L'ENSEIGNEMENT DES TRANSFORMATIONS GÉOMÉTRIQUES A L'ÉCOLE PRIMAIRE DANS LE CADRE D'UN DISPOSITIF DE FORMATION *LESSON STUDY* EN SUISSE ROMANDE

Valérie BATTEAU
HEP Vaud, UER MS, Laboratoire 3LS
Jean-Luc DORIER
Université de Genève, Equipe DiMaGe

Résumé. Notre étude se place dans le cadre d'un dispositif de formation *lesson study* en Suisse Romande dans lequel un groupe d'enseignants et de formateurs a effectué un cycle sur le thème des transformations géométriques. Nous commençons par présenter quelques éléments sur l'enseignement des transformations géométriques, des points de vue historique et didactique, afin d'identifier des questions d'enseignement relatives à ce sujet. À partir de ces questions d'enseignement, nous confrontons les analyses *a priori* et *a posteriori* d'une activité mathématique sur les transformations géométriques, choisie par le groupe et enseignée lors d'un cycle *lesson study*. Nous concluons sur les difficultés liées à cet enseignement et sur les effets du travail collectif sur la gestion de l'enseignante pendant la leçon.

Mots clés. Transformations géométriques, isométries, *lesson study*.

Abstract. Our study fits into a *lesson study* training in the French part of Switzerland. In this training, a group of teachers and facilitators work about geometric transformations during a *lesson study* cycle. We introduce some didactical and historical elements about geometric transformations teaching in order to identify issues about this subject. From this viewpoint, we compare the *a priori* and *a posteriori* analysis about a mathematical activity. This activity of geometric transformations is chosen by the group and taught during the *lesson study* cycle. We conclude about difficulties linked to this teaching and about the effects of this training on the management's teacher during the lesson.

Key-words. Geometric transformations, isometry, *lesson study*.

Introduction

Cette étude s'inscrit dans une recherche doctorale en cours (Batteau, 2014) dans laquelle nous analysons les pratiques de trois enseignantes vaudoises de l'école primaire (élèves de 9/10 et 10/11 ans) engagées dans un dispositif de formation continue en mathématiques de type *lesson study* (Batteau & Clivaz, 2016 ; Clivaz, 2016). Dans cette étude, un groupe d'enseignants et de formateurs a étudié une activité portant sur les isométries au niveau de la fin de primaire dans le canton de Vaud.

Notre article se place dans le cadre d'un dispositif *lesson study*, qui sera décrit brièvement dans la première partie, mais porte principalement sur l'enseignement des isométries. Notre objectif n'est donc pas d'analyser le dispositif *lesson study* dans toute sa généralité mais d'en décortiquer un exemple, en nous appuyant sur une analyse en amont sur les isométries à partir de travaux historiques et didactiques existants. Ainsi nous voulons tenter d'apporter des éléments de réponse aux questions suivantes : quelles sont les difficultés d'enseignement liées aux transformations géométriques ? Quels ont été les apports du dispositif *lesson study* tant au niveau de la préparation de la leçon qu'au niveau de l'analyse réalisée par le groupe ?

La première partie est consacrée à la description du dispositif *lesson study.* Dans une deuxième partie, nous dressons un bilan succinct des points de vue historique, épistémologique et didactique avec un aperçu des programmes d'enseignement, concluant par une analyse prospective des difficultés majeures d'enseignement et d'apprentissage de ce thème. Dans une troisième partie, nous donnons une analyse *a priori* de l'activité en jeu. Dans une quatrième partie, nous présentons le travail collectif réalisé dans le cadre d'un cycle *lesson study* par rapport aux questionnements développés dans la deuxième partie et à l'analyse *a priori*. Dans une dernière partie, nous présentons l'analyse *a posteriori* de la leçon concernant la catégorisation des transformations géométriques à l'appui des questionnements développés dans la deuxième partie. Nous concluons sur les difficultés de cet enseignement et sur les effets du travail collectif sur la gestion de l'enseignante pendant la leçon.

1. Le dispositif *lesson study*

1.1 Quelques éléments

Le dispositif *lesson study* est originaire du Japon et date de la fin du XIX$^{\text{ème}}$ siècle. Il a connu un développement international, notamment depuis les années 2000 aux Etats-Unis, en Europe et en Asie. Ce développement a donné lieu à différentes adaptations notamment les *learning study* en Suède et à Hong-Kong (Marton & Ling, 2007), un modèle étatsunien (Lewis & Hurd, 2011), un modèle chinois (Gu & Gu, 2016), un modèle anglais (Dudley, 2011). Le modèle pratiqué est inspiré du modèle étatsunien (Clivaz, 2015b).

Une des spécificités de ce dispositif repose sur la posture de chercheurs prise par les enseignants à l'intérieur même du dispositif.

> On voit donc qu'une ECL[1] est à bien des égards, un travail de recherche : elle procède à partir de travaux documentés antérieurs, ainsi que de questions et de buts précis; elle implique la formulation explicite d'hypothèses, ainsi que des points et des conditions d'observation pour les tester ; elle organise des expérimentations avec un dispositif concret (la leçon) qui « intègre » les hypothèses et permet de les tester, et qui est évalué de façon souvent très rigoureuse; elle rend public (ou, au moins, partageable) ses résultats sous forme de document sous une forme standardisée, et permet donc en principe aux collègues de refaire l'expérience sous des conditions déterminées. (Miyakawa & Winsløw, 2009, p. 7)

Nous renvoyons le lecteur intéressé par une présentation du dispositif *lesson study* à Batteau & Clivaz (2016, pp. 28-30), ainsi qu'à quelques ouvrages de référence (Fernandez & Yoshida, 2004; Hart, Alston & Murata, 2011; Lewis & Hurd, 2011; Stigler & Hiebert, 1999) et à un article théorique qui met en perspective différentes théories de didactique des mathématiques françaises avec le dispositif *lesson study* (Clivaz, 2015a).

1.2 Contexte et dispositif *lesson study* en Suisse Romande

Nous présentons ici le modèle pratiqué dans le groupe que nous avons suivi au sein du Laboratoire Lausannois de Lesson Study (3LS)[2] en Suisse Romande. Ce groupe est composé de quelques enseignants (ici 8) et deux formateurs-chercheurs nommés, comme c'est souvent le cas en anglais, les facilitateurs (Clerc-Georgy & Clivaz, 2016). Le facilitateur 1 s'inscrit en didactique disciplinaire, ici en didactique des mathématiques et le facilitateur 2 dans le champ transversal enseignement, apprentissage et évaluation.

[1] Étude Collective d'une Leçon, que ces auteurs ont choisi pour traduire le terme japonais de *Jugyo Kenkyu*. Nous avons conservé le terme anglais de *lesson study*.

[2] www.hepl.ch/3ls (consulté le 30 mars 2017).

