REPRÉSENTATIONS GRAPHIQUES ET RÉSOLUTION DE PROBLÈMES : LE CAS DE SINGAPOUR

Stéphane CLIVAZ[1]

UER MS, Haute École Pédagogique du Canton de Vaud, Lausanne, Suisse

Jaguthsing DINDYAL[2]

Mathematics & Mathematics Education Academic Group
National Institute of Education, Singapore

Résumé. Cet article présente et discute la méthode des modèles, ou méthode en barres, et son enseignement à Singapour pour résoudre des problèmes numériques verbaux. C'est à partir d'un tel problème que cette méthode est présentée et mise en parallèle avec la méthode algébrique. La manière dont les élèves de Singapour sont progressivement initiés à cette méthode est ensuite présentée et illustrée par de nombreux problèmes. Les apports et les limites de la méthode des modèles sont ensuite discutés d'un point de vue singapourien et d'un point de vue francophone.

Mots-clés. Résolution de problèmes, Singapour, méthode des modèles, méthode en barres.

Introduction

Si le système éducatif de Singapour est placé sous le feu des projecteurs (voir par exemple Dindyal & Clivaz, 2018 ; Jamet, 2019), *La méthode de Singapour* (éditée par la librairie des Écoles depuis 2009), en particulier, suscite un certain nombre de débats et d'analyses au sein de la communauté de didactique des mathématiques en monde francophone (voir par exemple Grapin & Mounier, 2018 ; Petitfour & Winder, 2018). Un des éléments saillants de cette *méthode* est une heuristique graphique de résolution de problèmes, la *méthode des modèles*, ou *méthode en barres*. Nous avions illustré rapidement cette méthode, rencontrée lors d'un échange entre futurs enseignant·e·s primaires suisses et singapouriens en 2014, dans un article consacré au curriculum de mathématiques à Singapour (Dindyal & Clivaz, 2018). Notre intérêt pour les questions liées aux représentations graphiques lors de la résolution de problèmes nous conduit aujourd'hui à développer la présentation critique de cette méthode des modèles telle qu'enseignée à Singapour.

C'est à partir d'un problème numérique verbal que nous illustrerons la manière prédominante de résolution de ce type de problème dans les écoles singapouriennes, en la mettant en parallèle avec la stratégie prédominante en monde francophone. Nous examinerons alors comment les élèves de Singapour sont initiés à la résolution de problèmes verbaux au cours de leur scolarité et terminerons par examiner les apports et les limites de la méthode des modèles, en croisant le point de vue singapourien et le point de vue francophone des deux auteurs.

[1] stephane.clivaz@hepl.ch

[2] jaguthsing.dindyal@nie.edu.sg

1. Louis et Clark

Dans notre texte précédent (Dindyal & Clivaz, 2018), nous avons illustré certaines tâches proposées aux élèves singapouriens par le problème suivant, observé dans une classe de grade 4[3] de Singapour :

> *Louis et Clark ont la même somme d'argent. Louis dépense 1 200 $ et Clark dépense 900 $. Clark a maintenant trois fois plus d'argent que Louis. Combien d'argent reste-t-il maintenant à Louis ?*[4]

Avant de poursuivre la lecture de cet article, nous encourageons les lectrices et les lecteurs à résoudre ce problème par la méthode de leur choix, tout en essayant de garder en mémoire la manière dont ils ont procédé.

Les méthodes observées dans divers contextes, tant chez des élèves que chez des étudiants ou des enseignants, à Singapour ou en Suisse romande, relèvent principalement de trois types : des méthodes utilisant un schéma en barres, des méthodes algébriques et des méthodes par essais-erreurs. Ces trois méthodes sont détaillées en annexe. Les élèves singapouriens observés ont déployé plusieurs méthodes, la plupart utilisant des modèles en barres, dont la figure 1 donne une illustration :

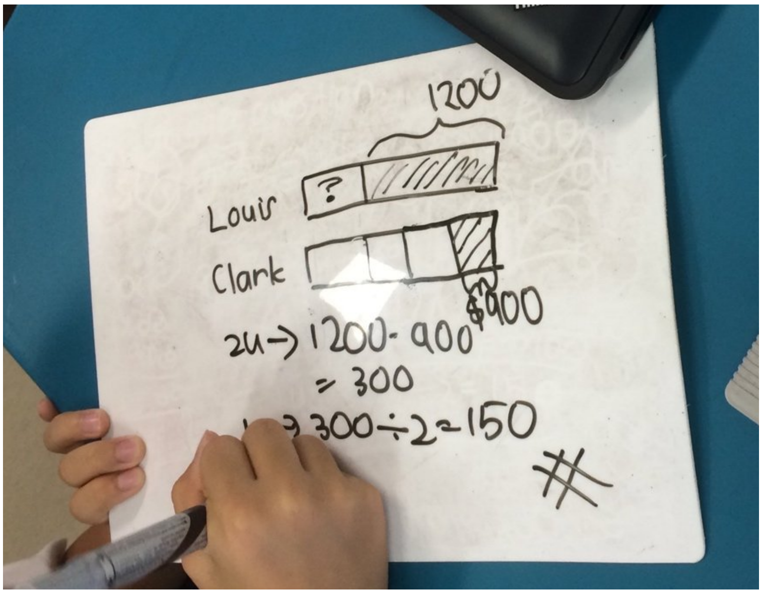


Figure 1 *: Résolution du problème sur une ardoise par un élève singapourien de grade 4.*

Chacune de ces trois méthodes permet de représenter les éléments clés de l'énoncé. Nous nous attarderons plus en détail sur la représentation en barres, commune à Singapour et sur la représentation algébrique, probablement la plus habituelle pour les lectrices et les lecteurs francophones. Le tableau 1 permet de mettre en parallèle la manière dont chaque méthode traduit chaque élément clé. Ceux-ci sont présentés dans l'ordre de l'énoncé.

---

[3] France : CM1, Suisse : 6H.

[4] L'original en anglais est le suivant : *« Louis and Clark have an equal amount of money. After Louis spent $1 200 and Clark spent $900, Clark had 3 times as much money as Louis. How much money did Louis have left? »*.
Nous proposons ici une nouvelle adaptation en français, différente de celle de 2018 qui comportait une erreur dans la question et une concordance des temps difficile à appréhender pour les élèves.

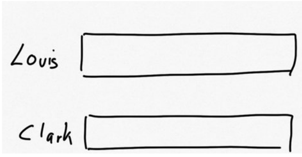
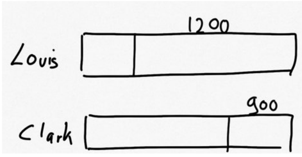
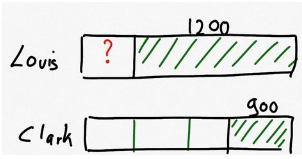
Énoncé en langage courant		Représentation schématique		Représentation algébrique
Louis et Clark ont chacun la même somme d'argent.	A.		4.	$x+1\,200=y+900$
Louis dépense 1 200 *$* et Clark dépense 900 *$*.	B.		3.	$x+1\,200$ $y+900$
Clark a maintenant 3 fois plus d'argent que Louis.	C.		2.	$y=3x$
Combien d'argent reste-t-il maintenant à Louis ?	D.	Je cherche la valeur représentée par le ?	1.	Argent restant à Louis : x

Tableau 1 *: Correspondance entre l'énoncé du problème, une représentation avec un schéma en barres (étapes A-B-C-D) et une représentation algébrique (étapes 1-2-3-4).*

Il est intéressant de constater que les deux représentations permettent de traduire l'énoncé. De manière plus précise, chacune des représentations permet de représenter les relations évoquées dans l'énoncé : relation entre la somme précédemment possédée par Louis et celle possédée par Clark, les relations entre la somme initiale de chacun et la somme actuellement possédée et la relation entre la somme actuelle que possède Louis et celle que possède Clark. Plus encore, elle permet de représenter ces quatre relations en une seule écriture simultanée :

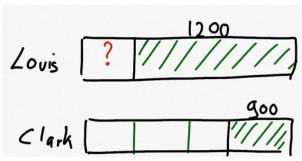
	C.		4. et 2.	$\begin{cases} x+1200=y+900 \\ y=3x \end{cases}$

Tableau 2 *: Représentation des relations entre les quantités dans la représentation schématique en barres et dans la représentation algébrique.*

Dans les deux représentations enfin, le projet de résolution apparaît, même si ce n'est pas au même moment : trouver la valeur d'un rectangle (point d'interrogation rouge dans le tableau 2) tel que la représentation schématique soit cohérente (méthode en barre) ou trouver une valeur de x telle que les deux égalités soient vérifiées (méthode algébrique). Si les opérations effectuées dans les deux cas sont similaires, comme d'ailleurs dans le cas des méthodes par essais-erreurs, ces opérations ne sont pas effectuées dans le même ordre (voir une mise en parallèle des trois types de méthodes en annexe).

