MODÉLISER AU CYCLE 3 : LES PROBLÈMES DE GÉNÉRALISATION

Floriane WOZNIAK[1]
Université Toulouse Jean Jaurès, EFTS

Résumé. Cet article présente comment une classe de CM1-CM2 étudie des problèmes dits de généralisation. Ces problèmes reposent sur la reconnaissance d'une régularité, comme par exemple dans la poursuite d'un algorithme à l'école maternelle. Ils se résolvent par le recours à deux voire trois types de techniques qui chacune se fondent sur un modèle différent : recours à une représentation de la situation, identification d'une régularité d'un résultat au suivant, reconnaissance du lien entre deux grandeurs. Ces problèmes sont donc propices à permettre aux élèves de découvrir que la définition du système étudié et la conception d'un modèle sont intrinsèquement liés. L'analyse des observations, et en particulier des productions d'élèves, permettent ainsi de considérer à quelles conditions les problèmes de généralisation peuvent être une porte d'entrée vers la modélisation.

Mots-clés. Modélisation, généralisation, mathématiques, cycle 3.

Introduction

Le programme de mathématiques du cycle 3 entré en vigueur en septembre 2015 commence[2] en affirmant sa contribution au *« développement de six compétences majeures : chercher, modéliser, représenter, calculer, raisonner et communiquer »* (MEN, 2015, p. 198). Quatre d'entre elles font explicitement référence à la résolution de problèmes[3] (voir annexe) car elle

> *constitue le critère principal de la maîtrise des connaissances dans tous les domaines des mathématiques, mais elle est également le moyen d'en assurer une appropriation qui en garantit le sens (op. cit.).*

Le programme mis en œuvre en 2002 avait, déjà, mis la résolution de problèmes au cœur de la formation mathématique et avait introduit les *« problèmes de recherche »* :

> *Dès l'école élémentaire, les élèves peuvent être confrontés à de véritables problèmes de recherche, pour lesquels ils ne disposent pas de solution déjà éprouvée et pour lesquels plusieurs démarches de résolution sont possibles. C'est alors l'activité même de résolution de problèmes qui est privilégiée dans le but de développer chez les élèves un comportement de recherche et des compétences d'ordre méthodologique : émettre des hypothèses et les tester, faire et gérer des essais successifs, élaborer une solution originale et en éprouver la validité, argumenter (MEN, 2002, p. 7).*

---

1 floriane.wozniak@univ-tlse2.fr

2 Il est en de même pour les programmes de mathématiques des cycles 2 et 4.

3 Dans ce texte, nous considérerons qu'un problème est une question à résoudre qui a un caractère inédit. Il se distingue d'un exercice pour lequel une technique de résolution de la question posée est déjà connue voire automatisée. Ainsi, si répartir équitablement 234 livres dans neuf cartons est un problème pour un élève de fin de cycle 2, cela devrait être un exercice en fin de cycle 3.

La revue *Grand N* a d'ailleurs contribué à populariser ce type de problèmes. Charnay (1992) en a donné une définition et présenté des exemples tandis que plusieurs chercheurs (par exemple, Hersant, 2008 ; Dias, 2009) ont étudié leur délicate mise en œuvre dans les classes.

Les programmes actuels confirment la nécessité de proposer aux élèves de tels problèmes :

> *On veille aussi à proposer aux élèves des problèmes pour apprendre à chercher qui ne soient pas directement reliés à la notion en cours d'étude, qui ne comportent pas forcément une seule solution, qui ne se résolvent pas uniquement avec une ou plusieurs opérations mais par un raisonnement et des recherches par tâtonnements (MEN, 2015, p. 197).*

Une récente note de service sur *« la résolution de problèmes à l'école élémentaire »* réaffirme la nécessité de construire progressivement

> *un travail structuré et régulier pour faire acquérir aux élèves les connaissances et compétences leur permettant :*
>
> *- de comprendre le problème posé ;*
>
> *- d'établir une stratégie pour le résoudre, en s'appuyant sur un schéma ou un tableau, en décomposant le problème en sous problèmes, en faisant des essais, en partant de ce que l'on veut trouver, en faisant des analogies avec un modèle connu ;*
>
> *- de mettre en œuvre la stratégie établie ;*
>
> *- de prendre du recul sur leur travail, tant pour s'assurer de la pertinence de ce qui a été effectué et du résultat trouvé, que pour repérer ce qui a été efficace et ce qui ne l'a pas été afin de pouvoir en tirer profit pour faire des choix de stratégies lors de futures résolutions de problèmes (MEN, 2018, p. 15).*

Un modèle mathématique est un ensemble de relations qui représentent une situation (un système) et facilitent son étude grâce aux outils et aux techniques mathématiques. Ainsi, toute activité conduisant à la conception d'un modèle est une activité de modélisation. La modélisation mathématique ne se limite donc pas à la résolution de problèmes dont le contexte est non mathématique. Elle comprend un ensemble de savoirs mathématiques à connaître pour résoudre certains types de problèmes et une démarche où les étapes à suivre sont aussi importantes que le résultat final. La précédente note de service explicite ainsi les difficultés des élèves à modéliser :

> *l'élève n'arrive pas à faire le lien entre le problème posé et le modèle mathématique dont il relève, il ne comprend pas le sens de l'énoncé ou il ne propose pas de solution ou encore la solution proposée ne s'appuie pas sur les opérations attendues (MEN, 2018, p. 18).*

L'importance accordée à la résolution de problèmes et à la modélisation n'est pas spécifique à la France. Elle s'inscrit dans un mouvement de changement curriculaire international (Barquero et *al.*, 2018) sous l'influence des évaluations internationales telles que TIMSS ou PISA[4] et l'impulsion de recommandations européennes (Rocard et *al.*, 2007). Il semble qu'un changement de paradigme scolaire (Wozniak, 2019) soit à l'œuvre, qui fasse de la modélisation autant un objet d'enseignement qu'un processus d'enseignement. C'est dans ce contexte que cet article s'intéresse à la façon dont la modélisation peut être introduite au cycle 3 à travers les problèmes dits de généralisation. Une étude a ainsi été réalisée en demandant à des enseignants de proposer à leurs élèves des problèmes présentés comme des problèmes de recherche, sans aucune information concernant leurs spécificités ou la façon de les travailler.

La première partie de ce texte décrit le processus de modélisation et présente les spécificités des problèmes de généralisation au sein de l'activité mathématique. La deuxième partie expose la méthodologie de cette étude à travers une analyse *a priori* des problèmes étudiés et le protocole

[4] https://nces.ed.gov/timss/ ou https://nces.ed.gov/surveys/pisa/ (consultés le 19/12/20).

d'observation suivi. Les deux parties suivantes présentent les deux premières séances et analysent comment s'est réalisé le processus de modélisation. La cinquième partie interroge les conditions pour aborder la modélisation à travers les problèmes de généralisation. Enfin, la conclusion revient sur l'intérêt d'étudier les problèmes de généralisation, en particulier pour permettre une introduction progressive vers l'algèbre qui est au programme d'enseignement du cycle 4.

1. La modélisation et les problèmes de généralisation

1.1. Le processus de modélisation

L'explicitation de la compétence *modéliser* dans les programmes actuels (voir annexe) fait référence à certains types de problèmes proposés dans les évaluations internationales :

> *Utiliser les mathématiques pour résoudre quelques problèmes issus de situations de la vie quotidienne. […] Reconnaître des situations réelles pouvant être modélisées par des relations géométriques.*

Les chercheurs qui s'intéressent à l'enseignement de ce type de problèmes utilisent diverses schématisations pour rendre compte de la façon dont les modèles sont construits et utilisés (voir Perrenet & Zwaneveld, 2012). Par exemple, la figure 1 présente la schématisation du cycle de modélisation par Blum et Borromeo Ferri (2009) qui est une version développée de celle utilisée par les concepteurs des évaluations PISA (2006).

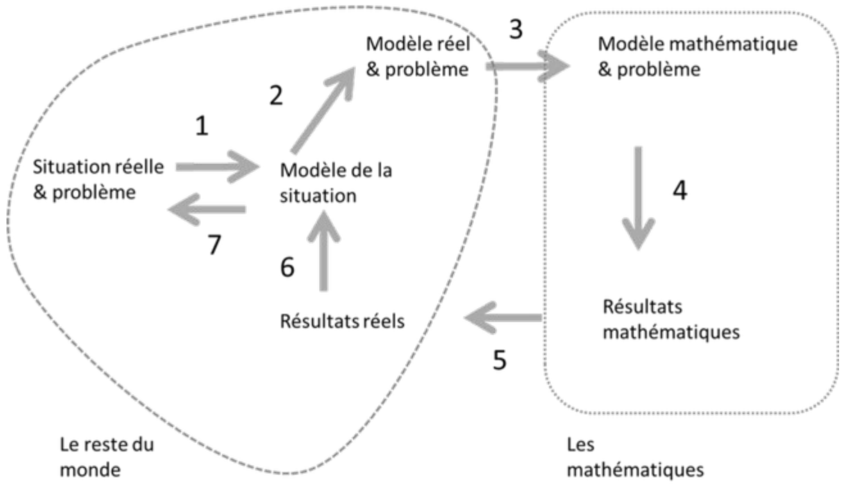


Figure 1 *: Cycle de modélisation[5] d'après Blum et Borroméo Ferri (2009).*

Pour illustrer ce processus, Blum et Borromeo Ferri (2009) proposent l'exemple :

