UNE ÉTUDE DES ARTICULATIONS ENTRE TECHNIQUES DE CALCUL ET CONSTRUCTION DE SYSTÈMES DE NOMBRES DANS LES MANUELS DE COLLÈGE

Céline CONSTANTIN
LIRDEF, Faculté d'Education
Université de Montpellier

Résumé. Ce texte propose d'interroger des articulations potentielles entre techniques de calcul et construction de systèmes de nombres tout au long du collège dans le curriculum officiel. Prenant appui sur le cas de la propriété de distributivité de la multiplication par rapport à l'addition, les analyses de programmes et de manuels conduites poursuivent un double objectif : celui de déterminer une organisation possible des savoirs à enseigner et des incomplétudes éventuelles au regard des spécificités de l'organisation envisagée. Nous discutons enfin des conséquences possibles des choix observés.

Mots-clés. Calcul numérique, calcul algébrique, systèmes de nombres

Abstract. This text aims to question the potential links between computation techniques and the construction of systems of numbers in the official curriculum of the French secondary school. Based on the case of the distributive law of multiplication over addition, our textbooks and curricula analysis aims for a dual purpose: determining a possible organization of the knowledge to be taught, and evaluate some incompleteness in the light of the considered organization features. We finally discuss consequences of the observed choices.

Keywords. Numerical computation, algebraic calculus, systems of numbers

Introduction

Les systèmes de nombres rencontrés tout au long de la scolarité obligatoire correspondent à des ensembles de plus en plus vastes. L'organisation de l'étude de ces ensembles dans les différents niveaux de classe conduit à des constructions nécessairement partielles à certains moments dans le curriculum, qui diffèrent de la construction mathématique de ces ensembles dans l'ordre de leur inclusion. Les nombres relatifs sont par exemple introduits en classe de 5^{e} en France (élèves de 12-13 ans), avec l'addition et la soustraction, tandis que leur multiplication est vue en 4^{e}, et que les nombres décimaux ou rationnels positifs sont abordés à l'école. La multiplication est alors définie sur les entiers, puis sur le domaine restreint $D^{+} \times \mathbb{N}$ en fin de primaire. Ceci interroge la manière dont l'enseignement peut prendre en charge la problématique de l'extension des systèmes de nombres. L'étude de l'enseignement du numérique réalisée par Bronner (Bronner 2008) a montré que l'évolution de la transposition didactique a conduit à la disparition de cette problématique apparue dans les années soixante.

Côté élève, de nombreux travaux témoignent de rapports personnels aux nombres peu satisfaisants qui se conjuguent à des difficultés dans les techniques de calcul à la fois numérique et algébrique (Sfard 1991, Herscovics & Linchevski 1994, Gallardo 2002, Croset 2009, Vlassis 2010 ou Briant & Bronner 2017 par exemple). Ces difficultés relèvent par exemple de la prise en compte de la nature des coefficients ou du degré des expressions dans la catégorisation des techniques de résolution d'équation (Briant & Bronner 2017), ou des techniques de développement et de factorisation (Croset 2009), et engendrent dans leur sillage des techniques de calcul fragiles. Elles peuvent aussi relever de la gestion du signe – devant un nombre dans les sommes algébriques, avec des erreurs comme $2x-3+5=x-8$ observées à la fois dans le domaine numérique et algébrique par Herscovics & Linchevski (1994) notamment.

Une recherche antérieure sur l'enseignement du calcul algébrique (Constantin 2014) nous a amenée à envisager des savoirs relatifs aux systèmes de nombres comme potentiellement à même d'améliorer les apprentissages autour du calcul algébrique, au regard d'un domaine d'étude plus large, à la fois numérique et algébrique. Nous intéressant plus spécifiquement au moment où l'on va considérer certains objets comme des nombres, c'est-à-dire au moment où l'on décide d'opérer sur ces derniers en les additionnant, les multipliant ou les comparant, ce texte propose d'interroger l'articulation entre techniques de calcul et construction de systèmes de nombres dans l'enseignement, en faisant l'hypothèse que l'étude de ces articulations peut être utile voire nécessaire à la constitution d'un rapport personnel plus idoine aux nombres et aux techniques de calcul.

Historiquement, l'émergence de tels objets répond à la fois à des problèmes de mesure de grandeurs, pour les nombres entiers et rationnels positifs, et à la construction de techniques de calcul « pratiques » dans la résolution d'équations algébriques, pour les nombres relatifs. Les techniques de calcul se trouvent alors tantôt en amont de l'introduction de « nouveaux nombres », et tantôt en aval, tout en généralisant les propriétés anciennement connues sur les ensembles de nombres antérieurs. Ceci nous amène à envisager les aspects formalisateur, unificateur et généralisateur (ou FUG, Robert 2011) des savoirs à enseigner comme caractéristiques potentielles des articulations entre systèmes de nombres et techniques de calcul tout au long du curriculum.

Afin de caractériser quelque peu les objets de notre étude, nous proposons, dans un premier temps, de préciser ce que nous entendons par systèmes de nombres et techniques de calcul numérique et algébrique. Nous présentons ensuite une organisation possible des savoirs à enseigner, compatible avec l'écologie des programmes, autour des aspects formalisateur, unificateur et généralisateur d'une notion centrale dans l'articulation entre systèmes de nombres et techniques de calcul au collège : la propriété de distributivité de la multiplication par rapport à l'addition. Cette organisation est issue de la recherche que nous avons conduite en 2014. Les résultats de cette recherche ont montré que si les articulations envisagées semblaient en filigrane dans les textes officiels alors en vigueur, elles étaient peu prises en charge dans les manuels, ce qui conduit à faire l'hypothèse qu'il en soit de même dans les classes. Cet article propose de renouveler les analyses conduites dans le cadre des programmes actuels et de manuels récents, afin de déterminer si la problématique de l'extension des systèmes de nombres est davantage mise à l'étude au regard de l'organisation des savoirs considérée. Enfin, nous abordons en conclusion des conséquences éventuelles d'une telle prise en compte ou non sur les apprentissages, ainsi que les tâches potentiellement à même de nourrir ces articulations.

1. Problématique

1.1. Techniques de calcul et systèmes de nombres

Afin de préciser les objets de notre étude, nous allons tout d'abord définir ce que nous entendons par techniques de calcul et systèmes de nombres. Suivant la caractérisation proposée par Chevallard (1989), nous désignons par système de nombres un ensemble d'objets sur lequel on définit une addition, associative, commutative, et possédant un élément neutre, ainsi qu'une multiplication ayant les mêmes propriétés, et qui soit distributive par rapport à l'addition. On considère de plus une relation d'ordre total compatible avec l'addition et la multiplication sur ces systèmes. Celle-ci permet alors que « l'addition et la multiplication vérifient la règle de simplification » (Chevallard 1989). Deux propriétés complètent cette définition. La première stipule que toute équation du premier degré non identiquement vérifiée admet au plus une solution dans le système, et la seconde permet de définir la différence de deux éléments a et b lorsque $a>b$, en considérant qu'il existe un objet c de l'ensemble des « nombres » considérés tel que $b+c=a$.

> [Cette dernière propriété] est motivée par le problème récurrent et fondamental que soulèvent les systèmes de nombres étudiés au collège : de tels systèmes, en effet, **ne contiennent jamais assez de nombres.** La nécessité de leur extension répétée (de $\mathbb{N}$ à $\mathbb{Z}$, de $\mathbb{Z}$ à $\mathbb{Q}$, etc.) découle de cette insuffisance, à laquelle on peut trouver une double origine.
> La première est, si l'on peut dire, extrinsèque, et naît de l'usage originel que l'on entend faire des nombres : **mesurer des grandeurs**. […]
> Un second type d'insuffisance des systèmes de nombres utilisés est, si l'on peut dire, intrinsèque : il tient au fait que, à un moment donné, on dispose de trop peu de nombres pour qu'en résulte un calcul algébrique « agréable ». D'où le passage aux nombres négatifs, puis aux nombres rationnels (soit de $\mathbb{N}$ à $\mathbb{Z}$, etc.) et, plus tard, aux nombres complexes, par le plongement de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$.(Chevallard 1989 p. 51-52).

Le premier système de nombres rencontré à l'école est celui des entiers naturels. Les systèmes qui émergent au collège vont étendre celui-ci et prolonger en particulier les propriétés des opérations anciennement construites, que l'algèbre permettra de formuler et d'étudier. Les écritures produites pourront fonder des règles de calcul à la fois numérique et algébrique, ce qui constitue une étape non négligeable dans l'extension de ce que l'on considère comme « calcul », nous allons y revenir. Les enjeux d'extension et de formalisation de propriétés qui apparaissent ici nous amènent à considérer des aspects formalisateur, unificateur et généralisateur (Robert 2011) des savoirs à enseigner comme potentiellement au cœur de l'articulation entre techniques de calcul et systèmes de nombres tout au long du collège. Ces aspects permettent d'interroger la distance et le lien entre connaissances anciennes et connaissances nouvelles.

Une notion nouvelle, à un moment donné du curriculum, est ainsi dite unificatrice, si elle unifie des connaissances anciennes traitées de manière isolée jusqu'alors. Elle est généralisatrice si elle accompagne une extension de l'ancien, lui conférant une portée plus large ; et formalisatrice, si elle en apporte un formalisme nouveau, non nécessairement symbolique. Avant d'aborder l'articulation entre techniques de calcul et systèmes de nombres, nous allons préciser ce que l'on entend par calcul algébrique afin notamment de questionner les relations entre calcul numérique et calcul algébrique.

Dans les cadres numérique et algébrique, les calculs se distinguent à la fois par les objets à produire, les objets manipulés et par les propriétés soutenant les techniques afférentes, ce que permet de clarifier le modèle des expressions symboliques algébriques dans les travaux de Drouhard (Drouhard & Panizza 2012).

Adoptant un point de vue linguistique, les calculs sont envisagés comme des transformations portant sur des « expressions bien formées », c'est-à-dire des assemblages réalisés par agrégation de symboles, de chiffres, de lettres, comme « $3x+5$ »[1]. Les chaînes de caractères se forment en suivant un certain nombre de règles d'écriture et de réécriture[2] constituant leur grammaire, et l'ensemble des chaînes de caractère constitue alors un langage (noté L).