La plupart des élèves singapouriens de grade 4, observés lors d'un échange entre futur·e·s enseignant·e·s primaires suisses et singapourien·ne·s en 2014, semblaient résoudre ce problème sans grande difficulté. Cette apparente facilité avait beaucoup impressionné les visiteurs helvétiques. Depuis, le premier auteur de cet article a proposé ce problème à des enseignant·e·s primaires suisses romand·e·s expérimenté·e·s et a constaté qu'ils (elles) ne parvenaient pas à résoudre le problème, et que la plupart ne parvenaient pas à utiliser de représentation schématique ni de représentation algébrique, alors même qu'ils affirmaient que « il faudrait faire un dessin » ou que « c'est de l'algèbre ».

Pour ces enseignant·e·s, en l'absence de ces deux modélisations, la principale difficulté était de prendre en compte simultanément les quatre relations représentées dans la figure 2.

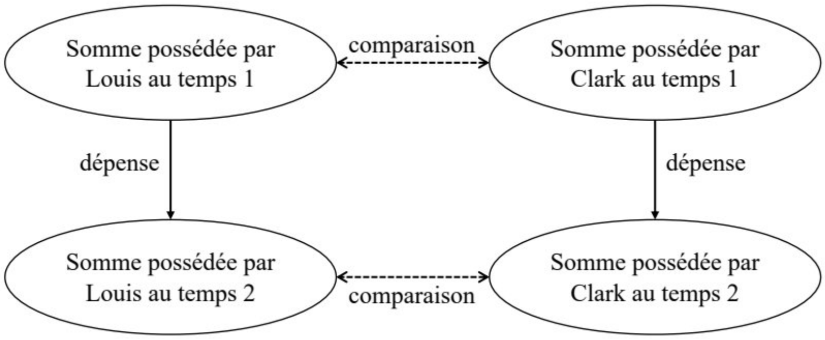


Figure 2 *: Relation entre les quatre quantités en jeu dans le problème.*

Prendre en compte ces quatre relations en même temps est nécessaire, mais est quasiment impossible à cause de cette simultanéité. Une manière de faire est de procéder par essais-erreurs sur une quantité arbitraire pour successivement faire en sorte que chacune de ces relations soit vérifiée (voir annexe). Toutefois, l'avantage des modélisations graphiques ou algébriques est qu'on peut tenir compte successivement de chaque relation en la « superposant » sur les relations représentées précédemment. C'est ce que fait la méthode algébrique grâce au système d'équations et à sa résolution qui permet de garder une trace de l'ensemble des étapes. C'est aussi ce que fait la méthode en barres en alignant les rectangles ou en les superposant (voir tableau 2).

Si les deux modes de représentation permettent de superposer la prise en compte successive des relations entre les quantités afin de parvenir à une prise en compte simultanée, ils diffèrent notamment par leur chronologie. La représentation algébrique part le plus souvent de la question, située dans ce problème, comme souvent, à la fin du texte, et aboutit à l'écriture du système avec la traduction algébrique de la phrase initiale. La représentation en barres, elle, part ici de la situation initiale et suit l'ordre chronologique de l'histoire.

2. La méthode de Singapour... à Singapour

Le problème Louis et Clark décrit ci-dessus est ce que l'on appelle souvent un problème verbal[5]. Ce type de problème est appelé en anglais *word problem*, *story problem* ou *verbal problem*. Ils peuvent être décrits comme des

> *descriptions verbales de situations problématiques, généralement présentées dans un contexte scolaire, dans lesquelles une ou plusieurs questions sont soulevées, dont la réponse peut être obtenue par l'application d'opérations mathématiques aux données numériques disponibles dans*

[5] On utilise parfois l'expression « problèmes arithmétiques verbaux ». Toutefois, si la résolution des problèmes peut être arithmétique, elle peut aussi être algébrique. Nous avons donc choisi de parler uniquement de « problème verbaux » et de rester proche de l'anglais *word problems*. Il serait par ailleurs intéressant de classifier ces problèmes, comme l'ont fait par exemple Bednarz et Janvier (1996), et d'analyser les modalités de résolution par des diagrammes en barres en fonction de ces classifications. Cette analyse dépasse toutefois le cadre de cet article.

l'énoncé du problème (Verschaffel et al., 2000, p. xi).

2.1. Louis et Clark à Singapour

Pour un·e élève du secondaire, le problème de Louis et Clark requiert la résolution d'un système de deux équations à deux inconnues $x+1\,200=y+900$ et $y=3x$, où x est la somme d'argent restante de Louis et y la somme d'argent restante de Clark. Cependant, la manipulation algébrique requise pour résoudre de telles équations est hors de portée d'élèves de grade 4. L'alternative pour les élèves est donc d'utiliser une heuristique de résolution de problèmes qui contourne la manipulation symbolique impliquant l'utilisation d'inconnues. Une approche que les élèves apprennent très tôt à Singapour est d'utiliser la méthode dite des modèles, *« une approche visuelle et concrète pour résoudre des problèmes verbaux arithmétiques et algébriques [...] »* (Ng & Lee, 2009, p. 283). Une solution est illustrée dans la figure 1 ci-dessus. La méthode des modèles est un outil puissant qui peut être utilisé pour résoudre des problèmes verbaux impliquant des nombres entiers, des fractions, des rapports et des pourcentages (Kho, 1987).

La méthode des modèles, qui s'appuie sur les connaissances des élèves en matière de relations partie-tout travaillées dès le grade 1[6], implique la représentation des informations textuelles d'un problème donné sous une forme graphique (picturale), généralement à l'aide de barres. Ces barres ne sont pas dessinées à l'échelle et peuvent être facilement tracées à main levée, cependant, elles encapsulent les informations structurelles du problème, avec un aperçu de ce qui est inconnu et de la façon dont on peut le trouver. En conséquence, en tant qu'heuristique, la méthode des modèles guide même les élèves vers la solution. Ainsi, la méthode des modèles permet une interaction entre les informations textuelles du problème, la représentation graphique (ou picturale) à l'aide de barres ou de représentations figuratives des objets concernés et les informations symboliques généralement sous forme de symboles numériques, mais pouvant également être des symboles littéraux. En nous référant à la solution du problème de Louis et Clark proposée par l'élève dans la figure 1, nous pouvons noter ce qui suit :

- Louis et Clark avaient initialement la même somme d'argent. Cette information cruciale est représentée graphiquement par deux rectangles de même longueur. Un pour Louis et un pour Clark. Notons que la largeur des rectangles n'a aucune importance. L'élève a dessiné les rectangles à main levée sur son ardoise blanche.
- Louis a dépensé 1 200 *$* et Clark 900 *$*. Clark a trois fois plus d'argent que Louis. Ces informations sont intégrées dans les barres en indiquant une partie pour Louis dans le rectangle représentant son argent et trois parties identiques dans le rectangle représentant l'argent de Clark. Les parties restantes dans les rectangles (indiquées en hachuré) représentent les montants qu'ils ont dépensés, respectivement. On peut noter que la partie hachurée pour les 1 200 *$* dans le rectangle de Louis est plus longue que la partie hachurée pour les 900 *$* dans le rectangle de Clark, mais ces parties hachurées ne sont pas dessinées dans des proportions exactes. Même les parties non ombrées ne sont pas identiques, mais donnent une indication qu'elles sont égales.
- Les rectangles contiennent quelques informations supplémentaires favorisant ce que Duval (1995) appelle l'appréhension discursive. Ces informations discursives comprennent les nombres, les parenthèses et les informations écrites sur le montant dépensé par chaque personne et le point d'interrogation (?) indiquant ce qui est à trouver.
- L'élève en déduit que, puisque Clark se retrouve avec trois fois plus d'argent que Louis,

[6] France : CP, Suisse : 3H.

les deux unités supplémentaires du rectangle de Clark sont la différence entre les deux montants dépensés (c'est-à-dire $1\,200\,\$ - 900\,\$ = 300\,\$$). Cette information est écrite sous la forme $2u \rightarrow 1\,200 - 900 = 300$. L'élève déduit alors qu'une unité est de 150 ($300 \div 2$). Nous notons que l'élève utilise « u » comme unité et résout l'équation pour *u*, bien qu'il utilise un symbole de flèche (parce que les enseignant·e·s à l'école ont utilisé cette approche, car les élèves ne sont pas censés résoudre des équations algébriques). L'élève utilise également le raisonnement proportionnel, essentiel en mathématiques.

