# CONNAISSANCES SUR LES NOMBRES DES ÉLÈVES DE FIN DE SECONDAIRE ET ADAPTATION À L'UNIVERSITÉ *

**Isabelle BLOCH**
Université de Bordeaux

**Résumé.** À l'origine de ce travail, il y a une interrogation : les pratiques actuelles de travail sur les nombres dans l'enseignement secondaire permettent-elles une structuration convenable des concepts numériques, afin que les élèves puissent s'engager dans l'apprentissage de l'analyse tel qu'il leur est proposé au début de l'enseignement universitaire ? Et quelles confusions peut-on observer dans les pratiques des étudiants, jusqu'au niveau universitaire, qui alertent sur une méconnaissance de la nature des ensembles de nombres? Enfin, quelles sont les situations susceptibles de faire travailler les concepts en jeu ?

**Mots-clés.** Nombres réels, propriétés de densité et de complétude, limites.

**Abstract.** At the begining of this work, there is an interrogation: do students a significant work about numbers at Secondary school, in order to be able to learn Calculus at the beginning of University? What kinds of confusions about numbers can we observe even at University level, that alert about misunderstanding of sets of numbers? And, last but not least, which situations could be suitable to work about the concepts at stake?

**Key-words.** Real numbers, density and completeness properties, limits.

## Introduction

Depuis maintenant plus de vingt ans, les programmes du secondaire français ont abandonné le travail sur les nombres réels, qui était mené en classe de Quatrième dans les années quatre-vingts ; les élèves se voient priés de considérer, à partir de la classe de Seconde (16 ans) que l'ensemble **R** contient tous les nombres, ceci sans que ne soit conduite une étude sur la nature des différents types de nombres – ni que cela ait été fait au collège.

Il en résulte que l'on peut observer de nombreuses confusions entre les nombres et leur valeur approchée – l'usage de la calculatrice favorisant bien évidemment cet amalgame ; ces confusions persistent dans les premières années à l'université, et les travaux conduits sur ce thème ont montré que les étudiants jusqu'en licence confondent densité et complétude, plus grand élément et borne supérieure, et, s'ils ont compris qu'une limite est un nombre, ils n'imaginent pas que tout nombre réel est une limite...

En 2005 nous avions fait une intervention à la 13ème Ecole d'été de didactique des mathématiques sur ce sujet (Bloch, Chiocca, Job, Schneider, 2006). Nous reprenons ici les points principaux de cet atelier, car les questions soulevées sont toujours d'actualité. Des publications récentes ont repris ce thème et montrent que le problème ne se pose pas que dans l'enseignement français.

* Cet article reprend en partie le texte de l'atelier mené lors de la 13ème école d'été de Didactique des Mathématiques, Bloch, Chiocca, Job et Schneider (2007). Il a néanmoins été largement complété et actualisé.

# 1. Les concepts en jeu

## 1.1 Les concepts numériques

Par « concepts numériques », nous entendons la nature des nombres : les nombres entiers, décimaux, rationnels, irrationnels ; la caractérisation des décimaux parmi les rationnels ; les ensembles de nombres et leurs relations d'inclusion ; les arguments qui conduisent à déterminer qu'un nombre est ou non, par exemple, rationnel, ou qu'une racine carrée d'un nombre entier qui n'est pas un carré d'entier, ne peut être un nombre décimal ; les développements décimaux des idécimaux ; les questions de densité ; la notion d'intervalle et les différentes sortes d'intervalles (ouvert, fermé, quid d'un plus grand élément ou d'une borne supérieure ?) ; les intervalles peuvent aussi être l'objet du travail, sur les fonctions ou les solutions d'équations ; les approximations d'un rationnel ou d'un irrationnel, et la précision des approximations ; le contrôle de la pertinence des résultats numériques, en statistiques par exemple ; les puissances entières ou rationnelles des nombres positifs et leur nature ; l'usage légitime de la calculatrice pour assurer d'une égalité numérique …

## 1.2 Des études récentes sur les connaissances numériques

Dans son travail récent, Kidron (2018) s'interroge sur les conceptions des élèves de fin de secondaire sur les nombres, et notamment leur conscience – ou non – de ce que certains nombres peuvent avoir un développement décimal illimité non périodique. Ainsi,

> ...le focus de l'analyse est. d'abord sur les conceptions des étudiants des nombres irrationnels à l'aide de leur représentation décimale infinie sans répétition. Ensuite, le focus est sur les conceptions des nombres irrationnels sur la droite réelle par les élèves. Bien qu'environ 80% des étudiants aient déclaré qu'ils avaient appris le concept de nombres irrationnels, seul un faible pourcentage d'étudiants (19%) ont démontré qu'ils étaient conscients de l'existence de nombres avec représentation décimale infinie sans répétition. Le même pourcentage d'étudiants (20%) sont conscients de l'existence des nombres irrationnels sur la droite réelle. J'ai également observé des réponses de certains étudiants qui reconnaissent l'existence de nombres irrationnels avec représentation décimale infinie sans répétition, mais les mêmes étudiants ont écrit qu'il existe seulement des nombres rationnels sur la droite réelle.