> *Mme Stone vit à Trèves, à 20 km de la frontière luxembourgeoise. Pour faire le plein de sa VW Golf, elle se rend au Luxembourg où, immédiatement derrière la frontière, se trouve une station-service. Là, un litre d'essence coûte 1,10 €, alors qu'à Trèves, le prix est 1,35 € par litre. Mme Stone a-t-elle intérêt à aller au Luxembourg ? Justifiez votre réponse.*

La compréhension du problème issu de cette situation, qui pourrait être réelle, passe par la construction (1) d'un premier modèle de la situation par l'élève. Le processus de simplification et de structuration (2) se réalise en déterminant les éléments à considérer dans la situation réelle pour résoudre le problème, car toutes les informations ne sont pas toujours pertinentes. Un tri est

[5] La traduction du cycle de modélisation et du texte de l'exemple qui suit est de l'auteure de cet article.

habituellement fait pour distinguer le nécessaire du contingent. Ici, il s'agit de déterminer le coût d'un plein d'essence dans deux stations différentes. Le nom des lieux n'a pas d'effet sur le coût final, en revanche, il faudra tenir compte de la distance à parcourir pour rejoindre la station où le prix est le moins élevé. Ce tri est la condition pour que le processus de mathématisation (3) se produise et conduise à l'élaboration d'un modèle mathématique. Simplification, structuration et mathématisation sont les ingrédients du processus de modélisation. Le modèle mathématique repose dans cet exemple sur la proportionnalité entre la distance parcourue et la consommation d'essence de la voiture. Le travail mathématique (4) dans le modèle conduit à des résultats mathématiques qui doivent être interprétés (5) dans le monde réel. Ces résultats sont ensuite validés (6) pour devenir une solution (7) au problème initial. Par exemple, la solution finale au problème réel pourrait devoir intégrer des éléments comme le temps ou la pollution engendrée par le déplacement pour se rendre à la station-service.

L'étude du problème qui vient d'être évoquée illustre le processus de modélisation et sa décomposition en différentes étapes synthétisées en un cycle de modélisation :

(1) délimitation du problème réel et formulation de questions sur ce problème ;
(2) sélection d'éléments, de variables, de relations et formulation d'hypothèses ;
(3) construction d'un modèle mathématique (mathématisation) ;
(4) travail mathématique à partir des relations et variables dans le modèle ;
(5) interprétation des résultats mathématiques obtenus ;
(6) validation des résultats produits ;
(7) évaluation des réponses comme solution au problème et si besoin reprise des hypothèses initiales ;
(8) diffusion des résultats, et notamment les limites du modèle.

Parce que le choix des variables et des hypothèses détermine le modèle mathématique construit et donc les solutions produites, la question du domaine de validité du modèle est essentielle. En absence de discussion sur le domaine de validité du modèle, il n'est pas possible de justifier que des réponses différentes puissent être validées à propos d'une même question. Cependant, les problèmes issus de situations réelles, ou qui y font référence, ne sont pas les seuls types de problèmes qui requièrent une activité de modélisation. Ainsi, par exemple, depuis Descartes (1637), la définition d'un repère permet de déterminer si deux courbes sont sécantes en résolvant des équations. L'équation est alors le modèle mathématique de la courbe tracée sur le papier. C'est pour cette raison que Chevallard (1989) propose de décrire le processus de modélisation sans le restreindre aux cas où une situation extra-mathématique — une « situation réelle » — est à l'origine du processus. Il considère que le processus de modélisation repose sur trois étapes. D'abord, la *définition du système étudié* — qui peut être une situation extra-mathématique ou mathématique — en précisant les éléments pertinents pour l'étude. Cela correspond aux étapes 1 et 2 de la figure 1. En second lieu, la *construction du modèle* pour étudier le système qui consiste à mettre en relation les différentes variables identifiées précédemment (étape 3, figure 1). Enfin, le *travail mathématique dans le modèle* qui permet de construire des connaissances sur le système étudié (étape 4, figure 1). Ces trois étapes sont en interaction car, comme mentionné plus haut, le processus de modélisation est cyclique. Un travail mathématique dans le modèle peut conduire à reconsidérer le système étudié et réévaluer la pertinence des éléments choisis et par conséquent à modifier le modèle initial. Le cycle se termine lorsque la solution mathématique construite est validée comme *réponse au problème* posé. La construction et la validation de la réponse au problème correspondant aux étapes 5, 6, 7 de la figure 1, sont confondues quand la situation à modéliser est mathématique.

Dans cet article est présentée l'étude de trois problèmes de généralisation. Deux problèmes ont un contexte qui évoque une situation réelle et un problème a un contexte arithmétique de mise en relation de nombres entiers. Puisqu'un des trois problèmes étudiés n'est pas associé à une « situation réelle », l'analyse de la mise en œuvre d'un processus de modélisation mathématique sera réalisée en identifiant la présence des quatre étapes :

I. définition de la situation/du système étudié(e) ;
II. construction du modèle mathématique ;
III. travail mathématique ;
IV. construction et validation de la réponse au problème posé.

C'est un modèle moins développé que celui de Blum et Borromeo Ferri mais qui ne se limite pas à un type de problèmes particuliers. Considérons à présent les problèmes de généralisation.

1.2. Les problèmes de généralisation

Comme le souligne Radford (2004) :

> *Une des caractéristiques des mathématiques est que ses objets sont des objets « généraux ». Quand nous énonçons une propriété sur les triangles ou sur les fonctions continues, ce n'est pas d'un triangle particulier ou d'une fonction continue particulière dont nous parlons, mais de l'objet général correspondant (Radford, 2004, p. 15).*

Une part importante de l'activité mathématique à l'école repose ainsi sur des processus de généralisation qui produisent des *objets généraux* que Squalli (2015) appelle *généralités* pour distinguer le processus (la généralisation) du résultat (la généralité). Ceci confère aux problèmes dits de généralisation un intérêt particulier pour la formation mathématique. Piaget et Henriques (1978) distinguent deux types de généralisation : la généralisation *inductive* et la généralisation *constructive*. Lorsqu'un élève, à partir de l'observation de la liste des nombres pairs, conclut « les nombres pairs se terminent par 0, 2, 4, 6 ou 8 », il énonce une proposition générale, une généralité. Cet élève, qui généralise à partir de l'observation de quelques cas sans avoir dépassé le stade de l'inférence, sans chercher à en donner une explication, fait une *généralisation inductive*. À ce stade, la propriété sur les nombres entiers reste encore à être démontrée pour devenir une « vérité mathématique ». Contrairement à la généralisation inductive, la *généralisation constructive* ne se restreint pas à ce qui est observé, elle nécessite une action de la part de celui qui généralise. C'est le cas par exemple si l'élève, après avoir observé une liste de quelques nombres pairs, décompose ceux qui ont au moins deux chiffres en l'addition d'un multiple de 10 et d'un nombre à un chiffre. Ces décompositions, emblématiques de ce qui peut être fait pour tous les nombres supérieurs à 10, révèlent la propriété énoncée. Même si elles laissent éventuellement implicite la propriété mathématique sur laquelle la propriété énoncée se fonde : la somme de deux nombres pairs est un nombre pair (les multiples de 10 et les nombres 2, 4, 6 et 8 sont des nombres pairs donc leur somme est un nombre pair).

Les problèmes dits de généralisation sont des problèmes qui se résolvent par la reconnaissance de régularités. La poursuite d'un algorithme à l'école maternelle pour construire un collier avec une alternance d'une perle bleue et de deux perles rouges, par exemple, est un problème de généralisation. Pour poursuivre le collier, l'élève doit reconnaître en l'alternance des couleurs et du nombre de billes une « propriété » du collier. La réussite dans la poursuite de l'algorithme passe par la construction d'un modèle (de la situation). Ainsi, la *définition du système étudié* (étape I) consiste à identifier les données du problème : un fil, des perles de deux couleurs, un collier à terminer. La *construction du modèle* passe par l'identification des éléments caractéristiques du collier à compléter : les perles ont la même forme ; il y a une alternance de 2 couleurs ; il y a une alternance du nombre de perles ; le nombre de perles est associé à une couleur. Finalement, le collier est caractérisé par l'alternance d'une perle bleue et de deux perles rouges (étape II). Le *travail mathématique* ici consiste à appliquer ce modèle (étape III). Une mise en correspondance terme à terme des perles entre le collier modèle et le collier produit permettra de *valider la réponse* de l'élève (étape IV).

L'étude présentée dans ce texte s'intéresse aux potentiels des problèmes de généralisation pour engager les élèves de CM1 et CM2 (4^{e} et 5^{e} années de l'école élémentaire, les élèves ont entre 9 et 11 ans) vers la modélisation. Aussi, la question à laquelle nous cherchons à répondre est : comment est abordé le processus de modélisation dans l'étude d'un problème de généralisation dans une classe de CM1-CM2 ?

2. L'expérimentation

Cette partie présente la méthodologie de cette étude à travers une analyse *a priori* des problèmes étudiés et le protocole d'observation suivi.

2.1. Les problèmes étudiés

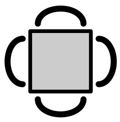
L'analyse *a priori* se réalise ici en deux temps : en présentant les problèmes et l'explicitation des hypothèses qui sous-tendent les choix des variables didactiques réalisés par la chercheuse, puis en identifiant les techniques de résolution envisageables. L'énoncé de deux problèmes repose sur un schéma représentant la situation, ils sont donc analysés ensemble.

Les problèmes « À table ! » et « Les cure-dents »

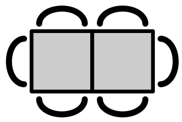
Le problème « À table ! » conduit à déterminer le nombre de personnes qui peuvent s'asseoir autour de plusieurs tables accolées et alignées.

À table !

Une famille a l'habitude de ranger les tables côte à côte pour faire une ligne.



