POINTS ENTIERS SUR UNE DROITE.
UN PROBLÈME ENTRE ARITHMÉTIQUE ET GÉOMÉTRIE

Sinaly DISSA
Institut Fourier, Université Grenoble-Alpes
École Normale Supérieure (ENSup) de Bamako

Résumé. Ce texte s'inscrit dans le cadre d'une ingénierie didactique sur des notions d'arithmétique du niveau lycée. Nous présentons la conception et l'expérimentation d'une situation qui lie les cadres géométrique et arithmétique, puis nous donnons quelques résultats de l'état actuel des connaissances d'étudiants sur les notions en jeu : diviseur, multiple, « théorème de Bézout », « théorème de Gauss », congruence. L'expérimentation est effectuée avec des étudiants de l'École Normale Supérieure (ENSup) de Bamako. Les résultats montrent que si les étudiants ont des acquis en arithmétique, ils ont des blocages, des difficultés lorsqu'il s'agit d'exploiter leurs connaissances pour résoudre un problème d'arithmétique donné dans le cadre géométrique.

Mots-clés. Arithmétique, équation diophantienne, ingénierie didactique, cadre et registre

Abstract. This text joins within the framework of a didactic engineering on arithmetical notions of the level high school. We present the conception and the experiment of a situation which binds(connects) the geometrical and arithmetical frames, afterwards we give some results of the current state of the knowledge of students onto the underling arithmetic notions: divisor, multiple, "theorem of Bezout", "theorem of Gauss", congruence. The experiment is made with students of the Superior teachers' training college (ENSup) of Bamako. The results show that if the students have experiences in arithmetic, they have blockings, difficulties when it is a question of exploiting their knowledge to solve a problem of arithmetic given in a geometrical framework.

Keywords. Arithmetic, diophantine equation, Didactic engineering, setting and frame

Introduction

L'arithmétique est une branche des mathématiques qui intervient dans tous les domaines scientifiques. C'est le domaine mathématique consacré à l'étude des nombres, de leurs propriétés et usages. Des études didactiques montrent qu'elle peut jouer plusieurs *fonctions* (Ravel, 2003) dans l'enseignement des mathématiques. Elle permet de construire des situations d'enseignement adaptées pour l'apprentissage du raisonnement (Battie, 2003) et de faire travailler des apprenants sur plusieurs types d'activités mathématiques : faire des essais, établir des conjectures, les tester, engager la recherche d'une preuve (Gardes, 2013).

Dans cet article, nous nous intéressons à l'étude de l'arithmétique dans un autre cadre que le numérique. Nous allons regarder particulièrement celui de la géométrie. Nous nous interrogeons : où est-ce que les entiers interviennent en géométrie ? Comment mettre en relation les domaines de l'arithmétique et de la géométrie dans une situation d'enseignement des mathématiques ?

Au Mali, les programmes de mathématiques du secondaire (collège et lycée) accordent peu de place à l'arithmétique. Les premières notions d'arithmétique, *diviseur, multiple, PGCD, PPCM, nombres premiers*, sont introduites en 7^{e} et 8^{e} (tranches d'ages respectives 12-13 ans et 14-15 ans) sur des exemples. Au lycée, une étude plus « approfondie » de ces notions est abordée en classe de *Terminale* (*Sciences Exactes*)[1]. A l'université, l'arithmétique se retrouve disséminée dans différentes branches mathématiques. Elle est très souvent considérée comme un sous-domaine de l'Algèbre.

Dans le cadre du master de « didactique des sciences » de l'université Joseph Fourier de Grenoble, nous avons mené une première étude sur l'enseignement de l'arithmétique au lycée au Mali (Dissa, 2013). Les résultats indiquent des « vides didactiques » dans les programmes (Ministère de l'Éducation Nationale du Mali, 1992 ; 2011). En effet, quelques concepts sont introduits au collège en 8^e^ et 9^e^ année. Ensuite l'arithmétique n'apparaît ni en 10^ème^ (début du lycée, élèves de 15-16 ans), ni en 11^e^ (élèves de 16-17 ans). Concernant les pratiques de classes au lycée, les situations qui montrent l'intérêt mathématique des notions sont moins présentes dans les enseignements. Les activités « d'écriture de preuves » ou du « travail sur le raisonnement » sont centrés sur le raisonnement par *récurrence*. Le principe de la récurrence n'est d'ailleurs pas assez bien compris par la majorité des enseignants interrogés. Quant aux preuves de théorèmes comme le théorème de *Bézout* ou celui de *Gauss* (dans les programmes du lycée), les enseignants affirment qu'elles sont difficiles pour les élèves et que les aborder « encombre » les cours. Nous avons aussi identifié des « méconnaissances » des enseignants sur des notions élémentaires de l'arithmétique au lycée. Par exemple, les propriétés qui justifient les étapes de l'algorithme d'Euclide ne sont pas bien comprises. Les enseignants interrogés n'ont pas su répondre aux questions : pourquoi l'algorithme est fini ? Pourquoi le dernier reste calculé est 0 ? Pourquoi le dernier reste non nul est le PGCD des deux nombres ?

Dans la poursuite de cette étude du master, il nous a paru légitime de nous interroger sur l'état de connaissances des étudiants et sur leur formation en arithmétique à l'ENSup de Bamako. Précisons que l'ENSup de Bamako est actuellement l'unique structure de formation initiale des enseignants du lycée au Mali.

Dans cet article, nous commençons par quelques constats et nos questions de recherche. Ensuite, nous présentons le problème mathématique général, son analyse mathématique et didactique, puis l'expérimentation avec des étudiants des deux niveaux du Master PES[2] de l'ENSup. Nous présentons enfin, l'analyse des productions et terminons par une conclusion et quelques perspectives de cette étude.

Notre objectif à long terme est d'apporter une modification dans les pratiques autour de l'enseignement de l'arithmétique, en proposant de nouvelles ressources de formation ou d'enseignement.

1. Constats et questions de recherche

Selon notre enquête sur les pratiques de classes au lycée (Dissa, 2013) ainsi que l'analyse du manuel le plus exploité au Mali (Collection CIAM, 1999), l'enseignement de l'arithmétique comprend les définitions des notions et l'exploration rapide de quelques propriétés, mais l'essentiel du temps est consacré à un apprentissage de techniques pour résoudre de types de problèmes spécifiques : déterminer le PGCD ou le PPCM d'entiers donnés, décomposer un nombre entier en produit de facteurs premiers, résoudre dans Z une équation ou un système d'équations *diophantiennes*, etc. Les problèmes proposés dans les enseignements ne sont pas variés. Ceux qui mettent en lien l'arithmétique et d'autres domaines mathématiques (comme

[1] En France, les notions d'arithmétique ne sont étudiées de façon approfondie que dans la Spécialité Mathématique de la classe de Terminale S.

[2] Professeur d'Enseignement Secondaire

l'algèbre ou la géométrie) sont peu nombreux, voir absents. De fait, le travail en arithmétique est exclusivement développé dans le cadre numérique. On ne retrouve pas, par exemple, des représentations géométriques des solutions d'une équation ou d'un système d'équations dans Z. Ces constats sont les mêmes au Mali et en France.

Or, pour bien connaître une notion, il est nécessaire de pouvoir la penser et l'utiliser dans différents cadres (Douady 1986, Duval 1993) : cette hypothèse est largement acquise dans notre communauté didactique. Rappelons qu'un *cadre* selon Douady est constitué des objets d'une branche des mathématiques, des relations entre les objets, de leurs formulations éventuellement diverses et des images mentales associées à ces objets et ces relations.