Le calcul algébrique est modélisé par un ensemble de substitutions et de transformations de mouvement. Les transformations de mouvement sont des applications $T : L \rightarrow L$, qui à toute expression symbolique, associent une autre expression, égale, en s'appuyant sur les propriétés de corps commutatif ordonné de l'ensemble des nombres réels. Par exemple, la chaîne de caractères « $3x+5=5+3x$ » peut être considérée comme résultant d'une transformation de mouvement T fondée sur la commutativité de l'addition et telle que :

$$T(\text{« } 3x+5 \text{ »}) = \text{« } 5+3x \text{ »}$$

La lecture de l'égalité « $3x+5=5+3x$ » est alors soutenue par une mise en relation entre le membre de droite de l'égalité et le membre de gauche : il en est l'image par une transformation de mouvement, autrement dit l'issue d'un calcul algébrique. Cette modélisation permet de mettre l'accent sur une interprétation nécessaire de l'égalité en termes de manipulation des écritures et ce en lien avec les propriétés mathématiques assurant l'équivalence des programmes de calcul[3] associés aux expressions. Cette interprétation s'avère très éloignée du calcul numérique tel qu'il est essentiellement pratiqué à l'école comme nous allons le voir.

Le calcul numérique dans $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{D}$ consiste principalement à exécuter une ou plusieurs opérations sur des nombres conduisant à l'écriture réduite d'un nombre (un résultat) égal à une expression numérique donnée. Cette exécution, amenant par exemple à écrire « $9\times5=45$ », s'appuie sur des connaissances numériques mémorisées pour effectuer le produit des nombres. Parce qu'elle ne porte pas sur les écritures, l'effectuation du calcul ne correspond pas à une transformation de mouvement. Pour les mêmes raisons, une égalité reposant sur une décomposition comme « $45=5\times9$ » ne réfère pas à une transformation sur le langage (arithmétique ici).

Le calcul algébrique et le calcul numérique fonctionnent de manière extrêmement différente de ce point de vue, ce qui amène à interroger la nature des articulations possibles entre techniques de calcul numérique telles qu'elles peuvent exister au primaire et techniques de calcul numérico-algébrique dans la construction de systèmes de nombres au collège. Or, nous avons montré dans une recherche antérieure (Constantin 2014) que les élèves ont peu

[1] Nous employons les guillemets à l'instar de Drouhard & Panizza (2012) pour désigner des expressions symboliques algébriques en tant qu'élément d'un langage.

[2] Nous renvoyons le lecteur intéressé à Drouhard & Panizza (2012) pour une présentation de ces règles dans leur principe.

[3] Nous reprenons ici le sens donné à cette notion par Chevallard & Bosch (2012). Les expressions algébriques sont ainsi considérées comme des énoncés symboliques traduisant des programmes de calcul dont des expressions rhétoriques renvoient à la description d'un ensemble de calculs à effectuer, dans un certain ordre. Deux programmes de calcul sont alors dits équivalents lorsqu'ils renvoient la même valeur pour toutes les valeurs attribuées aux variables sur un domaine considéré.

d'occasions de rencontre, dans le langage arithmétique, avec des transformations de mouvement à l'école.

Les premières que l'on peut identifier apparaissent dans l'enseignement de la multiplication. L'égalité « $4+4+4=4\times 3$ » relève ainsi de la transformation « $4+4+4$ » $\underset{déf}{\rightarrow}$ « 4×3 » reposant sur la définition de la multiplication par addition itérée. De la même façon on pourra trouver des égalités comme « $3\times 4=4\times 3$ » issue de la transformation «3×4» $\underset{commut}{\rightarrow}$ «4×3», fondée sur la commutativité de la multiplication. Enfin, le cas d'égalités telles que « $13\times 12=(13\times 10)+(13\times 2)$ », accompagnant la description de techniques de calcul dans certains manuels, pose question au regard de leur mode de production. Elles peuvent émerger d'une composition de transformations liées à l'addition itérée, ou bien d'une double modélisation en appui sur un dénombrement d'objets organisés en rectangle. Dans ce dernier cas, étant assurée par l'invariance du nombre selon l'organisation de la collection, l'égalité ne provient pas d'une transformation de mouvement. Quoi qu'il en soit, ces transformations, qui pourront être présentes en début d'apprentissage, au moment de la construction de la multiplication, auront certainement dans les classes une place réduite par rapport aux effectuations.

Les seules autres transformations de mouvement existantes à l'école primaire sont associées au travail sur les écritures décimales de nombres et sur les décompositions additives qui donnent lieu à des écritures comme « $520=(5\times 100)+(2\times 10)$ ». La transformation de mouvement à l'œuvre porte sur les chiffres de l'expression arithmétique « 520 » et se base sur les propriétés mathématiques de la numération, c'est-à-dire de la valeur des chiffres selon leur rang dans l'écriture décimale de position. Ces transformations de mouvement dans le langage arithmétique L_{Arithm} sont cependant de nature très différente des transformations de mouvement dans le langage algébrique L_{Alg}. En effet, d'une part elles portent sur les chiffres, ce qui n'a pas d'équivalent dans les expressions de L_{Alg}, et d'autre part, les propriétés activées réfèrent à une théorie de la numération particulière dans la mesure où elle donne un certain sens à la syntaxe. Les seuls équivalents que l'on pourrait envisager dans L_{Alg} seraient ceux de l'effacement du signe $\times$ pour « $3\times x=3x$ » ou du « 1 » dans « $1x=x$ » (ou du « x » dans « $0x=0$ »). Or, les transformations de mouvement dans le calcul algébrique sont celles qui relèvent plutôt de l'application des propriétés de corps de $\mathbb{R}$. Plus encore, dans les décompositions des écritures décimales de nombres, l'interprétation d'une expression telle que « $(5\times 100)+(2\times 10)$ » n'est pas véritablement envisagée comme étant celle d'un programme de calcul, formalisant davantage une décomposition liée aux unités de numération, que l'idée d'effectuer deux produits avant d'ajouter les résultats.

Ceci nous amène à postuler que les techniques de calcul numérico-agébrique émergeant au collège autour des systèmes de nombres sont en rupture avec les techniques de calcul numériques telles qu'elles existent à l'école, en particulier parce que l'interprétation des écritures comme objets transformables n'y est pas véritablement travaillée[4].

[4] Cette hypothèse nous paraît néanmoins à réinterroger au vu des nouvelles dispositions du programme publiées au Bulletin Officiel n° 30 du 26 juillet 2018 qui précisent les attendus en cycle 3 concernant le calcul en ligne. Il s'agit pour les élèves de savoir « calculer avec le support de l'écrit, en utilisant des écritures en ligne additives, soustractives, multiplicatives, mixtes ». De nouvelles analyses de manuels de primaire seraient à conduire afin de déterminer dans quelle mesure ce calcul pourrait renvoyer à des transformations de mouvement et comment elles pourraient être mises à l'étude et s'articuler, plus tard, au calcul algébrique.

Afin d'étudier plus avant les relations entre techniques de calcul, à la fois numériques et algébriques, et la construction de systèmes de nombres tout au long du collège, nous allons nous centrer sur l'une des opérations considérées pour ces systèmes : la multiplication. Nous nous centrons de plus sur les techniques de calcul fondées par l'une des propriétés de la multiplication : la propriété de distributivité par rapport à l'addition, propriété qui est au cœur des techniques de calcul algébrique enseignées en collège.
Nous abordons maintenant une organisation possible des savoirs à enseigner autour de cette propriété, avant d'analyser les choix des manuels de ce point de vue.

1.2. Une co-construction en filigrane dans les programmes

Dans cette partie, nous présentons une organisation possible des savoirs liés à la distributivité et aux techniques de calcul afférentes qui articule les constructions de systèmes de nombres et de techniques de calcul tout au long du collège au regard des caractères formalisateur, unificateur et généralisateur de la distributivité. Cette organisation est issue d'une recherche antérieure (Constantin 2014) et vise à déterminer dans quelle mesure ces aspects peuvent organiser l'étude de l'extension des systèmes de nombres dans le curriculum. Nous proposons dans ce texte, de renouveler nos analyses en nous appuyant sur les « nouveaux » programmes (MEN 2015) et sur les documents d'accompagnement des programmes de 2008 (MEN 2008), ces derniers étant cités comme référence dans les documents ressources associés aux programmes actuels. Nous complétons ces analyses à partir de l'étude de quelques extraits de manuels de primaire afin de mettre en regard les techniques de calcul anciennes et les techniques de calcul en construction au collège fondées par la propriété de distributivité. Nos analyses portent sur la place et le rôle potentiel de la propriété de distributivité dans la construction de techniques de calcul au fur et à mesure des extensions des systèmes de nombres : dans quelle mesure cette propriété revêt-elle des caractères formalisateur, unificateur et généralisateur ?

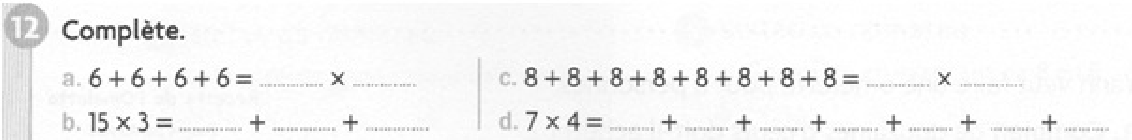
Un premier mouvement de généralisation : des entiers aux décimaux

Des techniques de calcul reposant sur la distributivité apparaissent dans les programmes de cycle 2 et de cycle 3 (élèves de 7 à 12 ans) au travers de l'injonction suivante : « Utiliser les propriétés des opérations, y compris *celles du type* $5\times 12=5\times 10+5\times 2$ ». Cet usage implicite de la distributivité concerne à la fois des techniques de calcul mental et de calcul posé de multiplications sur l'ensemble des nombres entiers naturels. Ainsi, le calcul mental de 15×102 peut consister *a priori* à multiplier 15 par 100 puis par 2 avant d'ajouter les résultats. De même, en posant 563×24 en fin de primaire, la technique usuelle consiste à effectuer le produit de 563 par 4 dans une première ligne, puis de 563 par 20 dans une seconde ligne, et enfin d'ajouter ces produits partiels dans une dernière ligne. Au collège, ces différentes techniques peuvent apparaître comme isolées dans le sens où, par nature, elles s'excluent *a priori*. Lorsqu'elle devient objet d'enseignement officiel dans les programmes, au cycle 4 (élèves de 12-16 ans), la propriété de distributivité peut alors unifier ces techniques de calcul tout en les justifiant. Elle formalise de plus une propriété commune des systèmes de nombres rencontrés jusqu'alors : entiers et décimaux.