Une table avec des chaises



Deux tables avec des chaises

Combien de personnes peuvent s'asseoir autour

a) de 3 tables ?
b) de 10 tables ?
c) de 25 tables ?

Pour l'anniversaire de Mamie, il y aura 32 personnes. Combien de tables faut-il ?

Figure 2 *:Le problème « À table ! ».*

Le problème « Les cure-dents » vise à déterminer combien de cure-dents sont nécessaires pour réaliser des assemblages de triangles (figure 3).

Les cure-dents

Lola joue à faire des figures géométriques avec des cure-dents.

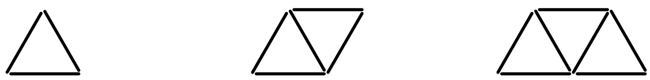


Figure 1 Figure 2 Figure 3

Combien de cure-dents a-t-elle utilisé pour faire...

a) la figure 4 ?
b) la figure 10 ?
c) la figure 25 ?

Louis a 40 cure-dents est-ce suffisant pour créer la figure n°20 ?

Figure 3 *:Le problème « Les cure-dents ».*

Ces deux problèmes ont été étudiés dans de nombreuses recherches internationales (par exemple, Mary, Squalli et Schmidt (2014) pour le premier problème et Radford (2004) pour le second). La particularité des problèmes proposés ici est qu'ils ne demandent pas explicitement une formule permettant de trouver combien de chaises sont nécessaires pour n'importe quel nombre de tables ou combien de cure-dents sont nécessaires pour construire n'importe quelle figure. Le choix fait ici, est de poser la question du problème inverse, c'est-à-dire combien de tables sont nécessaires pour qu'un nombre donné de personnes puissent s'asseoir ou combien de cure-dents sont utilisés pour faire une figure donnée.

D'autres choix ont été faits à propos des variables didactiques associées à ces problèmes. Ainsi, ces deux problèmes ont un contexte figuratif, cela signifie que, dans l'énoncé, il y a un dessin qui illustre la situation. À chaque fois, la première question porte sur le cas qui suit ceux représentés, puis sur un cas particulier proche, afin de permettre la dévolution du problème en facilitant l'utilisation d'un dessin pour répondre. L'hypothèse sous-jacente est qu'un tel choix crée les conditions pour que les élèves puissent s'approprier le processus qui permet de passer d'un cas au suivant. La recherche d'un cas plus lointain comme la recherche du problème inverse ont pour objectif d'amener les élèves à utiliser une autre technique que le dessin. Néanmoins, la taille des nombres est choisie pour que le dessin soit toujours possible, pour deux raisons : ne pas mettre en difficulté les élèves qui abordent pour la première fois ce genre de problèmes et rendre acceptable pour les professeurs des écoles de proposer ce type de problèmes à leurs élèves.

En résumé, voici les choix qui ont été faits :

- représenter les (deux ou trois) premiers cas successivement dans l'énoncé ;
- rechercher le cas suivant ceux de l'énoncé puis un cas particulier proche (3, puis 10 et 4, puis 10) ;
- rechercher un cas particulier plus lointain (25) ;
- rechercher le problème inverse sur un cas intermédiaire aux précédents.

Le problème « Les machines »

Ce troisième problème diffère des précédents par l'absence d'évocation d'un contexte réel. Il propose d'étudier trois « machines », en réalité trois fonctions, qui transforment les nombres (voir figure 4).

Les machines qui transforment les nombres		
Machine A	**Machine B**	**Machine C**
0 devient 2	0 devient 0	0 devient 1
1 devient 3	1 devient 3	1 devient 3
2 devient 4	2 devient 6	2 devient 5
3 devient 5	3 devient 9	3 devient 7
4 devient 6	4 devient 12	4 devient 9
5 devient 7	5 devient 15	5 devient 11
10 devient ...	10 devient ...	10 devient ...

a) Que fait la machine A ?

b) Que fait la machine B ?

c) Que fait la machine C ?

Figure 4 *: Le problème « Les machines ».*

Pour chaque machine, cinq cas successifs (cinq couples de nombres) sont donnés pour permettre aux élèves d'identifier ce qu'il y a de commun entre eux. Ils sont présentés verticalement car Carraher, Martinez et Schliemann (2008) ont montré que cette disposition en colonnes amène les élèves à considérer les différents cas successivement et à chercher une régularité d'un cas à un autre. Le fait que la première question (« 10 devient ... ») porte sur un cas proche donne la possibilité aux élèves de continuer la suite des cas pour répondre. L'hypothèse sous-jacente est que cela crée les conditions pour que les élèves identifient le processus qu'ils auront à expliciter à la question suivante : *« Que fait la machine ? »*.

Voici les choix qui ont été faits pour ce problème :

- représenter les cinq premiers cas verticalement ;
- rechercher un cas particulier proche (10) plutôt que le cas suivant (6) ;
- rechercher le cas général ;
- proposer une progressivité des relations :
  - la première relation est additive : $A(n)=n+2$,
  - la deuxième est multiplicative : $B(n)=3n$,
  - la troisième est une combinaison linéaire : $C(n)=2n+1$, qui peut s'exprimer comme la somme de deux nombres consécutifs : $C(n)=n+(n+1)$ selon l'hypothèse que cela facilite son identification et sa formulation.

Considérons à présent comment ces problèmes peuvent être résolus.

Les techniques de résolution

Trois techniques sont envisageables pour répondre aux questions relatives à ces problèmes.

La technique dessin

Cette technique consiste à représenter le nombre de tables ou le numéro de la figure demandé puis à dénombrer les chaises autour des tables ou les cure-dents dans la figure. Pour cela, l'élève a deux possibilités : dessiner la situation pour les différents cas successivement jusqu'à arriver au cas souhaité ou dessiner directement le cas demandé, comme l'a fait l'élève de la figure 5.

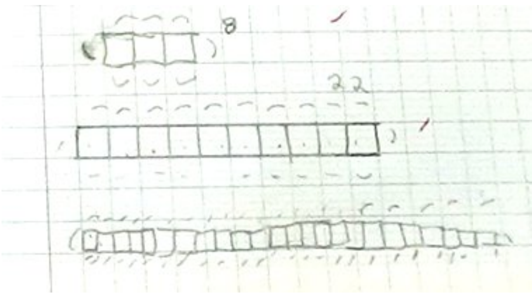


Figure 5 *: Exemple de la technique dessin.*

Le troisième problème étant à contexte numérique, cette technique a peu de chances d'être utilisée. En revanche, les deux techniques suivantes sont applicables aux trois problèmes.

La technique relation de récurrence

Cette technique repose sur l'identification d'une régularité et le processus qui fait passer d'un résultat à un autre est identifié lorsque l'invariant est repéré. Lorsqu'un dessin est possible comme dans les problèmes « À table ! » ou « Les cure-dents », la découverte de cette régularité d'un cas à un autre peut être faite à partir des dessins, comme cela a été montré dans Wozniak (2020). Néanmoins, on dira que l'élève utilise la *technique relation de récurrence* uniquement lorsqu'il n'éprouve plus le besoin de dénombrer sur un dessin. L'identification de l'invariant permettant de répondre pour un cas donné lorsqu'on connait la réponse pour un cas précédent.

Dans le problème « À table ! », le processus repose sur le fait qu'ajouter une nouvelle table revient à ajouter deux chaises, donc deux nouvelles personnes. Du point de vue des résultats numériques, cela correspond donc à ajouter 2 d'un résultat à l'autre. Dans le problème « Les cure-dents », l'ajout d'un triangle correspond aussi à l'ajout de deux cure-dents. Dans le problème « Les machines », il y a un ajout de 1 d'un résultat à un autre avec la machine A, un ajout de 3 avec la machine B et un ajout de 2 avec la machine C.

La technique relation fonctionnelle

Cette technique repose sur l'identification d'une relation entre un nombre et le résultat associé et non plus entre deux résultats comme pour la *technique relation de récurrence*. Une organisation du dénombrement sur le dessin peut conduire à percevoir cette relation. Néanmoins, on dira que l'élève utilise la *technique relation fonctionnelle* uniquement lorsqu'il n'éprouve plus le besoin de dénombrer sur un dessin. L'identification de la relation fonctionnelle permettant de donner directement le résultat pour n'importe quel cas.

Pour les deux problèmes à contexte figuratif, déterminer la relation fonctionnelle passe par une décomposition spatiale du modèle de la situation. Par exemple, dans le problème « À table ! » il est possible de considérer qu'il y a 2 rangées de chaises de part et d'autre des tables alignées et deux chaises (une à chaque bout). Ce modèle de la situation conduit à la relation fonctionnelle $T(n)=2n+2$, où n représente le nombre de tables et $T(n)$ le nombre de personnes assises. Mais on peut aussi considérer qu'il y a 2 chaises de part et d'autre de chaque table et 3 chaises autour des deux tables en bout de ligne. Cette autre décomposition conduit à la relation fonctionnelle : $T(n)=6+2(n-2)$. Ces deux relations qui rendent compte de deux modèles différents de la situation sont équivalentes : $6+2(n-2)=6+2n-4=2n+2$.

Pour le problème « Les cure-dents », en considérant que le premier cure-dent est posé pour démarrer et qu'il faut ensuite poser 2 cure-dents pour former un triangle, on obtient la relation fonctionnelle $F(n)=1+2n$, où n représente le numéro de la figure (ou le nombre de triangles) et $F(n)$ le nombre de cure-dents nécessaires. Mais si on considère qu'il faut 3 cure-dents pour former le premier triangle et 2 seulement pour les suivants, on obtient la relation fonctionnelle $F(n)=3+2(n-1)$, équivalente à la première : $3+2(n-1)=3+2n-2=1+2n$.