A partir de ces constats, nous nous sommes intéressés à l'élaboration de problèmes reliant les cadres arithmétique et géométrique, dans le but de développer un regard géométrique sur les propriétés et équations en arithmétique, et une lecture différente des solutions d'un problème de géométrie. Nous faisons l'hypothèse que ces problèmes n'étant pas du tout habituels dans l'enseignement, leur résolution peut se révéler difficile, même pour des étudiants ayant une bonne connaissance des notions arithmétiques ou géométriques en jeu. Bien sûr, pour le choix du public, nous nous basons sur les connaissances théoriques « supposées » permettant d'aborder et de résoudre le problème. L'hypothèse de travail que ces connaissances sont disponibles est justifiée par l'étude du curriculum, des échanges avec des enseignants de lycée et des formateurs de l'École Normale Supérieure de Bamako.

Nous nous sommes posé les questions suivantes :

> Des notions arithmétiques peuvent-elles être mobilisées par des étudiants dans un problème formulé dans le cadre géométrique ?
>
> Quelles connaissances peuvent se construire à travers ce type de problème ?

Nous utiliserons donc dans cette étude, les notions de changement de *cadre* (Douady, 1986) et de conversion de *registre de représentation sémiotique* (Duval, 1993) dans l'analyse didactique de la situation expérimentale. La théorie des situations didactiques (Brousseau, 1997) est aussi exploitée dans la construction de la situation expérimentale. Elle est utilisée notamment dans l'identification des variables didactiques et leurs valeurs. Nous utilisons aussi la notion de *conception* de la Théorie des Champs Conceptuels (Vergnaud, 1990) pour l'étude des conceptions des étudiants.

2. Problème général

Nous recherchions un problème « original » qui lie l'arithmétique au *cadre* de la géométrie. Ce problème devrait nous permettre aussi d'introduire le domaine de la « géométrie discrète » dans la formation d'enseignants.

Notre situation didactique a été construite à partir du problème mathématique général :

Étant donné une courbe déterminée par n points, trouver tous les points à coordonnées entières sur cette courbe.

La formulation de l'énoncé situe ce problème dans le domaine de la géométrie discrète :

– des notions de géométrie : point, coordonnées, courbe ;

– et une notion d'arithmétique : recherche de coordonnées « entières ».

Une première variable didactique du problème est la « nature de la courbe ». On peut remarquer que le choix du type de courbe définit les connaissances mathématiques exigibles pour résoudre le problème, mais aussi le niveau de difficulté du problème.

Une autre variable didactique est le choix des coordonnées des n points donnés : elles peuvent être entières, rationnelles non entières, réelles non rationnelles. Même si certaines sont dans Z, il reste à résoudre la question de trouver toutes les solutions.

3. La situation étudiée

Nous avons choisi le problème particulier où la courbe est une *droite dans le plan,* sans fixer la valeur de n dans l'énoncé :

> *Étant donné n points alignés dans le plan, déterminer tous les points à coordonnées entières situés dans le même alignement que ces n points.*

L'énoncé du problème le situe dans le cadre de la géométrie comme cela a été indiqué précédemment. Les connaissances géométriques à mobiliser pour la résolution du problème sont élémentaires pour des élèves-professeurs en master. Elles relèvent de la géométrie analytique (coordonnées cartésiennes d'un point, caractérisation d'une droite par son équation, représentation d'une droite dans un repère plan…) ou de la géométrie vectorielle (colinéarité de vecteurs, calcul du déterminant de vecteurs). La résolution du problème nécessite des changements de cadres et de registres. Nous sommes intéressés particulièrement aux éventuels liens entre les choix des registres dans les stratégies de résolution et la manifestation de notions arithmétiques. Nous allons donc, analyser les productions de l'expérimentation suivant les changements de cadre, les traitements et conversions dans les *registres*. Nous définissons quatre *registres* qui peuvent être associés chacun à un type de caractérisation de la droite (cf. Tableau 1).

<table>
<tr><th>Registres</th><th>Écritures ou éléments d'identification</th><th>Commentaires</th></tr>
<tr><td>Graphique</td><td>Droite, point dans un repère</td><td>représentation graphique des points et des droites</td></tr>
<tr><td>Fonctionnelle</td><td>$y=ax+b$ avec y, x, a, b réels</td><td>Une droite est une représentation graphique de la courbe d'une fonction affine</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Algébrique</td><td>$ax+by+c=0$ avec x, y, a, b, c réels</td><td rowspan="2">caractérisation de la droite à partir d'une équation algébrique à deux inconnues
ou
à partir d'un système de deux équations paramétriques</td></tr>
<tr><td>$\begin{cases} x=a+bk \\ y=a'+b'k \end{cases}$ $(a, a', b, b'$ réels, et k un paramètre réel$)$</td></tr>
<tr><td>Arithmétique</td><td>$ax+by=c$, avec x, y, a, b, c entiers</td><td>écriture plus proche d'une égalité de Bézout</td></tr>
</table>

Tableau 1. *Registres susceptibles d'apparaître dans la résolution du problème*

Nous souhaitons identifier aussi à travers ces différents registres, des conceptions de la droite chez les étudiants. On peut noter aussi qu'en fonction de la méthode de résolution qui peut être adoptée, on pourrait mettre en avant (ou non) un type de registre ou exploiter une combinaison de registres. Nous aborderons plus en détails ce point dans les paragraphes suivants.

Il est évident que la situation expérimentale peut soulever des questions du passage du continu au discret et réciproquement. Nous faisons référence au *passage de la droite réelle à des « points entiers alignés »*. Dans les pratiques de classe ainsi que dans les cursus universitaires, cette problématique est rarement abordée. Précisons d'ailleurs que le concept de « droite discrète » n'est pas étudié dans la formation de master de l'ENSup de Bamako.Toutefois, nous ne pouvons pas dire ici que notre situation expérimentale aborde entièrement le passage de la *droite réelle* à la « *droite discrète* ». Dans sa thèse, Ouvrier-Buffet (2003) étudie la question des définitions de la « droite discrète », droite passant par deux points à coordonnées entières. Elle souligne que l'étude de la droite réelle peut être utilisée comme un support « physique » pour construire une définition de la « droite discrète », mais que d'autres sont possibles (Ouvrier-Buffet 2003, p.200).

3.1 Analyse mathématique du problème

Dans cette rubrique, nous présentons et commentons les différentes méthodes de résolution du problème. Nous étudions le cas le plus général possible. Nous n'aborderons donc pas les situations dont les équations se ramènent à l'une des formes simples $y = a$ ou $x = a$, a étant un réel. Les solutions dans ces cas se résument comme suit :

- Si a est un entier, alors l'ensemble des solutions recherché est $\{(n; a) \, avec \, n \in \mathbb{Z}\}$ pour l'équation $y=a$ ou $\{(a; n) \, avec \, n \in \mathbb{Z}\}$ pour l'équation $x=a$.
- Sinon les droites d'équations $x=a \quad et \quad y=a$ ne passent par aucun point à coordonnées entières.

S1 - Méthode de résolution graphique

Dans un premier temps, il faut pouvoir représenter la droite dans un repère orthonormé du plan cartésien avec son quadrillage. Cela sous entend qu'il faut avoir dans les données des points à coordonnées faciles à représenter.

Dans un second temps, on détermine la pente de la droite que nous notons : $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, où Δx et Δy sont des entiers. On cherche ensuite un point du quadrillage qui se situe sur la droite construite. Lorsqu'on en obtient un, c'est une solution particulière (u, v), avec u et v des entiers. À partir de ce point particulier, un déplacement Δx parallèlement à l'axe des abscisses, puis un déplacement Δy parallèlement à l'axe des ordonnées permet d'obtenir un autre point solution (cf. figure 1).