Notons toutefois que l'expérimentation que nous avons conduite dans cette perspective (Constantin 2014) montre des difficultés non négligeables, pour l'enseignant comme pour l'élève, à faire émerger une transformation de mouvement, y compris dans le langage arithmétique.

Examinons plus avant les constructions antérieures des opérations et de leurs propriétés en cycle 2 et cycle 3 afin de caractériser les spécificités de cette unification.

La multiplication est introduite en cycle 2 et peut être définie par addition itérée ainsi que le donne à voir l'extrait ci-dessous.



12 Complète.

a. 6 + 6 + 6 + 6 = ... × ....

b. 15 × 3 = ... + ... + ...

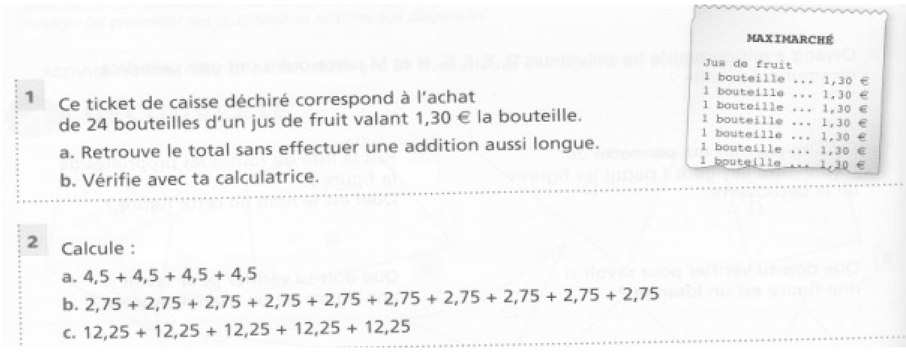
c. 8 + 8 + 8 + 8 + 8 + 8 + 8 + 8 = ... × ....

d. 7 × 4 = ... + ... + ... + ... + ... + ... + ...

Figure 1. *Cap Maths CE2 (2016) p. 29*

Le lien entre addition itérée et multiplication est travaillé dans les deux sens, de l'addition vers la multiplication et inversement. La multiplication est alors orientée. L'égalité entre 5 fois 3, qui correspond à $3+3+3+3+3$, et 3 fois 5, qui correspond à $5+5+5$, résulte de l'équivalence de ces programmes de calcul. Autrement dit, elle découle du fait que leurs résultats sont égaux, ce qui est soutenu dans certains manuels par des dénombrements d'objets disposés sous la forme de rectangles, avec des comptages en lignes ou en colonnes.

Cette construction peut être ensuite reprise pour définir la multiplication sur $\mathbb{D}^+ \times \mathbb{N}$ à partir de l'addition sur les nombres décimaux. L'extrait suivant d'un manuel de CM2 permet de voir fonctionner cette définition :



1 Ce ticket de caisse déchiré correspond à l'achat de 24 bouteilles d'un jus de fruit valant 1,30 € la bouteille.

a. Retrouve le total sans effectuer une addition aussi longue.

b. Vérifie avec ta calculatrice.

2 Calcule :

a. 4,5 + 4,5 + 4,5 + 4,5

b. 2,75 + 2,75 + 2,75 + 2,75 + 2,75 + 2,75 + 2,75 + 2,75 + 2,75 + 2,75

c. 12,25 + 12,25 + 12,25 + 12,25 + 12,25

Figure 2. *EuroMath CM2 (2009) p. 134*

Ces exercices mettent en relation multiplication et addition itérée, l'effectuation des multiplications équivalentes aux sommes données étant *a priori* plus économe. Ceci permet d'envisager une justification de la distributivité lorsque la propriété devient un objet d'étude, sur $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ comme sur $\mathbb{D}^+ \times \mathbb{N}$, à partir d'un exemple générique. Cette définition et l'associativité de l'addition justifient par exemple les égalités :

$2{,}75 \times (10+2) = 2{,}75+2{,}75+2{,}75+2{,}75+2{,}75+2{,}75+2{,}75+2{,}75+2{,}75+2{,}75+2{,}75+2{,}75$

soit $(2{,}75+2{,}75+2{,}75+2{,}75+2{,}75+2{,}75+2{,}75+2{,}75+2{,}75+2{,}75)+(2{,}75+2{,}75)$,

ce qui est encore égal à $(2{,}75 \times 10)+(2{,}75 \times 2)$.

La généralisation peut être construite dans une certaine mesure. Néanmoins, lorsqu'en 6^{e} la multiplication est étendue sur $\mathbb{D}^+ \times \mathbb{D}^+$, elle ne peut plus être définie par addition itérée. L'environnement théorique change de nature. Les documents d'accompagnement des programmes du collège suggèrent des constructions fondées sur des raisonnements sur des grandeurs (aires ou prix), ainsi que l'utilisation du point de vue théorique de la notion de quotient, permettant de définir par exemple le produit $2{,}14 \times 3{,}7$ comme quotient par 10 du produit connu . Ceci découle de l'associativité étendue de la multiplication sur les nombres décimaux :

$$(2{,}14\times 3{,}7)\times 10 = 2{,}14\times\left(\frac{37}{10}\times 10\right) = 2{,}14\times 37\ .$$

La multiplication est alors définie en étendant (sur $\mathbb{D}^+\times\mathbb{D}^+$) la commutativité[5] (sur $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$) et l'associativité (sur $\mathbb{D}^+\times\mathbb{N}$) de la multiplication précédemment construite. La distributivité de la multiplication par rapport à l'addition est nécessairement prolongée. L'exemple générique suivant pourrait être envisagé comme élément justificatif. La distributivité sur $\mathbb{D}^+\times\mathbb{N}$ permet, avec l'associativité de la multiplication postulée sur $\mathbb{D}^+\times\mathbb{D}^+$, de justifier les égalités suivantes :

$$(2{,}14\times 3{,}2+2{,}14\times 0{,}5)\times 10=(2{,}14\times 3{,}2)\times 10+(2{,}14\times 0{,}5)\times 10=2{,}14\times 32+2{,}14\times 5$$

et :

$$[2{,}14\times(3{,}2+0{,}5)]\times 10=2{,}14\times[(3{,}2+0{,}5)\times 10]=2{,}14\times(32+5)=2{,}14\times 32+2{,}14\times 5$$

Ainsi, $2{,}14\times(3{,}2+0{,}5)$ et $2{,}14\times 3{,}2+2{,}14\times 0{,}5$ apparaissent comme étant le quotient de $2{,}14\times 32+2{,}14\times 5$ par 10.
L'unicité du quotient assure l'égalité $2{,}14\times(3{,}2+0{,}5)=2{,}14\times 3{,}2+2{,}14\times 0{,}5$ qui témoigne de la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition sur $\mathbb{D}^+\times\mathbb{D}^+$.

L'environnement théorique et la construction des opérations, tels que les programmes et les manuels les donnent à voir, permettent de dégager une particularité de ce premier mouvement de généralisation de la propriété de distributivité dans la construction de systèmes de nombres : cette propriété peut se déduire dans la théorie numérique dont disposent les élèves au moment de son introduction en cycle 4[6].

Un deuxième mouvement de généralisation : les rationnels et les relatifs

L'émergence de nouveaux systèmes de nombres en cycle 4 conduit à un deuxième mouvement de généralisation de la propriété de distributivité, qui n'est plus déductible mais postulée pour la construction des opérations et des techniques de calcul afférentes.

Le cas de la multiplication sur les nombres rationnels est toutefois assez particulier. Les fractions sont introduites en cycle 3 en référence à un partage de l'unité et les opérations qui s'y rapportent (on peut ajouter 3 tiers et 4 tiers ou calculer 5 fois 4 tiers) s'envisagent comme codages d'actions, de partages puis de reports. En cycle 4, les programmes précisent que « les élèves construisent et mobilisent la fraction comme nombre qui rend toutes les divisions possibles » et « à partir de la 4^e, ils sont conduits à additionner, soustraire, multiplier et diviser des quotients […] » (MEN 2015, p. 372). La construction d'un système de nombres à partir de ces objets anciens redéfinis comme quotients est donc un enjeu qui émerge à ce niveau d'enseignement. L'addition, envisagée comme opération portant sur des nombres nouveaux (c'est le statut de nombre comme quotient qui est nouveau), apparaît avec ses techniques à mettre en œuvre. La notion de quotient permet alors non seulement d'étendre les techniques de calcul aux cas où numérateur et dénominateur ne sont plus des entiers naturels, mais elle permet aussi de construire la multiplication par un nombre décimal, ce qui n'était pas possible dans l'environnement théorique de l'addition itérée. Pour les nombres rationnels au cycle 4, en construction de ce point de vue, l'émergence de l'addition et de la multiplication « suppose

5 La commutativité de la multiplication permet de définir les produits sur $\mathbb{N}\times\mathbb{D}^+$.

6 Notons qu'elle peut également se déduire d'une théorie sur l'aire, à partir de rectangles découpés. Une organisation alternative fondée sur cet environnement théorique est présentée dans Constantin (2014).

que soit postulée l'extension des propriétés des opérations sur les entiers naturels à ces nouveaux nombres que sont les quotients » (*Le calcul numérique au collège* p. 10).

Posons $\frac{a}{c} = Q$ et $\frac{b}{c} = Q'$. Par définition du quotient de deux nombres :

Q est le nombre qui vérifie $c \times Q = a$ et Q' est le nombre qui vérifie $c \times Q' = b$.

On veut montrer que $Q + Q' = \frac{a+b}{c}$, c'est-à-dire, d'après la définition du quotient $\frac{a+b}{c}$, que $c \times (Q + Q') = a + b$. Or $c \times (Q + Q') = c \times Q + c \times Q'$ (distributivité de la multiplication par rapport à l'addition). De $c \times Q = a$ et $c \times Q' = b$, on déduit immédiatement que $c \times (Q + Q') = a + b$.