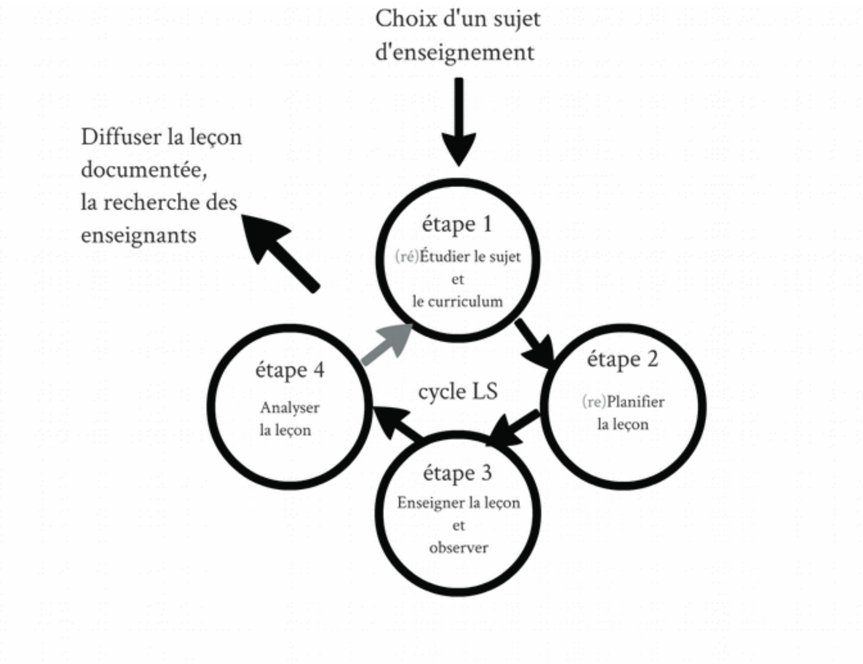


Figure 1. *Un cycle de lesson study (Batteau & Clivaz, 2016)*

Le groupe choisit un sujet d'enseignement en fonction d'une difficulté d'enseignement ou d'apprentissage. Le groupe étudie ce sujet en s'appuyant sur les programmes officiels[3], les ressources existantes[4], les lectures professionnelles... Le groupe définit ainsi un problème d'enseignement et/ou d'apprentissage spécifique pour lequel il va élaborer une activité mathématique (c'est-à-dire un problème de mathématique ou exercice ou situation-problème proposé aux élèves pendant la leçon). Le groupe construit alors une leçon de recherche[5] autour d'une activité mathématique, puis élabore un plan de leçon[6] avec le déroulement, la mise en œuvre, les aides possibles... La leçon de recherche est ensuite mise en œuvre par l'un des enseignants du groupe, tandis que les autres observent. Puis, le groupe se réunit pour discuter des effets de la leçon sur les apprentissages des élèves et peut éventuellement réviser la leçon, qui peut être à nouveau enseignée par un autre enseignant du groupe et observée.

Dans le dispositif vaudois, huit enseignants se sont portés volontaires pour un engagement d'un an, renouvelable une fois, à raison d'une séance de 1h30 par quinzaine soit un total de 34 séances collectives pendant les deux années 2013/2014 et 2014/2015.

Deux chercheurs jouent le rôle de facilitateurs, ce qui inclut un rôle d'animateur des séances, un rôle de formateur et d'expert pourvoyeur de contenu mathématique, didactique ou

3 Dans notre contexte, le Plan d'Études Romand (PER) correspond aux programmes officiels. Site du PER concernant le sujet mathématique choisi par le groupe : http://www.plandetudes.ch/web/guest/MSN_21/, consulté le 12 avril 2017. Pour une présentation générale du PER voir (Burgermesiter & Dorier, 2013).

4 En Suisse Romande, les Moyens d'Enseignement Romands sont les manuels scolaires officiels en mathématiques, constitués d'un recueil d'activités mathématiques. Pour une présentation générale voir (Dorier & Maréchal, 2008).

5 La leçon de recherche est appelée *research lesson* dans la littérature. Parmi les différentes adaptations des *lesson studies*, nous retrouvons la leçon de recherche comme élément commun. Une leçon de recherche correspond à une ou deux périodes de 45 minutes portant sur le thème choisi pendant le cycle *lesson study*.

6 Le terme de leçon est ici utilisé en référence à l'anglais, il désigne la ou les séances de classe dans la(les)quelle(s) l'activité sera mise en œuvre.

pédagogique (Batteau & Clivaz, 2016). Par ailleurs, ils participent à l'écriture de plans de leçons finaux ou d'articles dans des revues professionnelles (voir par exemple Baetschmann et al., 2015). Pendant les séances collectives, la posture des facilitateurs a évolué au cours du dispositif et selon les sujets abordés, selon qu'ils orientent, parfois imposent des choix didactiques, parfois laissent les enseignants faire leurs choix puis expérimenter lors des leçons de recherche (Clerc-Georgy & Clivaz, 2016).

2. Repérages historique, épistémologique et didactique sur les transformations géométriques, en particulier les isométries

Cette partie a pour objectif de fournir au lecteur des éléments d'ordre historique, épistémologique et didactique sur les transformations géométriques afin de mieux cerner les difficultés majeures d'enseignement et d'apprentissage de ce thème.

2.1 Définition retenue d'une isométrie pour notre étude

Les isométries planes sont les transformations du plan qui conservent les mesures et donc les angles non orientés ; elles se divisent en deux catégories :

- les déplacements (appelés aussi isométries directes ou positives) qui ne changent pas l'orientation, donc conservent les angles orientés : les rotations, les translations et l'identité.
- les anti-déplacements (appelés aussi isométries indirectes ou négatives) qui inversent l'orientation, donc transforment les angles orientés en leur opposé : symétries axiales (orthogonales) et les symétries glissées[7].

Dans le plan, il n'existe que ces cinq types d'isométries. Par ailleurs, la composée de deux ou plusieurs isométries conserve aussi les mesures, c'est donc une isométrie, positive si le nombre d'isométries négatives est paire et négative s'il est impair.

2.2 Repérages historiques pour questionner l'enseignement des transformations géométriques

Cette partie vise à établir les liens entre trois problématiques d'ordre épistémologique issues des travaux de Bkouche (1991) et Thienard (2006). Nous présentons ci-dessous chacune de ces problématiques et le questionnement didactique qui en découle. L'objectif de cette partie est de comprendre d'où peuvent venir les difficultés d'enseignement auxquelles sont confrontés les enseignants pour enseigner les isométries et quels sont les obstacles didactiques que les élèves devraient franchir.

Antagonisme transformation versus isométrie

La première problématique est la « méthode des transformations » créé par Desargues (1591-1661) qui consiste à démontrer une propriété liée à une conique en la démontrant tout d'abord sur le cercle, avant de la transporter à la conique par perspective ou projection (Thienard, 2006, p. 31). Dans cette approche, les transformations géométriques sont utilisées pour construire des figures ou découvrir et établir leurs propriétés. Ce sont des transformations *déformantes*, dont on exploite les invariants.

[7] On appelle symétrie glissée la transformation du plan qui est la composée d'une symétrie d'axe $\boldsymbol{D}$ et d'une translation de vecteur $\vec{u}$, on peut montrer que toute symétrie glissée s'écrit de façon unique comme la composée commutative d'une symétrie et d'une translation dans la direction de l'axe de symétrie. Les symétries glissées ne sont à l'heure actuelle enseignées ni au primaire ni au secondaire, que ce soit en France ou en Suisse romande. De fait les enseignants du primaire ne les connaissent pas.

On trouve un écho de ce point de vue dans les commentaires didactiques du livre du maître de la classe de 6ème primaire (6P) de Suisse romande : en géométrie, « la notion de transformation prend son sens géométrique à travers la notion d'invariant (ce qui ne change pas quand on transforme) » (Danalet, Dumas, Studer & Villars-Kneubühler, 1999, p. 256). Dans ce sens, une isométrie est une transformation du plan qui conserve les mesures et donc les angles (non orientés), c'est-à-dire la forme et la taille. Or, dans son sens courant, le terme « transformation » peut induire une conception erronée d'« opération transformante » (Bkouche, 1991, p. 135).
La question se pose alors de l'intérêt de travailler assez tôt avec les élèves une activité faisant intervenir une transformation affine qui ne soit pas une isométrie, donc vraiment déformante, comme le souligne Walter (2000-2001) :

> Or une isométrie est concevable autant par ce qu'elle est que par ce qu'elle refuse d'être. Pour rendre compte à l'élève de ce que sont les isométries, et par là même leurs invariants, ne faudrait-il pas lui présenter des transformations qui soient des transformations *déformantes,* qui *transforment vraiment,* telles que la symétrie oblique par exemple ? (p. 39)

Selon cette première problématique, on détecte une première difficulté possible : faire comprendre aux élèves la particularité des isométries dans la famille des transformations géométriques.

La problématique du mouvement

Dans la période 1860-1880, l'utilisation accrue des transformations en mathématiques en lien avec les mouvements a engendré un nouveau questionnement sur les axiomes de la géométrie euclidienne, comme géométrie vraie car expérimentale.

> Les géomètres introduisent de manière explicite le mouvement dans la géométrie et refondent la géométrie sur les mouvements de translation et de rotation qui conduiront, aux niveaux des syntaxes démonstratives, aux translations et rotations géométriques par considération des seuls états initiaux et finaux des figures. (Thienard, 2006, p. 39)

Ainsi lors de cette refondation de la géométrie élémentaire, le mouvement est introduit explicitement par la description du mouvement d'un corps dans l'espace et corrélativement d'une figure dans son plan (par exemple, cf. Poinsot et Chasles), par la théorie des parallèles (par exemple, cf. Lobatchevski, Bolyai et Gauss), par les hypothèses qui servent de fondement à la géométrie de Riemann.