La figure 1 illustre comment un problème arithmétique verbal qui, autrement, nécessiterait l'utilisation de l'algèbre, a été résolu de manière relativement simple grâce à l'utilisation de la méthode des modèles. L'aspect le plus important est la manière dont les informations structurelles sont affichées ainsi que l'interaction entre les informations textuelles, la représentation graphique et la représentation symbolique. Sans aucune connaissance avancée de l'algèbre, l'élève est capable d'écrire une équation symbolique et de déterminer la valeur de l'inconnue. En tant que telle, la méthode des modèles est de nature pré-algébrique et peut aider les élèves à progresser en algèbre à un stade ultérieur.

2.2. Comment les élèves de Singapour apprennent-ils à utiliser la méthode des modèles ?

Le programme de mathématiques au niveau primaire à Singapour ne met pas explicitement l'accent sur la méthode des modèles. Néanmoins, cette méthode est présente dans les manuels et il est attendu des élèves du primaire qu'ils connaissent la méthode et l'utilisent pour résoudre des problèmes. La méthode des modèles a été introduite au niveau du grade 4 en 1983 (Ministry of Education Singapore, 2009). Elle trouve son origine dans la représentation des énoncés de nombres à l'aide d'images. Par exemple, pour illustrer $3+4=7$, le manuel montrera un ensemble avec trois pommes et un autre avec quatre pommes et l'ensemble combiné avec sept pommes. Dans cet énoncé, l'information mathématique est que les deux parties, dont l'une est trois et l'autre quatre, lorsqu'elles sont additionnées, forment le tout qui est sept (relation partie-tout).

Au Grade 2[7], les élèves se dirigent progressivement vers une plus grande abstraction de la relation partie-tout. Par exemple, dans l'un des principaux manuels (Collars *et al.*, 2014), l'approche pour trouver le total de 10 timbres de Singapour et de 20 timbres d'Indonésie est la suivante :

1. une photo montre 10 timbres de Singapour alignés en deux rangées de cinq timbres, suivis de 20 timbres d'Indonésie alignés en deux rangées de 10 ;
2. le deuxième diagramme montre un long rectangle avec dix parties égales pour les timbres de Singapour et 20 autres parties égales pour les timbres d'Indonésie ;
3. le troisième diagramme montre un autre rectangle, mais divisé seulement en deux parties, l'une indiquant 10 pour les timbres de Singapour et l'autre 20 (en couleurs différentes) pour les timbres d'Indonésie.

[7] France : CE1, Suisse : 4H.

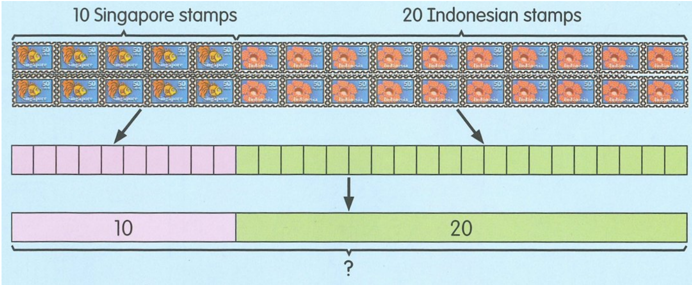


Figure 3 *: Illustration tirée de Shaping Maths 2B (Collars et al., 2014, p. 24).*

Dans ce problème, nous constatons que les deux parties, 10 timbres de Singapour et 20 timbres d'Indonésie, sont constituées à partir d'un ensemble contenant 30 timbres. En classe, les enseignant·e·s peuvent utiliser des timbres réels et se référer à l'image du dessus, dont ils font ensuite un résumé pour dessiner le dernier rectangle. Cette procédure illustre également l'approche Concrète-Pictoriale-Abstraite ou CPA pour enseigner les mathématiques à Singapour. Cette approche est conforme à l'idée de Bruner (1966) d'une approche énactive (manipulation) - iconique (représentation imagée) - symbolique (écriture en langage mathématiques) de l'abstraction progressive (Dindyal & Clivaz, 2018). Des exemples similaires sont ensuite utilisés pour trouver l'une des parties, étant donné le tout et une autre partie du tout. Il est important de noter ici que la plupart des élèves peuvent facilement résoudre ce problème simple sans avoir à dessiner un modèle. Cependant, le fait de dessiner le modèle aide généralement les élèves à avancer vers la solution de problèmes plus complexes avec plus de confiance.

Modèle partie-tout (addition et soustraction)

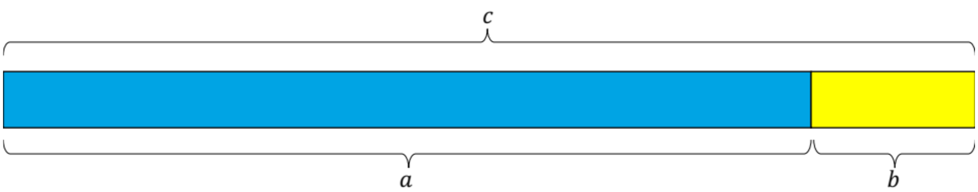


Figure 4 *: Modèle partie-tout.*

Dans ce modèle[8], les élèves peuvent résoudre des équations en x du type $a+b=x$, $a+x=c$ ou $x+b=c$.

Par exemple, le premier des problèmes ci-dessous est du type $a+b=x$ et le second du type $a+x=c$.

• *Il y a 12 garçons et 27 filles dans une classe. Combien d'enfants y a-t-il dans la classe ?*

• *Sue avait 9 perles. Marie lui a donné des perles. Sue a maintenant 26 perles. Combien de perles Marie lui a-t-elle donné ?*

[8] Ce modèle, en particulier pour les problèmes additifs, est proche de schémas présents dans d'autres partie du monde, comme en Chine (Sun & Bartolini Bussi, 2018, cité par Houdement, 2017, p. 78) ou des schémas *« range-tout »* (Polotskaia, 2009, cité par Auquière *et al.*, 2018).

Modèle de comparaison (addition et soustraction)

Figure 5 *: Modèle de comparaison additive.*

Ce modèle est utilisé pour comparer deux quantités qui diffèrent d'une certaine manière. Les élèves peuvent résoudre des équations du type $2a+b=x$, $2x+b=c$ ou $2a+x=c$. Le problème donné ci-dessous est du type 2.