- Lorsque les dénominateurs sont différents, on remplace les écritures fractionnaires par des écritures fractionnaires équivalentes ayant le même dénominateur.

Figure 3. *Document d'accompagnement Le calcul numérique au collège, p. 11*

Le calcul algébrique reposant sur l'extension de la distributivité permet ici de définir la somme de deux quotients, et, par suite, d'en déduire une technique de calcul pour ajouter deux quotients.

Ce deuxième mouvement d'extension en 4e se poursuit au moment de la construction de la règle de multiplication sur les nombres relatifs, l'addition, la soustraction, et la notion d'opposé étant définies en 5e (MEN 2015). Il s'agit d'un deuxième mouvement de généralisation car la distributivité devient axiome : la technique de multiplication est élaborée de façon à ce que la multiplication demeure distributive par rapport à l'addition. L'extension répond à un nouvel enjeu de construction de systèmes de nombres qui englobe les systèmes déjà connus, et dont on cherche à prolonger les propriétés des opérations, ainsi que le même document d'accompagnement le précise :

> La multiplication sur les décimaux relatifs ne peut résulter que d'une construction mathématique dans laquelle on cherche à étendre cette opération aux nombres relatifs en faisant en sorte que les propriétés de la multiplication sur les décimaux positifs continuent de s'appliquer. Toujours en utilisant la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition, on commence par déterminer le produit de deux décimaux de signes différents […]. (*Le calcul numérique au collège* p. 20)

Ainsi, en désignant par a et b deux nombres décimaux positifs et en étendant la propriété de distributivité de la multiplication par rapport à l'addition, il vient :

$a \times (b+(-b)) = a \times b + a \times (-b)$. Comme $a \times (b+(-b)) = a \times 0 = 0$ (notons qu'on étend le caractère absorbant de 0 pour définir la multiplication), alors $a \times b + a \times (-b) = 0$, ce qui implique par définition de l'opposé que $a \times b$ et $a \times (-b)$ sont opposés, ou encore que $a \times (-b) = -(a \times b)$.

Ceci permet de conclure quant au signe du produit d'un nombre positif par un nombre négatif et d'en déduire une technique de calcul de multiplications à partir des valeurs absolues. En généralisant la commutativité de la multiplication (ou la distributivité à gauche), on peut en déduire une définition du produit de deux décimaux de signes différents, avant de définir le produit de deux nombres négatifs, en développant $(-a) \times (b+(-b))$. Le calcul algébrique apparaît donc comme outil de construction du système des nombres relatifs, les rapports entre ces objets s'étant modifiés dans les savoirs à enseigner eu égard à leur constitution historique. L'étude d'ouvrages d'enseignement du XIXe siècle réalisée par Dauriac (2014) montre ainsi que le calcul algébrique était alors défini comme ensemble d'opérations sur les polynômes, bien en amont de l'introduction de nombres dits « algébriques ». N'étant pas considérés comme des « nombres », le qualificatif renvoie à l'utilisation de « quantités négatives » pour la résolution de questions par l'algèbre, ce qui conduit à étendre les pratiques connues sur les autres nombres et les polynômes. Si les polynômes n'apparaissent plus comme objet d'enseignement aujourd'hui, les expressions rencontrées dans le calcul algébrique semblent pourtant véhiculer implicitement une extension du côté de ces objets.

Une extension du côté des polynômes

Au contraire des programmes précédents, les programmes de 2015 ne spécifient aucun formalisme algébrique ni ne mentionnent explicitement la propriété de distributivité. Ils mettent l'accent sur ce que permet le calcul algébrique dans une rubrique intitulée « Utiliser le calcul littéral » incluant « Développer et factoriser des expressions algébriques dans des cas très simples ». Or, comme nous le verrons par la suite, les expressions rencontrées par les élèves peuvent relever d'une application de la propriété de distributivité à des monômes. Ainsi pourra-t-on trouver dans les manuels des expressions à développer comme $2x(4x+5)$, la technique afférente consistant à effectuer les produits de $2x$ par $4x$ et par 5 avant d'en écrire la somme. Parce que le produit est d'emblée considéré comme un produit de deux facteurs plutôt qu'un produit de trois facteurs, nous considérons que la généralisation opérée dans l'usage de la propriété de distributivité correspond implicitement à une extension du côté des polynômes.

En conclusion, l'étude des aspects unificateur et généralisateur que présente la propriété de distributivité permet d'envisager une organisation curriculaire fondée par ces spécificités. La distributivité orchestre un double mouvement de généralisation : unifiant des techniques de calcul mental et posé de multiplications, tout en les justifiant lorsqu'elle devient un objet d'étude au collège, elle s'étend des nombres entiers aux nombres décimaux. Elle peut être prouvée dans l'environnement théorique lié aux définitions des opérations. Ce premier mouvement de généralisation concerne les ensembles de nombres pour lesquels les lois et leurs propriétés se transmettent. Dans un deuxième mouvement, l'extension se poursuit au moment de la construction de la règle de multiplication sur les nombres rationnels et relatifs, ces généralisations répondant à un nouvel enjeu de construction d'opérations sur de nouveaux nombres. De façon concomitante, une extension du côté des polynômes émerge implicitement au travers de généralisations des usages de la propriété à des expressions symboliques algébriques, ce que nous résumons par la figure 4, qui illustre une organisation possible de l'articulation entre construction de techniques de calcul et construction de systèmes de nombres.

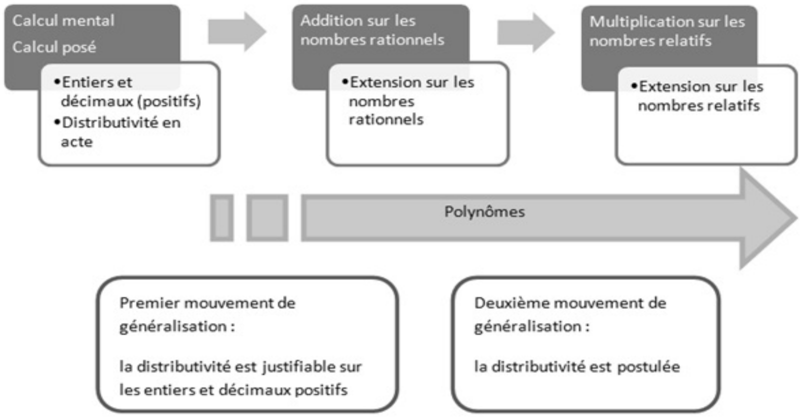


Figure 4. *Schéma d'une articulation possible entre systèmes de nombres et techniques de calcul autour de la multiplication*

Il est un caractère que nous n'avons pas abordé jusqu'à présent : le caractère formalisateur.

Si les programmes actuels ne le mentionnent pas, il est néanmoins d'usage de formaliser la propriété à l'aide de l'écriture algébrique par $k(a+b)=ka+kb$. Le ou les formalismes algébriques de la propriété (correspondant à ce qu'on appelle la « simple distributivité » ou la « double distributivité », voire aux identités remarquables qui en sont des particularisations) accompagnent les extensions des systèmes de nombres. Les quantifications des identités évoluent alors, pouvant être déduites ou postulées comme nous l'avons vu, et fondent les techniques de calcul à la fois numérique et algébrique.

Faisant l'hypothèse que l'étude des articulations autour d'aspects formalisateur, unificateur et généralisateur de la propriété de distributivité soit de nature à éclairer les techniques de calcul et leurs évolutions au fur et à mesure des extensions de systèmes de nombres, nous interrogeons dans la suite de ce texte la manière dont ces caractéristiques peuvent être prises en charge par les manuels.

Dans quelle mesure et comment les généralisations sont-elles mises à l'étude ? Les aspects FUG de la propriété de distributivité envisagés organisent-ils l'articulation entre systèmes de nombres et constructions de techniques de calcul à la fois numérique et algébrique ?
Les analyses de manuels visent ici à préciser de quelle façon cette organisation peut vivre dans le curriculum, et à mettre à jour des incomplétudes éventuelles afin de questionner les conséquences potentielles en termes d'enjeux d'enseignement et d'apprentissage.

2. Une étude de manuels

Notre corpus est constitué des éditions 2016 de cinq collections de manuels de cycle 4 (correspondant aux classes de 5^{e}, 4^{e} et 3^{e}) : Maths Monde, Mission indigo, Myriade, Sesamath et Transmath. Nos analyses ayant pour but de déterminer des possibles, ce choix a été guidé, non par la représentativité de ces manuels dans les classes, mais par la diversité des interprétations des textes officiels qu'ils présentent comme nous allons le voir. Pour chaque manuel, nous avons analysé l'ensemble des tâches de calcul liées à la propriété de distributivité ainsi que l'organisation de la progression proposée au regard de l'extension des systèmes de nombres, en cherchant à caractériser les mises en relations entre connaissances anciennes et nouvelles. Les unifications ou généralisations pouvant avoir lieu à différents moments de l'étude, nous avons pris en compte l'ensemble des parties Activités, Cours et Exercices. Nous complétons ces analyses par des résultats issus de nos propres recherches antérieures ou d'autres permettant de les mettre en perspective par rapport à une évolution dans le temps ou à des conséquences potentielles en termes d'apprentissage.

2.1. Techniques de calcul mental et posé de multiplications, entiers et décimaux

Parmi les manuels analysés, un seul propose de faire le lien entre techniques de calcul mental et posé anciennes et propriété de distributivité : le manuel Maths Monde. Ce lien apparaît dans le Cours du chapitre 9, intitulé Egalité et priorité de calculs, à l'occasion de la remarque suivante : « Ce résultat permet d'effectuer mentalement certains calculs mais aussi de comprendre la technique de multiplication posée (voir exercice 109) ». Le résultat auquel cette remarque fait référence est présenté en figure 5.

COURS 4

Distributivité, une première approche

Faire agir une multiplication sur une somme (ou sur une différence), cela revient au même que de la faire agir sur chacun des termes de cette somme (ou de cette différence).

La propriété justifiant cette technique sera donnée au chapitre 14.