> Les transformations seront alors des métaphores du mouvement qui amène une figure d'une position de l'espace à une autre (translation, rotation), comme métaphore des procédés d'agrandissement-rétrécissement (homothétie) et comme syntaxe pour l'égalité et la similitude des figures. (Ibid., p. 46)

Du point de vue didactique, se pose-t-il ici la question des liens à faire ou à éviter entre les transformations géométriques et le mouvement ?
Bkouche (1991) incite à commencer l'enseignement des transformations géométriques en primaire par le mouvement. Cet enseignement peut alors s'appuyer sur des ostensifs tels le retournement ou le pliage pour la symétrie axiale, le mouvement de translation rectiligne pour la translation et le mouvement de pivot autour d'un point pour la rotation. Pour lui, ne pas s'appuyer sur le mouvement constituerait même un obstacle. Dans ce sens, le Plan d'Études Romand (PER par la suite) indique à plusieurs reprises qu'il faut utiliser du matériel pour la construction en induisant ainsi à s'appuyer sur le mouvement pour enseigner les transforma-

tions géométriques et à étudier le mouvement (avec du matériel) d'une figure à une figure isométrique pour identifier les isométries.

Si cette approche ne pose pas de difficulté pour la rotation, elle est plus problématique pour la translation. Il existe en effet plusieurs mouvements de translation, pas seulement le rectiligne, permettant de passer d'une figure à son image par une translation (Ba & Dorier, 2007).
Plusieurs mouvements permettent de passer d'une figure à une figure isométrique, dont un seul, « le plus élémentaire », le prototypique, permet de caractériser l'isométrie. Ainsi le mouvement prototypique associé à une translation est le mouvement de translation rectiligne. La seule contrainte, dans un mouvement de translation d'un solide indéformable, est que tout segment « reste parallèle à lui-même » mais la trajectoire peut suivre n'importe quelle courbe. Pour une rotation, la situation est moins ambiguë : le mouvement prototypique associé à une rotation est le mouvement circulaire autour d'un point. Pour une symétrie dans le plan, le mouvement prototypique est un retournement qui est donc une rotation dans l'espace ! Par analogie, le mouvement qui devrait représenter une symétrie plane dans l'espace devrait passer par la quatrième dimension ! C'est ce qui fait qu'on ne peut pas « se mouvoir ou se contorsionner » de sorte à représenter sa propre image dans un miroir ! Ainsi le lien supposé si naturel entre isométrie et mouvement n'est pas sans poser quelques difficultés pour les isométries négatives, les antidéplacements.

Ainsi si le lien avec les mouvements est productif, il demande néanmoins à être dépassé car il peut créer des conceptions erronées :

> L'utilisation des concepts de mouvement et de déplacement semble limiter le risque d'importer des conceptions erronées. Toutefois, une limite, soulignée par Bkouche lui-même, tient à la nécessité de préciser les notions de mouvement et de déplacement, indépendamment du temps et des positions intermédiaires prises par les objets en mouvement (Chesnais, 2009, p. 35).

Par ailleurs, le mouvement peut renforcer l'idée chez les élèves que la transformation n'agit que sur la figure (voire sur un demi-plan pour une symétrie) et pas sur le plan dans son entier.

La problématique des groupes de transformations

La troisième problématique apparaît avec la notion de groupe de transformations, en lien avec le besoin de classification et de hiérarchisation des géométries, comme le souligne Felix Klein (1849-1925) :

> La notion de « groupe de transformations » était l'instrument d'une étude structurale des géométries puisqu'il permettait d'identifier par isomorphie des géométries en apparence étrangères les unes aux autres, d'établir des liens de subordination entre des géométries dont on voyait mal les liens qui pouvaient les unir et donc de hiérarchiser espaces et propriétés géométriques. (p. 46)

Dans cette approche, le mouvement est mis de côté car les transformations géométriques sont considérées uniquement par les états initiaux et finaux des figures. Bkouche (1991) critique ce point de vue pour l'enseignement : en effet, il considère que le principe de l'égalité par superposition (déjà à l'œuvre chez Euclide) s'appuie sur le mouvement qui permet la superposition et prône une vision dynamique sans tenir compte des étapes du mouvement :

> Si le mouvement intervient dans le principe fondamental, celui-ci ne considère ni la façon dont le mouvement se déroule, ni la forme du déplacement (c'est-à-dire la relation dans l'espace entre les deux figures) ; intervient seulement ce qu'on pourrait appeler un principe de l'état initial et de l'état final. (Bkouche, 1991, p. 138)

Dans cette approche, seules les figures de l'état initial et de l'état final sont visibles. « La transformation géométrique elle-même n'est jamais directement représentée : on ne représente toujours que son axe, puis des figures et leurs symétriques, la transformation elle-même restant invisible, ce qui peut représenter un obstacle à la fois pour l'apprentissage et pour l'enseignement » (Chesnais, 2009, p. 35).
Ce premier niveau de réflexion sous la forme d'un triptyque – déformation (invariant), mouvement, instantanéité – va nous aider à structurer nos analyses. Nous soutenons qu'au niveau primaire, l'enseignement des isométries peut s'appuyer sur l'idée de mouvement et en particulier sur un « mouvement prototypique » associé à chaque type d'isométries. Puis, que cet enseignement doit être dépassé en ne considérant plus le mouvement mais les seuls états initiaux et finaux.
Nous passons à présent à une présentation succincte des principaux travaux de didactique sur les transformations géométriques, et plus particulièrement la symétrie axiale.

2.3 Quelques travaux de didactique sur les transformations géométriques

Dans le champ des transformations géométriques, la symétrie axiale joue un rôle particulier, comme le souligne Grenier (1988), ce qui explique que c'est sur elle que la plupart des travaux de didactique ont porté :

> Avant d'être une notion mathématique, la symétrie est une notion familière. Elle a une dimension culturelle et sociale, en tant que relation intra ou interfigurale, que ne possèdent pas au même degré les autres transformations géométriques. Le mot symétrie fait partie du langage courant et a de nombreuses significations. [...]
> Une autre raison de notre intérêt pour cette notion est la place privilégiée du concept mathématique parmi les transformations du plan. La symétrie orthogonale est une isométrie indirecte, à laquelle on peut réduire toutes les isométries du plan. En effet, elle engendre les rotations, les translations et les symétries glissées, qui peuvent être décrites comme des composées de deux ou trois symétries orthogonales. (Grenier, 1988, p. 1)

Grenier (1988) a étudié l'enseignement de la symétrie en 6$^{\text{ème}}$ en France et s'est intéressée en particulier à la manière dont l'enseignant gère les phases de dévolution et d'institutionnalisation, aux difficultés des élèves et aux particularités de la notion à enseigner. Elle a mis en évidence que la propriété du milieu est un obstacle à l'émergence des autres propriétés, et qu'elle correspond à des conceptions fort variées chez les élèves. Elle a montré qu'il y a des difficultés liées à la propriété d'orthogonalité, au sens de la propriété d'équidistance et des relations d'incidence, et de façon générale que la notion de construction prend chez les élèves un sens différent de celui de l'enseignant.
Dans cette lignée, des travaux (Denys & Grenier, 1986 ; Grenier, 1990; Grenier & Laborde, 1988; Lima, 2006) ont porté sur les conceptions des élèves sur la symétrie axiale. Ils ont montré la résistance de conceptions familières erronées liées à cette isométrie telles que la verticalité, l'alignement, le découpage en deux plans distincts superposables, etc. (Bulf, 2009). Tavignot (1993) s'est, quant à elle, intéressée à la transposition didactique de la symétrie axiale (au niveau de la 6$^{\text{ème}}$) et a ouvert la voie au travail de Miyakawa (2005) sur les rapports entre connaissance et preuve à propos de la symétrie axiale ; il a identifié les connaissances effectives mobilisées par les élèves dans une situation de construction de preuve au niveau 3$^{\text{ème}}$ en France. Plus récemment, Chesnais (2009) a étudié, en s'appuyant sur tous ces travaux, les pratiques de deux enseignants, reconnus comme expert par leurs pairs, l'un en ZEP et l'autre en contexte ordinaire, sur l'enseignement de la symétrie axiale en 6$^{\text{ème}}$ en France pendant deux années. Elle a mis en évidence que la notion de symétrie est à la fois

un concept quotidien et scientifique, en référence aux travaux de Vygotski (1934/1997, p. 441), que celle-ci présente un aspect dynamique et un aspect statique dont l'analyse historique détaillée précédemment justifie cette approche, ce qui peut expliquer certaines conceptions erronées des élèves comme décrit précédemment.
Ces travaux montrent que la symétrie axiale, sujet d'enseignement à la charnière de l'école primaire et du secondaire 1 (élèves de 12 à 15 ans), est révélateur de changement de paradigmes géométriques, au sens de Houdement et Kuzniak (2006), que les auteurs nomment le passage de la Géométrie I ou « géométrie naturelle », qui a pour source de validation la réalité et le sensible, à la Géométrie II ou « géométrie axiomatique naturelle », dans laquelle « la source de validation se fonde sur les lois hypothético-déductives dans un système axiomatique aussi précis que possible » (p. 181).