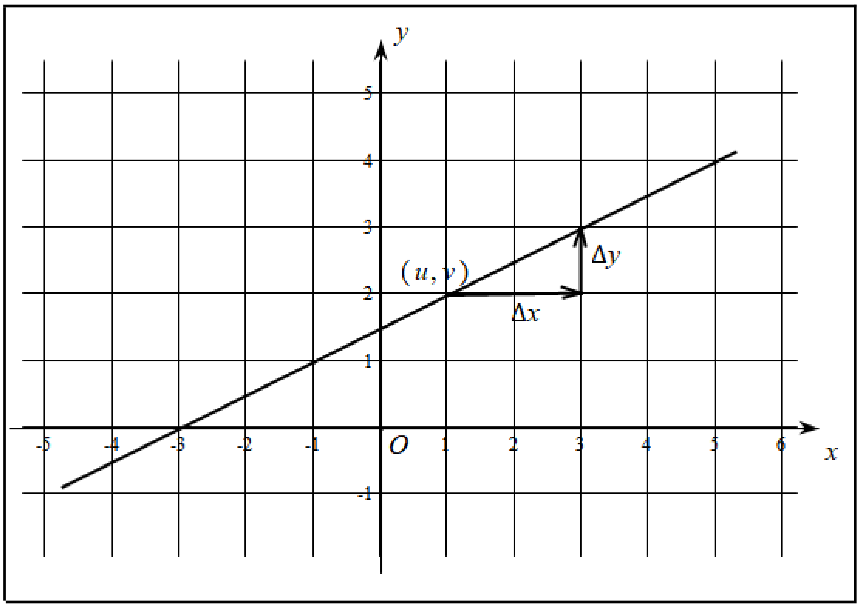


Figure 1. *Illustration de la méthode graphique*

Si on étend le quadrillage au plan tout entier, une répétition périodique de la stratégie permet de se faire une conjecture de la solution générale du problème. Il y a bien sûr des interrogations : comment peut-on être sûr graphiquement que l'on a tous les points entiers qui se trouvent sur la droite ? Qu'on n'en a pas oublié ? La réponse est à chercher avec des outils du domaine de l'arithmétique. Il faut par exemple que Δx et Δy soient premiers entre eux (c'est-à-dire $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ irréductible) pour pouvoir définir le « pas » entre deux solutions consécutives. On peut donc dire qu'il faut un changement de registre du graphique à l'arithmétique afin de trouver une justification mathématique de la méthode ou de pouvoir proposer une solution générique.

Selon Lafond (2015), il est possible de résoudre graphiquement *sans calcul*, les équations se ramenant à la forme $ax+by=\pm 1$ (a, b sont des paramètres entiers donnés premiers entre eux ; x, y des inconnues dans $\mathbb{Z}$). Il explique sa stratégie sur cet exemple :

Soit à résoudre l'équation $5x-11y=\pm 1$ dans $\mathbb{Z}$.

On commence par construire la droite d'équati $ax+by=0$ on dans un plan cartésien quadrillé. Cela correspond dans son exemple à construire la droite (D) : $5x-11y=0$ (cf. Figure 2.).

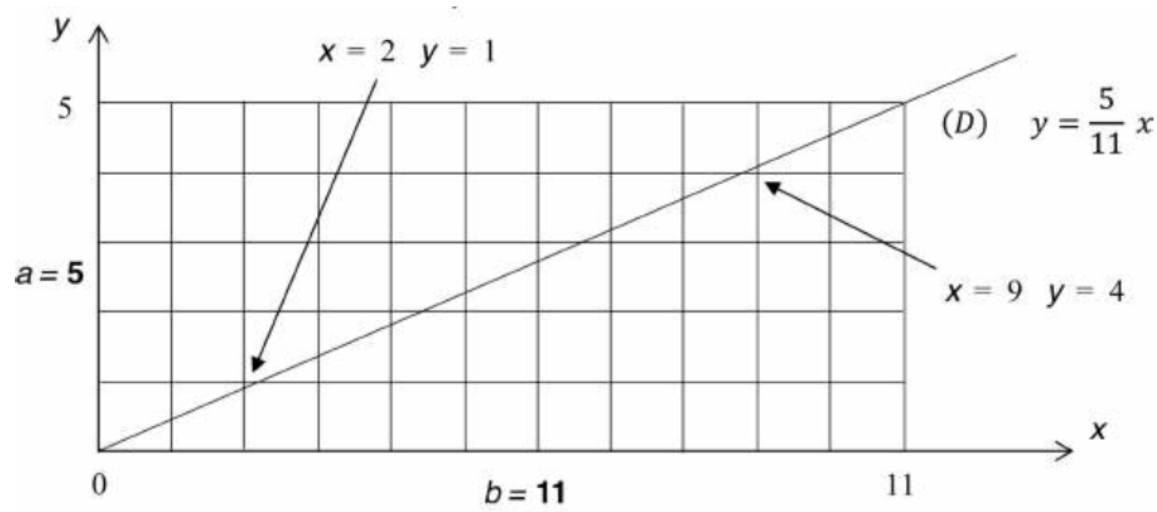


***Figure 2**. Méthode de Lafond (2015)*

Puis on cherche un point du quadrillage qui est le plus près possible de la droite (D) mais pas sur (D) (un point sur (D) serait une solution de l'équation $ax+by=0$ et non de $ax+by=\pm 1$). Les coordonnées de chacun des points trouvées fournissent une solution de l'équation $ax+by=\pm 1$. Dans son exemple, $x=9$, $y=4$ au dessous de la droite (D) ou $x=2$, $y=1$ au dessus de la droite (D) conviennent. Ces choix de point peuvent être vérifiés aisément : $5\times 9-11\times 4=1$, $5\times 2-11\times 1=-1$.

La justification de Lafond (2015) est la suivante :

> « La distance du point $M(x_0, y_0)$ à la droite (D) d'équation $ax-by=0$ est $d(x_0, y_0)=\frac{|ax_0-by_0|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.
> $d(x_0, y_0)$ sera minimal si et seulement si $|ax_0-by_0|$ est minimal.
> Or $|ax_0-by_0|$ est un entier positif (non nul car on n'est pas sur (D)).
> Donc le minimal a lieu lorsque $|ax_0-by_0|=1$.
>
> Ce minimum est atteint aux deux points particuliers du graphique (cf. figure 2).
> On peut prouver ce résultat géométriquement en utilisant le théorème de Pick[3]. »

En effet, désignons par $A(0,0)$, $B(11,5)$, $M_1(2,1)$ et $M_2(9,4)$ (cf. figure 2). Les triangles ABM_1 et ABM_2 ont chacun l'aire $\frac{1}{2}$. En utilisant la réciproque du théorème de Pick, un triangle d'aire $\frac{1}{2}$ n'admet aucun point entier intérieur.

Il conclut par :

« Si on étend le quadrillage au plan tout entier, la figure2 se répète périodiquement, ce qui montre que la solution particulière $x_0 = 9$, $y_0 = 4$ engendre la solution générale (dans le cas $5x-11y=+1$) : $x=x_0+11t$, $y=y_0+5t$, avec $t\in\mathbb{Z}$. »

Lafond (2015) soutient que sa méthode est exclusivement graphique, mais on peut bien remarquer que les justifications sont basées sur des théorèmes ou propriétés arithmétiques (par exemple les nombres premiers entre eux, le théorème de Bézout).

[3] Georg Alexander Pick mathématicien autrichien (1859 - 1942)

Il faut noter que ces méthodes graphiques ne sont opératoires que lorsqu'on parvient à déterminer une solution particulière. Déterminer graphiquement une solution (si elle existe) peut être difficile lorsqu'on a pas défini la bonne échelle de représentation ou lorsqu'on a des valeurs de a et b très grandes pour une droite d'équation $ax+by=c$ (avec a, b, c réels) donnée.

Les méthodes de résolution graphiques exposées ici peuvent donc être difficile à mettre à l'œuvre lorsque le problème n'admet pas de solution entière.

S2 - Méthode de résolution par « exploration de l'équation »

Elle nécessite en premier lieu de caractériser la droite en jeu par son équation qui peut être sous la forme *fonctionnelle* $y=\frac{a}{b}x+\frac{c}{b}$ (a, b, c des entiers avec b non nul) ou sous la forme *algébrique* $ax+by+c=0$ (a, b, c des entiers non nuls et x, y des inconnues réelles). La méthode « d'exploration » décrite dans la suite est basée sur l'écriture fonctionnelle de l'équation de la droite : $y=\frac{a}{b}x+\frac{c}{b}$ (avec b non nul).