Figure 5. *Maths Monde Cours du chapitre 9 p. 157*

Les choix langagiers appellent plusieurs remarques. D'une part, « faire agir une multiplication » semble renvoyer à une manipulation des écritures, ce qui ne correspond pas à la même dimension de l'activité que l'équivalence de programmes de calculs évoquée par le manuel. Ceci s'explique sans doute par le fait qu'il s'agisse d'une description de technique, et non d'une propriété, ainsi que le précise la note du manuel. Toutefois, comme nous l'avons vu dans la première partie de ce texte, les transformations de mouvement n'ont pas de véritable précurseur à l'école, ce qui interroge la transparence de la manipulation ainsi décrite et la compréhension avancée de la technique de multiplication.

D'autre part, l'évocation du second programme de calcul laisse implicite la somme à effectuer pour que l'équivalence soit vérifiée. Une formulation complète pourrait s'énoncer de la manière suivante : « Multiplier un facteur par une somme est équivalent à multiplier ce facteur par chacun des termes (de la somme) avant d'ajouter les produits obtenus », ou encore « le produit d'un facteur par une somme est égal à la somme des produits de ce facteur par chacun des termes ». Bien que peu familières, ces formulations peuvent correspondre à des sommes de plusieurs termes, et de possibles généralisations à des facteurs (ou des termes) de nature différente (des entiers, des rationnels, des relatifs, voire des monômes), autrement dit, elles pourraient soutenir des adaptations de techniques à des formes d'expressions d'une certaine diversité. Un tel discours n'aurait pas pour vocation de remplacer les formalismes algébriques, à la fois plus économes et permettant un autre travail sur les écritures lié aux substitutions par exemple. Il pourrait cependant les accompagner pour mettre l'accent sur des reconnaissances de fonctions syntaxiques (termes d'une somme, facteur d'un produit) plutôt que sur des éléments formels comme les nombres entre parenthèses, ou le nombre devant la parenthèse (bien que ces reconnaissances ne soient pas sans lien), et potentiellement soutenir des adaptations de techniques fondées sur la propriété de distributivité. Ces formulations rhétoriques peuvent revêtir une double fonction à la fois descriptrice et justificatrice de la technique de calcul. La description est toutefois éloignée des connaissances anciennes sur les techniques de calcul de multiplications, de sorte que la mise en mot puisse apparaître étrangère et peu motivée aux élèves sans mise à l'étude préalable. L'exercice 109 évoqué par le manuel pour ce faire, se trouve au chapitre 14 qui organise la rencontre officielle avec la propriété de distributivité dans le cadre algébrique. Elle est alors présentée sous la forme $k(a+b)=ka+kb$. Malgré la remarque du Cours au chapitre 9, l'activité d'introduction ne propose qu'un retour sur le calcul mental (cf. Figure 6).

CALCULER

OBJECTIF
Utilisation en acte de la règle de distributivité.

4 De tête !

Comment calculer le plus rapidement possible 43 × 101 sans poser l'opération et sans utiliser de calculatrice ?
De même, calculer 99 × 57.

Cours 4

Figure 6. *Maths Monde Activité p. 155*

Le choix des facteurs 101 et 99 conduit *a priori*, en utilisant la distributivité, à effectuer $43\times 100+43\times 1$ et $57\times 100-57\times 1$. Une autre technique pourrait être envisagée, celle consistant à considérer 101 fois 43 comme une somme de 101 termes égaux à 43, dont on peut regrouper les 100 premiers. On effectue alors 43×100 et au résultat, il suffit d'ajouter 43. La différence s'exprime dans le produit par 1 qu'il n'est pas nécessaire de penser. Ce choix ne paraît pas le plus favorable pour mettre en avant la propriété de distributivité qui n'est pas engagée si la définition de la multiplication par addition itérée suffit (ce qui pourrait ne pas être le cas pour calculer 32×13 par exemple, dont le calcul de 32×3 serait plus rapide que la somme). Or, au moment de l'introduction de la propriété, les choix des facteurs dans les produits donnés à calculer mentalement conduisent, de manière prégnante, à un facteur égal à 1 dans les produits partiels. Ce constat s'érige quel que soit le nombre de tâches de calcul mental de produits conduisant *a priori* à utiliser la distributivité, dans le sens du développement, dans les manuels analysés (notons que le manuel Sesamath ne propose aucune tâche de ce type). Les rapports en sont les suivants :

MATHS MONDE 5e	MISSION INDIGO 4e	MYRIADE 4e	TRANSMATH 4e	SESAMATH 5e
14/15	3/4	6/10	2/5	Absence

Tableau 1. *Rapports associés aux nombres de tâches de calcul mental de multiplications conduisant à un facteur égal à 1 a priori dans les produits partiels*

Outre ce choix, l'objectif affiché par le manuel Maths Monde dans l'activité est l'« utilisation en acte de la règle de distributivité », et ne paraît donc pas être l'émergence de la propriété comme justificatrice de la technique de calcul mental. Pourtant, la généralisation pourrait être explorée et la propriété justifiée sur les entiers naturels au moins. De même, l'exercice 109 déjà évoqué, pourrait conduire à mettre cette extension à l'étude, en appui sur la technique de multiplication posée :

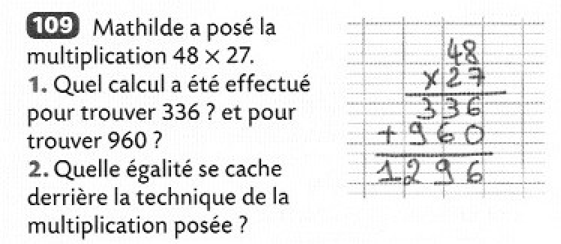

109 Mathilde a posé la multiplication 48 × 27.
1. Quel calcul a été effectué pour trouver 336 ? et pour trouver 960 ?
2. Quelle égalité se cache derrière la technique de la multiplication posée ?

Figure 7. *Maths Monde Exercices p. 167*

A partir de l'égalité attendue $48\times(20+7)=48\times 20+48\times 7$, la question de la généralisation et de la preuve pourrait être explorée. Mais l'exercice s'arrête à une description de technique, et la reprise de ces égalités n'est pas envisagée au chapitre institutionnalisant la propriété.
La question de la justification de la propriété de distributivité sur $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ et sur $\mathbb{D}^{+}\times\mathbb{N}$ n'apparaît pas dans les parties Activités des manuels analysés. L'un d'entre eux propose néanmoins, en exercice, une justification à partir d'un découpage de rectangles. Notons de plus que la preuve proposée sur $\mathbb{D}^{+}$ est également absente.
Ceci nous amène à faire l'hypothèse que la propriété de distributivité puisse ne pas jouer son rôle de justification ou de validation des techniques de calcul mental ou posé de multiplication. Ces techniques étant anciennes, elles ont pu toutefois être unifiées au moment

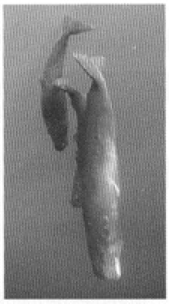
de leur construction à l'école primaire et légitimées dans un autre environnement théorique, pouvant être lié à la définition de la multiplication par addition itérée par exemple. Mais cet environnement ne suffit plus sur D^+ comme nous l'avons vu dans la première partie de cet article, et la problématique de la justification des techniques de calcul en redéfinissant les nombres décimaux comme quotients telle qu'esquissée dans les documents d'accompagnement des programmes semble évacuée dans les manuels.

2.2. Rationnels et relatifs

La justification de la règle permettant d'ajouter deux quotients à l'aide de la distributivité étendue et de la définition de quotient est absente des manuels de cycle 4 analysés.
Nous faisons l'hypothèse que cela puisse conduire les élèves à considérer les règles de calcul comme arbitraires et dépourvues de fondements renforçant des extensions abusives liées à des manipulations incontrôlées. A défaut de mettre à l'étude les extensions, les élèves risquent de ne pas tous identifier les domaines de validité des techniques, et de les associer à des aspects formels peu pertinents des expressions.
Cependant, au contraire des manuels correspondant aux programmes de 2008 (Constantin 2014), certains manuels récents mettent davantage en avant la justification de la construction de la multiplication sur les nombres relatifs. Ainsi en va-t-il de l'extrait de la figure 8.

Activité 1 **Multiplication de deux nombres relatifs**

Une classe de 4e assiste à la projection d'un documentaire sur les animaux marins. Ils entendent : « La lumière solaire pénètre jusqu'à la cote – 500 m sous le niveau de la mer. Les cachalots peuvent descendre 5 fois plus bas que la lumière solaire. »



1 Calculer – 500 + (– 500) + (– 500) + (– 500) + (– 500) et en déduire 5 × (– 500).
Conclure sur la cote que peuvent atteindre les cachalots.

2 Ali se demande : « Mais alors comment calculer 1,2 × (– 4) ? »
On ne peut pas procéder de la même manière car 1,2 n'est pas un nombre entier.
On utilise ici le fait que 1,2 × (– 4) + 1,2 × 4 est égal à 1,2 × (– 4 + 4).
a. Calculer 1,2 × (– 4 + 4) et en déduire le résultat de 1,2 × (– 4) + 1,2 × 4.
b. Calculer 1,2 × 4 et en déduire 1,2 × (– 4).

3 Katia réagit alors : « D'accord, mais cela ne nous dit pas comment calculer (– 3) × (– 7). »
On utilise ici le fait que (– 3) × (– 7) + 3 × (– 7) est égal à (– 3 + 3) × (– 7).
a. Calculer (– 3 + 3) × (– 7) et en déduire le résultat de (– 3) × (– 7) + 3 × (– 7).
b. Calculer 3 × (– 7) et en déduire (– 3) × (– 7).

Figure 8. *Transmath 4e (2016) p. 25*

Ce manuel propose, dans un premier temps, de construire la règle de multiplication à partir de la définition étendue de la multiplication par addition itérée sur un cas particulier. Dans un deuxième temps, précisant la limite de cette construction dans le cas où l'un des facteurs n'est plus entier, un élément de justification amorce la poursuite du travail en désignant une égalité qui évoque la propriété de distributivité. La validité de l'égalité n'est cependant pas questionnée et la distributivité n'est pas nommée ni déclarée généralisée à des fins de construction de la règle de la multiplication. L'enjeu d'extension des propriétés anciennement connues sur les nombres positifs, aux nouveaux nombres que sont les nombres négatifs, paraît donc muet. Ceci s'explique sans doute par le choix de l'organisation des savoirs fait dans la collection. La propriété de distributivité est introduite au chapitre 3 selon la progression du manuel proposée, tandis que la multiplication sur les nombres relatifs est abordée avec l'activité ci-dessus au chapitre 2. Les élèves ne disposant pas de cette propriété comme objet de savoir, on peut s'interroger sur le sens donné aux égalités avancées dans cette activité.