- *Raju a 45 billes. Il a 13 billes vertes de plus que de rouges. Combien de billes rouges a-t-il ?*

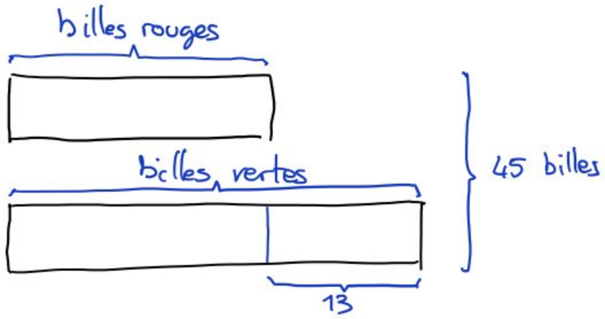


Figure 6 *: Modèle de comparaison additive pour le problème de Raju.*

Modèle de comparaison (multiplication et division)

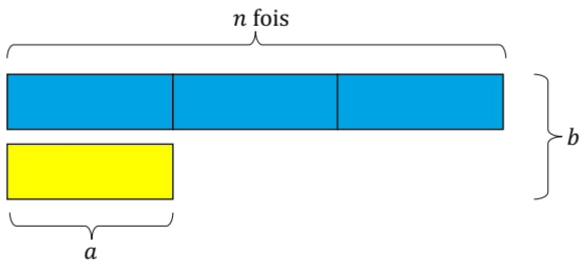


Figure 7 *: Modèle de comparaison multiplicative.*

Dans ce modèle, une quantité est donnée comme un multiple de l'autre. Par exemple, dans le modèle ci-dessus, le rectangle bleu est 3 fois plus grand que le rectangle jaune. Cela permet de résoudre des équations du type $n\times a=x$, $a+n\times a=x$, $n\times x=b$, $x+n\times x=b$, $x-n\times x=b$.

- *Le bâton A mesure 8 cm de long. Le bâton B est 3 fois plus long que le bâton A. Quelle est la longueur du bâton B ?*

Ce problème est du type $n\times a=x$. Même si l'utilisation des modèles en barres semble inutile, le fait de l'utiliser dans ce cas permet aux élèves de se familiariser avec ce modèle de comparaison multiplicative pour une utilisation dans des cas plus complexes.

En plus des modèles ci-dessus, le livre du Ministère de l'Éducation de Singapour (2009) énumère des modèles partie-tout et des modèles de comparaison pour trois domaines de contenu importants : les fractions, les rapports et les pourcentages. Quelques exemples sont donnés ci-dessous à titre d'illustration dans le tableau 3.

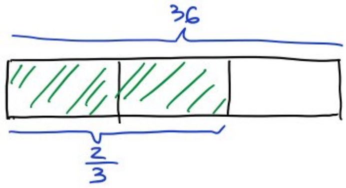
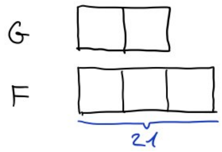
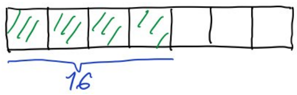
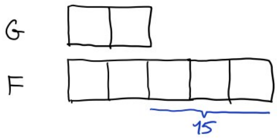
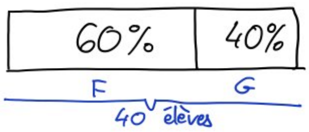
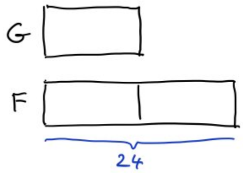
		Partie-tout	Comparaison
Fraction	Problème	Dans une classe, il y a 36 élèves. Deux tiers des élèves sont des filles. Combien de filles y a-t-il dans la classe ?	Dans cette classe, le nombre de garçons vaut les deux tiers du nombre de filles. S'il y a 21 filles, combien de garçons y a-t-il dans la classe ?
	Modèle		
Rapport	Problème	Le rapport entre le nombre de garçons et le nombre de filles dans une classe est de 4:3. S'il y a 16 garçons dans la classe, combien de filles y a-t-il ?	Le rapport entre le nombre de garçons et le nombre de filles dans une classe est de 2:5. S'il y a 15 filles de plus que de garçons, combien de garçons y a-t-il dans la classe ?
	Modèle	 Ce problème peut également être résolu en utilisant un modèle de comparaison.	
Pourcentage	Problème	Il y a 40 élèves dans une classe. 60 % d'entre eux sont des filles. Combien y a-t-il de garçons ?	Il y a 50 % de garçons de moins que de filles dans une classe. S'il y a 24 filles, combien de garçons y a-t-il dans la classe ?
	Modèle		

***Tableau 3** : Modèles de comparaison.*

Ainsi, à partir du grade 2, les élèves utilisent progressivement des modèles partie-tout, des modèles de comparaison additive ou multiplicative, ainsi que des modèles partie-tout et de comparaison pour des domaines spécifiques tels que les fractions, les rapports et les pourcentages. Comme mentionné précédemment, la méthode des modèles fournit une représentation visuelle pour l'élève et, si elle est correctement dessinée, elle structure même le processus de résolution. Les élèves sont alors capables d'utiliser cette méthode pour des problèmes encore plus difficiles. De plus, progressivement dès ce grade 2, le dessin d'un modèle comme heuristique pour la résolution d'un problème devient une habitude pour les élèves.

Quelques indications pour résoudre des problèmes encore plus difficiles

Problèmes à différences constantes

Ce type apparaît principalement dans des problèmes liés à l'âge.

> *• M. Tan a 46 ans et son fils a 18 ans. Quand (il y a combien d'années) M. Tan avait-il exactement trois fois l'âge de son fils ?*

Bien qu'une méthode par essais-erreurs puisse être utilisée, les élèves utiliseront généralement la méthode des modèles. Nous invitons les lectrices et lecteurs à dessiner le modèle et à résoudre le problème. Si nécessaire, ils peuvent utiliser le raisonnement suivant. Actuellement, M. Tan a 46 ans et son fils a 18 ans. Leur différence d'âge est de 28 ans, ce qui ne change pas au fil des ans. Lorsque M. Tan a eu exactement trois fois l'âge de son fils, cette différence d'âge équivalait à deux unités de plus que l'âge du fils, l'unité étant l'âge du fils. Chaque unité vaut donc 14 ans. L'âge de M. Tan était donc de 42 ans (3×14). Ainsi, il y a 4 ans ($46-42$), M. Tan avait trois fois l'âge de son fils.

La même logique peut être utilisée dans ce problème :

> *• David avait 19,80 $ et son frère Jonathan 3 $. Leur mère leur a donné à tous deux une somme égale, après quoi le rapport entre l'argent de David et celui de Jonathan était de 9:2. Combien d'argent leur mère a-t-elle donné à chacun d'eux ?*

Situation avant-après

Ce type de problème énonce généralement une situation avant que quelque chose n'arrive et ensuite après que cette chose ne soit arrivée, comme illustré dans le problème ci-dessous :

> *• Linda et Paul se sont partagé de l'argent dans un rapport de 3:2. Plus tard, Paul a donné la moitié de son argent à Linda. Linda avait alors 18 $ de plus que Paul. Combien Linda avait-elle au début ?*

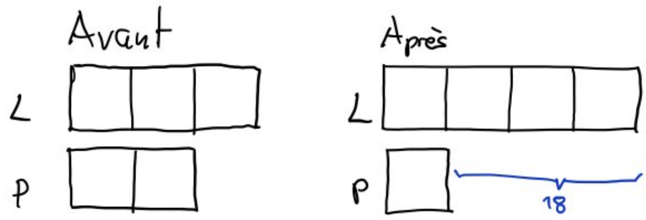


Figure 8 *: Modèle de comparaison multiplicative pour le problème de Linda et Paul.*

Le raisonnement pour résoudre ce problème est qu'au début (avant), Linda avait trois unités et Paul deux unités en montants d'argent. Après que Paul a donné la moitié de son argent, il ne reste plus qu'une unité à Paul et Linda en a quatre. La différence entre trois unités et la somme d'argent est de 18 *$*, donc une unité vaut 6 *$* et Linda avait donc 18 *$* au début (trois fois six dollars).