- Si b divise a et c, alors une condition suffisante pour obtenir y entier est que x soit entier. Cette condition n'est pas nécessaire. Par exemple, l'équation $y=-2x+1$ admet la solution ($-\frac{1}{2}$; 2), où y est un nombre entier, x un rationnel strict. Les solutions avec x entier forment donc une partie de l'ensemble des solutions.
- Si b divise c et ne divise pas a, alors une condition suffisante pour obtenir y entier est que x soit un multiple de b. Ici aussi, cette condition n'est pas nécessaire. Par exemple ($-\frac{3}{2}$; 2) est une solution de l'équation , où $y=-\frac{2}{3}x+1$ y est un entier, x un rationnel strict. Ainsi, les solutions avec x multiple de b constituent une partie de l'ensemble des solutions de cette équation.
- Si b divise a et ne divise pas c, alors l'équation n'admet pas de solution entière. Par exemple, pour l'équation $y=-2x+\frac{1}{3}$, si x est un entier, $-2x+\frac{1}{3}$ est un rationnel strict, donc y n'est pas entier. Réciproquement, si y est entier, $y-\frac{1}{3}$ est un rationnel strict, donc x n'est pas entier.
- Si b ne divise ni a ni c, alors, on ne peut pas conclure de manière générale : il y aura ou non des solutions selon les valeurs des nombres a, b, c. Déterminer l'ensemble des solutions nécessite une étude spécifique.

Cette méthode par « exploration » est valable lorsqu'on exprime x en fonction de y. Les notions de *diviseur*, *multiple* d'un entier sont les principales notions arithmétiques engagées, ainsi que les concepts de *condition nécessaire*, *condition suffisante*.

S3 - Méthode de résolution dite « diophantienne »

Elle nécessite aussi de caractériser la droite par une équation. Nous l'associons à l'adoption du *registre arithmétique* dans la résolution du problème.

La détermination des points à coordonnées entières d'une droite équivaut à une résolution d'équation dite diophantienne du premier degré. Il s'agit d'équations d'inconnues x, y entiers, pouvant s'écrire sous la forme $ax+by=c$ avec *a*, *b*, *c* entiers (*a* et *b* non nuls). La résolution de ces équations diophantiennes est basée sur l'utilisation du *PGCD* et de deux théorèmes :

Théorème de Gauss. Soit *a*, *b*, *c* des entiers relatifs non nuls. Si *a* divise *b.c* et si *a* est premier avec *b,* alors *a* divise *c*.

Théorème de Bézout. Deux entiers relatifs *a* et *b* sont premiers entre eux si et seulement si il existe deux entiers relatifs *u* et *v* tels que $au+bv=1$.

Corollaire. Une équation diophantienne $ax+by=c$ avec *a*, *b*, *c* entiers, et *a* et *b* non nuls, admet au moins une solution *si et seulement si* le $PGCD(a,b)$ divise *c*.

Comme preuve du corollaire, si l'équation admet au moins une solution, alors il existe *u* et *v* entiers relatifs tels que : $au+bv=c$. En désignant $d=PGCD(a,b)$, *d* divise *a* et *b* donc *d* divise toute combinaison linéaire à coefficients entiers de *a* et de *b*. Par conséquent *d* divise $au+bv$ et comme $au+bv=c$, on a : *d* divise *c*. Une condition nécessaire à l'existence d'au moins une solution est donc que $PGCD(a,b)$ divise *c*. Elle est aussi suffisante. Pour preuve, supposons maintenant que *d* divise *c*. Il existe alors *k* entier relatif tel que $c=kd$. $d=PGCD(a,b)$, donc il existe a' et b' premiers entre eux tels que : $a=da'$ et $b=db'$.

Et d'après la théorème de *Bézout*, alors il existe u' et v' tels que : $a'u'+b'v'=1$, d'où : $kd\,a'u'+kd\,b'v'=kd$. Soit : $aku'+bkv'=c$. En posant : $u=ku'$ et $v=kv'$, qui sont tous deux des entiers relatifs, nous obtenons que l'équation admet alors au moins une solution. En conclusion, la condition est suffisante.

Lorsque $PGCD(a,b)$ divise *c*, l'existence de solution dans $\mathbb{Z}$ de l'équation diophantienne $ax+by=c$ (avec *a*, *b*, *c* entiers, et *a* et *b* non nuls) est assurée. Dans le cas où *a* et *b* ne sont pas premiers entre eux, on peut procéder comme suit pour obtenir l'ensemble des solutions. On réduit l'équation à une nouvelle équation : $a'x+b'y=c'$, avec a' et b' premiers entre eux. Puis on cherche une solution particulière. Si nécessaire, on se sert de *l'algorithme d'Euclide* pour en trouver. En utilisant ensuite le théorème de *Bézout*, il existe deux entiers u' et v' tels que $a'u'+b'v'=1$. On peut donc choisir (u,v) comme solution particulière de l'équation avec $u=u'c'$ et $v=v'c'$. Ainsi un couple (x,y) élément de $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ est une solution si et seulement si $a'(x-u)+b'(y-v)=0$. On applique ensuite le théorème de *Gauss* à l'égalité $a'(x-u)=-b'(y-v)$. a' et b' étant premiers entre eux, on a alors a' divise $-y+v$, ce qui équivaut à dire qu'il existe un entier *k* tel que, $-y+v=ka'$, c'est-à-dire. $y=v-ka'$ On en déduit que $x=u+kb'$. En prenant soin de vérifier que les couples (*x*, *y*) obtenus sont biens des solutions de l'équation, on conclut que l'ensemble des solutions recherché sont les couples : $(u+kb', v-ka')$ avec $k\in\mathbb{Z}$.

Cette méthode de résolution « diophantienne » fonctionne quels que soient les points donnés dans l'énoncé du problème. Elle est présentée dans les manuels et dans les pratiques de classe en général sous forme d'un algorithme de résolution avec très peu de justification des différentes étapes et les propriétés.

3.2 Analyse a priori du problème expérimenté

Le choix de la formulation de l'énoncé est basé sur notre analyse mathématique du problème.

> Étant donné des points alignés dans un repère du plan, déterminer tous les points à coordonnées entières situés dans le même alignement que ces points.

Étudier ce problème dans chacun des cas particuliers suivants :

Cas 1. $\left(1,\frac{1}{2}\right)$, $(2,3)$, $\left(-\frac{2}{5},-3\right)$

Cas 2. $\left(-\frac{3}{2},-\frac{3}{2}\right)$, $\left(-\frac{1}{2},-1\right)$, $\left(\frac{5}{2},\frac{1}{2}\right)$

Cas 3. $\left(-1,-\frac{5}{2}\right)$, $(1,-1)$, $\left(3,\frac{1}{2}\right)$

Sachant que deux points suffisent pour caractériser une droite, nous choisissons d'en donner trois afin de laisser le choix des données « utiles » aux étudiants. Les coordonnées de chacun des points peuvent être représentées facilement dans un repère. Cela a pour but de permettre aux étudiants d'explorer toutes les pistes de résolutions possibles (notamment la piste graphique).

Quelques éléments de solutions attendues

Nous n'aborderons pas ici les différentes techniques pour déterminer l'équation d'une droite (dont au moins deux points sont donnés). Nous ne présentons pas non plus en détails les étapes de résolution pour chacun des cas (le lecteur pourrait se référer à la rubrique « Analyse mathématique du problème »).

- Les équations associées aux cas particuliers donnés

Rappelons que la détermination des équations de droites ne fait pas parti de nos principaux objectifs de l'expérimentation. Les équations associées aux trois cas particuliers sont respectivement :

(1) : $y=\frac{5}{2}x-2 \Leftrightarrow 5x-2y-4=0$, pour tout couple de réels (x,y).