Sur un autre plan, un projet sur l'enseignement de la géométrie à l'école élémentaire et sur les besoins de la formation des maîtres est mené par une équipe de chercheurs de l'IUFM Nord Pas de Calais, depuis 2007. Les travaux de ce groupe portent sur le rapport aux objets géométriques (matériels ou théoriques) de l'école élémentaire au collège (Perrin-Glorian, Mathé & Leclercq, 2013). Ils se sont intéressés au rôle que peuvent jouer les instruments pour faire évoluer et enrichir le regard porté sur les figures. D'autres travaux ont porté sur le rôle du langage dans la construction des connaissances des élèves en géométrie et sur la symétrie en particulier (par exemple Barrier, Chesnais & Hache, 2014).

Il existe par ailleurs des travaux de didactique sur l'enseignement des transformations géométriques en général. Cassan (1997) a ainsi montré que l'institutionnalisation de la symétrie axiale en classe de 6ème (11/12 ans) constitue un obstacle pour l'apprentissage de la symétrie centrale en classe de 5ème ; dans sa recherche, elle a comparé les résultats d'une évaluation commune donnée à des élèves de CM2 (10/11 ans) à qui la symétrie centrale a été enseignée comme une rotation (indépendamment de la symétrie axiale) et à des élèves de 5ème (12/13 ans) à qui la symétrie centrale a été enseignée comme une homothétie de rapport –1, à la suite de l'enseignement de la symétrie axiale. Elle a ainsi mis en évidence la prégnance de la notion d'axe de symétrie pour réaliser des tâches mettant en jeu la notion de centre de symétrie. Elle a aussi identifié un amalgame entre symétrie axiale et centrale pour les élèves de 5ème, ce qu'Artigue (1990) a nommé « amalgame de notions sur un support donné » et qui est un processus reconnu comme producteur d'obstacles. En outre, Cassan a montré que cet amalgame est moins facilement surmonté par les élèves de 5ème que par ceux de CM2. Jahn (1998) s'est intéressée au passage de la notion de transformation géométrique en tant que transformation de figure à celle de transformation ponctuelle du plan dans lui-même au niveau de la classe de 2nde : elle a ainsi mis en évidence les potentialités d'un logiciel de géométrie dynamique pour favoriser l'articulation des points de vues global et ponctuel.
On voit donc que le thème des transformations géométriques, et plus particulièrement de la symétrie axiale, a donné lieu à de nombreux travaux en didactique des mathématiques, que nous n'avons fait qu'effleurer ici. Cette partie nous a permis ainsi d'identifier les difficultés d'enseignement auxquelles les enseignants du *groupe lesson study* ont pu être confrontés, ainsi que les obstacles didactiques liés aux isométries que les élèves devraient dépasser. Cela nous a semblé important pour mieux comprendre les enjeux de leurs débats.

Nous décrivons maintenant l'enseignement des transformations géométriques dans le contexte Suisse Romand en en présentant les grandes lignes et en nous interrogeant sur la façon dont sont abordés les différents questionnements didactiques présentés précédemment.

2.4 Ce que dit le Plan d'Études Romand sur l'enseignement des transformations géométriques au primaire et au secondaire

Dans le PER, qui couvre les onze ans de la scolarité obligatoire[8], les mathématiques sont divisées en cinq domaines, dont un pour la géométrie appelé *Espace*. Dans ce domaine, l'objectif d'apprentissage se décline selon les cycles en : « explorer l'espace » au cycle 1, « poser et résoudre des problèmes pour structurer le plan et l'espace » au cycle 2 et « poser et résoudre des problèmes pour modéliser le plan et l'espace » au cycle 3. Les transformations géométriques apparaissent dès la 3P (élèves de 6-7 ans) et sont étudiées tout au long de la scolarité obligatoire. Au cycle 1, les transformations géométriques ne sont pas un objet d'étude en tant que tel mais sont expérimentées par les élèves à travers des déplacements et des manipulations. Les élèves observent « ce qui change » et « ce qui ne change pas » lors de transformations géométriques, en effectuant des déplacements d'eux-mêmes ou d'objets puis en les décrivant. Les transformations géométriques sont ainsi d'abord abordées par le mouvement. Dès le cycle 2, les transformations géométriques deviennent des objets d'étude. En 5P et 6P[9] (élèves de 8-9 ans et 9-10 ans), les élèves observent les principales propriétés (ce qui change et les invariants des isométries), apprennent à reproduire une figure plane par translation ou par symétrie axiale au moyen de matériel (papier-calque, papier à réseau, ciseaux, miroir…) et à décrire des déplacements à l'aide d'isométries. Puis en 7P et 8P (élèves de 10-11 ans et 11-12 ans), les élèves doivent reconnaître, décrire et nommer les isométries (translation, symétrie axiale, rotation) et reproduire une figure plane par translation ou symétrie axiale avec des instruments de géométrie et par rotation avec du matériel. Ce n'est qu'au cycle 3 que la symétrie centrale est étudiée, avec l'homothétie et la similitude. Dans ce cycle, la théorie se complète, les élèves doivent décrire et identifier les caractéristiques d'une isométrie (vecteur de translation, axe de symétrie, centre de rotation ou de symétrie, conservation des grandeurs…). Ce sujet est présent dans toute la scolarité obligatoire et reste au niveau de la Géométrie I (Houdement & Kuzniak, 2006) aux cycles 1 et 2 pour passer progressivement au niveau de la Géométrie II au cycle 3.

Nous venons de donner quelques éléments d'analyse didactique de ce PER afin de situer les contraintes institutionnelles auxquelles sont soumis les enseignants du *groupe lesson study*. Nous allons à présent nous consacrer au niveau où nos observations ont eu lieu, la 6P (équivalent CM1 en France). Nous allons essentiellement présenter une analyse *a priori* de l'activité mathématique « Dans l'aquarium » afin d'en relever les enjeux didactiques et mathématiques, en les situant dans la perspective globale que nous avons décrite plus haut.

3. Analyse *a priori* de l'activité « Dans l'aquarium »

Lors des séances collectives du dispositif *lesson study*, le groupe que nous avons observé a créé l'activité « Dans l'aquarium » (voir annexe 2), à partir de l'activité « Aquarium » issue des moyens d'enseignement romands de 6P (Danalet et al., 1999, p. 256) (voir annexe 1).

[8] En Suisse romande, l'école est obligatoire à partir de 4 ans (il n'y a pas d'école avant). La scolarité obligatoire dure 11 ans, 8 ans de primaire et 3 ans de secondaire 1, qui se divisent en :
– cycle 1 correspondant aux degrés 1P à 4P – élèves de 4/5 ans à 7/8 ans – moyenne, grande section et CP-CE1 en France.
– cycle 2 correspondant aux degrés 5P à 8P– élèves de 8/9 ans à 11/12 ans – CE2-CM1-CM2-6ème en France.
– cycle 3 correspondant aux degrés 9 à 11 (secondaire 1) – élèves de 12/13 ans à 14/15 ans – 5ème à la 3ème du collège en France.

[9] La leçon a lieu dans une classe de 6P.

L'activité initiale consiste à demander aux élèves de reproduire une figure (un poisson) dans des positions différentes sur un quadrillage, sur la base d'un exemple. Il s'agit donc d'une activité de tracé de figures isométriques de la figure initiale dans un quadrillage. Dans l'original, l'objectif ne va pas plus loin alors que le groupe, que nous avons observé, a décidé de réaliser une leçon de recherche en deux phases, sur deux jours successifs :

- lors de la phase 1, les élèves doivent produire des poissons dans des positions différentes sur le quadrillage ;
- entre les phases 1 et 2, l'enseignant relève et examine les productions des élèves puis en photocopie quelques-unes sur des transparents (voir annexe 5) ;
- lors de la phase 2, l'enseignant effectue une mise en commun dont l'objectif est d'amener les élèves à reconnaître, nommer et catégoriser les différentes isométries à partir de leurs productions et enfin d'effectuer une institutionnalisation des connaissances en jeu lors de la phase 2.