Kidron pointe donc l'incohérence de certains étudiants dans leur représentation des nombres. Nous pouvons ajouter à ce constat que des étudiants français de deuxième année de licence ont reconnu, récemment, qu'ils ignoraient que tout nombre réel pouvait être considéré comme une limite : une limite est un nombre mais un nombre n'est pas une limite ... De plus, ils ne pouvaient concevoir, malgré leur connaissance de critères de convergence des suites numériques, que l'on puisse attester de la convergence d'une suite mais ne pas savoir écrire le nombre limite.

Pour sa part, Durand-Guerrier (2016) fait l'hypothèse que les étudiants en début d'université confondent, grâce à la représentation de **R** selon une droite, densité et continuité ; elle propose ensuite une construction de **R** puis une situation de recherche de point fixe sur des ensembles discrets puis sur l'intervalle ]0,1[, afin que les étudiants prennent conscience de la différence entre ensemble discret et continu, et réalisent ce qu'est un ensemble dense *et* continu muni d'un ordre total.

## 1.3 Les pratiques enseignantes et les questions associées

Nous nous demandons donc quelles pratiques de travail sur les nombres (notamment dans l'enseignement secondaire) pourraient permettre une structuration convenable des concepts numériques, afin que les élèves puissent s'engager dans l'apprentissage de l'analyse tel qu'il leur est proposé au début de l'enseignement universitaire ? Et :

1. Comment caractériser ces pratiques ? Sur quelles organisations mathématiques et didactiques prennent-elles appui ?
2. Quelles expériences et quels concepts numériques sont nécessaires aux étudiants pour que l'on puisse raisonnablement espérer que ceux-ci comprennent les énoncés généraux sur les nombres réels ?
3. Quelle est la structuration nécessaire pour asseoir l'introduction de la topologie de **R** afin de permettre l'entrée dans l'analyse formalisée ?
4. Quelles sont les pratiques numériques de l'enseignement supérieur, lorsque débute l'enseignement de l'analyse ? Les étudiants peuvent-ils réinvestir des connaissances numériques, lesquelles, et comment ?
5. Des situations sur les limites ou la topologie de $\mathbb{R}$ peuvent-elles prendre appui sur des connaissances numériques ?

## 2. Le champ numérique fréquenté au secondaire – signes et statut des nombres dans les énoncés d'analyse

### 2.1 Les nombres du collège au lycée

Les fractions simples et les nombres décimaux sont introduits en fin d'école primaire. Habituellement, il est proposé une introduction des fractions par partition de l'unité, associée, soit à des « parts de tarte », soit à la droite numérique. Très vite les fractions décimales prennent le relais, puis les nombres décimaux écrits avec une virgule. L'addition des décimaux est seule exigible en fin de primaire ; la multiplication des décimaux par des entiers, la division des entiers poursuivie après la virgule, ont été initiées à ce niveau.

Le collège prend la suite avec l'apprentissage systématique de la multiplication et de la division des entiers et décimaux ; puis, de la multiplication et de l'addition des fractions. Il faut remarquer que, dans les manuels de Sixième du programme antérieur à 2004, la droite numérique, comme représentation des nombres autant que comme moyen d'opérer sur eux, est pratiquement absente. L'examen des manuels montre des phrases supposées institutionnaliser l'équivalence des fractions : « On obtient une fraction égale à une fraction donnée en multipliant le numérateur et le dénominateur par le même nombre non nul » ; pourquoi non nul ? Ceci n'est pas questionné, même en Seconde.

Les résultats institutionnalisés le sont sur le mode de l'ostension, et, à part le calcul à l'aide des quatre opérations, très peu d'outils sont proposés aux élèves pour opérer sur les nombres. Il faut de plus remarquer que, même lorsque les opérations pourraient fournir des arguments sur la nature des nombres, elles ne sont pas utilisées dans ce but (par exemple $1{,}53 + 2{,}47 = 4$ fournit un argument de ce que les entiers sont inclus dans les décimaux). L'addition des fractions est présentée directement sur le mode expert de la réduction au même dénominateur ; cependant, l'outil PPCM étant absent des curriculums, des modes opératoires supposés suppléer à cette absence par une recherche du « meilleur dénominateur possible » sont proposés (cf. Abou Raad et Mercier 2006).

Nous pouvons également chercher, dans les manuels, les nombres sur lesquels les élèves travaillent lors des étapes importantes d'introduction de nouveaux savoirs : les fonctions linéaires et affines, les vecteurs, les théorèmes de Pythagore (avec les racines carrées) et de Thalès (avec des occurrences d'utilisation des fractions), l'algèbre...

L'examen met en évidence qu'à chaque introduction d'un nouveau savoir, le champ numérique fréquenté est extrêmement réduit ; ceci s'explique par la nécessité ressentie de ne pas cumuler les difficultés, un savoir nouveau *et* un champ numérique mettant les élèves en situation difficile d'un point de vue calculatoire.

Ainsi l'étude des manuels met en évidence que les énoncés ne proposent que des nombres entiers « simples », +2, +3, ... jusqu'à +12 environ, et leurs opposés ; des fractions simples, 1/3, 1/2, 3/5, ... ; des racines carrées lors de l'introduction de Pythagore : $\sqrt{18}$, $\sqrt{24}$, $\sqrt{65}$. La méthode de « simplification » des écritures avec racines carrées est enseignée. Dès lors que le travail sur les nombres décimaux n'est plus l'objet de l'enseignement, ceux-ci disparaissent pratiquement des énoncés ; quelques fractions demeurent.