Dans le problème « Les machines », il faut reconnaître des relations arithmétiques qui reposent sur la décomposition des nombres. Ainsi, la machine A ajoute 2 au nombre de départ, la machine B fournit le triple du nombre de départ, tandis que la machine C ajoute le nombre suivant au nombre donné ou le multiplie par 2 puis ajoute 1 : $A(n)=n+2$, $B(n)=3n$ et $C(n)=2n+1$.

Évidemment, il n'est pas attendu un tel formalisme de la part d'élèves du cycle 3 mais plutôt des formulations verbales ou des calculs qui explicitent le processus.

Des problèmes en réseau

Deux problèmes évoquent une situation réelle où le processus de modélisation repose sur une « lecture » spatiale ou graphique de la situation. Le troisième problème a un contexte numérique afin d'observer comment des élèves peuvent résoudre un problème de généralisation lorsqu'un dessin n'est pas présent dans la situation.

Le choix des valeurs numériques a été fait afin que les problèmes soient en réseau sur la base de deux hypothèses. La première est que cela créée une dynamique par un enrichissement progressif du milieu de l'étude d'un problème à un autre. La seconde hypothèse est que les professeurs pourront s'appuyer sur ces « ressemblances » numériques dans les calculs pour faire identifier que la relation de récurrence et la relation fonctionnelle ne portent pas sur les mêmes objets et finalement, ne représentent pas la même chose.

Les relations numériques qui expriment les processus de généralisation des trois problèmes se retrouvent ainsi d'un problème à un autre (voir le tableau 1). Les problèmes « À table ! » et « Les cure-dents » ont la même relation de récurrence mais pas la même relation fonctionnelle. L'écart de 2 (relation de récurrence) dans ces deux problèmes, se retrouve dans la relation fonctionnelle de la machine A, puisque $A(n)=n+2$, alors que sa relation de récurrence est « $+1$ » : $A(n+1)=A(n)+1$. Enfin, le problème « Les cure-dents » et la machine C ont la même relation fonctionnelle (donc aussi la même relation de récurrence). Du point de vue des nombres produits, on peut encore remarquer que le nombre de chaises est toujours pair, tandis que le nombre de cure-dents est toujours impair, comme les résultats de la machine C.

Technique	Relation fonctionnelle	Relation de récurrence
À table !	$T(n)=2n+2$ où n est le nombre de tables et $T(n)$ le nombre de personnes.	$T(n+1)=T(n)+2$
Les cure-dents	$F(n)=2n+1$ où n est le numéro de la figure et $F(n)$ le nombre de cure-dents.	$F(n+1)=F(n)+2$
Les machines	$A(n)=n+2$; $B(n)=3n$; $C(n)=2n+1$ où n est le nombre entré dans la machine.	$A(n+1)=A(n)+1$ $B(n+1)=B(n)+3$ $C(n+1)=C(n)+2$

Tableau 1 *: Techniques relation fonctionnelle et relation de récurrence pour les trois problèmes.*

Tant que l'élève dessine la totalité des tables (ou des triangles) puis dénombre les places (ou les cure-dents), il n'est pas dans la recherche d'une généralisation, même si la technique de dénombrement suit toujours le même procédé. En ce cas, la *technique dessin* ne relève pas d'une généralisation. En revanche, les *techniques relation de récurrence* et *relation fonctionnelle* correspondent au minimum à une généralisation inductive. Tandis que le recours à une généralisation constructive se révèle par le degré de généricité des discours justifiant les techniques employées.

2.2. Mise en œuvre

Le protocole d'observation

L'objectif n'est pas d'expérimenter une situation d'enseignement conçue par un chercheur mais d'observer comment des problèmes de généralisation peuvent favoriser la mise en œuvre de praxéologies[6] de modélisation : quelles sont les procédures des élèves qui étudient ce genre de problèmes et comment la professeure accompagne les élèves dans leur recherche. Par conséquent, la durée et le nombre de séances, l'organisation de la classe (travail individuel, en binômes, en groupes) étaient laissés à la charge de l'enseignante. Pour ne pas gêner le travail des élèves et de leur professeure, l'observatrice est restée au fond de la classe, sans intervenir ni se déplacer.

Le corpus est constitué de trois types de données :

- les films des séances selon un point fixe au fond de la classe, caméra dirigée vers le tableau lors des temps collectifs ou vers certains élèves durant les phases de recherche ;
- les enregistrements sonores de la professeure qui portait sur elle un microphone ;
- les productions des élèves.

La séquence observée

Les observations ont été réalisées entre mars et avril 2018, dans une classe de CM1-CM2 au sein d'une école de cinq classes d'un village de 1 400 habitants. La professeure observée est membre d'un groupe IREM premier degré dont le travail est sans lien avec l'objet de la recherche mentionnée ici. C'est une enseignante expérimentée et il règne dans la classe un climat bienveillant propice aux apprentissages. Les problèmes ont été présentés comme des problèmes de recherche et envoyés par messagerie électronique dans un format qui permettait à l'enseignante — codée (P) dans la suite — de les utiliser à sa convenance. Les problèmes pouvaient donc être présentés ensemble ou séparément, dans l'ordre de la fiche envoyée ou pas[7]. Aucun document explicitant comment travailler ces problèmes n'a été fourni. Les élèves des deux niveaux étaient mélangés dans les groupes et réalisaient les mêmes tâches, tous ont résolu les problèmes. Le problème « À table ! » a été étudié en premier, puis le problème « Les machines » et le problème « Les cure-dents », chacun durant une séance, selon la même modalité :

[6] Une pratique n'est pas seulement un « faire », elle révèle aussi une pensée. Chevallard (1992) définit une praxéologie comme modèle de la connaissance ; elle est faite d'une *praxis* (type de tâches et techniques pour les résoudre) et d'un *logos* (discours technologiques, s'inscrivant dans une théorie, qui décrivent, explicitent, justifient, développent les techniques).

[7] L'ordre des problèmes sur la fiche était : « À table ! », « Les cure-dents », « Les machines ».

1. recherche individuelle ;
2. travail en groupe conduisant à l'élaboration commune d'une affiche avec d'un côté la phrase-réponse et de l'autre la recherche ;
3. discussion collective autour de la présentation et de l'analyse des affiches ;
4. retour réflexif individuel sur ce qui a été appris au cours de la séance.

3. Première rencontre avec la généralisation

La première séance commence par une lecture silencieuse de l'énoncé affiché au tableau suivie d'une lecture à voix haute par (P) qui demande combien de questions sont posées et *« à quoi on peut voir qu'il y a quatre questions »*. Quatre élèves en lisent une mais aucune indication n'est donnée. Ainsi, lorsqu'une élève demande si les tables sont côte à côte ou séparées, (P) renvoie à chacun la responsabilité de décider. L'organisation du travail est rappelée et les groupes sont constitués par (P) qui rappelle que *« pour faire son travail de chercheurs, on chuchote »*.

Les élèves se mettent immédiatement au travail. (P) circule dans la classe et fait formuler leurs idées aux élèves, s'assurant qu'à l'intérieur du groupe, tous sont d'accord avec la méthode de résolution. Au bout d'une vingtaine de minutes de recherche, les élèves rangent leurs affaires et les affiches des six groupes sont accrochées au tableau. La mise en commun peut débuter.

Sur la première affiche, pour chaque question, il y a deux réponses correspondant à des tables isolées ou des tables accolées (voir figure 6).

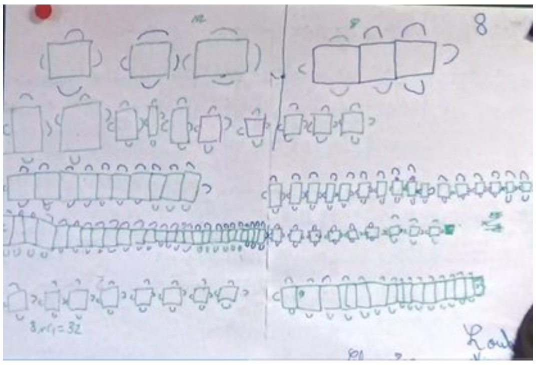


Figure 6 *: Affiche du groupe 1 avec l'étude des deux cas, les tables séparées ou accolées.*

Une première discussion a donc lieu sur les différentes possibilités d'assembler les tables, qui se conclut par *« Ils ont l'habitude de mettre les tables côte à côte »*. Cette discussion fait écho à l'intervention d'une élève au moment de la lecture collective de l'énoncé où la professeure avait laissé chacun libre de leur interprétation. Une telle attitude donne l'occasion d'expliciter la situation et contribue à la définition du système étudié (étape I).

Ayant observé que :

> *P* : *Pour la première question, vos réponses sont toutes les mêmes*,

(P) retourne les affiches :

> *P* : *On regarde les stratégies, les procédures qui ont été choisies par chaque groupe*.

L'analyse des différentes affiches conduit à la conclusion :

> *P* : *Pour la réponse à la première question, tout le monde a choisi la même procédure*,

décrite par l'élève représentant le premier groupe en ces termes :

E : *On a mis trois tables collées, on a mis les chaises et on a vu que ça faisait 8 personnes*,

et que la classe a nommée la *« stratégie du dessin »*. C'est d'ailleurs la technique apparemment utilisée pour les questions 2 et 3 dans les différents groupes.

Mais un élève du groupe 2 vient commenter leurs difficultés à trouver assez de place sur l'affiche pour dessiner les 25 tables :

E : *Du coup, à 25 tables, on s'est dit ça fait 10 tables fois 2 plus 5 tables. Du coup, on n'avait pas calculé serrées ces tables-là*.