Les manuels de la collection Myriade (2016) et de la collection Mission Indigo (2016) organisent de même leur progression, en traitant les opérations sur les nombres relatifs avant l'introduction officielle de la propriété de distributivité, celle-ci étant abordée à partir d'activités proposant plusieurs calculs numériques dans un chapitre consacré au calcul littéral. Pour ces trois collections, l'organisation de la rencontre des savoirs fait obstacle à leur articulation du point de vue des justifications et des co-constructions entre systèmes de nombres et techniques de calcul. La propriété étant vue plus tard, elle ne peut se constituer comme fondement à l'extension des systèmes de nombres.

Cette contradiction n'apparaît pas dans tous les manuels. Les manuels de cycle 4 Maths Monde ou Sesamath proposent par exemple d'aborder la distributivité en amont. Le manuel Maths Monde de 4e explicite la règle de distributivité pour prouver des égalités, tandis que le manuel Sesamath de 4e l'évoque en demandant de factoriser. Toutefois, aucun des deux n'explicite l'enjeu d'extension qui y préside. Les tentatives des manuels sont, dans ce sens, inabouties et nos analyses renouvellent le constat fait par Assude, Coppé & Pressiat (2012) à partir d'une étude de manuels de 4e correspondant aux programmes de 2008 :

> les liens entre distributivité et multiplication des relatifs ne sont pas clairement établis : d'une part, rien ne témoigne du fait que la définition de la multiplication des négatifs est choisie de façon à ce qu'elle soit (demeure) distributive par rapport à l'addition, et, d'autre part, on ne trouve dans le cours aucune reprise de la propriété de distributivité sous une seule formulation algébrique. (Assude, Coppé & Pressiat 2012 p. 53-54)

Le manuel Transmath de 4e dans son édition de 2011 fait toutefois exception.

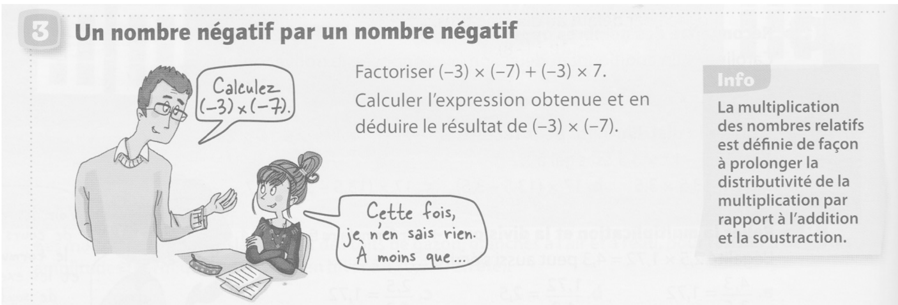


Figure 9. *Transmath 4e (2011) p. 14*

Le discours autour de l'enjeu d'extension, consistant à prolonger les propriétés connues des opérations sur les nombres rencontrés jusqu'alors, fait ici explicitement l'objet d'une note. Toutefois, c'est le seul manuel parmi neuf manuels récents analysés à le faire[7], de sorte que l'on peut faire l'hypothèse que cet enjeu est faiblement exploré dans les classes. Il nous paraît pourtant de nature à permettre aux élèves d'éprouver la nécessité de la règle des signes tout en dévoilant la logique de construction des systèmes de nombres, voire de renforcer le rôle de la propriété comme élément de validation des techniques de calcul plus généralement.

[7] Quatre manuels de 4e de 2011 ont été de plus analysés, correspondant aux collections Transmath, Phare, Triangle et Sesamath.

2.3. Polynômes et calcul algébrique

Le calcul algébrique se construit de manière concomittante à l'extension des systèmes de nombres. Ainsi, l'élargissement du domaine d'application de la propriété de distributivité concerne non seulement des nombres issus d'ensembles de plus en plus vastes, mais aussi, plus généralement, des expressions algébriques. Cette généralisation de son usage est pourtant peu discutée dans les manuels, et s'accompagne d'extensions muettes des formalismes de la propriété. Ainsi en va-t-il du formalisme proposé dans l'extrait suivant :

3 Factorisation – Réduction

Définition **Factoriser**, c'est transformer une somme algébrique en un produit.

Propriété k, a, b désignent des nombres relatifs.

Somme algébrique $\longrightarrow$ $ka + kb = k(a + b)$ $\longleftarrow$ Produit

Figure 10. Transmath 4e (2016) p. 40

Tandis qu'il est précisé que les lettres désignent « des nombres relatifs », l'exemple donné à la suite étend *a priori* l'utilisation de cette égalité au cas où *b* correspond à un monôme :

Exemples

Factoriser $D = 2x + 3x^2$.

$D = 2 \times x + 3x \times x$

$D = x \times (2 + 3x)$

$D = x(2 + 3x)$

Figure 11. Transmath 4e (2016) p. 40

Ceci interroge la transparence de cet usage : « $3x$ » est-il interprétable comme une écriture de nombre relatif ? Les expressions étant considérées comme de nouveaux objets sur lesquels il est possible de calculer, un nouveau système émerge implicitement pour les élèves, l'anneau des polynômes (à coefficients dans $\mathbb{Z}$ ou dans $\mathbb{Q}$ pour les expressions qui nous occupent en collège).

Dans ce cas, la distributivité unifie de fait deux techniques de calcul algébrique permettant de développer ou de factoriser une expression donnée. Pourtant l'étude de manuels conduite par Assude, Coppé & Pressiat (2012) citée précédemment montre que :

> Ces deux types de tâches sont séparés, la distributivité pouvant être spécifiée selon chacun. Ceci contribue selon nous, à accentuer l'atomisation des tâches. (Assude, Coppé & Pressiat 2012 p. 55)

Dans les nouveaux programmes, développement et factorisation apparaissent en 4e, dans un resserrement de l'étude par rapport aux programmes antérieurs pour lesquels le travail du calcul algébrique s'étendait de la 5e à la 3e.

Malgré ce changement, les cloisonnements observés par Assude, Coppé & Pressiat (2012) demeurent dans certains manuels. Les manuels Transmath ou Mission indigo de 4e par exemple séparent en deux paragraphes distincts « Développement » et « Factorisation » dans les parties Cours. Pour chacun des manuels, la propriété sous forme symbolique algébrique est réécrite dans le sens de lecture de gauche à droite, avant de donner des exemples. Le nom même de la propriété de distributivité peut être absent ou n'apparaître que dans le titre de la partie consacrée à ces paragraphes, et le discours accompagnant les techniques n'en fait plus mention[8], de sorte que les techniques paraissent centrées sur des manipulations des écritures soutenues par des reconnaissances de formes appuyées par des mises en couleur. L'unification que pourrait, ou que devrait organiser la distributivité se révèle donc, en l'état, incomplète ou ignorée. Nous allons y revenir.

Dans les nouveaux programmes, les différents formalismes tels qu'on les utilise culturellement en France (distributivité simple, double et identités remarquables) ne sont plus spécifiés. Les collections correspondant aux éditions de 2016 montrent donc des choix différents :

	MATHS MONDE			MISSION INDIGO			MYRIADE			SESAMATH			TRANSMATH		
	5e	4e	3e	5e	4e	3e	5e	4e	3e	5e	4e	3e	5e	4e	3e
$k(a+b) = ka+kb$	✔	✔			✔	✔		✔	()	✔	✔	✔		✔	
$k(a-b) = ka-kb$	✔				✔	✔		✔		✔	✔	✔			
$(a+b)(c+d) = ac+ad+bc+bd$		✔	✔			✔			✔	✔	✔			✔	
Identités remarquables			✔						✔			✔			✔

Tableau 2. Choix et niveaux d'introduction des formalismes pour la propriété de distributivité

Une grande diversité apparaît. Les choix du niveau d'introduction de la propriété de distributivité (en 5e ou en 4e) comme les choix des formalismes et des niveaux d'enseignement où ils apparaissent sont très variables[9]. En abordant la propriété en 4e (plutôt qu'en 5e dans les programmes de 2008), il devient également possible de ne pas proposer de formalisme correspondant à la distributivité de la multiplication par rapport à la soustraction puisque l'on dispose alors de la multiplication sur les nombres relatifs. Seule l'écriture symbolique $k(a+b)=ka+kb$ devient nécessaire. Cela ne signifie pas pour autant que $k(a-b)=ka-kb$ ne soit pas utile : pour développer $5(3x-2)$ comme pour factoriser $(7x+1)(2x+3)-4x(2x+3)$, par exemple, disposer de ce formalisme supplémentaire permet de s'affranchir d'un travail sur les signes et de penser l'équivalence entre soustraction et addition de l'opposé, ce qui serait nécessaire si l'on ne disposait que de la première écriture de la propriété.

Le fait que l'étude des techniques de calcul pour développer et factoriser soit resserrée en 4e et 3e laisse à penser que l'articulation entre ces différents formalismes puisse être davantage mise en avant. C'est ce que l'on observe dans certains manuels comme Myriade ou Transmath, figure 12.

8 Ce n'est pas le cas de tous les manuels. Le manuel Myriade par exemple, met en avant l'utilisation de la distributivité pour développer une expression donnée en exemple (*cf.* figure 13).

9 Notons de plus que le manuel de 3e de la collection Mission indigo aborde les identités remarquables sous la forme d'exercices dans lesquels elles doivent être démontrées. Elles n'apparaissent cependant pas dans la partie Cours.

2 Développement

Définition **Développer**, c'est transformer un produit en une somme algébrique.

Propriété k, a, b désignent des nombres relatifs.

Produit → $k(a+b) = ka + kb$ ← Somme algébrique

On dit que la multiplication est **distributive** par rapport à l'addition.