Lors de l'introduction de l'algèbre, les équations comportent également des nombres très simples dans un même souci de ne pas cumuler les difficultés. Il en est de même lors des calculs sur les vecteurs, ceci jusqu'en Seconde puisque c'est à ce niveau qu'est introduite la multiplication des vecteurs par les réels.

Un bilan des nombres effectivement utilisés, fréquentés... par les élèves, de la Sixième à l'entrée en Seconde, fait finalement apparaître que ceux-ci peuvent être considérés comme familiers avec une vingtaine ou un trentaine de nombres ... les autres étant hors champ calculatoire et sans doute conceptuel. L'atelier de Birebent (2007) sur les nombres dans le travail avec la calculatrice fournit des éléments complémentaires mais n'est pas en contradiction avec ces résultats : même dans le travail avec calculatrice, le champ numérique fréquenté par les élèves du secondaire n'est pas très vaste.

A l'entrée en Seconde, les professeurs procèdent habituellement à une « structuration » des ensembles de nombres. Les programmes français depuis 2001 (à consulter sur le site http://eduscol.education.fr) consacrent quelques lignes à la reprise de l'étude des nombres : les nombres premiers, les rationnels, les irrationnels, les valeurs approchées, l'écriture scientifique… Les notions d'intervalles sont reprises à l'occasion de l'étude des valeurs absolues et de l'ordre.

Dans les manuels de Seconde d'avant 2003, la structuration demandée par les programmes est faite, sous le mode de l'ostension, de façon déclarative : inclusion des ensembles $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ; on trouve des dessins sagittaux, survivance des « maths modernes » ; quelques tableaux où l'élève doit cocher des nombres dans les bonnes cases. Les élèves sont supposés ensuite être avertis des caractéristiques des nombres manipulés, mais de toutes façons ces caractéristiques ne jouent pas un grand rôle dans le travail effectif : les nombres en jeu, que ce soient dans les vecteurs, les fonctions, les transformations... appartiennent toujours au même champ réduit. Il n'y a guère qu'en statistiques que les élèves pourraient être mis en situation de rencontrer des nombres plus « variés » : c'est quelque peu le cas dans le Modulo Seconde 2004 des éditions Didier, mais non dans le Déclic Hachette de la même année.

Les manuels de 2004 ont cependant fait, dans l'ensemble, un effort pour proposer, sur les nombres réels, des exercices plus riches que ceux de la génération précédente. Le programme prévoit un travail sur l'approximation (voir Birebent, 2007) mais cette dimension est rarement prise en charge par les professeurs, faute de moyens didactiques clairement identifiés dans les manuels, du moins jusqu'à 2005. Il faut remarquer que les nouveaux manuels de Seconde outillent mieux sur ce point, mais les professeurs ont-ils vraiment le temps de traiter cette partie du programme ? Les horaires sont plus faibles qu'il y a dix ans, et les programmes guère moins chargés. De plus, articuler le travail numérique à l'algébrique et aux fonctions n'a rien de complètement évident et la réflexion sur ce sujet n'a que peu pénétré dans les classes (Cf. Bloch, 2003 ; Comin, 2005 ; Coppé, Dorier et Yavuz, 2006).

La question reste ouverte de ce que serait un travail sur la nature des nombres, les relations entre eux, la droite réelle comme outil de représentation et de traitement de problèmes (et quels problèmes ?), les intervalles, les développements décimaux, les écritures et les égalités /inégalités...

### 2.2 Que deviennent les nombres réels à l'université ?

Au niveau universitaire, on observe une « disparition » des nombres, disparition due à leur dissolution dans le formalisme. En effet, à ce niveau on n'a plus *des* nombres, écrits en écriture chiffrée, on manipule des symboles de nombres, $\forall x \in \mathbb{R}$ ... De plus, il ne s'agit pas, à ce niveau, de se prononcer sur *une* limite ou la nature *d'une* suite convergent vers *un* nombre, mais sur des propriétés générales de fonctions, de suites ou de sous-ensembles de $\mathbb{R}$. Dans ce contexte la structure de $\mathbb{R}$ est supposée connue ainsi que ses propriétés.

## 3. Quelques expériences et situations permettant l'accès aux concepts numériques au secondaire

### 3.1. Des problèmes numériques du collège au lycée

Afin d'illustrer les difficultés relatives au type de travail habituellement proposé au secondaire, nous proposons de chercher le problème suivant, introduit lors de l'utilisation de la calculatrice en classe.

Un professeur a posé à ses élèves la question suivante :

On considère les deux fractions 420/595 et 12/17 Ces fractions sont-elles égales ?
Un élève a utilisé sa calculatrice et trouvé : 0,70588235 pour les deux fractions.
Acceptez vous qu'il en conclue que les deux fractions sont égales ?