Nous présentons une analyse *a priori* de cette activité en dégageant les différentes stratégies possibles pour reproduire la figure dans des positions différentes sur le quadrillage, puis des stratégies pour reconnaître et classer les isométries, en lien avec l'analyse des variables didactiques de « Dans l'Aquarium ».

3.1 Variables didactiques et stratégies possibles des élèves

Nous convoquons ici les travaux de (Duval, 2005; Duval & Godin, 2005) qui offrent un cadre d'analyse qui permet, d'une part, de mettre en évidence l'hétérogénéité des procédures des élèves et de décrire finement leur activité ; d'autre part, ce type d'analyse fournit des éléments sur les conceptions des élèves sur les isométries et peut à terme fournir des éléments d'analyse sur les mises en commun (comment l'enseignante interprète et intègre les procédures des élèves lors de ces mises en commun) ainsi que lors des échanges entre l'enseignante et les élèves (des malentendus qui peuvent expliquer les difficultés des élèves peuvent être identifiés) :

> La manière mathématique de voir les figures consiste à décomposer n'importe quelle forme discriminée, c'est-à-dire reconnue comme une forme nD/2D, en unités figurales d'un nombre de dimensions inférieur à celui de cette forme. Ainsi la figure d'un cube ou d'une pyramide (3D/2D) est décomposée en une configuration de carrés, de triangles, etc.. (unités figurales 2D/2D). Et les polygones sont à leur tour décomposés en segments de droites (unités figurales 1D/2D). Et les droites, ou les segments, peuvent être décomposés en "points" (unités 0D/2D). Notons qu'avec les points nous sortons de toute visualisation. En effet, les points ne sont visibles que lorsqu'ils apparaissent comme l'intersection d'unités 1D/2D (tracés sécants ou tracés formant un coin ("sommets", "angles "...)). (Duval, 2005, p. 20)

Une première variable didactique porte sur la nature de la figure initiale et sa position sur le quadrillage.
Dans l'activité initiale, l'élève doit choisir entre trois poissons, tous constitué d'une figure géométrique complexe : un pentagone croisé (sans axe ni centre de symétrie) dont les sommets sont des nœuds du quadrillage et d'un œil et d'une bouche, qui orientent l'objet. Celui conçu par le groupe pour l'activité de recherche a en plus trois de ses côtés sur les lignes du quadrillage. Dans une telle activité, une forme avec des axes de symétrie ou un centre de symétrie, par exemple, risque de conduire à plusieurs possibilités de transformations permettant de passer d'une position à l'autre, et donc de créer des ambiguïtés. Au contraire une forme telle qu'un polygone avec les sommets hors des noeuds du quadrillage, avec les diagonales qui sont tracées, pourrait conduire à plus d'erreurs de tracé. En particulier, choisir une figure

sans axe de symétrie (ni centre de symétrie) permet de pouvoir différencier les déplacements et anti-déplacements selon la conservation ou non de l'orientation et assure l'unicité de la réponse quand on cherche à identifier l'isométrie. Toutefois, la taille de la figure (les longueurs des côtés comprises entre 2 et 9 carreaux), le fait que la figure soit un poisson, forme connue des élèves, et le fait que les sommets soient sur des nœuds sont des éléments qui facilitent la reproduction de la figure par les élèves.

Cette figure est suffisamment complexe pour que les élèves puissent la voir de différentes manières en reprenant les analyses de déconstruction dimensionnelle (Duval, 2005; Duval & Godin, 2005) :

- par une vision iconique 2D/2D : la figure est un poisson, éventuellement composé de deux sous-figures 2D/2D un triangle pour la queue et un quadrilatère (trapèze rectangle) pour le corps, le tout formant un polygone croisé ;
- par une vision 1D/2D en contour de surface ;
- par une vision 1D/2D en lignes, droites, segments ;
- par une vision 1D/2D en réseau de lignes ;
- par une vision 0D/2D en points ;
- par une vision réseau de lignes et de points comme intersections de lignes.

Il y a bien une dialectique entre « voir » et « agir » : c'est-à-dire ces différentes manières de voir la figure influent sur les différentes stratégies et l'usage des instruments, et inversement, les instruments mis à disposition influenceront les manières de voir.

Une deuxième variable didactique concerne les instruments[10] et le matériel mis à disposition : calque, chablon[11], quadrillage, règle. La possibilité de décalquer la figure initiale permet, en retournant le papier calque, de tracer l'image par anti-déplacement et donc une symétrie axiale ou glissée. L'utilisation du papier calque, si on utilise une aiguille pour marquer les sommets, peut aussi favoriser une vision 0D/2D en points. Si au contraire l'élève décalque en suivant les lignes du contour, c'est la vision 1D/2D qui est en jeu. Dans cette vision 1D/2D, on peut considérer les sous-figures qui composent le pentagone : le triangle et le trapèze rectangle. Mais il est aussi possible d'avoir une vision 2D/2D en décalquant à main levée la figure sur le quadrillage et en considérant la figure globale : le pentagone qui « englobe » le poisson.

La mise à disposition d'un chablon permet à l'élève de mettre en œuvre différentes stratégies : par exemple, il peut positionner le chablon sur la figure initiale, puis déplacer et/ou retourner le chablon, le repositionner sur le quadrillage afin que les sommets du polygone correspondent aux nœuds du quadrillage. Ensuite, soit l'élève trace le contour du chablon à main levée ou à la règle (vision 1D/2D), soit il positionne uniquement les sommets du polygone à partir du chablon (vision 0D/2D), puis complète l'image de la figure initiale à la règle.

Ainsi le chablon ou le calque peuvent-ils servir non seulement à produire des images de la figure initiale par isométrie mais aussi à vérifier que les figures ont la même forme et les mêmes dimensions, vérifier que les figures ont été placées dans des positions différentes, visualiser une isométrie à effectuer pour produire une figure dans une position nouvelle, par déplacement selon l'intuition du mouvement.

[10] Le terme instrument est utilisé au sens large (Perrin-Glorian et al., 2013). Ce sont les instruments classiques de géométrie, ainsi que tous les objets utilisables pour la réalisation matérielle des figures comme des chablons, du papier calque...

[11] Terme plus couramment utilisé en Suisse romande, équivalent au français gabarit ou patron, selon les contextes.

1ère série de stratégies : avec la présence d'un papier calque

Pour reproduire la figure dans des positions différentes, une première stratégie consiste à décalquer la figure, puis retourner le papier calque en le positionnant pour que les sommets du polygone soient placés sur des nœuds du quadrillage. Différentes façons d'utiliser le papier calque peuvent être envisagées :

– on peut décalquer uniquement les sommets du polygone (vision 0D/2D)

– on peut repasser sur l'envers du papier calque à main levée ou en utilisant une règle (vision 1D/2D ou 2D/2D)

– on peut utiliser le papier calque pour visualiser une nouvelle position de la figure sur la feuille (vision 2D/2D)

– on peut décalquer la figure puis découper le contour et s'en servir ensuite comme un chablon (vision 1D/2D).

Les différentes stratégies pour reproduire la figure ainsi que celles pour reconnaître les isométries en jeu sont directement reliées à la deuxième variable didactique de la mise à disposition des instruments.

2ème série de stratégies : avec la présence d'un chablon (opaque)

Déplacer et/ou retourner le chablon, le positionner sur le quadrillage et tracer le contour (vision 2D). On peut aussi déplacer le chablon, repérer un ou plusieurs sommets du polygone puis compléter la figure (vision 0D).

3ème série de stratégies : par pliage (si autorisé et possible)

Une troisième stratégie consiste à plier la fiche et à reproduire par transparence (ou avec la pointe d'un compas ou une aiguille) en repérant des points (vision 0D/2D). Cette stratégie est limitée au cas des symétries qui sont alors facilement identifiables.