Exemples

Développer $A = 7(x+2)$.
$A = 7(x+2)$
$A = 7 \times x + 7 \times 2$ ← On distribue 7 sur chaque terme de la somme $x + 2$.
$A = 7x + 14$

Développer $B = -3(6-x)$.
$B = -3(6-x)$ ou $B = -3(6-x)$
$B = -3 \times 6 + (-3) \times (-x)$ $B = -3 \times 6 - (-3) \times x$
$B = -18 + 3x$ $B = -18 + 3x$

Propriété a, b, c, d désignent des nombres relatifs.
$(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$

$C = (a+b)(c+d)$
$C = a \times (c+d) + b \times (c+d)$
$C = a \times c + a \times d + b \times c + b \times d$

Figure 12. *Transmath 4[e] (2016) p. 40*

Dans cet extrait, deux techniques de développement sont proposées pour l'expression B. À gauche, la deuxième ligne paraît provenir du développement de $-3(6+(-x))$ en référence au formalisme proposé par le manuel, après avoir *a priori* considéré la différence $6-x$ comme équivalente à la somme $6+(-x)$. À droite, l'écriture de la deuxième ligne suggère qu'on a développé le produit d'un facteur par une différence. S'agit-il d'une réinterprétation du développement écrit à gauche en utilisant à nouveau l'équivalence entre additionner et soustraire l'opposé ? Mais dans ce cas, additionner $(-3)\times(-x)$ revient à soustraire l'opposé de $(-3)\times(-x)$ qui ne peut s'écrire $(-3)\times x$ qu'au moyen d'une ou de plusieurs étapes. Ou bien s'agit-il d'un développement fondé par la distributivité de la multiplication par rapport à la soustraction formalisée par $k(a-b)=ka-kb$? Les écritures proposées et l'absence de discours sur l'équivalence entre soustraire et ajouter l'opposé semblent plutôt en accord avec cette seconde interprétation, ce qui paraît pourtant contradictoire au vu de l'absence du formalisme correspondant.

De même, dans le passage à la double distributivité, la distributivité employée est à droite (le facteur considéré comme décomposé est celui de gauche) ce qui ne correspond pas au formalisme simple de la distributivité donné au paragraphe précédent. Que l'on considère la distributivité à droite ou que l'on convoque la commutativité de la multiplication, les justifications ou les choix opérés (il était possible de développer à gauche) ne sont pas explicités. On peut supposer que le choix du manuel est guidé par la recherche de l'obtention dans l'ordre des produits (ordre correspondant à la lecture gauche / droite) sans avoir besoin de recourir à la commutativité de l'addition, par économie. Mais les questionnements autour de ces techniques paraissent peu mis à l'étude.

Il en va de même dans l'extrait suivant, où des éléments de justification et de description des expressions sont pourtant mis en avant pour identifier les termes et les facteurs au cœur des manipulations :

- $B = (8x-4) \times 2x$ ← Produit de $(8x-4)$ et de $2x$

$B = 8x \times 2x + (-4) \times 2x$ ← Expression obtenue en utilisant la distributivité

$B = 16x^2 - 8x$ ← Somme de $16x^2$ et de $(-8x)$

Figure 13. *Myriade 4[e] (2016). Exemple du cours p. 98*

L'expression $(8x-4)\times 2x$ est interprétée comme un produit de deux facteurs, ainsi que l'y invite le signe ×. Elle pourrait aussi être interprétée comme un produit de trois facteurs. Alors l'associativité de la multiplication, et la distributivité conduiraient à développer de la manière suivante : $((8x-4)\times 2)\times x=(16x-8)\times x=16x^2-8x$.

Le choix de considérer un produit de deux facteurs plutôt qu'un produit de trois facteurs permet un développement moins coûteux, comprenant moins d'étapes. Or, cette double interprétation d'écritures comme 2*x*, considérées tantôt comme monôme ou comme produit, apparaît de fait, sans être interrogée. Elle dépend de la tâche à accomplir : dans l'exemple donné par la figure 11, 2*x* est considéré comme un produit de deux facteurs pour factoriser, tandis qu'ici, il est considéré comme un monôme pour développer.

De la même façon que précédemment, la double interprétation des écritures comme sommes ou comme différences paraît peu motivée au regard des deux formalismes institutionnalisés par le manuel, correspondant à la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition et à la soustraction. Il semble que l'identité implicitement employée soit $k(a+b)=ka+kb$ au vu de la seconde ligne, l'étape consistant à considérer $8x-4$ comme $8x+(-4)$ étant muette. De même, la somme est ensuite ré-interprétée comme différence pour écrire la dernière ligne. Or, l'utilisation de $k(a-b)=ka-kb$ aurait permis d'écrire cette expression, et de reconnaître la première plus directement. Les liens entre les deux formalismes n'étant pas explicités (comment passer de l'un à l'autre ?), le choix de l'un ou l'autre paraît arbitraire.

Ainsi, les articulations s'avèrent-elles lacunaires ou peu présentes, y compris pour ces manuels qui tentent de les organiser. Les discours accompagnant les techniques ne dévoilent guère la logique qui les sous-tend.

Conclusion

Si les aspects formalisateur, unificateur et généralisateur envisagés dans l'articulation entre construction de systèmes de nombres et construction de techniques de calcul semblent en arrière plan de l'organisation des savoirs dans les programmes, ils paraissent peu mis à l'étude dans les manuels, ou pas du tout. L'évanescence de la problématique de l'extension des systèmes de nombres observée par Bronner (2008) semble donc toujours d'actualité, le risque étant que les élèves construisent des rapports personnels peu satisfaisants aux nombres et aux techniques de calcul.

La faible place accordée à la propriété de distributivité pour justifier les techniques de calcul dans le domaine numérique comme dans le domaine algébrique conduit à faire l'hypothèse que les règles de calcul construites apparaissent comme peu motivées et arbitraires. La recherche de Croset (2009) montre que les élèves peuvent réorganiser leurs connaissances en fonction des formes d'expressions, à défaut de la propriété qui devrait contrôler les techniques de calcul. Un élève peut ainsi traiter séparément les développements d'une expression du type $a(b+c)$ et d'une expression du type $a(b+c+d)$ en raison du nombre de termes de la somme. Développant correctement les premières, il pourra néanmoins systématiquement (ou de manière très stable) développer les secondes en $ab+c+d$. L'assujettissement des techniques de calcul aux formes d'expressions peut ainsi être renforcé par le manque d'unification entre les différentes techniques de calcul (en particulier algébrique) et les formalismes de la propriété associés que donnent à voir les manuels : « la différenciation des cas peut faire, en fait, obstacle à la force de généricité des règles, à l'unification » (Croset 2009 p. 45). Or, cette généricité paraît être une condition nécessaire à une bonne compréhension des propriétés. Au regard des travaux de Mok (2010), nous faisons l'hypothèse qu'elle peut ne pas aller de soi en l'absence d'un enseignement la prenant en charge. L'étude qu'elle conduit sur le sens donné à la distributivité par des élèves de 12 à 16 ans, révèle que les difficultés à convoquer la propriété pour justifier une égalité numérique s'y rapportant, plutôt que l'exécution des calculs, se retrouvent à tous les niveaux. Un élève en particulier explique qu'il ne saurait dire si la question de la véracité de l'égalité $62\times(23+49)=62\times23+62\times49$ relève de ce qu'il a appris en algèbre ou non.

D'autres recherches laissent à penser que le peu d'exploration des enjeux d'extension des systèmes de nombres puisse avoir des conséquences sur les apprentissages à moyen ou à plus long terme. Ainsi les travaux de Briant et Bronner (2017) rendent-ils compte de difficultés d'élèves de 2^{nde} (élèves de 16- 17 ans) à produire une classification des équations selon leur degré. Ils peuvent alors favoriser la nature des coefficients comme critère pertinent, selon leur rapport personnel aux objets racine carrée ou nombre décimal, ce qui peut conduire à des traitements différents et erronés. Au niveau universitaire, Bloch (2018) observe des difficultés générées par des représentations des nombres peu cohérentes, avec des confusions entre nombre et valeurs approchées, qui pèsent sur l'apprentissage de l'analyse, et de la notion de limite en particulier. La revue de travaux qu'elle réalise la conduit à faire l'hypothèse que l'enseignement autour des systèmes de nombres au secondaire ne permet pas une exploration suffisante pour que les étudiants puissent se saisir, à l'entrée à l'université, du statut nouveau des nombres. Leurs écritures chiffrées disparaissant, les nombres doivent alors pouvoir être considérés « comme éléments théoriques d'un ensemble numérique, et dont les propriétés sont déterminées par les propriétés dudit ensemble » (Bloch 2018 p. 71).

La prise en compte dans l'enseignement au collège de la problématique de l'extension des systèmes de nombres et son articulation avec le calcul algébrique n'en demeure pas moins délicate, d'autant plus si l'on veut engager les élèves dans des tâches les conduisant à s'y confronter. La proposition curriculaire dont rendent compte Ruiz-Munzón, Matheron, Bosch & Gascón (2012) l'aborde en appui sur la mathématisation de la notion de programmes de calcul, dans le domaine numérique puis algébrico-fonctionnel. À partir d'équivalences (soustraire 4 puis ajouter 5 est équivalent à soustraire 1 par exemple, ce qui est noté par $\ldots-4+5=\ldots-1$, pour reprendre l'exemple de l'article cité précédemment), l'ensemble des nombres relatifs se construit en questionnant la possibilité de considérer les notations obtenues comme des nombres. Les connaissances sur les systèmes de nombres antérieurs sont réinterrogées au regard d'extensions envisagées, les élèves émettant des hypothèses quant aux résultats potentiels d'additions par exemple, et à des techniques de calcul afférentes. Les justifications peuvent s'appuyer sur des ré-écritures comme $+7+(-2)=+5+2+(-2)$. Toutes les extensions ne sont pas questionnées (l'associativité par exemple), mais les conjectures et raisonnements permettant de justifier un certain nombre d'entre elles sont bien à la charge des élèves. L'articulation entre le système des nombres relatifs et l'algèbre se réalise « en proposant de travailler avec des expressions numériques écrites que l'on manipule comme des expressions algébriques » (Ruiz-Munzón, Matheron, Bosch & Gascón 2012 p. 99).