Le professeur dit alors : « Attention : l'affichage de la calculatrice n'est pas fiable car il pourrait se faire qu'en poursuivant la division on découvre que les deux suites décimales diffèrent à la 15ème place ou à la 40ème. »

Ce raisonnement est-il valide ? En fait, 595 = 17×35 donc :

$\frac{420}{595} . \frac{12}{17} = \frac{\pm k}{595}$ où $k$ est un entier positif ; on en déduit que $\frac{k}{595} \geq \frac{1}{595}$

et 1/595= 0,00168… donc, pour que les fractions soient différentes, il faudrait qu'une différence apparaisse dès la troisième décimale… Or, ce travail sur les décimales ne fait pas partie du topos du professeur, et celui-ci, en général, se contente de mettre en garde les élèves contre le fait que la calculatrice n'est pas crédible pour les égalités à partir d'une valeur approchée.

Nous proposons ensuite le questionnaire sur les nombres figurant dans le DEA de Margolinas (Margolinas 1989, Université Bordeaux 1, voir en annexe). On peut détailler le travail que les questions posées rendent possible :

– les différentes écritures des nombres et l'égalité ;
– les développements décimaux, en particulier illimités ;
– les conditions pour qu'un rationnel soit décimal ;
– l'équivalence entre développement illimité périodique et nombre rationnel ;
– la densité de Q dans R et de R dans Q ;
– les intervalles comme ensembles infinis continus, ouverts ou fermés ;
– l'existence d'irrationnels ;
– l'impossibilité, pour la racine carrée d'un entier non carré parfait, d'être décimal ou rationnel.

**3.2 Les nombres dans l'introduction des limites et dérivées au secondaire**

Nous présentons ci-dessous une activité assez typique, dans l'enseignement secondaire, d'introduction de la limite de $ln\, x$ lorsque $x$ tend vers $+\infty$ . Rappelons que les programmes actuels ne supposent l'introduction des limites que par des considérations intuitives, et que la définition formelle de la limite ne fait pas partie du programme.

À l'aide d'une calculatrice compléter le tableau suivant :

| x | 400 | $8.10^3$ | $5.10^5$ | $2^7$ | $2^{15}$ | $2^{1000}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| *ln x* | | | | | | |

Que peut-on constater sur le comportement de *ln x*, lorsque *x* devient de plus en plus grand ?

Cette activité est suivie d'un exercice entièrement résolu sur le manuel :

Soit *A* un réel strictement positif.

1- Trouver un entier naturel n tel que : $ln\,(2^n) > A$.

2- Trouver un réel strictement positif B tel que : $x > B \Rightarrow ln\, x > A$
Que peut-on conclure ?

En utilisant ce résultat, quelques encadrements et des changements de variables explicités par les énoncés, le reste des limites usuelles de la fonction logarithme est établi. Utilisant le fait que la fonction exponentielle est la réciproque de la fonction logarithme népérien, les limites à l'infini de la fonction exponentielle sont établies, et le reste des limites usuelles concernant la fonction exponentielle est établi moyennant des changements de variables explicitement donnés dans les énoncés.
Ceci ne peut pas jouer réellement le rôle de démonstration, mais fait le lien, dans le contrat didactique du secondaire, entre le numérique et l'entrée dans l'analyse.

Dans les manuels de Terminale scientifique, les tâches de type *recherche de l'existence d'un nombre*, pour lesquelles la détermination algébrique n'est en général pas possible, sont justifiées par des théorèmes d'existence sans calcul d'une approximation. La nature de l'Analyse rend difficile d'opter pour un moyen privilégié de validation, en excluant les autres : les moyens non déclarés officiellement se trouvent réintroduits subrepticement, mais du même coup leur statut reste obscur.

Ainsi dans un exercice où il s'agit de trouver la limite d'une suite de terme général $u_n=2n+\cos n$, il apparaît qu'on s'appuie, pour la démonstration, sur des propriétés qui n'ont pas encore été démontrées explicitement. En effet on y utilise l'inégalité $u_n \geq 2n-1$, or la technologie légitimant le passage à la limite n'a pas encore été instaurée (théorème sur $u_n \geq v_n$ et $v_n \to +\infty$). Mais l'intuition et le théorème se renvoient dos à dos : le théorème est introduit en suivant tout en étant « appuyé » sur l'intuition, et réciproquement. Ces exemples sont fréquents, et montrent que le contrat didactique tente un appui sur des propriétés numériques souvent non institutionnalisées, et une généralisation des nombres (on ne cherche plus $u_n \geq 100$ mais $u_n \geq 2n-1$).

Un autre constat est celui du faible champ numérique utilisé dans l'introduction des limites en Première, comme dans les équations ou les vecteurs dans les classes précédentes : l'argument est de ne pas cumuler les difficultés.

### 3.3 Les nombres à l'entrée à l'Université

A l'entrée à l'université, les nombres écrits en chiffres disparaissent comme objets des énoncés, que ce soit des énoncés du cours ou des exercices. On ne les trouve plus que comme bornes d'intégration, coefficients dans des fonctions, des suites ou des séries... Les nombres manipulés le sont sous forme de symboles-lettres, dans des énoncés formels. Les fonctions sont des fonctions « générales », même si l'on est encore dans l'analyse « concrète ».

Ainsi l'exercice ci-dessous est un exercice sur des fonctions déterminées, mais les nombres (entiers) qui y apparaissent ne sont plus écrits dans un système de numération.