4ème série de stratégies : avec un quadrillage

Une stratégie consiste à « compter les carreaux » des côtés de la figure, puis à placer un sommet à un autre emplacement du quadrillage et reproduire la même figure en comptant les carreaux. On favorise ainsi les translations et dans une moindre mesure les symétries selon des axes verticaux ou horizontaux. Elle est plus difficile à mettre en œuvre pour d'autres cas.

De plus, la stratégie qui consiste à « compter les carreaux » peut reposer :

– soit sur un repérage absolu « un point de référence, ainsi que deux directions ou plusieurs points de référence, forment un système de repères pour tous les lieux ou trajets que l'on a à repérer. La position peut être alors déterminée par un ou plusieurs nombres » (ERMEL, 2006, p. 552). Ce type de repérage se rapproche d'un système de coordonnées dans un repère ;

– soit sur un repérage relatif en repérant les points les uns par rapport aux autres : en partant d'un des sommets du polygone et en effectuant des déplacements successifs pour placer les autres sommets.

Enfin, cette stratégie peut être mise en œuvre pour tracer l'image de la figure par déplacement ou par symétrie axiale (avec un axe vertical ou horizontal) de deux manières :

– en utilisant la propriété de la symétrie axiale : un point A et son image A' sont à égale distance de l'axe de symétrie, autrement dit, l'axe de symétrie est la médiatrice de tous les segments [AA']. Dans ce cas, on compte les carreaux de la plus petite distance entre chaque sommet du polygone et l'axe, puis on recompte le même nombre de carreaux de l'autre côté de l'axe par symétrie ;

– on peut aussi utiliser cette propriété de la symétrie axiale pour un seul sommet du polygone, puis compléter le polygone image en « comptant les carreaux » mais en utilisant un repérage

relatif (par déplacements successifs « inversés » à partir d'un sommet pour placer les autres sommets). Dans ce cas, on peut même imaginer de tracer une image par symétrie glissée, mais c'est peu probable que les élèves le fassent.
Cette stratégie implique l'utilisation d'une règle pour tracer les côtés du polygone et peut reposer sur différentes visions.

Les stratégies de reconnaissance des isométries
Avec le chablon, distinguer les isométries positives ou déplacements (translations, rotations) des isométries négatives ou anti-déplacements (symétries axiales, symétries glissées) revient à savoir si on doit ou non retourner le chablon pour passer de l'état initial à l'état final. Distinguer une translation d'une rotation revient à vérifier que les côtés homologues sont ou non parallèles. Mais, il est difficile d'utiliser un chablon pour distinguer une symétrie d'une symétrie glissée. Ce n'est pas à proprement parler le mouvement qui est en jeu ici mais une comparaison entre deux états.
Sans utiliser de chablon, on doit d'abord savoir s'il y a ou non changement d'orientation. Ici, cela peut se voir par la position relative de l'œil par rapport à la bouche du poisson. S'il y a conservation de l'orientation, on distingue les translations qui conservent la direction de tous les segments de la figure, des rotations qui les modifient. Dans le cas d'un changement d'orientation, il est difficile pour des élèves de ce degré de distinguer une symétrie d'une symétrie glissée.
Une autre variable didactique concerne le fait de donner ou non un exemple d'une figure initiale avec d'autres figures isométriques dans des positions différentes disposées sur un quadrillage. L'exemple de l'activité initiale qui a été repris par le groupe (voir annexes 1 et 2) peut amener les élèves à essayer de recopier directement en reproduisant le même nombre de poissons, en reproduisant les poissons dans les mêmes positions ou en reproduisant des poissons issus des mêmes isométries. On notera que dans l'exemple, les poissons sont issus uniquement de symétries glissées et de rotations, ce qui n'est pas forcément judicieux.

3.2 Connaissances mathématiques en jeu et difficultés potentielles

D'après notre analyse, il apparaît que potentiellement la phase 2 de l'activité de recherche peut faire travailler la reconnaissance des isométries (symétrie axiale, translation et rotation) par comparaison de la figure initiale avec chacune des figures qu'ils ont produites. Par ailleurs, d'autres connaissances géométriques sont travaillées mais ne sont pas l'objectif principal, comme la reproduction de figures isométriques ou le repérage dans un quadrillage.
Comme nous l'avons vu dans la partie précédente, les propriétés communes des isométries sont la conservation des mesures et les propriétés spécifiques sont liées à la conservation ou non de l'orientation des angles. Les difficultés potentielles à la reconnaissance de ces propriétés sont liées à la notion de milieu, à l'équidistance, à la perpendicularité etc. (dans le cas de la symétrie axiale) comme nous l'avons développé dans la deuxième partie de cet article.
En référence au PER, les éléments travaillés dans l'activité mathématique « Dans l'aquarium » sont :
– l'observation des principales propriétés (variants et invariants) des isométries (en effectuant des isométries et en décrivant des déplacements à l'aide d'isométries), lors de la phase 2 de la leçon de recherche ;
– la reproduction d'une figure plane par translation ou par symétrie axiale au moyen de matériel *(papier-calque, papier à réseau, ciseaux, miroir, ...)* (… en effectuant des isométries et en décrivant des déplacements à l'aide d'isométries), lors de la phase 1 de la leçon de recherche.

Il s’agit d’identifier des isométries au programme (symétrie axiale, translation, rotation) mais, vu le caractère ouvert de l’activité, on ne peut éviter qu’il n’y ait des symétries glissées qui sont hors programme, ce qui est problématique. D’ailleurs, la reconnaissance et la catégorisation de chaque isométrie sont directement liées avec le mouvement qu’effectue l’élève avec un chablon ou un calque pour passer de la figure initiale à la figure image. L’élève doit donc identifier les mouvements prototypiques en faisant abstraction du mouvement qu’il a effectué pour reproduire la figure image.

Dans la partie suivante, nous allons présenter le travail collectif effectué lors des séances de *lesson study*. Nous allons mettre en évidence le parti pris par le groupe *lesson study* sur la problématique du lien entre transformations géométriques et mouvement, ainsi que les effets sur la gestion de l’enseignante lors de la leçon de recherche. Les difficultés potentielles, notamment liées à la non distinction de la symétrie axiale et glissée, seront-elles présentes dans les pratiques de l’enseignante et dans l’activité des élèves ?

4. Analyse du travail collectif sur les transformations géométriques

Nous commençons par exposer le travail effectué par le groupe d’enseignants et de facilitateurs lors du cycle *lesson study* sur les transformations géométriques.

4.1 Organisation du travail collectif sur les transformations géométriques

Le groupe *lesson study* s’est réuni cinq séances avant la leçon de recherche : deux séances ont été consacrées à l’étude du sujet (objectifs à long terme au niveau de l’année scolaire mais aussi de la scolarité, enjeux de ce sujet, étude des curriculum), puis trois séances à la préparation de la leçon de recherche (choix et analyse préalable de l’activité mathématique, réalisation d’un plan détaillé de la leçon).

Lors de la séance 8, le groupe a travaillé sur les difficultés ressenties à propos des transformations géométriques autant du côté des élèves que de celui des enseignants. Pour des raisons annexes, cette séance a dû se dérouler sans le facilitateur spécialisé en didactique des mathématiques. De fait, les discussions ont porté sur des aspects davantage pédagogiques que didactiques. Les enseignants relèvent la difficulté à reproduire une figure par isométrie en respectant les nœuds et les lignes du quadrillage.

> Séance 8 - 29:40 - 30:19 Edith : [...] ils (les élèves) vont reprendre le bateau de départ (*la figure de départ*) qui vont le faire très bien mais du coup ça sera absolument pas dans les carrés (*sur les lignes du quadrillage*) euh... qui ne, voilà qui ne voient pas et que faire ?
>
> 33:30 - 33:37 Caroline : Non elle (*une élève*) est incapable de voir qu'elle doit se repérer à des carrés (*au quadrillage*) et elle redessinera sa tortue n'importe comment.

Ils identifient aussi certaines difficultés liées au repérage : les déplacements à réaliser sur un quadrillage, le comptage des carrés sur un quadrillage pour reproduire une figure donnée.

> Séance 8 - 32:08 - 32:11 Océane : faire un parcours sur un quadrillage.
>
> 35:09 - 35:28 Anaïs : Un carré, un rectangle. Ils devaient simplement reproduire le même sur un quadrillage. Mais pour certains enfants ils n’y arrivent pas. Il faut compter le nombre de carrés de côté. Il est déformé, il est à côté pour tout ce n’est pas le même...