(2) : $y=\frac{1}{2}x-\frac{3}{4} \Leftrightarrow 2x-4y-3=0$, pour tout couple de réels (x,y).

(3) : $y=\frac{3}{4}x-\frac{7}{4} \Leftrightarrow 3x-4y-7=0$, pour tout couple de réels (x,y).

- Les ensembles des solutions

Les équations (1) et (3) admettent des solutions dans $\mathbb{Z}$. Ceci est évident, puisqu'un point à coordonnées entières est donnés dans chacun de ces deux cas. La méthode de résolution diophantienne permet d'obtenir l'ensemble des solutions à partir de ce couple d'entiers : $S_1=\{(2k;5k-2),k\in\mathbb{Z}\}$ pour l'équation (1) et $S_3=\{(1+4k;-1+3k),k\in\mathbb{Z}\}$ pour l'équation (3).

L'équation (2) n'admet pas de solution dans $\mathbb{Z}$. Cela peut être vérifié en calculant le $PGCD(2,4)$ et en utilisant le corollaire de la rubrique « méthode de résolution diophantienne ». On a bien $PGCD(2,4)=2$, or 2 ne divise pas 3, donc l'équation n'admet pas de solution. On peut aussi prouver ce résultat par « exploration » de l'équation (2). En effet, l'équation (2) est équivalente à $2x-4y=3$. Ainsi, pour tout couple d'entiers (x,y), le nombre $2x-4y$ est pair, donc il ne peut être égal à 3. On conclut que l'équation n'admet donc pas de solution entière.

En utilisant la méthode *graphique*, on peut faire une conjecture pour une partie des solutions du cas 1 et 3 (car une solution particulière est donnée). Mais elle sera « difficile » à appliquer pour résoudre le cas 2.

Par ailleurs, si la méthode de résolution par « exploration » permet aussi de résoudre les cas 1, elle est difficile à mettre en œuvre pour résoudre le cas 3 (cf. rubrique « S2-méthode par exploration »).

Le public de l'expérimentation

Nous avons proposé le problème aux étudiants de Master 1 et Master 2 de la filière mathématique de l'ENSup de Bamako. Rappelons que la formation de Master à l'ENSup est centrée sur des compléments disciplinaires (algèbre, analyse, géométrie, logique) de niveau Licence (L 3) et Master 1 de mathématiques ainsi que sur quelques notions de base de didactique des mathématiques. Les étudiants doivent aussi préparer et soutenir un mémoire au terme d'un stage à responsabilité dans un lycée. Donc, en principe, les notions arithmétiques et géométriques en jeu et les méthodes de résolutions du problème sont disponibles chez ces étudiants. Nous précisons aussi que les étudiants de Master 2 ont revu des notions d'arithmétique à l'ENSup.

Stratégies de résolution et difficultés envisagées des étudiants

Nous faisons l'hypothèse que des graphiques vont être construits, car l'énoncé est clairement dans un cadre géométrique et que c'est un usage de tracer une droite lorsqu'elle est en question dans un problème. Dans chacun des cas 1 et 3, le point à coordonnées entières qui est donné — $(2,3)$ pour le cas 1 et $(1,-1)$ pour le cas 3) — peut être un point de départ pour en « trouver d'autres », mais ceci ne permet pas l'exhaustivité. Et les pentes des droites n'étant pas entières, on ne peut en déduire directement d'autres points à coordonnées entières sur ces droites. Dans le cas 2, la stratégie graphique sera difficile à mettre en œuvre pour aboutir à la conclusion que la droite ne passe par aucun point à coordonnées entières.

Nous estimons aussi que le passage du cadre géométrique à l'arithmétique peut être difficile pour les étudiants étant donné que le problème proposé n'est pas habituel dans les enseignements.

Nous précisons que l'objectif de la situation est :

– D'identifier les stratégies de résolution des étudiants, relativement à celles données dans l'analyse a priori ;

– De faire en sorte que pour arriver à la résolution complète du problème, il faut mobiliser des théorèmes d'arithmétique. C'est-à-dire que les étudiants doivent nécessairement passer du cadre *géométrique* au cadre *arithmétique*.

4. Analyse des productions

Notre analyse des productions se focalise sur un certain nombre de points mis en avant dans les analyses précédentes. Ainsi, nous nous intéressons aux *registres* mis en œuvre dans les résolutions des étudiants. Ce registre peut être graphique, algébrique, fonctionnel ou bien arithmétique. Nous étudions les différentes stratégies d'étudiants par rapports aux méthodes : *S1 - Méthode graphique* ; *S2 - Exploration de l'équation* ; *S3 - Méthode de la résolution diophantienne*. Nous examinons aussi la prise en compte par les étudiants de l'existence et du nombre de solutions pour chacun des cas. Enfin, nous nous intéressons, aux raisonnements adoptés pour la détermination effective de l'ensemble des solutions. Vont-ils utiliser un raisonnement par l'inclusion ou par égalité ? Et comment ?

Dans le dépouillement, nous distinguons l'analyse des productions pour chacun des deux niveaux de formation afin d'identifier d'éventuels changements (ou une évolution) de conceptions d'étudiants du Master 1 au Master 2. Rappelons que les étudiants du Master 2 ont suivi en début d'année un cours d'arithmétique dans un module dénommé « complément d'algèbre ».

4.1 Classe de Master 1 (futurs professeurs d'enseignement secondaire)

L'effectif est de vingt étudiants. Le temps de résolution du problème est limité à une heure, le travail est individuel. Aucun document de mathématiques n'est autorisé. Chaque étudiant dispose de son trousseau de matériel de constructions géométriques et de sa calculatrice.

Dans un premier temps, les étudiants (plus de la moitié) commencent par construire un repère (orthonormé) du plan, représentent les points de l'énoncé et les droites. En démarrant dans le registre graphique, on peut s'attendre à l'adoption d'une stratégie de résolution graphique. Ce qui n'est finalement pas le cas. Les étudiants utilisent la représentation graphique pour « vérifier » l'alignement des points donnés. Il nous semble que pour les étudiants le dessin est une preuve mathématique.

Dans un deuxième temps, les étudiants déterminent les équations des droites. Certains utilisent des notions de géométrie vectorielle (vecteurs colinéaires, déterminant…), d'autres utilisent des notions de la géométrie analytique (équation générale ou réduite d'une droite). Nous observons que cette entrée dans le problème a été plus longue que prévue. Les étudiants y ont consacré trop de temps, en particulier, pour les deux derniers cas. Quelques étudiants n'ont donc pas pu arriver dans le temps imparti à la détermination de l'ensemble des solutions qui constitue l'objectif central de la situation. Nous observons aussi qu'en cette étape de détermination des équations de droites, les étudiants concluent leur calcul par une équation sous une forme algébrique ($ax+by+c=0$, avec a, b, c des réels), ou fonctionnelle ($y=ax+b$, avec a, b des réels) (cf. tableau 1).

La détermination de l'ensemble des solutions

Ils ne sont que cinq étudiants à trouver une réponse correcte pour au moins un cas. Mais aucun n'a résolu entièrement les trois cas. Les registres exploités sont l'algébrique et le fonctionnel. La méthode de résolution apparue est celle de l'exploration de l'équation. Comme on peut le voir sur la copie de Kadia (cf. Figure 3), les étudiants cherchent surtout à déterminer une condition nécessaire. On peut lire par exemple sur la copie de Kadia. : « pour que y soit entier, il faut que $x=2k$ avec $k\in\mathbb{Z}$ ». Elle ne se rend pas compte qu'elle a déterminé plutôt une condition suffisante. Sa résolution n'est donc pas complète.

donc $y = \frac{5x}{2} - 2$ est l'équation de la droite D_1

On cherche les points ~~passant pa~~ qui sont sur D_1 à coordonnées entières.

Pour y soit entière il faut que $x = 2K$ avec $K \in \mathbb{Z}$.

donc on obtient : $y = \frac{5}{2}(2K) - 2 = 5K - 2$

les points à coordonnées entières dans le même alignement que $(1, \frac{1}{2})$; $(2,3)$ est l'ensemble des points $M\begin{pmatrix} 2K \\ 5K-2 \end{pmatrix}$ avec $K \in \mathbb{Z}$.