> Décider si les séries suivantes sont convergentes ou non :
>
> a) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ ; b) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n+\sqrt{n}}{n+n^3}\right)$ .

Par contre, dans un exercice comme le suivant, les fonctions en jeu vérifient des propriétés à découvrir, et les nombres ne sont que les variables notées $x$ et $y$ de ces mêmes fonctions ; ces « nombres » n'ont un rôle dans la solution que comme « figurants muets », puisque ce qui est en jeu est la dérivabilité de $f$ et le fait de faire « tendre $x$ vers $y$ » ou « tendre $x-y$ vers 0 ». La structure de IR est évidemment sous -jacente mais non « visible ». La rationalité ou non de $x$ et $y$ ne joue aucun rôle, ils figurent là comme éléments génériques de IR :

> Trouver toutes les fonctions $f$ sur IR pour lesquelles l'inégalité $f(x) - f(y) \leq |x-y|^2$ est valable pour tous les nombres réels $x$ et $y$.

Les étudiants sont supposés avoir acquis des notions sur la complétude de IR, la densité de **Q** dans IR, etc. ; notions qui doivent les rendre capables de manipuler les écritures comme : $\forall x \in R$ ou $\exists x \in R$, de couper des $\varepsilon$ en deux et de raisonner sur les intervalles correspondants, ainsi que sur la forme que prend, en Analyse, la démonstration de l'égalité : $a=b$ si et seulement si, $\forall \varepsilon > 0, |a-b| < \varepsilon$.

Nous faisons l'hypothèse que la fréquentation des nombres au secondaire ne suffit pas à assurer l'expérience minimale pour comprendre ce statut nouveau des nombres comme éléments théoriques d'un ensemble numérique, et dont les propriétés sont déterminées par les propriétés dudit ensemble.

On peut citer en effet des élèves de Première S invités à donner « un nombre aussi grand que l'on veut » et désignant « 60 » comme un tel nombre ; des élèves de classe préparatoire n'acceptant pas qu'un $\varepsilon$ puisse être dans un premier temps « quelconque » puis « fixé », et coupé en deux ; de nombreuses difficultés sur les intervalles de $\mathbb{R}$ et leur statut ouvert ou fermé, ou sur les énoncés quantifiés (Bridoux 2016, Bridoux et al. 2016).

Une situation intéressante à mettre en place au début du cursus supérieur pourrait être de demander d'exemplifier des notions relatives aux nombres réels, aux intervalles, ... Des exercices sur les suites peuvent mettre en jeu ces notions relatives aux nombres réels, par exemple l'exercice classique suivant :

> En raisonnant par l'absurde montrer que toute fonction continue sur un intervalle fermé borné est uniformément continue sur cet intervalle.

Il en est de même des exercices habituellement donnés en première ou deuxième année d'université, qui font appel à des méthodes utilisant souvent nombres génériques et intervalles, comme : utiliser les définitions formelles, prouver qu'une suite est une suite de Cauchy, identifier des suites adjacentes, utiliser des suites extraites, prouver par l'absurde, ou produire des contre-exemples.

Nous avons observé que des étudiants de licence 2ème année, face à un exercice demandant de prouver la convergence d'une suite de fonctions définie par récurrence sur ]0,1[, avaient prouvé que, pour tout n, on a le critère de Cauchy suivant :

$$0 < f_{n+1} - f_n < x^{n+1}/(n+1)!$$

Ces étudiants se sont trouvés ensuite incapables de conclure à la convergence de la suite. La question était posée de façon condensée :

> Montrez que la suite $(f_n)$ converge vers une fonction $f$ .

Or les étudiants ne pouvaient écrire ou reconnaître la fonction $f$ ; ils ont donc émis une « proposition » assez improbable, disant :

> « On ne savait pas donc on a dit que $f_n$ converge vers $f_{n+1}$ »…

Ceci appelle deux remarques : manifestement les étudiants ne maîtrisent pas le langage de la convergence, car leur déclaration n'a aucun sens en termes de limites… et, la phrase de conclusion de la limite aurait dû être : « Montrez que la suite $(f_n)$ est convergente. On appellera $f$ la limite. » Ainsi les étudiants se seraient peut-être montrés capables de distinguer affirmation de la convergence et désignation de la fonction limite.

## 4. Des exemples de problématisation numérique de la notion de limite

### 4.1 Du numérique à la notion de limite ?

Un prototype d'ingénierie qui vise l'introduction de la notion de limite au travers d'une problématique numérique figure dans la thèse de Job (2011).

La problématique envisagée consiste à déterminer entre deux suites composées d'approximations rationnelles de $\sqrt{2}$ laquelle réalise le mieux l'objectif d'en fournir la meilleure approximation. On propose comme point de départ le critère dit de la *meilleure approximation* qui stipule qu'une suite A est meilleure qu'une suite B si la meilleure approximation de A est meilleure que la meilleure approximation de B. Ce critère est-il pertinent ? Si ce n'est pas le cas, quel autre critère proposer ?

L'idée sous-jacente est d'amener les élèves à constater que la meilleure approximation d'une suite n'existe pas toujours, qu'il est possible de lui substituer son point de convergence comme marqueur de comparaison pour alors discuter la pertinence de ce nouveau critère.