Les difficultés liées à la reproduction de figures avec agrandissements ont aussi retenu leur attention.

> Séance 8 - 50:25 - 50:44 Océane : Et puis y en a un aussi « le phare » (*nom d’une activité*) c'est ou il est sur un carré et ça doit être transformé sur deux carrés, ça a été agrandi et ils doivent tout calculer à double... alors tant que c'est des carrés verticaux ou horizontaux ça va mais là où c'est difficile c'est quand il y a les lumières du phare qui sont comme ça (*mime: en biais*).

Parmi les trois questionnements liés à l'enseignement des transformations géométriques présentés dans la deuxième partie de cet article, le groupe a évoqué la problématique liée aux transformations déformantes en lien avec la reproduction de figure dans un quadrillage « déformé », les deux autres questionnements n'ont pas été abordés pendant cette séance.

Lors de la séance 9, le groupe a travaillé à partir d'activités connues des enseignants pour mettre en évidence les liens entre les différentes connaissances géométriques en jeu : proportionnalité, repérage, transformations, figures et mesure.
Lors de la séance 10, le groupe a choisi l'activité mathématique, puis a réalisé une analyse préalable en identifiant les connaissances en jeu, les difficultés des élèves, les stratégies, les variables didactiques et le rôle des instruments. Par cette analyse préalable, le groupe a modifié certains éléments de l'activité initiale : la taille du quadrillage (pour faciliter la production de figures), le fait de donner un seul poisson exemple (car le groupe a jugé que faire choisir un poisson parmi trois, voir annexe 1, n'apportait pas d'intérêt d'un point de vue didactique), le fait de donner un poisson déjà tracé sur un quadrillage sur la fiche élève (pour faciliter la production de figures).
Dans l'analyse *a priori* de l'activité, nous relevons les éléments abordés par le groupe et ceux non abordés. Le groupe a travaillé notamment sur les différences entre connaissances spatiales et géométriques, sur la distinction entre dessin et figure, sur les différentes visions et la déconstruction dimensionnelle, sur le lien avec le PER, le rôle du langage (vocabulaire, communication d'une position ou d'un trajet, faire reproduire une figure, segment/droite), de manière générale en géométrie mais pas pour le cas particulier de l'activité « Dans l'aquarium ».
Lors des séances 11 et 12, le groupe a préparé la leçon de recherche en élaborant un plan détaillé avec les interventions de l'enseignant (éventuellement les aides à apporter) pour les différents moments : dévolution de la tâche, mise en commun et institutionnalisation. Pour ce cycle *lesson study* sur les transformations géométriques, le groupe s'est donné comme objectif de travailler les gestes professionnels[12] (au sens de Charles-Pézard, Butlen & Masselot, 2012; Peltier-Barbier et al., 2004) associés à la mise en commun et à l'institutionnalisation. C'est pourquoi le groupe a décidé de réaliser une leçon de recherche en deux phases, une de production basée sur celle initiale des moyens d'enseignement, puis une de reconnaissance et de catégorisation des isométries, plus ambitieuse et devant conduire à une institutionnalisation.

4.2 Analyse du travail collectif

Nous exposons ici les analyses didactiques et mathématiques réalisées par le groupe lors de ces séances uniquement au regard des trois questions d'enseignement (partie 2) et de l'analyse *a priori* exposée partie 3). Nous analysons l'activité[13] des enseignants à partir des transcriptions de la globalité de toutes les séances de ce cycle *lesson study*.

[12] Les gestes professionnels permettent de décrire la manière dont un enseignant réalise les processus de dévolution, de régulation et d'institutionnalisation, les différentes actions qui lui permettent de le faire et les différentes connaissances qu'il mobilise à cette occasion.

[13] Nos analyses des pratiques des enseignants se situent dans le cadre théorique de la Double Approche didactique et ergonomique (Robert & Rogalski, 2002). Les résultats de cette partie sont issus de l'analyse de l'activité des enseignants. Dans le cadre de cet article, nous avons choisi de ne pas présenter la méthodologie développée dans notre projet de thèse mais de nous focaliser sur les trois questionnements didactiques présentés au début de l'article, sur le travail collectif effectué par rapport à ces questionnements et enfin sur les choix et la gestion de l'enseignante par rapport à ces questionnements pendant la leçon de recherche.

Antagonisme transformation versus isométrie

L'antagonisme entre l'invariance de forme par isométrie et le sens courant du terme transformation est apparue lors de discussions autour de l'analyse d'activités. En effet, le groupe a été confronté lors de la deuxième séance à une transformation affine qui n'était pas une isométrie mais pour laquelle certains enseignants maintenaient qu'il s'agissait d'une symétrie axiale. Leurs échanges reflètent bien la difficulté de cet antagonisme :

Facilitateur 1 : « Une ombre au tableau »[14], elle était... (*inaudible*)
Caroline : Euh, ce n'est même pas une symétrie puisque... c'est transformation euh... déformation.
Océane : C'est aussi une symétrie.
Marie : C'est aussi une symétrie. [...]
Caroline : Non mais, ce n'est pas une symétrie, une symétrie tu la poses contre l'autre et tu...
Océane : Oui, mais elle est transformée celle-ci un peu.
Caroline : C'est une transformation, tu ne peux pas appeler ça une symétrie, t'as pas l'droit d'appeler ça une symétrie.
Marie : Non, elle a raison. Faudrait que...
Océane : Oui, faudrait que ça soit comme ça. On est bien d'accord qu'il faut avoir compris le concept quand même de symétrie.
Caroline : Bah, il faut avoir compris le concept de symétrie, ce n'est pas une symétrie.

Dans ce passage, les deux enseignantes Océane et Marie font une analogie entre une transformation géométrique qu'elles connaissent déjà (la symétrie axiale) et une transformation affine qu'elles ne connaissent pas. Sans relever les points communs entre les deux, Océane précise qu'il faut avoir compris le « concept de symétrie » pour tracer l'image d'une figure par transformation affine. Les discussions ont porté ensuite sur le ressenti de la difficulté d'enseignement et/ou d'apprentissage liés à cette activité, sur ses liens avec la réalité (soleil qui n'a pas d'ombre) mais pas sur les connaissances mathématiques sous-jacentes. Les discussions sur cette première problématique n'ont pas porté sur la distinction entre les différents types de transformations.
L'antagonisme transformation versus isométrie est apparu lors de séances qui ont suivi la leçon, lorsqu'une enseignante a demandé pourquoi une isométrie s'appelle une transformation alors qu'avec des isométries, les figures sont « complètement identiques ». Un autre enseignant précise qu'il s'agit bien d'une transformation du plan et non uniquement de la figure (ce que confirme le facilitateur 1) et qu'un des problèmes de l'activité « Dans l'aquarium » est qu'il y a des images par plusieurs isométries de la même figure initiale, ce qui masque le fait que c'est le plan entier et non la figure qui est transformé par isométrie.

La problématique du mouvement

Le groupe a rapidement pris le parti d'identifier les transformations géométriques à des mouvements, comme l'illustre cet extrait du plan de la leçon : « L'enseignant [...] a à sa disposition un papier calque avec un poisson-modèle pour faciliter l'identification du mouvement (déplacement du plan) qui a conduit du poisson initial au poisson dessiné après transformation géométrique ». Les instruments sont utilisés pour faciliter l'identification du mouvement qui permet ensuite de reconnaître l'isométrie. Le terme de mouvement est employé par le groupe pour désigner une transformation, comme les expressions : « reproduire une isométrie (symé-

[14] Ce terme réfère à une activité des Moyens d'Enseignement Romand de 6P, « Une ombre au tableau », où il faut tracer l'image par une transformation affine d'arbres et d'un soleil sur un quadrillage « déformé ».

trie, translation ou rotation) », « produire une isométrie », « dessiner une isométrie » ou « faire une isométrie » à la place de « tracer le symétrique d'une figure par isométrie » qui serait une expression plus rigoureuse d'un point de vue mathématique.
Le groupe associe aussi une transformation avec l'image par transformation, ainsi ils parlent systématiquement de produire des transformations de nature différente avec comme consigne aux élèves de produire des poissons dans des positions différentes.