Un temps d'échanges avec la classe s'ouvre, qui passe par la compréhension collective de l'obtention du résultat erroné 54 :

E_1 : *La dernière place des 20 tables et la 1re place des 5 autres tables, si on les collait, ça faisait plus de place.*

P : *Puisque vous avez fait le cheminement pour vous rendre compte que vous vous étiez trompés, qu'est-ce qu'il vous suffisait de faire pour ajuster votre résultat ?*

E_1 : *De vérifier.*

E_2 : *On faisait fois 2 pour les tables de 10, ça fait 20, et on imaginait que les 5 tables de plus, on les collait.*

P : *Voilà, et pour les coller, qu'est-ce qu'il se passait ?*

E_1 : *On faisait* -2.

P : *Vous n'avez pas trouvé le résultat exact, mais vous étiez tout près. En plus, ce que je trouve bien, c'est que vous vous êtes rendu compte par vous-mêmes que vous aviez oublié de coller les tables, et que, du coup, il y avait deux places comptées en trop.*

Cet épisode, qui révèle le travail mathématique dans un modèle (étape III), comporte une erreur dans le lien entre la décomposition — deux ensembles de 10 tables et un ensemble de 5 tables — et le résultat $54=2\times22+12-2$. Avec cette décomposition, il y a 2 chaises de trop entre les deux séries de 10 tables, mais aussi entre une série de 10 tables et la série de 5 tables. Il faudrait donc retirer 4 chaises aux $2\times22+12$ chaises. Ce qui donnerait le résultat attendu : 52.

En dépit de cette erreur qui n'a pas été levée, ce qu'il reste du discours largement partagé avec la classe, c'est que la décomposition en deux ensembles de tables nécessite de retirer des chaises pour permettre le recollement. Implicitement, les élèves découvrent ainsi que le modèle mathématique n'est pas linéaire[8]. Cette discussion sur la mathématisation de la situation correspond à la construction d'un modèle mathématique de la situation (étape II) et montre les allers-retours entre la définition du système étudié et la construction du modèle.

La *technique dessin*, unanimement utilisée au départ, évolue vers la recherche d'une relation fonctionnelle, par souci d'économie, du fait de la taille des nombres. L'organisation spatiale est regardée comme deux rangées parallèles où les chaises sont en correspondance terme à terme, avec aux deux bouts une chaise isolée. Le représentant du groupe 3 explique les calculs correspondants :

E : *Il y avait 10 tables, on a fait 10 fois 2, ça fait 20, plus les 2 qui sont de chaque côté, ça fait 22*.

Discours repris pour l'ensemble de 25 tables :

[8] Le nombre de chaises n'est pas proportionnel au nombre de tables et la relation qui les lie ne peut donc pas être modélisée par une fonction linéaire.

E : *On a fait 2 fois 25, ça fait 50, plus les 2 chaises qui étaient en bout de table, ça fait 52.*

Ainsi, une nouvelle définition du système conduit à la construction d'un nouveau modèle mathématique.

Le double rôle du dessin est alors évoqué, notamment pour découvrir la technique de calcul :

P : *Et le dessin, vous l'avez fait après pour vérifier, ou c'est le dessin qui t'a permis de dire ça fait 10 fois 2 plus 2 ou 25 fois 2 plus 2 ?*

E : *On a commencé toujours par faire le dessin, sauf pour la grand-mère.*

P : *C'est en faisant le dessin que vous vous êtes aperçus que cela faisait pour 10 tables, 10 fois 2 plus 2 et pour 25, 25 fois 2 plus 2.*

Sollicitant l'avis du groupe 4, un élève évoque le coût de la réalisation du dessin :

P : *Quand tu dis « pour nous faciliter la tâche », cela veut dire que vous vous êtes dit ça et vous avez fait le dessin pour vérifier, ou vous avez d'abord fait le dessin et vous avez dit ça fait 25 fois 2 plus 2 ?*

E : *On a fait d'abord le dessin.*

P : *Donc, en fait, cela vous a facilité la tâche en quoi de faire 25 fois 2 plus 2 ?*

E : *Pour compter.*

(P) saisit cette opportunité, et insiste auprès des élèves qui ont compté une par une les chaises, pour valoriser la technique de calcul :

P : *Et c'est pour ça que E dit « j'ai compté 25 fois 2 plus 2 » et ça lui facilite la tâche. Votre procédure est correcte, mais eux ont aussi cherché à se faciliter la tâche.*

Le groupe 6 est enfin sollicité et raconte comment le calcul a été proposé par l'un d'eux :

E : *En fait, quand j'ai expliqué mon idée, ils n'étaient pas sûrs, du coup on a vérifié un peu sur la 1re et la 2e, et après on a vu que c'était bon.*

Un autre élève confirme :

E : *On a mis un exemple, s'il y a 5 tables, et bien 5 fois 2 égal 10 et $10+2$ égal 12, ça fait 12 personnes.*

(P) valide ce travail en commentant :

P : *Donc ça c'est pour apporter la preuve de ce que vous... D'accord.*

Puis un élève du groupe aborde la question du problème inverse :

E : *Pour le problème de la mamie, on savait qu'il y avait 32 personnes, j'ai fait $32-2$ pour enlever les bouts, ça fait 30, et après la moitié de 30 c'est 15, donc ça fait 15 tables.*

Selon le contrat didactique habituellement instauré dans la classe, (P) sollicite d'autres élèves pour valider cette proposition :

P : *Qu'est-ce que tu en penses de la façon qu'il a fait ?*

ou pour faciliter la compréhension :

P : *Et pourquoi il a fait -2 ? Pourquoi il a enlevé 2 ?*

Une fois cette technique discutée, un élève décrit une technique reposant sur le dessin :

E : *On a ajouté des tables, et puis on a ajouté des chaises jusqu'à 32.*

Un élève du groupe 3 prend la parole :

E : *On a fait 32 divisé par 2, c'est égal à 16, et $16-1$, ça fait 15.*

Dans un premier temps, (P) demande :

> *P* : *Et pourquoi* -1 *?*

puis revient sur ce qui est écrit sur l'affiche :

> *P* : *Je vois* $32:2=16$ *et* $16+2=18$*. Pourquoi diviser par 2 ?*

L'élève explique alors la démarche suivie par le groupe :

> *E* : *10 tables, on fait 10 fois 2, ça fait 20, et on rajoute les deux places sur les côtés, ça nous fait 22, on s'était dit que si on le fait dans le sens contraire, on risque de trouver. 32 divisé par 2, ça fait 16, moins 2, ça fait 14, mais après on a fait plus 2, c'est égal à 18, et après on a dessiné sur une feuille de brouillon et on a trouvé le nombre de places en dessinant, et ça nous a donné 15 tables.*

Cela donne l'occasion à (P) de revenir sur le rôle du dessin :

> *P* : *Vous avez fait un dessin pour vérifier votre réponse, et vous vous êtes rendu compte que votre réponse était erronée. Et il est où votre dessin ? Et du coup qu'est-ce que vous auriez dû faire ?*
>
> *E* : *On aurait dû enlever 2 pour arriver à 30 et ensuite diviser par 2.*

Un élève du groupe 5 vient au tableau expliquer qu'ils ont commencé par dessiner 32 personnes, puis 16 personnes ont été mises en face des 16 premières avant de compter le nombre de tables. C'est un autre élève qui fera remarquer qu'*« il manque les deux personnes en bout de table »*.

La discussion à partir des affiches a permis d'expliciter les calculs réalisés (étape III) en lien avec :

1. le modèle mathématique élaboré ;
2. l'interprétation des calculs par rapport à la situation ;
3. la validité des résultats comme réponse à la question posée (étape IV).

Ceci illustre les interrelations entre les différentes étapes du processus de modélisation.

La séance se termine par une question rituelle :

> *P* : *Maintenant, la question que je vous pose à chaque fois : qu'est-ce que cette séance vous a appris ? Au niveau de la classe, au niveau de...*

Quelques élèves font référence à la gestion des groupes, leur composition, le bruit. D'autres mentionnent des éléments liés à la situation évoquée dans le problème :

> *E* : *J'ai appris qu'une table de 4, si on en ajoute une et qu'on la colle, ça fait pas 8*,

ou aux procédures possibles. Et pour finir, un élève revient sur l'efficacité du calcul par rapport au dessin :

> *E* : *Moi, j'ai appris que le dessin, ça donne la réponse, mais ça prend beaucoup de temps*.

La distribution de la fiche sur laquelle se trouve l'énoncé du problème conclut la séance.

Dans cette première séance, deux techniques ont donc été utilisées par les élèves : cinq groupes ont eu recours au dessin et au dénombrement et un groupe a évolué vers la relation fonctionnelle comme moyen de faciliter ce dénombrement. Après cette première rencontre avec un problème de généralisation, les élèves ont étudié le problème des machines qui ne permet pas de recourir à la *technique dessin* et demande explicitement une expression de la relation fonctionnelle.

4. Distinguer deux relations généralisatrices

Comme nous l'avons montré précédemment, les *techniques relation de récurrence* et *relation fonctionnelle* sont envisageables pour les trois problèmes. Ces deux techniques reposent sur l'identification d'un invariant dans le processus et conduisent à faire des généralisations qui ne portent pas sur les mêmes « objets ». La relation de récurrence lie les résultats successifs tandis que la relation fonctionnelle lie nombre de départ et résultat.