Parmi les variables relevées citons le choix du nombre à approximer ainsi que celui des suites. Il est noté que $\sqrt{2}$ est un irrationnel « simple » sur lequel les élèves ont une meilleure prise si l'on compare, par exemple, à un nombre transcendant comme $e$.

Pour ce qui concerne les suites, une première variable clef est soulignée, celle de la monotonie des suites données comme lieu de travail. C'est dans cette monotonie que réside la pertinence du choix du point de convergence d'une suite comme substitut à sa meilleure approximation car alors limite et *infimum* des distances des termes de la suite à $\sqrt{2}$ se confondent. A l'opposé d'autres ingénieries, c'est la trivialité du comportement des suites mises en jeu qui permet de travailler sur le concept de limite et ne pas s'enferrer dans des calculs qui n'ont pas de statut théorique.

Une autre variable clef soulignée est le choix de suites récursives. Il est noté que les élèves français – contrairement à d'autres dont les Belges – sont familiers de certains théorèmes de point fixe ainsi que des suites récursives ce qui leur permettrait d'activer toute une série d'outils ; on observe là l'effet d'une variable si l'on peut dire « culturelle ».

### 4.2 Le sens des quantificateurs et le comportement des fonctions

La thèse de Lecorre (2016) montre également un travail sur la notion de limite en fin de lycée. Dans les situations proposées, les élèves doivent interpréter des propositions quantifiées par rapport au comportement d'une fonction. Par exemple, on demande la nature de la fonction qui vérifie : $\forall x \in \mathbb{R}$ t.q. $x > 100$, alors $\forall \varepsilon > 0,\ 2 - \varepsilon < f(x) < 2 + \varepsilon$. Les élèves doivent déterminer le comportement de la fonction f ; ils disent d'abord que la fonction oscille entre $2 - \varepsilon$ *et* $2 + \varepsilon$... puis se rendent compte que le « quel que soit $\varepsilon$ » change le résultat, un élève déclarant : mais si on « rapetisse » $\varepsilon$ cela ne peut plus donner la même fonction !

Rogalski a aussi proposé une situation visant à montrer que la suite 2.cos $n$ approche le nombre –2 aussi près que l'on veut… mais néanmoins ce n'est pas une limite : il s'agit de faire la distinction entre limite et valeur d'adhérence, ou, dit autrement, entre limite et approximation.

Enfin Chellougui (2003) a mis en évidence les difficultés des étudiants avec la signification des énoncés quantifiés, en fonction notamment de l'ordre d'écriture des quantificateurs.

### 4.3 De la notion de limite au numérique

Dans la perspective d'une démarche inverse, on peut souligner, dans le travail sur les suites convergeant vers $\sqrt{2}$, la mise en avant d'une ouverture concernant la complétude des réels au travers des notions de *supremum* et d'*infimum* que l'on peut lire en filigrane de la situation (Job 2011).

En effet, le critère de la meilleure approximation implique de s'intéresser au minimum des distances entre les termes d'une suite donnée et $\sqrt{2}$. Si ce minimum n'existe pas toujours, on peut néanmoins lui substituer une information plus faible mais néanmoins suffisante dans le contexte considéré, l'*infimum* de ces distances. Se pose alors également la question de l'existence de cet *infimum* par delà celle constatée sur les exemples. Cette nouvelle information souffre-t-elle du même travers que le simple *minimum* et si oui quelle nouvelle information encore plus faible lui substituer ?

C’est là aussi que la situation développée par Durand-Guerrier (2016) prend son sens : réaliser que le théorème de la valeur intermédiaire ne peut s’appliquer sur un ensemble non continu et donc non complet, amène à s’interroger sur ce que peuvent être les ensembles en jeu… Mais une institutionnalisation des savoirs sur les nombres réels est néanmoins nécessaire.

D’autres travaux ont exploré ce lien entre limites et nombres réels, ainsi Ghedamsi (2008) a expérimenté une situation de recherche du point fixe de la fonction cosinus, les étudiants en première année d’université découvrant lors de cette recherche que ce point fixe, 1) était atteint par une limite, 2) n’était pas un nombre ‘connu’, et que l’on ne pouvait pas écrire sa valeur exacte.

## Conclusion

Il ressort de ce bilan des connaissances des étudiants sur les nombres réels et les limites, et des recherches passées ou en cours, quelques points à souligner :

– les programmes du secondaire ont délaissé, depuis des années, un travail spécifique sur ce sujet, travail qui s’avère néanmoins indispensable au vu des confusions qui demeurent dans les connaissances des étudiants jusqu’en licence ;

– le travail sur les nombres réels est étroitement lié, comme l’exposent de nombreux auteurs, aux connaissances à construire sur les notions d’Analyse : limite, usage des quantificateurs, et à l’université notions de topologie.