Voici un problème plus difficile utilisant le modèle avant-après :

> *• Mme Tan a préparé des tartes pour une fête. Il y a 48 tartes aux pommes de plus que les tartes à l'orange. Après avoir mangé 5/6 des tartes aux pommes et 3/4 des tartes à l'orange, on compte 33 tartes.*
>
> *Combien de tartes à l'orange ont-elles été préparées au début ?*
>
> *Quelle proportion des tartes consommées étaient des tartes aux pommes ? (modifié à partir de l'examen national de grade 6 à Singapour, 2002).*

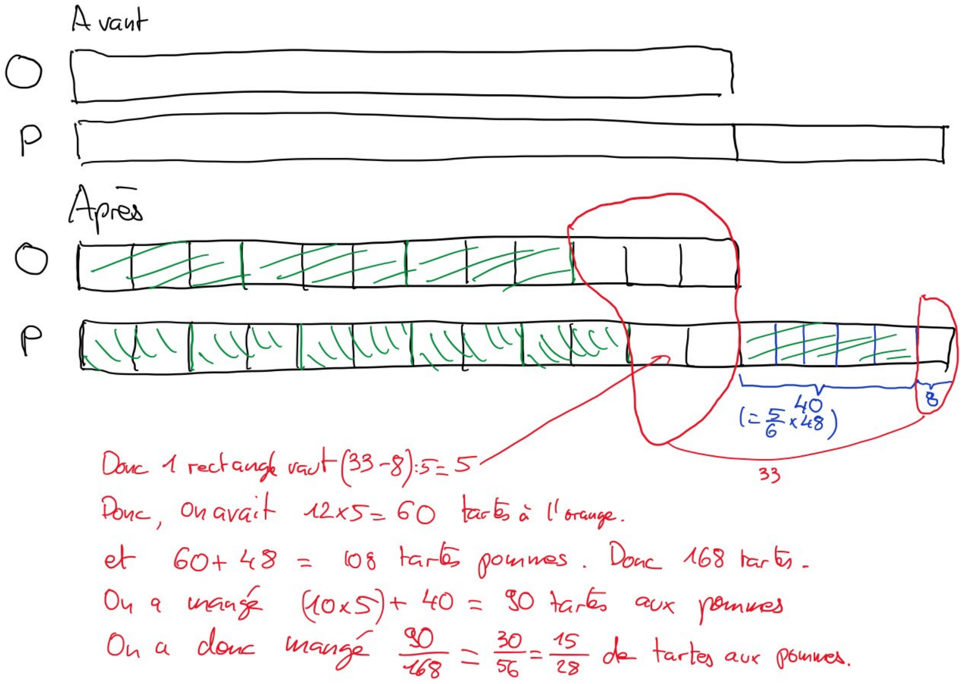


Figure 9 *: Modèle de comparaison pour le problème de Mme Tan.*

Identification d'une unité de comparaison

L'identification d'une unité de comparaison est également une heuristique importante pour résoudre les problèmes arithmétiques verbaux au niveau primaire. Ces problèmes peuvent être très chargés en informations et exiger des élèves qu'ils aient des connaissances dans plusieurs domaines des mathématiques. Par exemple, le problème présenté ci-dessous établit des liens entre les concepts de fraction et de pourcentage et il a des liens implicites avec l'idée de rapport.

• *Amy, Bridget et Christine collectionnent les livres. Amy possède 5 livres de plus que Bridget. Christine a 60 % de ce que Bridget a. Étant donné que Christine a deux fois moins de livres qu'Amy, combien de livres ont-elles en tout ?*

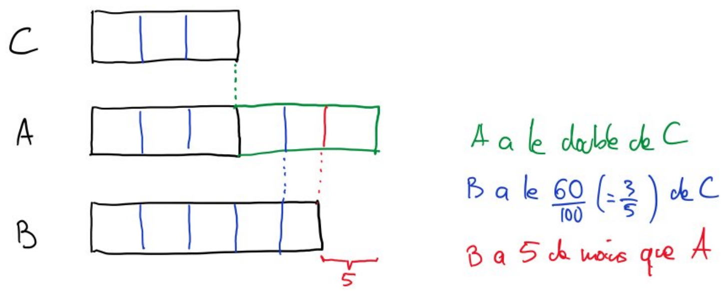


Figure 10 *: Modèle de comparaison pour le problème d'Amy, Bridget et Christine.*

La clé pour résoudre ce problème est d'identifier l'unité de comparaison. Les enseignant·e·s de Singapour conseillent généralement aux élèves de choisir la plus petite quantité ou la personne à qui l'on attribue la plus petite quantité. Dans ce cas, il est clair que c'est Christine qui a le plus petit nombre de livres. Elle a 60 % ou 3/5 de ce qu'a Bridget. Cela suffit pour générer une unité de comparaison. Si Christine a trois unités, alors Bridget en a cinq. Comme Amy a le double de ce que Christine a, alors elle a 6 unités. Mais Amy a 5 livres de plus que Bridget, ce qui implique qu'une unité est 5. Ainsi, le nombre total de livres est de 70 (14×5).

Appariement d'unités inégales

> • *Une enseignante a apporté une boîte de 38 fruits pour sa classe. Les fruits étaient soit des pommes, soit des oranges. Plus tard, elle a constaté qu'un quart des pommes et un tiers des oranges étaient impropres à la consommation et devaient être jetées. Si elle a jeté 11 fruits au total, combien de fruits étaient des oranges ?*

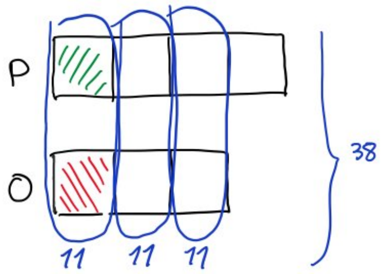


Figure 11 *: Modèle d'appariement d'unités inégales pour le problème des pommes et des oranges.*

Dans ce problème, les élèves considéreront quatre « unités de pommes » et trois « unités d'oranges » différentes. Une unité de pommes et une unité d'oranges donnent un total de 11. Trois paires de ce type donneront 33 et donc l'unité supplémentaire de pommes est de 5 ($38-33$). Chaque unité d'orange est donc 6 ($11-5$). L'enseignante a donc acheté 18 oranges (3×6).

Une approche similaire peut être utilisée pour ce problème :

> • *Deux pommes et trois oranges coûtent 5,30 $. Trois pommes et deux oranges coûtent 4,70 $. Combien coûtent une pomme et une orange ?*

3. Discussion : la méthode des modèles, ses apports et ses limites

Les problèmes qui ont été utilisés dans cet article sont des problèmes arithmétiques verbaux, que nous avons décrits précédemment. La résolution de problèmes arithmétiques verbaux peut être très difficile pour les élèves. Verschaffel et ses collègues ont énuméré les phases suivantes dans le processus de résolution des problèmes arithmétiques verbaux :

> 1. *Comprendre la situation décrite.*
> 2. *Construire un modèle mathématique décrivant les éléments et les relations essentiels et pertinents de la situation.*
> 3. *Travailler dans le modèle mathématique pour effectuer des déductions.*
> 4. *Interpréter le résultat du travail de calcul pour arriver à revenir à la situation pratique qui avait donné naissance au modèle.*
> 5. *Évaluer ce résultat interprété par rapport à la situation initiale.*
> 6. *Communiquer les résultats interprétés. (Verschaffel et al., 2000, p. xii).*

Lorsque nous examinons attentivement la méthode des modèles pour résoudre un problème, nous constatons la pertinence des six étapes ci-dessus. Par exemple, pour le problème de Louis et Clark, un·e élève résolvant le problème devait en effet comprendre le problème, construire un modèle et effectuer des déductions et des calculs pertinents, puis devait évaluer, interpréter et communiquer les résultats.