La séance s'est déroulée de la même manière que pour le problème « À table ! ». À la suite d'une lecture silencieuse, les élèves se sont mis d'accord sur la situation : « On a pris un nombre, ce nombre est entré dans la machine et elle transforme le nombre » (étape I). Après avoir fait une recherche individuelle puis en groupe, la mise en commun est réalisée à partir des affiches des six groupes. Le tableau 2 présente une synthèse des réponses où « R » code une relation de récurrence et « F » code une relation fonctionnelle. Elles sont présentées dans l'ordre au tableau.

	Groupe 1	Groupe 2	Groupe 3	Groupe 4	Groupe 5	Groupe 6
Machine A	F : « avance de 2 »	F : « ajoute 2 »	F : « +2 »	F : « +2 »	R : « avance de 1 en 1 »	F : « +2 »
Machine B	F : « multiplie par 3 »	F : « la machine utilise les multiples de 2 »	F : « ×3 »	F : « ×3 »	R : « avance de 3 en 3 »	F : « ×3 »
Machine C	F/R : calculs non formalisés	F : « ajoute 1 au nombre à additionner »	F : « ×2+1 »	F : « +1 »	R : « se termine par des nombres impairs »	F : « ×2+1 »

Tableau 2 *: Synthèse et codage des réponses sur les affiches.*

Le groupe 5 est le seul à avoir proposé systématiquement la relation de récurrence en cherchant une régularité entre les résultats. Les autres groupes ont cherché la relation fonctionnelle qui correspond à la réponse attendue à la question « Que fait la machine ? ». Les groupes 3 et 6 les ont trouvées même si la formulation n'est pas conforme aux usages en mathématiques. Le groupe 2 semble avoir systématiquement cherché une relation fonctionnelle additive. Les groupes 1 et 4 ont été mis en difficulté avec la machine C, pour laquelle ils ont identifié une régularité parmi les nombres à additionner pour obtenir les résultats.

La mise en commun s'est structurée en considérant chaque machine l'une après l'autre. Pour chaque affiche, (P) sollicite les élèves pour qu'ils commentent et expliquent leur procédure et fait systématiquement réagir les autres élèves de la classe pour valider ou questionner ce qui a été décrit. Elle permet ainsi aux élèves d'identifier les éléments caractéristiques de ces procédures, en pointant ce qui peut être commun ou différent entre les affiches.

Concernant la machine A, une discussion s'est engagée à propos de la réponse du groupe 6 qui pour trouver ce que devient 10, a continué la liste des nombres et calculé ce que deviennent 6, 7, 8 et 9. Les deux procédures sont validées par la classe :

P : *La question était : « Que fait la machine A ? ». Donc la réponse à cette question, quelle est-elle ?*

E : *Elle fait « plus 2 » à chaque fois.*

P : *Elle fait « plus 2 » à quel nombre ?*

E : *Au nombre qui est avant.*

P : *Ah. Au nombre de départ.*

P : *On est d'accord avec ça ? La machine A, elle prend le nombre de départ et elle fait « plus 2 » ?*

P : *Et pour vous, Emma, qu'est-ce que vous...*

E : *La machine, elle fait avancer les résultats de 1 en 1.*

Lorsque (P) reformule *« nombre qui est avant »* par *« nombre de départ »*, elle lève l'ambiguïté sans risque de se tromper sur la technique évoquée par l'élève puisque l'ajout de 2 fait référence à la relation fonctionnelle tandis que l'ajout de 1 renvoie à la relation de récurrence (voir tableau 1). Mais elle donne aussi un élément essentiel pour identifier les deux modèles envisageables : la distinction entre les deux techniques, c'est-à-dire les deux types de généralisation, passe par l'identification des nombres sur lesquels les calculs sont réalisés. La *technique relation de récurrence* peut s'exprimer à partir de ce qui se passe d'un résultat à un autre (c'est ce que fait le groupe 5), alors que la *technique relation fonctionnelle* dit ce qu'il se passe entre le nombre de départ et le résultat. C'est ainsi que, lorsque le premier groupe décrit les calculs réalisés pour la machine B, (P) reformule :

P : *Donc je prends le nombre de départ et je fais fois 3, et ça donne le résultat.*

Notons que, concernant le groupe 2, (P) a pris soin de faire remarquer aux élèves qu'ajouter à un nombre son double revient à multiplier par 3 :

P : *Vous, vous ne l'avez peut-être pas entendu, mais là, pour me donner le résultat de* $8+16$*, Charles, dans sa tête* [P baisse la voix et ferme les yeux] 3×8. *Et en fait, qu'est-ce qu'il a fait, Charles ?*

E : *J'ai multiplié par 3.*

Pour le groupe 5, qui a utilisé la relation de récurrence, (P) reformule la procédure des élèves :

P : *D'accord, c'est-à-dire que, dans ce groupe-là, elles ont continué à regarder la suite des résultats et elles se sont dit dans la machine B* [(P) note au tableau 0, 3, 6, 9, 12, 15, 18] *il faut ajouter* $+3$.

C'est lors de la synthèse sur les deux techniques utilisées pour la machine B que le lien entre elles est fait à partir des propriétés de la multiplication :

P : *Bon, à la question que fait la machine B ?*

E : *Elle multiplie par 3.*

P : *D'accord.*

E : *La machine B avance de 3 en 3.*

P : *La machine B avance de 3 en 3.*

E : *Elle dit que la machine B avance de 3 en 3, mais au résultat, parce que...*

P : *Oui, tu as raison, il faut le préciser. Elle fait avancer les résultats de 3 en 3.*

E : *C'est le triple aussi.*

P : *Ah, qu'est-ce que c'est qui est le triple ?*

E : *Le résultat.*

P : *Le résultat, c'est le triple de quoi ?*

E : *Du chiffre de départ.*

P : *Du nombre de départ. Effectivement, la machine B donne le triple et c'est pour ça que ce groupe-là a vu que les résultats avancent de 3 en 3, comme dans la table de 3.*

Au-delà de la distinction entre les deux relations de généralisation, (P) permet aux élèves de comprendre le lien entre ces deux relations et, ce faisant, les valide mutuellement. Deux systèmes différents produisent deux modèles (étape II).

Pour la machine C, les choses sont plus compliquées car la relation fonctionnelle n'est ni une addition, ni une multiplication. Quatre groupes ont identifié cette relation, les groupes 2 et 4 en reconnaissant qu'on ajoute le suivant au nombre de départ, les groupes 3 et 6 en identifiant le programme de calcul à réaliser (multiplier le nombre de départ par 2, puis ajouter 1).

Le groupe 1 a identifié la régularité de la suite des nombres ajoutés au nombre de départ (1, 2, 3, 4, 5, 6) et a poursuivi pour 10 (résultat 10+7). Ce que (P) va commenter en ces termes, après que les élèves auront débattu sur cette procédure :

> *P* : *Voilà, c'est-à-dire que vous êtes passés de 0, 1, 2, 3, 4, 5 où là, il y avait une logique, on avançait de 1 en 1, et vous avez brisé la logique en passant à 10. Est-ce que vous comprenez ? Votre logique était bonne sauf qu'il vous manque la partie intermédiaire entre les deux.*

Les élèves de ce groupe cherchent bien une relation qui lie le nombre de départ et le résultat (la relation fonctionnelle), mais en considérant la régularité de la suite des nombres à additionner. La *technique relation de récurrence* porte sur les résultats, ce qui n'est pas le cas ici, puisque la régularité est identifiée sur les nombres à ajouter au nombre de départ pour obtenir le résultat. C'est la raison pour laquelle cette procédure est codée F/R dans le tableau 2.

Le groupe 5 a travaillé sur les résultats :

> *E* : *Nous avons vu que c'étaient des nombres impairs et, du coup, on a avancé les nombres comme c'était impair,*

ce que (P) reformule :

> *P* : *...pas la même stratégie que ces deux groupes, c'est-à-dire que vous n'avez pas travaillé sur une transformation comme ça en faisant « fois 2 plus 1 ». Mais vous* [n']*avez regardé que les résultats et vous avez fait la suite des nombres impairs.*

Cette fois-ci, la distinction entre les deux relations ne va pas passer uniquement par l'usage de mots distincts pour différencier les nombres sur lesquels porte la relation. (P) s'appuie sur l'obtention du résultat pour le nombre 10 car une relation fonctionnelle permet de calculer le résultat pour n'importe quel nombre de départ, tandis qu'une relation de récurrence nécessite de faire les calculs intermédiaires depuis un résultat connu jusqu'au résultat cherché :

> *P* : *Vous avez eu besoin de détailler cette partie entre le 5 et le 10, par contre tous ceux qui ont fait « fois 2 plus 1 », eux, ils n'ont pas eu besoin de tout détailler.*

La relation de récurrence (généralisation inductive) et la relation fonctionnelle (généralisation constructive) ont été utilisées par les élèves et le travail d'explicitation conduit par (P) a permis d'identifier ce qui les différencie : les éléments sur lesquels portent les calculs (les résultats ou les nombres de départ) et la nécessité de calculs intermédiaires non demandés avec la relation de récurrence, ce qui confère à la relation fonctionnelle une plus grande efficacité. Notons enfin, que tout cela a été rendu possible par un travail arithmétique sur les nombres qui repose sur leurs propriétés et leurs décompositions, c'est-à-dire une certaine flexibilité en calcul mental.

Voyons maintenant quelle leçon on peut tirer de l'observation de ces deux premières séances sur les conditions de la mise en œuvre d'un enseignement de la modélisation à partir de problèmes de généralisation.

5. Modélisation et généralisation

Dans cette recherche, il était demandé à un professeur d'étudier avec ses élèves trois problèmes présentés comme des problèmes de recherche. Aucune indication n'avait été donnée, ni sur les problèmes eux-mêmes, ni sur la façon de conduire l'étude. Il s'agissait d'observer comment des problèmes de généralisation pouvaient soutenir un travail sur la modélisation au cycle 3.