Face à ce constat, il devient évident que le travail sur les nombres réels et leurs différentes natures, et sur les ensembles de nombres, est une nécessité dès le secondaire et devrait être réinstallé de façon cohérente. Des travaux récents sont menés dans ce sens : nous avons déjà cité Durand-Guerrier (2016) et Kidron (2018), mais notons aussi que Vivier (2015) insiste sur la formation nécessaire dès le secondaire ; il pointe notamment l’insuffisance de la droite numérique comme représentation (implicite) des réels, et préconise des conversions entre registres de représentation ; ces conversions devraient permettre de traiter les connaissances en jeu depuis plusieurs points de vue, le point de vue des écritures décimales n’étant pas celui de la rationalité ou de l’irrationalité. Nous pouvons ajouter que le point de vue de la complétude, de la continuité, ne peuvent se déduire d’observations ‘naturalistes’ des nombres, ou d’expériences de physique ainsi que le pointent également Bergé & Sessa (2003). Bergé (2010) insiste aussi sur le fait que les étudiants concluent, par exemple, à la convergence d’une suite croissante majorée sans invoquer le fait que l’ensemble considéré soit complet. Des situations spécifiques sont donc nécessaires, telles que celle proposée par Pontille, Feurly-Reynaud et Tisseron (1996), reprise par Durand-Guerrier (2016).

Des réflexions sont actuellement engagées sur le contenu d'un possible socle commun de licence de mathématiques, afin d'assurer un niveau convenable de travail mathématique à l'entrée à l'université, quels que soient les acquis du secondaire. On peut consulter l'argumentation de M.Rogalski à ce sujet sur educmath.ens-lyon.fr/Educmath/en-debat/math-universite/reponse-de-marc-rogalski.

## Bibliographie

BERGE A., SESSA C. (2003) Completitud y continuidad revisadas a través de 23 siglos. Aportes a una investigación didáctica. *Relime* Vol. 6, Núm. 3.

BERGE A. (2010) Students’perception of the completeness property of the set of real numbers. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 41.2, 217-227.

BIREBENT A. (2007) La rupture algébrique/analytique dans le numérique : questions écologiques et instrumentales. *Perspectives en didactique des mathématiques, actes de la 13ème école d'été de l'ARDM,* La Pensée Sauvage.

BLOCH I., CHIOCCA CM., JOB P., SCHNEIDER M. (2007) Du numérique aux limites : quelle forme prend la transition secondaire/supérieur dans le champ des nombres et de l'Analyse ?, *Perspectives en Didactique des Mathématiques, Actes de la 13ème Ecole d'Eté de l'ARDM,* La Pensée Sauvage.

BLOCH I. (2003) Teaching functions in a graphic milieu : what forms of knowledge enable students to conjecture and prove ? *Educational Studies in Mathematics*, **52**, 3-28.

BRIDOUX S. (2016) Introduire la notion de convergence avec une ingénierie des années 1980: rêve ou réalité didactique pour l'enseignant? *Actes du colloque INDRUM International Network for Didactic Research in University Mathematics, 31 mars – 2 avril 2016,* 53-62.

BRIDOUX S., GRENIER-BOLEY N., HACHE C., ROBERT A. (2016) Les moments d'exposition des connaissances en mathématiques ; Analyses et exemples. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, **21**, 187-234.

CHELLOUGUI F. (2003) Approche didactique de la quantification dans la classe de mathématiques dans l'enseignement tunisien. *Petit x*, **61**, 11-34.

COMIN E. (2005) Variables et fonctions, du collège au lycée : Méprise didactique ou quiproquo inter-institutionnel, *Petit x*, n°**67**, 33-61.

COPPÉ S., DORIER J.L., et YAVUZ I. (2006) Éléments d'Analyse sur le programme de 2000 concernant l'enseignement des fonctions en Seconde, *Petit x*, n°**71**, 29-60.

DURAND-GUERRIER V. (2016) Conceptualization of the Continuum, an educational challenge for undergraduate students. *International Journal of Research on Undergraduate Mathematics Education*, Springer.

GHEDAMSI I. (2008) *Enseignement du début de l'analyse réelle à l'entrée à l'université.* Thèse, Université de Bordeaux.

GROUPE AHA (1999) *« Vers l'infini pas à pas »*, DeBoeck Wesmael, Bruxelles.

JOB P. (2011) *Étude du rapport à la notion de définition comme obstacle à l'acquisition du caractère lakatosien de la notion de limite par la méthodologie des situations fondamentales/adidactiques,* Thèse, Université de Liège.

KIDRON I. (2018) Students' conceptions of irrational numbers. *Published online: IJRUME* February 2018, Springer.

LECORRE T. (2016) *Des conditions de conception d'une ingénierie relative à la définition de la notion de limite.* Thèse, Université Grenoble-Alpes.

MARGOLINAS C. (1985) *Un bilan des connaissances sur les nombres après la classe de 4e : le nombre dans tous ses états,* DEA, Université Bordeaux 1.

ROGALSKI M. (2017) Le raisonnement a ε près, emblématique de l'Analyse, et instrument indispensable de ses preuves : discours méta sur son fonctionnement. IREM de Paris.

TISSERON C., FEURLY-REYNAUD J., POINTILLÉ M-C. (1996) Et pourtant ils trouvent. *Repères IREM*, **24**, 11-34.

VERNAC M., DURAND-GUERRIER V. (2014) Le concept de nombre réel au lycée et en début d'université : un objet problématique. *Petit x*, **96**, 7-28.

VIVIER L. (2015) *Sur la route des réels*. Note pour une habilitation à diriger des recherches, Université Paris Diderot.