Figure 3*. Production de Kadia pour le cas 1*

Pour le cas 2, les étudiants ayant résolu ont utilisé une stratégie par exploration d'équation qui aboutit à une égalité contradictoire (pour x et y entiers) : égalité entre entiers pairs et impairs. Ce qui leur a permis de conclure que le cas 2 n'admet pas de solution entière.

L'étudiant Tiékoro, lui, adopte un raisonnement différent. Mais il aboutit à la même conclusion, comme on peut le voir sur sa copie (cf. figure 4) :

> « $\forall x, y$, il n'existe pas un seul point à coordonnées entières dans le même alignement que ces *n* points car à chaque fois on ajoute $\frac{1}{2}$ à la valeur de *x* »

Déterminons l'équation de cette droite.

$(D) : y = ax + b$.

$-\frac{3}{2} = -\frac{3}{2}a + b$. $\quad -1 = -\frac{1}{2}a + b \Rightarrow 1 = \frac{1}{2}a - b$.

$\begin{cases} -3/2\, a + b = -3/2 \\ 1/2\, a - b = -3/2 \end{cases}$ $\quad b = \frac{1}{2}a - 1 = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}$

$-a = -3 \Rightarrow a = 3$ $\quad (D) : y = 3x + \frac{1}{2}$

$\forall x, y$ il n'existe pas un seul point à coordonnées entières dans le même alignement que ces n points. Car à chaque fois on ajoute $\frac{1}{2}$ à la valeur de x.

Figure 4. *Production de Tiékoro pour le cas 2*

La phrase de conclusion ne nous semble pas très explicite. Mais nous trouvons que son raisonnement peut être basée sur l'argument suivant :

Si on a une égalité « $y = 3x + \frac{1}{2}$ », il n'existe pas de *x* entier qui permet d'obtenir un *y* entier car si *x* est un entier alors $3x + \frac{1}{2}$ n'est pas entier.

Toujours sur ce cas 2, Oumar trouve qu'il n'existe pas de point à coordonnées entières « *car les points donnés ne sont pas entiers* ». Il ne donne aucune justification mathématique sur sa copie (cf. figure 5). A-t-il utilisé des propriétés mathématiques ? Son argument sous le graphique semble indiqué plutôt qu'il a utilisé un théorème en acte : « *si une droite passe par trois points dont toutes les coordonnées sont non entières, alors elle ne passe pas par des points à coordonnées entières* ». Il pouvait bien se rendre compte assez facilement que son théorème en acte n'est pas valide. Il suffit de l'appliquer au cas 1 ou 3. En effet, selon son théorème en acte, si les points entiers $(2{,}3)$ du cas 1 et $(1,-1)$ du cas 3 n'étaient pas donnés, on peut conclure aussi que ces droites ne passent pas par des points à coordonnées entières.

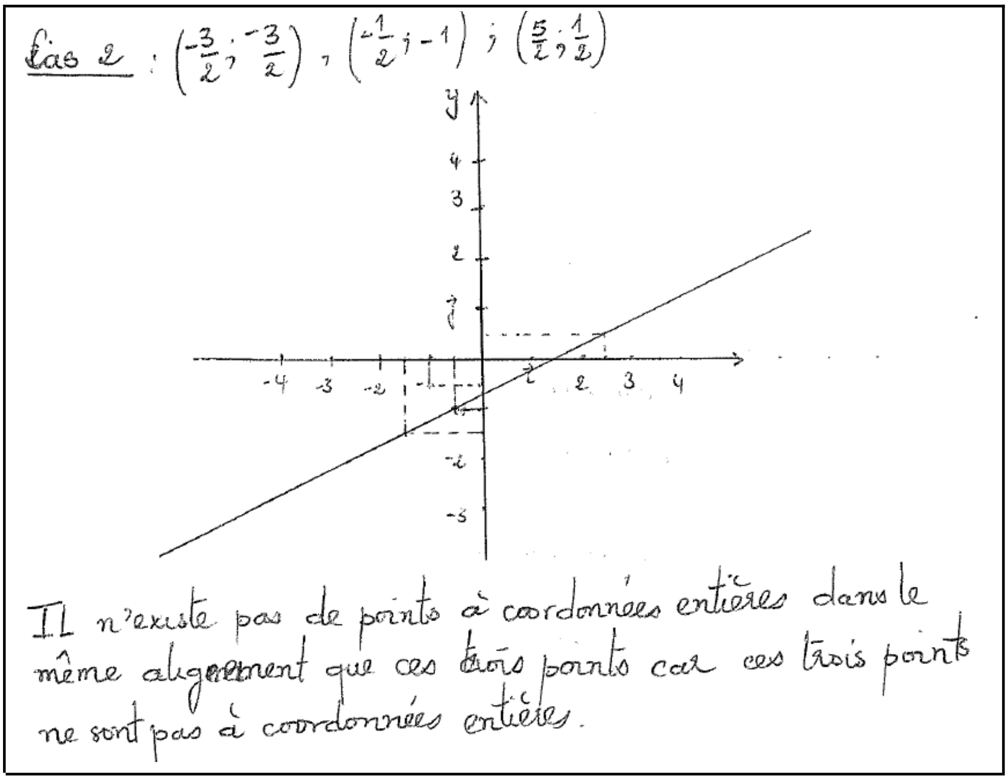


Figure 5. *Production de Oumar pour le cas 2*

Quant au cas 3, aucun étudiant de la classe n'a pu le résoudre. Ils reprennent sans succès la stratégie par exploration de l'équation. Nous lions cet échec à la difficulté des étudiants à explorer des pistes de résolutions dans un cadre mathématique inhabituel.

Nous avons par ailleurs trouvé que douze étudiants s'arrêtent sur une conclusion de la forme donné en figure 6.

$5x-2y-4=0$

$(AB): 5x-2y-4=0$ est l'équation Cartesienne de la droite (AB)

$E: \{(x,y) \in \mathbb{Z}^2 ; 5x-2y-4=0\}$: l'ensemble des couples d'entiers rélatif qui verifient l'équation de la droite (AB) est l'ensemble de tous les points ~~qui son~~ à coordonnés entières qui sont dans le même alignements que A et B

Figure 6. *Production de Mamadou pour le cas 1*

Cette conclusion ne correspond qu'à une réécriture de la question du problème dans un registre algébrique. Elle n'indique ni l'existence de solutions ni une détermination générique des couples solutions. Nous nous demandons si les étudiants ont bien compris ce qu'on attendait d'eux. Nous pensons qu'ils ont pu être aussi bloqués dans leur démarche de résolution et ne savaient plus quoi faire de l'équation de droite obtenue. Il faut noter qu'il leur restait du temps pour continuer la résolution, ils ont choisi de rendre leur copie. Toutefois, nous estimons qu'une intervention pour relancer ces étudiants dans la résolution pouvait être utile. Par exemple, en leur demandant de trouver des points entiers ou bien de trouver une formule générique qui permet de déterminer tous les points à cordonnées entières.

Pour cette classe de Master 1, si les notions de diviseur, multiple sont utilisées par quelques étudiants, le *PGCD*, le théorème de Bézout, le théorème de Gauss n'ont pas été évoqué. Nous faisons l'hypothèse que, soit les étudiants n'ont pas reconnu que le problème relevait du domaine de l'arithmétique, soit ils ont tout simplement oublié ces concepts arithmétiques.

Nous avons aussi relevé des erreurs assez surprenantes. Prenons par exemple, la copie de Soumaïla (cf. figure 7). Il réduit à $\mathbb{N}$ l'ensemble de recherche des solutions (cf. figure 7 , première ligne). Il fait clairement une confusion entre « entier » et « entier naturel ». Dans la suite de son raisonnement, on peut comprendre aussi « qu'il suffit d'exprimer x et y en fonction d'un entier k'' pour que x et y soit des entiers ».

