ACTIVITÉ ... Les nombres triangulaires

Christian LARUE
Lycée Saint-Cricq – Pau

Cette activité est destinée à un travail sur l'algèbre au lycée. L'objectif est d'établir un lien entre une preuve visuelle et la preuve algébrique classique concernant l'identité $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$, à partir de la reconnaissance d'une régularité dans le calcul*.

L'activité se base donc sur des schémas et doit permettre aux élèves de reconnaître cette régularité – en anglais, un *pattern* – qui permet ensuite d'inférer des moyens de calcul et de trouver la formule du $n^{\text{ième}}$ nombre T_n. On vise la perception par les élèves du caractère générique des productions figuratives, pour établir l'écriture générale de la somme des n premiers nombres entiers sans passer par un formalisme lié aux suites numériques.

Étape 1. Faire dessiner la suite des nombres triangulaires, comme ci-après (figure 1), et les calculer.

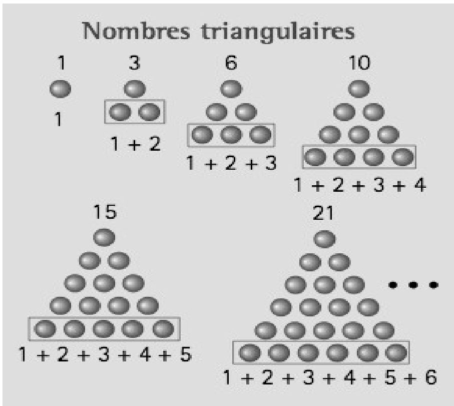

Figure 1. *Représentation de T1 à T9*

On peut utiliser des dessins comme en figure 2, afin de montrer la progression des schémas.

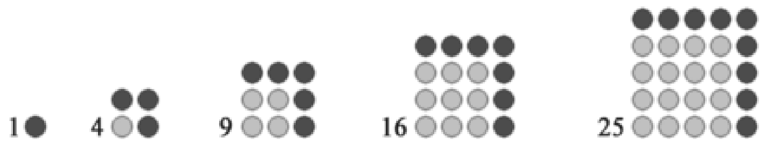

Figure 2. *Principe d'extension des figures numériques*

Étape 2. Établir la preuve de la formule de T_n (voir figure 3 page suivante)

Elle peut être obtenue selon le calcul classique, ici pour T_9 :

$T_9 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9$

$T_9 = 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1$

$2\,T_9 = 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 = 9 \times 10$

donc $T_9 = ?$

* Cette activité a été expérimentée en anglais dans une classe européenne de lycée.

On pourra représenter ce processus de calcul dans un schéma comportant les *patterns* visés, le nombre cherché apparaissant deux fois, dans des couleurs différentes, pour former un rectangle facilement dénombrable.

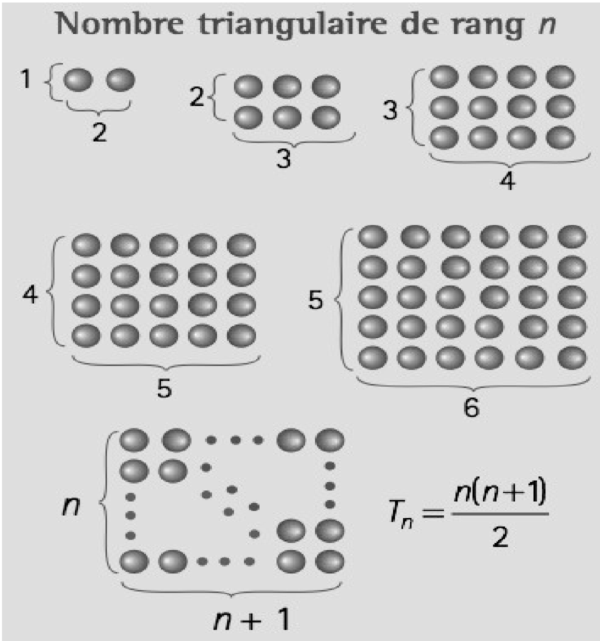

Figure 3. *Calcul de T_n*

Un dernier résultat

En s'aidant aussi d'un coloriage adéquat de la figure 2, ou par un calcul algébrique utilisant les formules, on montrera que $T_n + T_{n-1} = n^2$

Amusez-vous bien !