensée Sauvage (pp. 29-56).

Bosch, M. & Perrin-Glorian, M.-J. (2013). Le langage dans les situations et les institutions. In A. Bronner *et al.* (éds.). *Questions vives en didactique des mathématiques : problèmes de la profession d'enseignant, rôle du langage, Actes de la XVI[e] école d'été de didactique des mathématiques*. Grenoble : La Pensée Sauvage (pp. 267-302).

Brousseau, G. (1997). *La théorie des situations didactiques*. Cours donné à l'occasion de l'attribution à celui-ci du titre de docteur Honoris Causa de l'Université de Montréal. http://guy-brousseau.com/1694/la-theorie-des-situations-didactiques-le-cours-de-montreal-1997/

Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. Grenoble : La Pensée Sauvage.

Brousseau, G. (2000). *Les propriétés didactiques de la géométrie élémentaire. L'étude de l'espace et de la géométrie. Les propriétés didactiques de la géométrie élémentaire ; l'étude de l'espace et de la géométrie*. Avril 2000, Rethymnon, Grèce (pp. 67-83).

Bulf, C., Mathé, A.-C. & Mithalal, J. (2014). Apprendre en géométrie, entre adaptation et acculturation. Langage et activité géométrique. *Spirale - Revue de Recherches en Éducation, 54*, 29-48.

Bulf, C., Mathé, A.C. & Mithalal, J. (2015). Langage et construction de connaissances dans une situation de résolution de problèmes en géométrie. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 35*(1), 7-36.

Bulf, C. & Celi, V. (2016). Essai d'une progression sur le cercle pour l'école primaire - une articulation clé : gabarit-compas. *Grand N, 97*, 21-58.

Bulf, C. & Mathé, A.C. (2018). Agir-parler-penser en géométrie - un point de vue sémiotique sur l'enseignement et l'apprentissage de la géométrie à l'école primaire. *Actes du XXXXIV[e]* *colloque COPIRELEM Epinal 2017*.

Duval, R. (1994). Les différents fonctionnements d'une figure dans une démarche géométrique. *Repères IREM, 17*, 121-138.

Duval, R. (2005). Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie : développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 10*, 5-53.

Duval, R. & Godin, M. (2005). Les changements de regard nécessaires sur les figures. *Grand N, 76*, 7-27.

Duval, R. (2014). Ruptures et oublis entre manipuler, voir, dire. Histoire d'une séquence d'activités. In C. F. Brandt & M. T. Moretti (éds.). *As Contribuiçoes da Teoria das Representaçoes Sémioticas Para o Ensino e Perquerisa na Educaçao Matematica* (pp. 227-251).

Houdement, C. & Kuzniak, A. (2006). Paradigmes géométriques et enseignement de la géométrie. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 11*, 175-193.

Keskessa, B., Perrin-Glorian, M.-J. & Delplace, J.-R. (2007). Géométrie plane et figures au cycle 3. Une démarche pour élaborer des situations visant à favoriser une mobilité du regard sur des figures de géométrie. *Grand N, 79*, 33-60.

Laborde, C. (1982). *Langue naturelle et écriture symbolique, deux codes en interaction dans l'enseignement mathématique*. Thèse de l'Université scientifique et médiale, Institut national polytechnique de Grenoble.

Laborde, C. & Capponi, B. (1994). Cabri-géomètre constituant d'un milieu pour l'apprentissage de la notion de figure géométrique. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 14*(1.2), 165-210.

Mangiante-Orsola, C. & Perrin-Glorian, M.-J. (2014). Géométrie en primaire : des repères pour une progression et pour la formation des Maîtres. *Grand N, 94*, 47-83.

Margolinas, C. (2003). Un point de vue didactique sur la place du langagier dans les pratiques d'enseignement des mathématiques. In *Actes du colloque pluridisciplinaire « construction des connaissances et langage dans les disciplines d'enseignement »*. Bordeaux, France.

Mathé A.-C., Barrier, T. & Perrin-Glorian M.-J. (2020). *Enseigner la géométrie élémentaire, enjeux, ruptures et continuités*. Collection Les Sciences de l'éducation aujourd'hui, éditions Academia - L'Harmattan.

Mathé, A.-C. & Mithalal, J. (2019). L'usage des dessins et le rôle du langage en géométrie : quelques enjeux pour l'enseignement. In S. Coppé, E. Roditi, V. Celi, F. Chellougui, F. Tempier, C. Allard, C. Corriveau, M. Haspekian, P. Masselot, S. Rousse, H. Sabra & M. Kiwan-Zacka (éds.). *Nouvelles perspectives en didactique : géométrie, évaluation des apprentissages mathématiques, Actes du XIX*[e] *école d'été de didactique des mathématiques*. Grenoble : La pensée sauvage (pp. 47-86).

Mathé, A.-C., & Barrier, T. (dir.). (2014). Langage, apprentissage et enseignement des mathématiques. *Spirale - Revue de Recherches en Éducation, numéro thématique 54*.

Offre, B., Perrin-Glorian, M.-J. & Verbaere, O. (2006). Usage des instruments et des propriétés géométriques en fin de CM2. *Grand N, 77*, 7-34.

Perrin-Glorian, M.-J., Mathé, A.-C. & Leclercq, R. (2013). Comment penser la continuité de l'enseignement de la géométrie de 6 à 15 ans ? Le jeu sur les supports et les instruments. *Repères-IREM, 90*, 5-41.

Petitfour, E. (2015). *Enseignement de la géométrie à des élèves en difficulté d'apprentissage : étude du processus d'accès à la géométrie d'élèves dyspraxiques visuo-spatiaux lors de la transition CM2-6ème*. Thèse de l'Université Paris Diderot.

Petitfour, E. (2017). Enseignement de la géométrie en fin de cycle 3. Proposition d'un dispositif en dyade. *Petit x, 103*, 5-31.

MEN (2020). *Programme du cycle 2. Bulletin Officiel n°31 du 30 juillet 2020*.