Trouvons tous les $x, y \in \mathbb{N}$, $3x-4y-7=0 \Rightarrow 3x = 4y+7 \Rightarrow x = \frac{4y+7}{3}$ (4)

$x \in \mathbb{N}$ si et seulement si 3 divise x c'est à dire $3 | 4y+7 \Rightarrow 4y+7 = 3k''$

où $k'' \in \mathbb{N}$, $\Rightarrow y = \frac{3k''-7}{4}$

A partir de (4) on a : $\cancel{x = \frac{4(3k''-7)+7}{}}$ $x = k''$

D'où l'ensemble des points à coordonnées entières dans le même alignement que F, G et H est : $\{(k'', \frac{3k''-7}{4}) / k'' \in \mathbb{N}\}$.

***Figure** 7. Production de Soumaïla pour le cas 3*

En adoptant un raisonnement semblable à celui de Soumaila, d'autres étudiants ont aussi abouti à un ensemble générique erroné.

Nous pouvons dire aussi que les *conceptions algébriques* et *fonctionnelles* de la droite sont assez prégnantes chez la majorité des étudiants. Cela apparaît dans les stratégies de résolutions à travers le choix d'écriture des équations de droites mais aussi par le fait que le graphique n'a pratiquement pas été exploité.

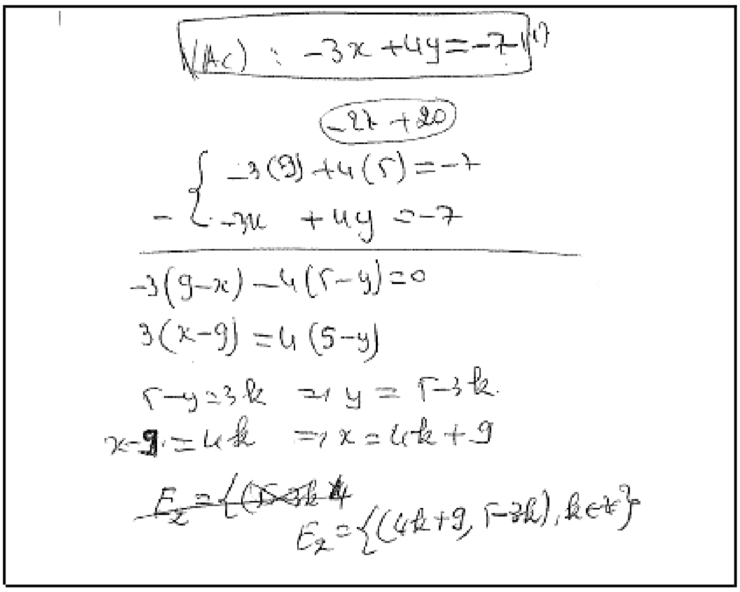
4.2 Classe de Master 2 (futurs professeurs d'enseignement secondaire)

Ils sont au total *sept* étudiants. Ils ont travaillé en binôme. Toutes nos analyses s'établiront sur quatre productions écrites, étant donné que nous n'avons pas mis en place de dispositifs pour recueillir les interactions d'étudiants au sein des binômes.

Comme pour la classe de Master 1, les étudiants commencent dans le *registre graphique*. Ils construisent le repère et tracent les droites. Mais ils l'abandonnent aussitôt et débutent la détermination des équations de droites dans le *registre algébrique.*

Au niveau de la *détermination de l'ensemble des solutions*, une nette distinction apparaît entre les deux classes. Deux binômes passent dans le registre *arithmétique*. Ils évoquent assez vite les notions de *congruence*, le théorème de *Bézout*, le théorème de *Gauss*. Mais ici aussi, un binôme donne la même conclusion que les *douze* étudiants de Master 1, à savoir une reformulation algébrique de l'énoncé (cf. *Figure 6*).

Sur *deux* copies, on retrouve l'utilisation de la méthode de « *résolution d'équation diophantienne »*. Nous trouvons toutefois que les étudiants utilisent cette méthode comme une « recette ». On constate par exemple, qu'ils recherchent un autre couple d'entiers solutions de l'équation alors qu'il y en a un parmi les points donnés dans l'énoncé. Le binôme 1 par exemple, utilise le couple $(9,5)$ comme solution particulière (cf. *Figure* 8).


$\boxed{(AC) : -3x + 4y = -7}$ (1)

$-27 + 20$

$\left\{ \begin{array}{l} -3(9) + 4(5) = -7 \\ -3x + 4y = -7 \end{array} \right.$

$-3(9-x) - 4(5-y) = 0$

$3(x-9) = 4(5-y)$

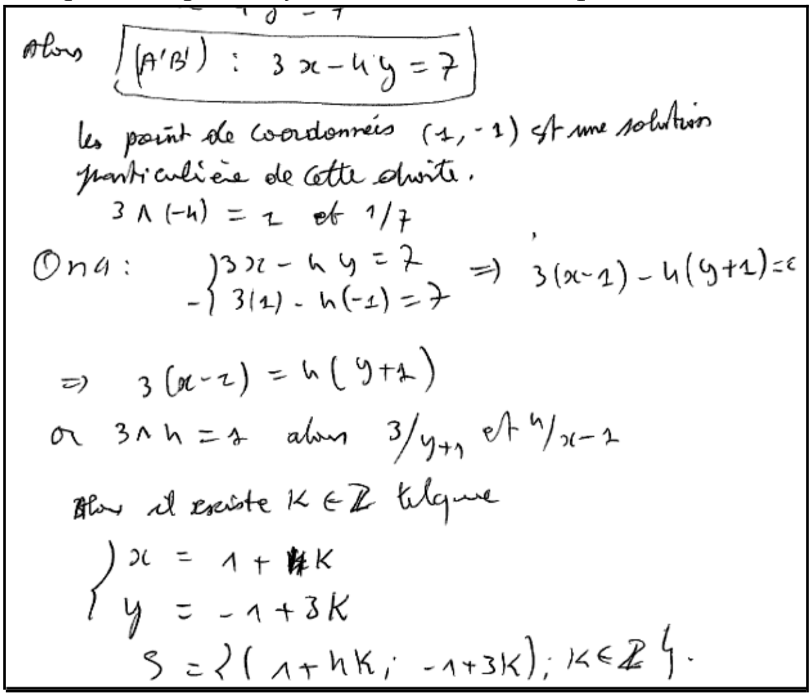
$5-y = 3k \Rightarrow y = 5-3k$

$x-9 = 4k \Rightarrow x = 4k+9$

$E_Z = \{(4k+9, 5-3k), k \in \mathbb{Z}\}$

Figure 8. *Production binôme1 pour le cas 3*

Lorsqu'on regarde le raisonnement de la copie d'un autre binôme (cf. *Figure 9*), ils trouvent que le couple $(1,-1)$ est une solution particulière. Mais sur la ligne suivante, ils utilisent encore la propriété du *PGCD* pour vérifier de nouveau l'existence d'une solution. Dans la suite de leur résolution, ils utilisent le théorème de *Bézout* et le théorème de *Gauss* pour déterminer une solution générique. Bien qu'ils utilisent explicitement le symbole de l'implication $\Rightarrow$, le binôme ne vérifie pas l'ensemble solution trouvée. Il est possible aussi qu'ils n'interprètent peut être pas ce symbole comme une implication.



Alors $\boxed{(A'B') : 3x - 4y = 7}$

les point de coordonnées $(1,-1)$ est une solution particulière de cette droite.

$3 \wedge (-4) = 1$ et $1/7$

On a : $\begin{cases} 3x - 4y = 7 \\ 3(1) - 4(-1) = 7 \end{cases} \Rightarrow 3(x-1) - 4(y+1) = 0$

$\Rightarrow 3(x-1) = 4(y+1)$

or $3 \wedge 4 = 1$ alors $3 / y+1$ et $4 / x-1$

Alors il existe $K \in \mathbb{Z}$ tel que

$\begin{cases} x = 1 + 4K \\ y = -1 + 3K \end{cases}$

$S = \{(1+4K ; -1+3K) ; K \in \mathbb{Z}\}$.