3.1. Les apports de la méthode des modèles

Les exemples donnés ci-dessus illustrent également l'utilisation de la méthode des modèles comme heuristique pour résoudre des problèmes dont le niveau de difficulté augmente. La méthode des modèles exige essentiellement des élèves qu'ils représentent les inconnues comme les parties d'une barre, ce qui permet une visualisation puissante des relations, explicites et implicites, entre les informations énumérées dans l'énoncé du problème. Les trois types de modèles de base sont les suivants : partie-tout (addition et soustraction), comparaison additive et comparaison multiplicative. Voici encore quelques idées sur la méthode des modèles qui ressortent de ce qui précède :

1. La méthode des modèles peut être utilisée pour résoudre certains problèmes arithmétiques verbaux difficiles qui, autrement, pourraient nécessiter l'utilisation de l'algèbre.
2. La largeur d'une barre n'a pas d'importance, car elle n'a aucune influence sur le processus de résolution ou la sélection d'une unité appropriée.
3. Bien que les proportions exactes ne soient pas utilisées pour dessiner les barres, les parties longues représentent des quantités plus importantes que les parties courtes. Cependant, la proportionnalité est utilisée lorsqu'il faut trouver des unités inconnues. Notons toutefois qu'il existe aussi un risque de voir apparaître des erreurs dues à une interprétation perceptive des rapports ou différence dans les longueurs des barres.
4. Il n'est pas nécessaire de dessiner les rectangles représentant les barres à la règle. Ils peuvent être dessinés à main levée, car l'accent est mis sur la structuration du processus de résolution.
5. Les barres qui sont dessinées ne contiennent pas toutes les informations en elles-mêmes. Les informations supplémentaires qui sont essentielles pour le processus de résolution doivent être transférées du problème au diagramme. Ces informations discursives (voir Duval, 1995) sont très importantes pour la lecture du diagramme afin de comprendre ce qui est donné et ce qui est à trouver. Ces informations aident à structurer le processus de résolution en faisant apparaître les relations implicites entre ce qui est donné et ce qui est inconnu. Ainsi, comme mentionné précédemment, la méthode des modèles permet une interaction entre les informations textuelles du problème, la représentation graphique et la représentation symbolique.
6. Les parties inconnues du rectangle, considérées comme unités, jouent le rôle d'inconnues et aident à résoudre les équations. En tant que tel, le dessin des modèles est un précurseur de l'algèbre et aide à développer la pensée algébrique à un jeune âge, sans avoir à se concentrer sur les variables et les inconnues qui utilisent des symboles littéraux (Beckmann, 2004 ; Fong & Lee, 2009 ; Kho, 2009 ; Lee & Fong, 2009).
7. Comme illustré ci-dessus, l'utilisation de la méthode des modèles par les élèves présente plusieurs avantages. Cette utilisation montre que les élèves utilisent des capacités de réflexion qui leur permettent de transférer ces capacités à la résolution d'autres problèmes ne nécessitant pas nécessairement l'utilisation de la méthode des modèles. En conséquence, le ministère de l'Éducation de Singapour (2009) a affirmé dans un document officiel que l'utilisation de la méthode des modèles aide les élèves à devenir plus réceptifs à des problèmes peu familiers, ce qui améliore leur capacité à résoudre les problèmes en général. Dans leur étude, Ng et Lee (2009) ont constaté que les élèves qui ont utilisé la méthode des modèles ont démontré avec succès une bonne connaissance conceptuelle des phrases comparatives utilisant des expressions telles que

« plus de », « moins de » et « autant que », car les dessins produits montraient les comparaisons adéquates.

3.2. Les limites de la méthode des modèles

La méthode des modèles pose toutefois un certain nombre de questions. Si l'on considère le problème de Louis et Clark, la résolution de ce problème aurait été beaucoup plus difficile pour les élèves si, dans l'énoncé du problème, Louis avait dépensé 1 251 dollars et Clark 902 dollars et si les montants restants étaient dans un rapport plus difficile à gérer pour les élèves, comme 7:13. Bien que certains élèves eussent pu trouver une solution, les calculs auraient constitué un obstacle majeur, car les élèves sont habitués à avoir de « beaux nombres » comme réponses. Ils auraient même peut-être douté de leurs solutions possibles pour ne pas avoir obtenu de beaux nombres. Bien que la méthode des modèles soit un outil puissant permettant aux élèves de résoudre des problèmes, elle ne peut pas remplacer l'algèbre.

Ainsi, nous souhaitons mettre en garde ceux qui souhaitent une méthode clé en main pour résoudre des problèmes arithmétiques verbaux relativement difficiles et ceux qui veulent simplement adopter la méthode des modèles de Singapour, car c'est loin d'être *la* solution. En effet, la maîtrise de la méthode des modèles par les élèves de Singapour se développe sur une longue période, grâce à un programme d'études fort rigoureux, avec des attentes élevées en matière de performance des élèves et beaucoup de travail de la part des enseignant·e·s. En ce qui concerne l'utilisation de la méthode des modèles, Ng et Lee (2009) ont déclaré qu'une représentation réussie des problèmes arithmétiques verbaux nécessite une base de connaissances bien organisée des tables d'addition et de multiplication, une compréhension conceptuelle des relations partie-tout et des fractions, un raisonnement multiplicatif abouti et une bonne connaissance des quatre opérations. Ces auteurs ont également averti que la méthode des modèles ne doit en aucun cas être un algorithme appris par cœur pour résoudre des problèmes arithmétiques verbaux.

Le ministère de l'Éducation de Singapour (2009) a ainsi préconisé l'utilisation de la méthode des modèles comme un lien avec la méthode algébrique pour résoudre les problèmes. Cependant, ce lien ne peut fonctionner qu'avec certains types de problèmes spécifiques nécessitant la résolution d'équations linéaires. Lee *et al.* (2010) ont souligné à juste titre que la méthode des modèles ne peut pas être utilisée pour résoudre des problèmes qui nécessitent la construction d'équations de degré supérieur ou égal à deux. Un autre risque est que les élèves deviennent très dépendants des stratégies arithmétiques pour résoudre des problèmes arithmétiques verbaux. Ainsi, certains auteurs, comme Khng et Lee (2009), qui classent l'exhaustion des cas, les méthodes d'essais-erreurs, et le chaînage arrière en parallèle avec la méthode des modèles comme étant des stratégies arithmétiques pour résoudre des problèmes arithmétiques verbaux, ont affirmé que la persistance à utiliser des stratégies arithmétiques empiète sur l'acquisition de stratégies algébriques.

Le risque d'une méthode pas à pas est aussi de donner l'impression que chaque étape peut être automatisée et que la succession des étapes est linéaire. Pourtant, comme le montrent les travaux de Julo (1995, 2000, 2002), l'individu qui résout un problème effectue des allers-retours entre les divers processus. En particulier, la représentation du problème est modifiée au cours de la résolution et cette représentation influence la résolution en cours. Il en va de même pour le processus de contrôle. Cette idée est d'ailleurs reprise dans les schématisations non linéaires de la résolution de problèmes telle que celle proposée par Fagnant (figure 12).

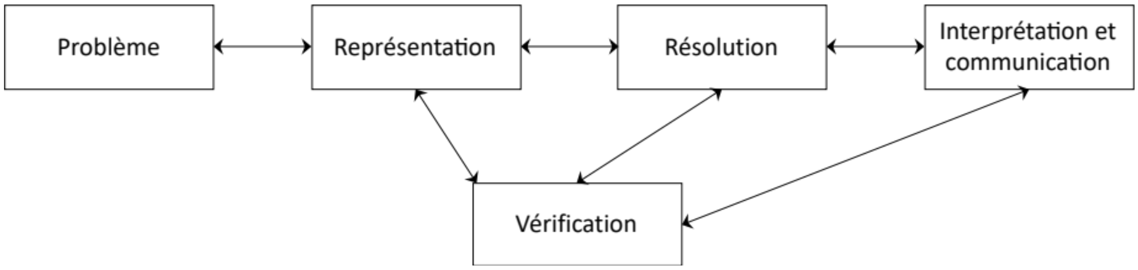


Figure 12 *: Modèle illustrant les différentes étapes de la résolution de problèmes (Fagnant, 2008, p. 72).*

De plus, si les phases de résolution, d'interprétation ou même de vérification peuvent être automatisées dans de nombreux cas, le processus de représentation ne se réduit pas à un processus de modélisation. Julo (2000) montre en effet que :

> *les dessins, schémas, graphes, tableaux, ... ne sont pas [les processus cognitifs] qui permettent à la représentation du problème de se mettre en place, mais plutôt ceux qui vont permettre l'opérationnalisation de cette représentation, c'est-à-dire le passage à l'action (Julo, 2000, p. 14).*

Il recommande même que toute aide apportée aux élèves en vue de leur permettre de progresser dans la représentation des problèmes *« suggère le moins possible une modélisation du problème »* (*ibid.*, p. 15).