## Annexe. Le questionnaire sur les nombres

**Un bilan des connaissances sur les nombres après la classe de Quatrième : le nombre dans tous ses états (Margolinas, DEA Université Bordeaux 1, 1985)**

**Question 0** *(ajoutée par I.Bloch)*
Le nombre $\sqrt{78}$ est :
Décimal : o oui - o non Rationnel : o oui o non Irrationnel : o oui o non
Lorsqu'on tape $\sqrt{78}$ sur une calculatrice, celle-ci affiche : 8,8317609
Le nombre affiché :
Est égal à $\sqrt{78}$ : oui - non
Est une valeur approchée de $\sqrt{78}$ oui - non Si oui, à quel ordre ?

Dans toute la suite, on notera $2{,}\overline{0}$ le nombre 2,0000…. (il y a une infinité de zéros). De même, $2{,}\overline{32}$ signifie 2,3232323232… Si, dans une écriture décimale illimitée, un groupe de chiffres revient toujours (comme ci-dessus 0 ou 32 ) on dit que c'est une écriture décimale illimitée périodique. Pour vous faire comprendre, en écrivant des nombres, n'hésitez pas à employer la barre ou les points de suspension comme dans les exemples ci-dessus.

**Question 1**
Parmi les écritures suivantes, entoure celles qui sont égales au nombre 2

0,2 $\frac{1}{2}$ $2{,}\overline{0}$ $2^1$ $\frac{2}{1}$ $1{,}\overline{9}$ $0^2$ 2,00 $\sqrt{4}$ $1^2$ 2,001 1,09

**Question 2**
1) Écris deux nombres entiers (sans racine) qui encadrent le nombre : $\sqrt{13}$ … < $\sqrt{13}$ < …
2) Écris le meilleur encadrement possible, c'est-à-dire celui dans lequel les nombres entiers sont les plus rapprochés de $\sqrt{13}$ : … < $\sqrt{13}$ < …

**Question 3**
1) Écris deux nombres décimaux avec 3 chiffres après la virgule qui encadrent le nombre 4,1 :
… < 4,1 < …
2) Écris le meilleur encadrement possible avec 3 chiffres après la virgule : … < 4,1 < …

**Question 4**
Écris deux nombres décimaux avec 3 chiffres après la virgule qui encadrent le nombre $2{,}\overline{32}$ :
… < $2{,}\overline{32}$ < …
Écris le meilleur encadrement possible avec 3 chiffres après la virgule : … < $2{,}\overline{32}$ < …

**Question 5**
Écris deux nombres décimaux avec 3 chiffres après la virgule qui encadrent le nombre $\frac{25}{7}$ :

… < $\frac{25}{7}$ < …

Écris le meilleur encadrement possible avec 3 chiffres après la virgule : … < < $\frac{25}{7}$ …

**Question 6**
Classe du plus petit au plus grand les nombres suivants :
$0{,}\overline{2}$ $\sqrt{2}$ 1 3,5 $\sqrt{3}$ 0,21 2 3,545

**Question 7**
Écris trois nombres entiers ou décimaux appartenant à l'intervalle ] $\sqrt{6}$ ; $\sqrt{11}$ [

**Question 8**
Écris à ta manière le résultat de l'opération : $1,\overline{4} + 3,\overline{7}$

**Question 9**
1) Écris le plus grand nombre de l'intervalle [2,3]
2) Y a-t-il un plus grand nombre dans l'intervalle [2,3[ ?
o Oui, c'est … o Oui, mais je ne sais pas lequel o Non, parce que ….
3) Écris le plus petit nombre de l'intervalle [2,3]
4) Y a-t-il un plus petit nombre dans l'intervalle ]2,3] ?
o Oui, c'est … o Oui, mais je ne sais pas lequel o Non, parce que ….

**Question 10**
1) Le nombre $0,\overline{9}$ est :
o égal au nombre 1 o plus petit que 1 o plus grand que 1
2) Quel est le résultat de l'opération $1 - 0,\overline{9}$ ? Si tu ne peux pas répondre, explique pourquoi.

**Question 11**
1) Écris une division de nombres entiers qui ne finit jamais : ….
2) Penses-tu qu'il y ait une règle pour trouver les divisions qui finissent ?
o oui o non
Si oui, à quelle règle penses tu ?
3) Y a-t-il des valeurs entières du nombre *a* pour lesquelles la division *a* :4 ne finit pas ?
o oui lesquelles ? o non, pourquoi ?

**Question 12**
On se pose la question de savoir si la fraction $\frac{3}{31}$ a une écriture décimale illimitée périodique
o Oui, le développement est périodique car : ….
o Non, il ne se répète pas car : ….

On donne le début de l'opération $3 \div 31$ :

| | |
|---|---|
| 300 | 31 |
| 210 | 0,0967741 |
| 240 | |
| 130 | |
| 060 | |

**Question 13**
On considère le nombre $a = 1,010010001….$
1) Écris encore 5 décimales de ce nombre
2) Ce nombre est-il un nombre : o décimal ? o rationnel ? o Irrationnel ?

**Question 14**
Y a-t-il des nombres positifs qui ne sont pas le résultat de la division de deux nombres entiers ?
o Oui, je peux en donner un :
o Non, il n'y en a pas
o Oui, mais je ne sais pas lesquels.