5.1. Retour sur les deux premières séances

Toujours formulée pour des valeurs particulières, la découverte de la généralisation par les élèves s'est réalisée de trois façons dans le problème « À table ! » :

- explicitation du calcul à réaliser en appui avec le dessin. La répétition des mêmes calculs pour 10 et 25 tables par plusieurs élèves permet d'exprimer la généricité du procédé ;
- reconnaissance de l'efficacité du calcul sur le dénombrement par comptage[9], ce qu'exprime un élève en disant que le calcul est utilisé pour *« se faciliter la tâche »* ;
- explicitation des deux rôles possibles du dessin, pour construire la solution ou pour la valider.

C'est donc bien une généralisation inductive, au sens de Piaget et Henriques (1978), que font les élèves quand ils induisent par l'observation de la configuration spatiale des tables que le nombre de chaises pour n tables alignées est donné par la formule $2n+2$ (sans le formaliser ainsi). Contrairement au problème « À table ! », le problème « Les machines » demande explicitement une expression de la généralisation du processus qui associe deux nombres entre eux. La *technique dessin* n'étant plus utilisable, les élèves ont eu recours aux deux types de relation de généralisation. Des élèves vont ainsi faire une généralisation inductive et d'autres une généralisation constructive au sens de Piaget et Henriques (1978).

Du point de vue de l'enseignement de la modélisation, il est essentiel que les élèves découvrent que différentes techniques sont associées à différents modèles, et parfois à différentes définitions d'un même système étudié. Or la présentation en colonnes des actions des machines donne une spatialité aux relations de récurrence et fonctionnelle (voir la figure 7 pour la machine C).

$C(n)=2n+1$

0 devient 1
1 devient 3
2 devient 5
3 devient 7 $\quad C(n+1)=C(n)+2$
4 devient 9
5 devient 11
10 devient ...

***Figure** 7 : La spatialisation des relations de récurrence et fonctionnelle.*

La relation de récurrence s'identifie en considérant les nombres verticalement de haut en bas et la relation fonctionnelle en considérant les nombres horizontalement de gauche à droite. Distinguer les deux relations par cet artifice ne relève pas *stricto sensu* de praxéologies de modélisation. Plutôt que recourir à la spatialité de l'organisation des données, les élèves ont été amenés à distinguer la relation fonctionnelle de la relation de récurrence de deux façons :

[9] Le dénombrement est l'action d'associer à un ensemble son cardinal. Le comptage est la récitation de la comptine numérique. Le dénombrement par comptage est la mise en correspondance terme à terme des mots-nombres de la comptine numérique avec chacun des éléments de l'ensemble à dénombrer. Le dernier mot-nombre énoncé dit le cardinal de l'ensemble.

- l’identification des nombres sur lesquels portent les calculs (les nombres de départ pour la relation fonctionnelle, les résultats pour la relation de récurrence) ;
- la reconnaissance de la nécessité de recourir ou pas à des calculs intermédiaires pour déterminer le nombre associé à un nombre de départ donné (la relation fonctionnelle permet d’obtenir le résultat sans calculer d’autres résultats que celui cherché).

C’est ainsi que les élèves ont découvert l’existence et l’essence des deux modèles mathématiques.

Le troisième problème étudié, « Les cure-dents », a un contexte figuratif comme le problème « À table ! » et lorsqu’il est proposé aux élèves les deux types de relation de généralisation ont été rencontrées avec le problème « Les machines ». Il se présente donc comme un réinvestissement des deux problèmes précédents.

5.2. Reconnaître un type de problèmes

La troisième et dernière séance s’est déroulée de la même manière que les précédentes. À la suite d’une lecture silencieuse, les élèves se sont mis d’accord sur la situation, en particulier sur l’alternance des positions des triangles. Puis après un travail individuel de cinq minutes environ, les groupes ont été constitués et des affiches réalisées pour être analysées collectivement.

Les trois types de technique ont été utilisés par les élèves : trois groupes ont utilisé le dessin et le dénombrement pour répondre aux questions ; deux groupes ont utilisé la relation de récurrence, l’un en déterminant que d’une figure à l’autre il y a 2 cure-dents de plus, l’autre en reconnaissant que la liste des nombres de cure-dents formait la suite des nombres impairs ; un groupe a utilisé la relation fonctionnelle en identifiant que le nombre de cure-dents d’une figure d’un rang donné est égal *« au double plus un »* alors que la question pour un cas quelconque n’était pas posée. Toutes les procédures ont été explicitées et validées par la classe, (P) ayant insisté sur le fait que la technique qui donne une « procédure de calcul » (la relation fonctionnelle) était moins longue à mettre en œuvre que les deux autres suivant le numéro de la figure.

Le recours aux trois techniques atteste d’une évolution dans les praxéologies des élèves puisque la *technique relation de récurrence* n’était pas présente lors de l’étude du problème « À table ! » et que la relation fonctionnelle était apparue de façon marginale. Cependant, ni (P) ni les élèves n’ont évoqué les deux problèmes précédents pendant la séance. S’il y a eu évolution, c’est, d’une certaine manière, à leur insu, car il semble que ce troisième problème ait été abordé comme un problème nouveau. Il n’y a donc pas eu capitalisation collective de ce qui avait été fait précédemment car il n’y a pas eu institutionnalisation des types de techniques qui peuvent être mises en œuvre dans l’étude de problèmes de généralisation. Rappelons qu’aucune indication n’avait été donnée concernant un éventuel point commun entre ces trois problèmes.

Ce type de problème n’est pas explicitement au programme de l’école primaire, mais entre dans la catégorie des problèmes de recherche. Ceci est une condition favorable pour les proposer aux élèves mais empêche, dans le même temps, de les reconnaître comme étant d’un même type. Or c’est la mise en perspective de ces problèmes qui permet d’identifier que des techniques — ou des procédures, pour reprendre les mots de (P) — semblables sont utilisées d’un problème à l’autre, ce qui permettrait aux élèves de créer ce que Julo (2002) appelle des schémas de problèmes et d’enrichir le travail autour des praxéologies de modélisation.

Conclusion

L'observation de cette séquence montre que les problèmes de généralisation peuvent être de bons problèmes pour aborder la modélisation. Ils se résolvent par le recours à deux voire trois types de techniques qui se fondent sur des modèles différents. Ils sont donc propices à permettre aux élèves d'acquérir cette connaissance essentielle en sciences : la définition du système étudié et la conception d'un modèle sont intrinsèquement liés. Ce que révèle cette observation, c'est le rôle essentiel du professeur dont la direction de l'étude :

- s'assure de la compréhension des différentes techniques employées par la classe ;
- fait reconnaître ce qui différencie les techniques par une exigence de précision, qui dit par exemple sur quels éléments portent les calculs ;
- accompagne le travail d'explicitation, qui passe par la reformulation ;
- renvoie aux élèves la responsabilité de valider les techniques de résolution ;
- fait analyser collectivement l'efficacité des techniques.

C'est cette maîtrise didactique qui a permis aux élèves de percevoir que des structurations spatiales différentes, des manières différentes de « voir » les dessins, conduisaient à des techniques de calculs différentes. Différentes définitions d'un même système conduisent à des modèles différents.

Dans une recherche précédente sur les praxéologies de modélisation à l'école primaire (Wozniak, 2012), le problème posé reposait sur le modèle de la proportionnalité qui était déjà connu et les professeurs appliquaient le modèle plutôt que d'étudier le problème. Ici, il n'y a pas de modèle préconstruit à la disposition des élèves et, ces problèmes entrant dans la catégorie des problèmes de recherche, c'est l'existence de plusieurs techniques (procédures) pour les résoudre qui est valorisé. C'est dans ce contexte que (P) a amené la classe à étudier les différentes techniques et à discuter leur portée (leur domaine de validité) et leur efficacité conduisant à les hiérarchiser. Cependant, faute de connaître la spécificité des problèmes de généralisation — qui ne sont pas au programme de l'école primaire en tant que tels —, (P) n'a pas fait découvrir aux élèves la généralisation en mettant en perspective les problèmes entre eux. C'est ce que révèle la séance relative à l'étude du problème « Les cure-dents ».

Nous venons de le voir, si les problèmes de généralisation sont potentiellement des problèmes intéressants pour introduire les praxéologies de modélisation, ce qui est essentiel est la façon dont le professeur fait vivre cette potentialité. Cela nécessite d'une part d'avoir pour enjeu un travail spécifique sur les praxéologies de modélisation, et d'autre part la (re)connaissance des problèmes de généralisation. C'est bien un besoin de formation qui se révèle ainsi. Formation mathématique et didactique qui passerait par :

- l'explicitation du cycle de modélisation ;
- la connaissance des problèmes de généralisation et des techniques qui permettent de les résoudre ;
- l'acquisition des gestes didactiques qui favorisent l'étude des problèmes : une position de retrait du professeur qui renvoie aux élèves l'explicitation des techniques et la justification de leur validité ;
- une direction de l'étude qui conduit à identifier le lien entre définition du système et modèle ;
- une différenciation et une caractérisation des différentes techniques qui révèlent les différents modèles mathématiques sous-jacents et permettent une comparaison de leur

efficacité.