Plus précisément, pour Julo (2002),

> *[l'activité] de représentation repose sur un ensemble complexe de processus et, en premier lieu, sur ce double mouvement caractéristique de toute activité mentale : des informations vers les connaissances et des connaissances vers les informations (Julo, 2002, p. 42).*

Cette activité peut être caractérisée par trois processus : le processus d'interprétation et de sélection, le processus de structuration et le processus d'opérationnalisation. Ces processus ne correspondent pas à des étapes différenciées de la démarche de résolution ou à des opérations successives. Au contraire, *« plusieurs processus interviennent simultanément et interagissent pour faire avancer notre compréhension et notre démarche de résolution »* (Julo, 1995, p. 29).

Dans le cas du problème de Louis et Clark, ces trois processus sont fortement interreliés. Si on observe par exemple la première étape de chacune des résolutions (tableau 1, respectivement A et 1), la représentation schématique nécessite de déterminer une vision globale de la situation (sélection), ce qui nécessite son interprétation et une représentation graphique de cette situation (opérationnalisation). Il nous semble donc qu'une étude fine du processus mental conduisant à la réalisation d'un modèle en barres serait intéressante. Elle dépasse toutefois le cadre de cet article.

L'efficacité des modélisations graphiques des problèmes verbaux est d'ailleurs toujours un sujet de débat. Une récente étude internationale réalisée au Québec conduit ainsi les chercheurs

> *à la conclusion que la façon dont la résolution de problèmes arithmétiques verbaux est abordée dans la classe de mathématiques, par des méthodes séquentielles et rigides, n'aide pas les élèves à développer leur compétence en matière de résolution de tels problèmes (Goulet-Lyle et al., 2020, p. 139).*

Dans la revue de littérature servant d'introduction du numéro de *ZDM* consacré aux *Word problems in mathematics education*, Verschaffel et ses collègues relèvent à quel point les études sur l'efficacité de l'utilisation des représentations graphiques donnent des résultats contradictoires et que

> *selon l'état actuel des connaissances, il n'est pas possible de répondre de manière simple et directe*

à la question « quelle est l'efficacité des représentations graphiques des problèmes arithmétiques verbaux » (Verschaffel et al., 2020, p. 8).

Cette revue de littérature montre ainsi que cette efficacité dépend de l'interaction complexe entre le problème à résoudre, les caractéristiques de la représentation, les connaissances de l'individu qui résout le problème et le contexte plus large dans lequel le processus de résolution du problème se déroule.

Il est par ailleurs également nécessaire de prendre en compte les aspects langagiers et contextuels de la formulation du problème. Comme Verschaffel *et al.* (2000) l'ont souligné, la résolution des problèmes arithmétiques verbaux exige que les élèves lisent et comprennent le problème. Dès lors, une mise en garde s'impose : les problèmes verbaux sont énoncés dans la langue d'enseignement. À Singapour, la langue d'enseignement est l'anglais, et non la langue maternelle de nombreux élèves (Dindyal & Clivaz, 2018). Ainsi, la résolution des problèmes devient plus difficile pour certains élèves, car leur manque de familiarité avec la langue a un impact sur leur utilisation d'un modèle approprié pour résoudre le problème. Il en va évidemment souvent de même dans un contexte francophone avec la problématique des élèves allophones.

De fait, notre brève analyse de la méthode des modèles a volontairement laissé de côté l'influence des aspects textuels et contextuels de l'énoncé du problème. Comme le montrent les travaux de Sander et de son équipe (voir par exemple Gamo *et al.*, 2014 ; Gvozdic & Sander, 2020), des problèmes qui ont une même structure mathématique (et donc, dans notre cas, devraient être modélisés par un même modèle en barres) sont traités différemment par les élèves selon le contexte et selon la formulation du problème. Il serait donc important d'examiner très finement de quelle manière s'effectue le passage du texte d'un problème à sa modélisation en barres selon les éléments sémantiques du problème.

Enfin, nous souhaitons mettre en évidence le rôle de l'enseignant·e dans le processus d'apprentissage de la résolution de problèmes, et particulièrement de la méthode des modèles. À Singapour, l'enseignement de cette méthode est confié à des enseignant·e·s qui connaissent et pratiquent cette méthode depuis leur propre scolarité. De plus, ces enseignant·e·s sont triés sur le volet et sont partiellement spécialistes de l'enseignement des mathématiques à l'école primaire. Ils bénéficient d'une formation initiale dont la qualité est internationalement reconnue, d'une formation continue, souvent collaborative, abondante et s'appuient sur des manuels scolaires et un plan d'études cohérents entre eux (Dindyal & Clivaz, 2018). Ils parviennent ainsi à gérer une dialectique délicate entre l'enseignement d'une technique heuristique et un enseignement de la résolution de problèmes ne pouvant se réduire à l'enseignement de techniques automatiques de résolution. Les caractéristiques d'un enseignement adéquat de cette méthode des modèles dans d'autres contextes que le contexte singapourien nécessitent des recherches plus approfondies.

Conclusion

La méthode des modèles telle que pratiquée dans l'enseignement à Singapour est une heuristique permettant une modélisation des problèmes verbaux. Avant que les élèves ne puissent utiliser une représentation algébrique, cette méthode offre un instrument de modélisation du problème et de traitement des informations et des liens entre ces informations. Par là même, cette méthode contribue à la construction par les élèves d'une représentation opérationnelle du problème. Si cette méthode a montré son efficacité dans le contexte singapourien, elle comporte aussi un certain nombre de limites quant à son introduction et quant à un aspect automatique pouvant paradoxalement devenir un obstacle à la représentation du problème. Nous estimons que les apports de cette heuristique en contexte francophone mériteraient d'être étudiés en détail auprès des enseignant·e·s et des classes qui l'utilisent.

Références bibliographiques

Auquière, A., Demonty, I. & Fagnant, A. (2018). Impact des structures sémantiques et de l'introduction de schématisations sur les performances et les démarches de résolution de problèmes. *Annales de Didactique et des Sciences Cognitives, 23*, 41-68. https://publimath.univ-irem.fr/numerisation/ST/IST18017/IST18017.pdf

Beckmann, S. (2004). Solving algebra and other story problems with simple diagrams: A method demonstrated in grade 4-6 texts used in singapore. *The Mathematics Educator, 14*(1), 42-46.

Bednarz, N. & Janvier, B. (1996). Emergence and development of algebra as a problem-solving tool: Continuities and discontinuities with arithmetic. In N. Bernarz, C. Kieran, & L. Lee (éds.). *Approaches to algebra: Perspectives for research and teachin*. Springer Netherlands (pp. 115-136). https://doi.org/10.1007/978-94-009-1732-3_8

Bruner, J. S. (1966). *Toward a theory of instruction, vol. 59*. Harvard University Press.

Collars, C., Koay, P. L., Lee, N. H. & Tan, C. S. (2014). *Shaping maths, coursebook 2b* (3rd ed.). Marshal Cavendish Education.

Dindyal, J. & Clivaz, S. (2018). Un aperçu du curriculum de mathématiques à singapour. *Grand N, 102*, 41-55.

Duval, R. (1995). Geometrical pictures: Kinds of representation and specific processings. In R. Sutherland & J. Mason (éds.). *Exploiting mental imagery with computers in mathematics education, NATO ASI Series (Series F: Computer and Systems Sciences), vol 138*. Springer, Berlin, Heidelberg (pp. 142-157). https://doi.org/10.1007/978-3-642-57771-0_10

Fagnant, A. (2008). Des outils didactiques pour développer la résolution de problèmes dans l'enseignement fondamental. Aperçu des fondements théoriques et entrée au coeur de quelques activités. *Cahiers des Sciences de l'Education (Les), 27-28*, 51-94.

Fong, N. S. & Lee, K. (2009). Model method: A visual tool to support algebra word problem solving at the primary level. In K. Y. Wong, P. Y. Lee, B. Kaur, P. Y. Foong & S. F. Ng (éds.). *Mathematics education: The singapore journey*. World Scientific (pp. 169-203).

Gamo, S., Nogry, S. & Sander, E. (2014). Réduire les effets de contenus en résolution de problèmes pour favoriser la construction d'une représentation alternative. *Cahiers des Sciences de l'Éducation - Université de Liège (aSPe), 36*, 35-65.