D'un autre point de vue, l'ingénierie que nous avons élaborée et expérimentée auprès d'élèves de 5^e (élèves de 12-13 ans) explore la possibilité de constituer des tâches d'écritures et de reconnaissances comme levier pour l'émergence de transformations de mouvement dans les cadres numérique et algébrique, au moment de l'introduction de la propriété de distributivité. Ces tâches consistent à produire des égalités, en ligne, traduisant des techniques de calcul mental et posé de multiplications dans l'optique de les formaliser, de les unifier et de les généraliser. Ces multiplications, comme par exemple 7×32 ou 46×3 en calcul mental, ou encore 136×235 en calcul posé, sont choisies de manière à favoriser *a priori* l'utilisation de la propriété de distributivité, et à occasionner des écritures présentant une certaine diversité comme $7\times(30+2)=7\times30+7\times2$, $(40+6)\times3=40\times3+6\times3$ ou encore $136\times(200+30+5)=136\times200+136\times30+136\times5$. À partir de ces écritures, il s'agit ensuite d'identifier « une chose commune » avant d'envisager une technique de production de ces écritures fondées sur des manipulations syntaxiques, puis de questionner la justification et la généralisation des équivalences exprimées. Les résultats de l'expérimentation montrent des effets potentiels sur une certaine flexibilité dans les techniques de calcul algébrique. Ils montrent aussi que les élèves peuvent se saisir de discours incluant la propriété de distributivité et des identifications allant au-delà d'indices de surface des expressions. Les difficultés langagières occasionnées par de multiples reformulations nécessaires, de la part de l'enseignant comme des élèves, n'en demeurent pas moins importantes. Le travail engagé reste à poursuivre afin de déterminer comment et en quoi la prise en compte des articulations envisagées dans cet article, peut contribuer à améliorer les apprentissages liés aux systèmes de nombres et aux techniques de calcul numérique et algébrique tout au long du collège, voire au-delà.

BIBLIOGRAPHIE

ASSUDE T., COPPE S., PRESSIAT A. (2012), Tendances de l'enseignement de l'algèbre élémentaire au collège : atomisation et réduction. In Coulange L., Drouhard J.P., Dorier J.L. et Robert A., *Enseignement de l'algèbre élémentaire, Bilan et Perspectives, Recherches en Didactique des Mathématiques, Hors série,* 35-56. Grenoble : La Pensée Sauvage.

BLOCH I. (2018), Connaissances sur les nombres des élèves de fin de secondaire et adaptation à l'université. *Petit x*, **106**, 65-77.

BRIANT N., BRONNER A. (2017), La prise en compte des nombres idécimaux pour le traitement du concept d'équation : une variable didactique oubliée. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* **37(1)***,* 101-143. Grenoble : La Pensée Sauvage.

BRONNER A. (2008), La question du numérique dans l'enseignement du secondaire. In Rouchier A., Bloch I., *Perspectives en didactique des mathématiques,* 17-45. Grenoble : La Pensée Sauvage.

CHEVALLARD Y. (1989), Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège. *Petit x*, **19**, 43-72.

CHEVALLARD Y., BOSCH M. (2012), L'algèbre entre effacement et réaffirmation, aspects critiques de l'offre scolaire. In Coulange L., Drouhard J.P., Dorier J.L. et Robert A., *Enseignement de l'algèbre élémentaire, Bilan et Perspectives, Recherches en Didactique des Mathématiques, Hors série,* 19-39. Grenoble : La Pensée Sauvage.

CONSTANTIN C. (2014), *Quelles alternatives pour l'enseignement du calcul algébrique au collège ?* Thèse de doctorat, Aix-Marseille Université.

CROSET M.-C. (2009), *Modélisation des connaissances des élèves au sein d'un logiciel éducatif d'algèbre. Étude des erreurs stables inter-élèves et intra-élève en termes de praxis-en-acte.* Thèse de doctorat, Université de Grenoble.

DAURIAC P. (2014), *Entre relatifs et calcul algébrique en 4^{e}*. Mémoire de Master 2, Université de Bordeaux.

DROUHARD J-PH., PANIZZA M. (2012), Hansel et Gretel et l'implicite sémio-linguistique en algèbre élémentaire. In Coulange L., Drouhard J.P., Dorier J.L. et Robert A.*, Enseignement de l'algèbre élémentaire, Bilan et Perspectives, Recherches en Didactique des Mathématiques, Hors série,* 208-235. Grenoble : La Pensée Sauvage.

GALLARDO A. (2002), The extension of the natural-number domain to the integers in the transition from arithmetic to algebra, *Educational Studies in Mathematics*, **49**, 171-192.

HERSCOVICS N., LINCHEVSKI L. (1994), A cognitive gap between arithmetic and algebra, *Educational Studies in Mathematics*, **27**, 59-78.

MOK I.-A.-C. (2010), Students' algebra sense via their understanding of the distributive law, *Pedagogies : an international journal*, **5(3)**, 251-263.

ROBERT A. (2011), Des recherches de types d'ingénierie. In Margolinas et al., *En amont et en aval des ingénieries didactiques, XV^{e} école d'été de didactique des mathématiques*, 207-222. Grenoble : La Pensée Sauvage.

RUIZ-MUNZON N., MATHERON Y., BOSCH M., GASCON J. (2012), Autour de l'algèbre : les entiers relatifs et la modélisation algébrico-fonctionnelle. In Coulange L., Drouhard J.P., Dorier J.L. et Robert A.*, Enseignement de l'algèbre élémentaire, Bilan et Perspectives, Recherches en Didactique des Mathématiques, Hors série,* 87-106. Grenoble : La Pensée Sauvage.

SFARD A. (1991), On the dual nature of mathematical conceptions : Reflections on processes and objects as different sides of the same coin, *Educational Studies in Mathematics*, **22**, 1-36.

VLASSIS J. (2010), *Sens et symboles en mathématiques : Etude de l'utilisation du signe « moins » dans les réductions polynomiales et la résolution d'équations du premier degré à une inconnue.* Berne : Peter Lang.

Les manuels

BARNET C., BERGER H., BILLA N., DEMOULIN P., FLOUS A., LAFARGUE B., LARRIEU M., LAULHERE A., LAYAN M.-C., POLLET S., ROBERTOU M., RUDELLE F., VILLATTES A. (2016) Mission indigo Maths Cycle 4, 5^{e} Éditions Hachette.

BARNET C., BERGER H., BILLA N., DEMOULIN P., FLOUS A., LAFARGUE B., LARRIEU M., LAULHERE A., LAYAN M.-C., POLLET S., ROBERTOU M., RUDELLE F., VILLATTES A. (2016) Mission indigo Maths Cycle 4, 4^{e} Éditions Hachette.

BARNET C., BERGER H., BILLA N., DEMOULIN P., FLOUS A., LAFARGUE B., LARRIEU M., LAULHERE A., LAYAN M.-C., POLLET S., ROBERTOU M., RUDELLE F., VILLATTES A. (2016) Mission indigo Maths Cycle 4, 3^{e} Éditions Hachette.

BOULLIS M., CAMBON M., DANARD Y., GALLIEN V., HERRMANN E., MEYER I., MONKA Y., PERCOT S. (2016) Maths 5^{e} cycle 4, collection Myriade, Éditions Bordas.

BOULLIS M., CAMBON M., DANARD Y., GALLIEN V., HERRMANN E., MEYER I., MONKA Y., PERCOT S. (2016) Maths 4^{e} cycle 4, collection Myriade, Éditions Bordas.

BOULLIS M., CAMBON M., DANARD Y., GALLIEN V., HERRMANN E., MEYER I., MONKA Y., PERCOT S. (2016) Maths 3^{e} cycle 4, collection Myriade, Éditions Bordas.

BOURGEAT F., CARLOD V., JACQUEMOUD D., KELLER A., MAZE M., PLANTIVEAU A., PUIGREDO F., VERDIER F. (2014) 5e Collection TRANSMATH, Éditions Nathan.

BRIAND J., NGONO B., PELITIER M.-L., VERGNES D. (2009), Euromaths CM2, Éditions Hatier.

LANATA F., ADAM J., AGACHE A., BARRET O., CHABRIER C., CHARPENTIER R., LEVÉE M., LOISEAU J., REY S., SIMONET M. (2016) Maths monde Cycle 4, Éditions Didier.

MALAVAL J., CHAPUT A., CARLOD V., FUNDAKOWSKI M., MAZE M., PLANTIVEAU A., PUIGREDO F., QUAIRE S., WALLON P. (2011) 4e Collection TRANSMATH, Éditions Nathan.

MALAVAL J., CARLOD V., CHRÉTIEN B., DESROUSSEAUX P.-A., JAQUEMOUD D., JORIOZ A., KELLER A., LÉCOLE J.-M., MAHÉ A., MAZE M., PLANTIVEAU A., PUIGREDO F., VERDIER F. (2016) 5e Collection TRANSMATH, Editions Nathan.

MALAVAL J., CARLOD V., CHRÉTIEN B., DESROUSSEAUX P.-A., JAQUEMOUD D., JORIOZ A., KELLER A., LÉCOLE J.-M., MAHÉ A., MAZE M., PLANTIVEAU A., PUIGREDO F., VERDIER F. (2016) 4e Collection TRANSMATH, Éditions Nathan.

MALAVAL J., CARLOD V., CHRÉTIEN B., DESROUSSEAUX P.-A., JAQUEMOUD D., JORIOZ A., KELLER A., LÉCOLE J.-M., MAHÉ A., MAZE M., PLANTIVEAU A., PUIGREDO F., VERDIER F. (2016) 3e Collection TRANSMATH, Éditions Nathan.

CHARNAY R, COMBIER G., DUSSUC M-P. MADIER D. (2016) Fichier d'entraînement nombres et calculs CE2 Collection CAP MATHS, Éditions Hatier.

SÉSAMATH (2016), Le manuel de cycle 4.

Programmes et documents d’accompagnement

MEN (2007), Le calcul numérique au collège, Ressources pour les classes de 6e, 5e, 4e et 3e, Direction Générale de l’enseignement scolaire.

MEN (2008), Programmes du collège : BO spécial n°6 du 28 août 2008

MEN (2015), Programmes des cycles 3 et 4 : BO spécial n°11 du 15 novembre 2015