Figure 9. *Copie d'un binôme pour le cas 3*

Un autre binôme utilise la stratégie d'exploration de l'équation en exploitant particulièrement la notion de congruence pour résoudre le cas 3 (cf. figure 10). Il aboutit à l'ensemble générique attendu. Par contre, des questions se posent sur la démarche. Il applique les propriétés de congruence à l'équation $4y-3x=7$ sans au préalable définir l'ensemble d'appartenance de *x* et *y*. Est ce qu'ils ont pris implicitement *x* et *y* comme des entiers ? Est-ce une omission ? Ou est-ce une confusion autour du concept de congruence ?

Cas 3 :

On a : $y = \frac{3}{4}x - \frac{7}{4} \Leftrightarrow 4y = 3x - 7$

$\Leftrightarrow 4y = 3x - 6 - 1$

$= 3(x-2) - 1$

$4y = 3(x-2) - 1 \Rightarrow 4y \equiv -1\,(3)$

$\equiv 8\,(3) \Leftrightarrow y \equiv 2\,(3)$

$\ddagger \quad \Leftrightarrow y = 3k+2$

$4y = 3x - 7 \Leftrightarrow 3x = 4y + 7$

$= 4(3k+2) + 7$

$= 12k + 8 + 7$

$= 12k + 15$

$\Leftrightarrow x = 4k+5$

$(x, y) = (4k+5 ; 3k+2)$; $k \in \mathbb{Z}$.

Figure 10. *Production d'un binôme sur le cas 3*

Les étudiants effectuent ce qui nous semble être une simplification par 4, pour passer de $4y \equiv 8(3)$ à $y \equiv 2(3)$. Or il n'existe pas de propriété de simplification avec la notion de congruence. S'ils ont appliqué une propriété de congruence entre les deux étapes, c'est celle-ci : « si a est premier avec n et si $ab \equiv ac(n)$, alors $b \equiv c(n)$ avec a, b, c et n des entiers, a non nul ». On observe donc que c'est une implication qui est en jeu. Mais les étudiants ne se rendent pas compte de leur erreur puisqu'ils ne vérifient pas si l'ensemble des solutions générique vérifie bien l'équation de départ.

En conclusion pour la classe de Master 2, la mobilisation de l'arithmétique dans la résolution a été beaucoup plus « rapide » (sauf pour un binôme). Cela pourrait s'expliquer, soit par le fait que la classe est revenue sur l'arithmétique à l'ENSup soit à l'organisation du travail en binôme. Toutefois, les argumentations et l'utilisation des propriétés indiquent quelques lacunes (ou un manque) de rigueur dans les raisonnements mathématiques. On peut noter aussi que la classe de Master 2 (comme en Master 1), n'exploite pas le graphique (qu'ils ont construit) dans les méthodes de résolution. La conception algébrique de la droite est aussi bien présente en Master 2.

Conclusion

L'expérimentation nous a permis de mettre les étudiants dans une situation de mobilisation de leurs connaissances arithmétiques pour résoudre un problème formulé dans un cadre géométrique. Nous avions deux principales hypothèses de départ. La première était que ce type de situation étant absent dans l'enseignement de l'arithmétique, les étudiants peuvent rencontrer des difficultés dans la résolution. Les résultats de l'expérimentation consolident cette hypothèse. Ils ne sont que quelques uns à découvrir et à mobiliser les concepts de multiple, diviseur et les théorèmes de Bézout et de Gauss. La seconde hypothèse était que les étudiants feraient des allers-retours entre les différents registres lors de leur résolution et que cela permet de faire évoluer leur conception des notions arithmétiques. Cette hypothèse nous parait moins satisfaite. Le registre graphique par exemple n'a été utilisé par les étudiants que pour vérifier l'alignement des points donnés. Ils n'y sont plus revenus durant leur résolution. Nous avons aussi observé que seuls deux étudiants ont vérifié l'ensemble des solutions génériques obtenus en plaçant quelques points sur le graphique.

Enfin, en observant et en analysant les causes d'échecs d'étudiants, qui ne sont pas parvenus à une solution et de ceux qui ont été retardé dans leur découverte, nous pensons qu'ils ont été bloqué par la conception suivante : « on identifie et on rentre dans un problème d'arithmétique par des notions d'arithmétiques ». Il y a aussi des « lacunes » dans les connaissances et dans les raisonnements mathématiques (condition nécessaire / condition suffisante). Les étudiants ayant abouti à un ensemble générique ne se sont pas posé la question de savoir s'ils ont trouvé tous les points. Il faut noter aussi une forte prégnance de la conception algébrique de la droite (à travers l'écriture algébrique). Ce qui de notre point de vue est à la base des difficultés de passage au registre arithmétique que la résolution complète du problème nécessitait.

Les étudiants affirment à la suite de l'expérimentation qu'ils connaissent bien les notions arithmétiques en jeu mais qu'ils étaient focalisés sur le cadre géométrique. Il apparaît donc que la majorité d'entre eux n'avait pas acquis une maîtrise opérationnelle dans le cadre géométrique des concepts arithmétiques sous-jacents au problème. Notre situation expérimentée illustre comment des passages dans des cadres différents peuvent déstabiliser les apprenants et créer éventuellement des significations riches pour les notions arithmétiques.

Il nous parait intéressant en perspective, d'approfondir cette recherche en étudiant la situation avec d'autres types d'objets comme, une parabole*,* un cercle, une région de plan définie par des droites ou d'étudier des caractéristiques de figures géométriques sur une grille, dans l'objectif d'explorer le potentiel du cadre géométrique dans l'enseignement de l'arithmétique.

BIBLIOGRAPHIE

BATTIE, V. (2003). *Spécificités et potentialités de l'arithmétique élémentaire pour l'apprentissage du raisonnement mathématique*. Thèse de doctorat de l'Université Paris 7 - Denis Diderot.

BROUSSEAU. G. (1997) *La théorie des situations didactiques*. La Pensée Sauvage. Grenoble

COLLECTION CIAM. (1999). *Arithmétique*. Dans « Terminale Sciences Mathématiques ».

DISSA, S. (2013). *Une étude épistémologie et didactique de l'arithmétique au lycée au Mali* . Mémoire de Master2 - Université Joseph Fourier - Grenoble I.

DOUADY, R. (1986). Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherche en Didactique des Mathématiques , 7* (2).

DUVAL, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la Pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives , 5*, 37-65.

LAFOND, M. (2015). Représenter plus pour démontrer plus. *Bulletin vert de l'APMEP* (513), 132-142.

GARDES, M-L. (2013). *Étude de processus de recherche de chercheurs, élèves et étudiants, engagés dans la recherche d'un problème non résolu en théorie des nombres*.Thèse de doctorat de l'Université Claude Bernard - Lyon I.

OUVRIER-BUFFET, C. (2003). *Construction de définitions / construction de concept : vers une situation fondamentale pour la construction de définitions en mathématiques*. Thèse de doctorat de l'Université Joseph Fourier - Grenoble I.

RAVEL, L. (2003). *Des programmes a la classe : étude de la transposition didactique interne-exemple de l'arithmétique en terminale s spécialité mathématique*.Thèse de doctorat de l'Université Joseph FOURIER - Grenoble I.

VERGNAUD, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherche en Didactique des Mathématiques , 10* (2-3).

Programmes officiels

Programmes, savoir-faire & découpages de programme des classes de 10ème, 11ème, 12ème. Dans programmes de mathématiques de 1992 du Ministère de l'éducation nationale du Mali.

Programme des classes de 7ème, 8ème, 9ème du second cycle de l'enseignement fondamental. Dans programmes de mathématiques de 1992 du Ministère de l'éducation nationale du Mali.