Goulet-Lyle, M.-P., Voyer, D. & Verschaffel, L. (2020, 2020/04/01). How does imposing a step-by-step solution method impact students' approach to mathematical word problem solving? *ZDM, 52*(1), 139-149.

https://doi.org/10.1007/s11858-019-01098-w

Grapin, N. & Mounier, É. (2018). Méthodologie d'analyse de manuels et étude du manuel méthode de singapour CP. *Grand N, 102*, 57-92.

Gvozdic, K. & Sander, E. (2020). Learning to be an opportunistic word problem solver: Going beyond informal solving strategies. *ZDM, 52*(1), 111-123. https://doi.org/10.1007/s11858-019-01114-z

Houdement, C. (2017). Résolution de problèmes arithmétiques à l'école. *Grand N, 100*, 59-78.

Jamet, J.-M. (2019). La « méthode de singapour » : Surface émergée de l'iceberg singapourien. *Grand N, 104*, 39-58.

Julo, J. (1995). *Représentation des problèmes et réussite en mathématiques : Un apport de la psychologie cognitive à l'enseignement*. Presses universitaires de Rennes.

Julo, J. (2000). Aider à résoudre des problèmes. Pourquoi ? Comment ? Quand ? In COPIRELEM (éds.). Actes du XXVII[e] colloque inter-IREM de Chamonix. IREM de Grenoble (pp. 9-28).

Julo, J. (2002). Des apprentissages spécifiques pour la résolution de problèmes? *Grand N, 69*, 31-54.

Khng, K. H. & Lee, K. (2009). Inhibiting interference from prior knowledge: Arithmetic intrusions in algebra word problem solving. *Learning and Individual Differences, 19*(2), 262-268.

Kho, T. (2009). The model-drawing method with algebra. In P. Y. Lee & N. H. Lee (éds.). *Teaching secondary school mathematics: A resource book*. McGraw Hill (pp. 393-412).

Kho, T.-H. (1987). Mathematical models for solving arithmetic problems. In P*roceedings of the fourth southeast asian conference on mathematical education (ICMI-seams). Mathematical education in the 1990's, vol. 4*. Institue of Education (pp. 345-351).

Lee, K. & Fong, N. S. (2009). Solving algebra word problems: The roles of working memory and the model method. In K. Y. Wong, P. Y. Lee, B. Kaur, P. Y. Foong, & S. F. Ng (éds.). *Mathematics education: The singapore journey*. World Scientific (pp. 204-226).

Lee, K., Yeong, S. H. M., Ng, S. F., Venkatraman, V., Graham, S. & Chee, M. W. L. (2010). Computing solutions to algebraic problems using a symbolic versus a schematic strategy. *ZDM, 42*(6), 591-605. https://doi.org/10.1007/s11858-010-0265-6

Ng, S. F. & Lee, K. (2009). The model method: Singapore children's tool for representing and solving algebraic word problems. *Journal for Research in Mathematics Education, 40*(3), 282-313. https://www.jstor.org/stable/40539338

Petitfour, É. & Winder, C. G.-B. (2018). L'enseignement des notions de perpendicularité et de parallélisme dans le manuel *Méthode de Singapour* en CM1. *Grand N, 102*, 5-40.

Polotskaia, E. (2009). Communication de la structure mathématique du problème par les élèves du primaire. Analyse d'un scénario didactique. *Problem Solving and Institutionalization of Knowledge. Proceedings of CIEAEM, 61*.

Sun, X. H. & Bartolini Bussi, M. G. (2018). Language and cultural issues in the teaching and learning of wna. In M. G. Bartolini Bussi & X. H. Sun (éds.). *Building the foundation: Whole numbers in the primary grades: The 23rd ICMI study*. Springer International Publishing (pp. 35-70).
https://doi.org/10.1007/978-3-319-63555-2_3

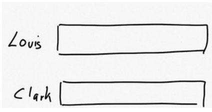
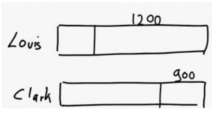
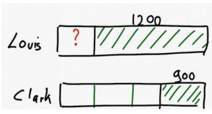
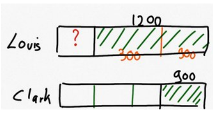
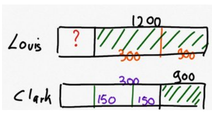
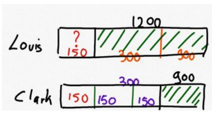
Verschaffel, L., Greer, B. & De Corte, E. (2000). *Making sense of word problems*. Lisse, Hollande : Swets & Zeitlinger Lisse.

Verschaffel, L., Schukajlow, S., Star, J. & Van Dooren, W. (2020). Word problems in mathematics education: A survey. *ZDM, 52*(1), 1-16.
https://doi.org/10.1007/s11858-020-01130-4

Ministry of Education Singapore (2009). *The singapore model method for learning mathematics*. EPB Pan Pacific.

Annexe
Trois exemples de résolution du problème

A l'aide d'un schéma en barre

<table>
<tr><th>1</th><th>2</th><th>3</th><th></th><th></th></tr>
<tr><td>A</td><td>4</td><td>v</td><td></td><td>Louis et Clark ont la même somme d'argent.</td></tr>
<tr><td>B</td><td>3</td><td>iv
iii</td><td></td><td>Louis dépense 1 200 $ et Clark dépense 900 $.</td></tr>
<tr><td>C</td><td>1</td><td>ii</td><td></td><td>Clark a maintenant 3 fois plus d'argent que Louis.
Combien d'argent reste-t-il maintenant à Louis ?
Je cherche la valeur d'un des rectangles verts.</td></tr>
<tr><td>D</td><td>6</td><td></td><td></td><td>Je reporte les 900 dans la barre du haut.
La partie qui reste est donc de $1\,200-900$, donc 300.</td></tr>
<tr><td>E</td><td>7
8</td><td></td><td></td><td>Je reporte les 300 dans la barre du bas.
Ce 300 est constitué de deux parts qui valent donc 150 chacune.</td></tr>
<tr><td>F</td><td>8</td><td></td><td></td><td>Je reporte le 150 dans la barre du haut, ce qui me donne donc la part de Louis.</td></tr>
<tr><td>G</td><td>9</td><td></td><td>Il reste 150 $ à Louis.</td><td></td></tr>
</table>

- **colonne 1** : Étape résolution par un schéma en barre.
- **colonne 2** : Étape résolution algébrique correspondante.
- **colonne 3** : Étape résolution essais-erreurs correspondante.

Par voie algébrique

<table>
<tr><td>1</td><td>Argent restant à Louis : x
Argent restant à Clark : y</td><td>Combien d'argent reste-t-il maintenant à Louis ?</td></tr>
<tr><td>2</td><td>$y=3x$</td><td>Clark a maintenant 3 fois plus d'argent que Louis.</td></tr>
<tr><td>3</td><td>Avant de dépenser 1 200, Louis avait $x+1\,200$.
Avant de dépenser 900, Clark avait $y+900$.</td><td></td></tr>
<tr><td>4</td><td>$x+1\,200=y+900$</td><td>Louis et Clark ont la même somme d'argent.</td></tr>
<tr><td>5</td><td>$x+1\,200=3x+900$</td><td>Substitution.</td></tr>
<tr><td>6</td><td>$x+300=3x$</td><td>Soustraction de 900 dans les deux membres.</td></tr>
<tr><td>7</td><td>$300=2x$</td><td>Soustraction de x dans les deux membres.</td></tr>
<tr><td>8</td><td>$150=x$</td><td>Division par 2 des deux membres.</td></tr>
<tr><td>9</td><td>Il reste 150 $ à Louis.</td><td></td></tr>
</table>

Par essais-erreurs

i	Disons qu'il reste 100 *$* à Louis	Combien d'argent reste-t-il maintenant à Louis ?
ii	Il en reste alors 300 à Clark.	Clark a maintenant 3 fois plus d'argent que Louis.
iii	Donc Clark avait 900+300, c'est-à-dire 1 200 *$*.	Clark dépense 900 *$*.
iv	Et Louis avait 100+1 200, soit 1300 *$*.	Louis dépense 1 200 *$*.
v	Mais cela ne donne pas la même somme de départ.	Louis et Clark ont chacun la même somme d'argent.
vi	Essayons avec une autre somme de départ pour Louis...	