Au-delà de leur intérêt pour aborder la modélisation, ces problèmes permettent une entrée progressive vers l'algèbre, notamment en développant l'articulation entre arithmétique et algèbre (Demonthy & Vlassis, 2018)[10]. Les observations sur lesquelles s'appuient cet article sont en effet issues d'une recherche (Wozniak, 2020) qui s'intègre au réseau[11] de l'Observatoire International de la Pensée Algébrique. L'objectif de ce programme de recherche est d'étudier les conditions d'une entrée progressive vers l'algèbre dans un contexte francophone et s'inscrit au sein des recherches relatives à l'*« Early Algebra »* (Kieran, Pang, Schifter & Fong Ng, 2016). Pour Squalli :

> *[L']Early Algebra ne doit pas être perçue comme une version précoce de l'algèbre actuellement enseignée au secondaire, ni comme une préparation à celle-ci, une pré-algèbre. Elle est plutôt une stratégie pour enrichir les contenus mathématiques enseignés au primaire, en offrant aux élèves des opportunités pour développer la pensée algébrique et approfondir davantage certains notions et concepts mathématiques (le concept d'opération, d'égalité, d'équation, de régularité, de formule, de propriété, de variable et de variation, entre autres) (Squalli, 2015, p. 2).*

De la même manière qu'il existe un continuum depuis l'étude des formes à la maternelle jusque vers la démonstration en géométrie euclidienne à la fin du collège, de nombreuses recherches internationales ont souligné la pertinence d'un enseignement progressif de l'algèbre comme moyen de pallier les difficultés des élèves par une introduction abrupte du formalisme algébrique au collège. Or l'introduction de la modélisation à l'école pose la question d'une introduction progressive de l'algèbre, ce que disent les programmes du cycle 3 :

> *Si la modélisation algébrique relève avant tout du cycle 4 et du lycée, la résolution de problèmes permet déjà de montrer comment des notions mathématiques peuvent être des outils pertinents pour résoudre certaines situations (MEN, 2015, p. 197).*

Dans ce contexte curriculaire de l'introduction d'un enseignement porté par la modélisation et la démarche d'investigation, les problèmes de généralisation ont donc un triple intérêt : ils entrent dans la catégorie des problèmes de recherche par les différentes façons de les résoudre, ils offrent l'opportunité de travailler les processus de modélisation, enfin ils permettent une entrée progressive vers l'algèbre qui sera reprise au collège. Ce texte plaide ainsi pour leur intégration explicite dans le curriculum français à l'école au regard de l'importance de l'activité de généralisation en mathématiques et de leur potentiel didactique au service des apprentissages scolaires.

Références bibliographiques

Barquero, B., Florensa, I., Jessen, B., Lucas, C. & Wozniak, F. (2018). The external transposition of inquiry in mathematics education: impact on curriculum in different countries. ICMI Studies 24. *School Mathematics Curriculum Reforms: Challenges, Changes and Opportunities*. University of Tsukuba, Japan. (pp. 189-196).

Blum, W., Borromeo Ferri, R. (2009). Mathematical modelling: Can it be taught and learnt?, *Journal of Mathematical Modelling and Application, 1*(1), 45-58.

[10] Cet ouvrage est un guide pédagogique qui propose des activités facilitant la transition entre les apprentissages numériques de l'école et le début des apprentissages algébriques au collège.

[11] https://www.oipa.education/ (consulté le 19/12/20).

Carraher, D. W., Martinez, M. V. & Schliemann, A. D. (2008). Early algebra and mathematical generalization, *ZDM The International Journal on Mathematics Education, 40*, 3-22.

Charnay, R. (1992). Problème ouvert. Problème pour chercher. *Grand N, 51*, 77-83.

Chevallard, Y. (1989). Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège. Deuxième partie. Perspectives curriculaires : la notion de modélisation. *Petit x, 19*, 45-75.

Chevallard, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique: Perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 12*(1), 73-112.

Demonty, I. & Vlassis, J. (2018). *Développer l'articulation arithmétique-algèbre*. Bruxelles : Van In - De Boeck.

Descartes, R. (1637). *Discours de la méthode plus la Dioptrique, les Météores et la Géométrie*. Leyde : Ian Maire.

Dias, T. (2009). La dimension expérimentale en mathématiques. Un exemple avec la situation des polyèdres. *Grand N, 83*, 63-83.

Hersant, M. (2008). « Problèmes pour chercher ». Des conduites de classes spécifiques. *Grand N, 81*, 57-75.

Julo, J. (2002). Des apprentissages spécifiques pour la résolution de problèmes ? *Grand N, 69*, 31-52.

Kieran, C., Pang, J. S., Schifter, D. & Fong Ng, S. (2016). *Early algebra ICME-13 topical surveys*. Springer Open. https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-319-32258-2 (consulté le 19/12/20).

Mary, C., Squalli, H. & Schmidt, S. (2014). Activité de généralisation et de justification chez des élèves en difficulté. In C. Mary, H. Squalli, L. Theis, L. DeBlois (dir.). *Recherches sur les difficultés d'enseignement et d'apprentissage des mathématiques : regard didactique*. Québec : Presses Universitaires du Québec. (pp. 181-201).

Perrenet, J. & Zwaneveld, B. (2012). The Many Faces of the Mathematical Modeling Cycle. *Journal of Mathematical Modelling and Application, 1*(6), 3-21.

Piaget, P. & Henriques, G. (1978). *Recherches sur la généralisation*. Paris : Presses Universitaires de France.

Radford, L. (2004). La généralisation mathématique comme processus sémiotique. In G. Arrigo (dir.), *Atti del Convegno di didattica della matemática*. Locarno (Suisse) : Alta Scuola Pedagogica. (pp. 11-27).

Rocard, M., Csermely, P., Jorde, D., Lenzen, D., Walberg-Henriksson, H. & Hemmo, V. (2007). *L'enseignement scientifique aujourd'hui une pédagogie renouvelée pour l'avenir de l'Europe*. Luxembourg : Office des publications officielles des Communautés européennes.

Squalli, H. (2015). La généralisation algébrique comme abstraction d'invariants essentiels. In Theis L. (Ed.) Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage - Actes du colloque EMF2015 - GT3 (pp. 346-356).

Wozniak, F. (2012). Des professeurs des écoles face à un problème de modélisation : une question d'équipement praxéologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 32*(1), 7-55.

Wozniak, F. (2019). Enseigner les mathématiques au début du XXIe siècle. *Didactiques en pratique, 5*, 27-36.

Wozniak, F. (2020). Les problèmes de généralisation au cœur de la transition arithmétique-algèbre. Une étude française. In H. Squalli, I. Oliveira, A. Bronner et M. Larguier (dir.). *Le développement de la pensée algébrique à l'école primaire et au début du secondaire. Recherche et perspectives curriculaires*. Québec, Canada : Livres en ligne du CRIRES. (pp. 44-70).

MEN (2018). La résolution de problèmes à l'école élémentaire. *Bulletin officiel spécial n°3 du 26 avril 2018*.

MEN (2015). Programme d'enseignement de l'école élémentaire et du collège. *Bulletin officiel spécial n°11 du 26 novembre 2015*. https://www.education.gouv.fr/au-bo-special-du-26-novembre-2015-programmes-d-enseignement-de-l-ecole-elementaire-et-du-college-3737

MEN (2002). *Documents d'application des programmes, Mathématiques, cycle 3*. Scérén CNDP.

PISA (2006). *Assessing Scientific, Reading and Mathematical Literacy: A Framework for PISA*. OECD.

Annexe
Extrait MEN, 2015, p. 46

Chercher

- Prélever et organiser les informations nécessaires à la résolution de problèmes à partir de supports variés: textes, tableaux, diagrammes, graphiques, dessins, schémas, etc.
- S'engager dans une démarche, observer, questionner, manipuler, expérimenter, émettre des hypothèses, en mobilisant des outils ou des procédures mathématiques déjà rencontrées, en élaborant un raisonnement adapté à une situation nouvelle.
- Tester, essayer plusieurs pistes de résolution.

Modéliser

- Utiliser les mathématiques pour résoudre quelques problèmes issus de situations de la vie quotidienne.
- Reconnaître et distinguer des problèmes relevant de situations additives, multiplicatives, de proportionnalité.
- Reconnaître des situations réelles pouvant être modélisées par des relations géométriques (alignement, parallélisme, perpendicularité, symétrie).
- Utiliser des propriétés géométriques pour reconnaitre des objets.

Représenter

- Utiliser des outils pour représenter un problème: dessins, schémas, diagrammes, graphiques, écritures avec parenthésages, ...
- Produire et utiliser diverses représentations des fractions simples et des nombres décimaux.
- Analyser une figure plane sous différents aspects (surface, contour de celle-ci, lignes et points).
- Reconnaître et utiliser des premiers éléments de codages d'une figure plane ou d'un solide.
- Utiliser et produire des représentations de solides et de situations spatiales.

Raisonner

- Résoudre des problèmes nécessitant l'organisation de données multiples ou la construction d'une démarche qui combine des étapes de raisonnement.
- En géométrie, passer progressivement de la perception au contrôle par les instruments pour amorcer des raisonnements s'appuyant uniquement sur des propriétés des figures et sur des relations entre objets.
- Progresser collectivement dans une investigation en sachant prendre en compte le point de vue d'autrui.
- Justifier ses affirmations et rechercher la validité des informations dont on dispose.

Calculer

- Calculer avec des nombres décimaux, de manière exacte ou approchée, en utilisant des stratégies ou des techniques appropriées (mentalement, en ligne, ou en posant les opérations).
- Contrôler la vraisemblance de ses résultats.
- Utiliser une calculatrice pour trouver ou vérifier un résultat.

Communiquer

- Utiliser progressivement un vocabulaire adéquat et/ou des notations adaptées pour décrire une situation, exposer une argumentation.
- Expliquer sa démarche ou son raisonnement, comprendre les explications d'un autre et argumenter dans l'échange.