L'invisibilité d'une transformation géométrique

Certains éléments n'ont pas été anticipés par le groupe lors de la préparation de la leçon, mais ont été travaillés lors des séances après la leçon : les propriétés d'invariance des isométries, la conception erronée induite par l'activité, à savoir que l'isométrie est une transformation seulement de la figure initiale, l'aspect de l'invisibilité de l'isométrie et la définition d'une isométrie. Il en résulte un vocabulaire commun dans lequel l'isométrie est confondue avec l'image par isométrie de la figure initiale. Le groupe n'a ni anticipé le cas des symétries glissées, ni la difficulté de distinction entre symétrie axiale et symétrie glissée par le mouvement.
La reconnaissance de l'isométrie est directement liée au mouvement qu'effectue l'élève avec un chablon ou un calque pour passer de la figure initiale à la figure image. Lors des séances avant la leçon, le groupe n'a travaillé ni la notion de mouvement prototypique liée aux transformations géométriques, ni le langage (qui est à définir) pour décrire les mouvements prototypiques qui permet d'identifier de manière unique chaque isométrie.

Après cette première analyse, nous présentons des éléments d'analyse *a posteriori* concernant la catégorisation des isométries par les élèves et la gestion de l'enseignante lors de la leçon, ainsi que les liens entre transformations géométriques et mouvements. Dans la partie suivante, nous tentons ainsi d'apporter des éléments de réponse aux questions suivantes : quel est l'effet du choix d'associer une transformation géométrique à un mouvement sur l'activité des élèves ? Comment l'enseignante a-t-elle géré le langage (le sien et celui des élèves) pour décrire les mouvements prototypiques qui permet d'identifier de manière unique chaque isométrie ? Comment l'enseignante a-t-elle géré les cas de symétries glissées ? Certes ces différentes analyses ne répondent pas directement à la question de l'évaluation d'une plus value générale apportée par le dispositif de *lesson study*, ce qui nécessiterait une analyse plus longue du dispositif. À travers la richesse des échanges des enseignants, on voit toutefois l'intérêt du dispositif, même si dans le cas présent la gestion de l'activité aurait encore pu être améliorée.

5. Analyse *a posteriori* de la leçon

À partir de la leçon et des séances collectives qui ont suivi, nous donnons des éléments d'analyse de l'activité de l'enseignante en nous focalisant sur les trois questionnements liés à l'enseignement des transformations géométriques présentés au début de cet article. Précisons que la leçon a eu lieu dans la classe d'Océane en fin d'année scolaire, dans une classe de 6P (CM1 – élèves de 9/10 ans). L'enseignante effectue la phase 1 conformément au plan de leçon. Ainsi les élèves reproduisent des poissons sur leur fiche quadrillée, puis l'enseignante examine les fiches des élèves entre les phases 1 et 2 (voir annexe 5).

5.1 Cas des symétries glissées

Étant donné que la composition d'isométries et les symétries glissées n'avaient pas été anticipées, l'enseignante s'avère ne pas disposer de connaissances mathématiques adéquates pour gérer cette difficulté. Confrontée à ce cas imprévu, elle a dû faire des choix sur la façon de gérer la catégorisation des isométries lors de la phase 2. Elle a alors dit aux élèves (voir extrait 2 en annexe 6) que certaines de leurs productions résultaient de deux isométries (pour désigner la composition de deux isométries) et non d'une seule. D'abord, elle ne demande pas de nommer explicitement les deux isométries, mais questionne les élèves sur cette possibilité. Elle leur demande ensuite s'ils ont trouvé de tels cas et enfin d'identifier les deux isométries en s'entraidant, si besoin. Elle utilise les termes de « deux isométries » pour désigner la composition de deux isométries dans le cas particulier de la symétrie glissée. Elle demande aux élèves d'identifier les isométries par le mouvement puis d'écrire R pour rotation, S pour symétrie et T pour translation.

5.2 La problématique du mouvement

Lors des séances de préparation, le groupe a associé une transformation géométrique à un mouvement, Océane est alors confrontée à des problèmes de vocabulaire pour associer de manière unique un mouvement à une transformation géométrique. La catégorisation des isométries vues uniquement comme des mouvements est problématique. Lors des séances qui suivent la leçon, le groupe se rend compte que les élèves ne peuvent pas identifier le mouvement du poisson initial à chaque poisson produit. Ce questionnement remet en cause les modalités et les objectifs de la leçon qui reposent sur cette association. En effet, le mouvement à identifier ne correspond pas au mouvement que les élèves ont effectivement réalisé lors de la phase 1 et les stratégies ne reposent pas nécessairement sur le mouvement comme celle du comptage de carreaux.

Cette problématique du mouvement met en évidence aussi une problématique plus générale liée à un glissement métacognitif : les élèves se contentent-ils de déplacer des chablons ou sont-ils dans un apprentissage des isométries ?

Par rapport aux stratégies

La stratégie qui repose sur l'utilisation du papier calque peut faire appel au mouvement lorsque l'élève décalque la figure initiale, déplace le papier calque et trace la figure image. Pour cette stratégie, il y a bien un déplacement avec retournement éventuel du papier calque, donc une idée de mouvement. La stratégie du pliage repose aussi sur l'idée du mouvement de la figure initiale à la figure image, mais le mouvement associé à la symétrie sort du plan et comme nous l'avons vu cela pose des difficultés, d'autant plus que l'activité mathématique se limite au plan. La stratégie dans laquelle le chablon est disposé sur la figure initiale puis déplacé sur le quadrillage pour tracer une figure image fait bien appel au mouvement. Il y a une cohérence dans cette stratégie entre l'identification du mouvement effectué par l'élève pour tracer une image de la figure initiale et l'association entre mouvement et transformation géométrique. Mais, lorsque l'élève dispose le chablon sur le quadrillage sans se référer au poisson initial et reproduit la figure, il n'a pas réalisé de mouvement du chablon à partir de la figure initiale lors de la phase 1. Dans ce cas, l'association entre transformation géométrique et mouvement n'est pas pertinente.

Par rapport au langage

Le terme « déplacer » pose problème car les déplacements au sens mathématique désignent les mouvements qui restent dans le plan et correspondent aux translations et rotations. Lors de la phase 2 (voir extrait 1 en annexe 6), Océane associe les verbes « tourner » et « pivoter » au mouvement correspondant à une rotation. Elle emploie les termes de « déplacer simplement » pour décrire le mouvement qui consiste à déplacer le chablon du poisson initial au poisson image par translation rectiligne, pour le distinguer de la rotation. Elle valide le terme « retourner » pour désigner le mouvement unique qui conduit aussi bien à une symétrie glissée qu'à une symétrie simple ce qui créé une confusion. Au niveau du langage, le verbe « tourner » est employé dans deux sens : celui de « pivoter » pour une rotation :

> Leçon – phase 2 - 28:50 - 29:29 Océane : [...] Comment est-ce qu'on appelle ce moment où justement il tourne ? Il pivote ? (*Océane a tracé au tableau trois F "en rotation"*). […]

ou celui de « retourner » pour le mouvement associé à une symétrie ou une symétrie glissée.

> Leçon – phase 2 - 27:03 - 27:17 Élève : elle a tourné le (?).
> Océane : donc elle a fait ?
> Élève : elle a fait un axe de symétrie.
> Océane : elle a fait un axe de symétrie. Très bien. […]

Le groupe n'a pas discuté du choix des termes pour décrire les mouvements prototypiques. Par ailleurs, l'enseignante fait une confusion entre « symétrie » et « axe de symétrie », comme ses élèves. Le groupe *lesson study* le lui fait remarquer dans l'analyse de la leçon de recherche et elle précise qu'elle l'a rectifié dans la suite de la leçon (voir par exemple l'annexe 4 : le tableau noir où elle inscrit « symétrie » et non « axe de symétrie »). Enfin, pendant la leçon, le groupe et l'enseignante utilisent un vocabulaire commun dans lequel l'isométrie est confondue avec l'image par isométrie de la figure initiale. Les annotations de l'enseignante sur les fiches des élèves entre les phases 1 et 2 en témoignent (voir annexe5).

Variabilité des visions 0D, 1D et 2D

Nous donnons, en annexe 5, trois productions d'élèves qui ont été choisies par l'enseignante pour organiser la mise en commun de la phase 2. La production de Grégoire se place dans une vision contour de surface 1D/2D car il a décalqué en transparence le contour du chablon à main levée en se mettant à une fenêtre de la classe. La production d'Elodie se situe dans une vision « réseau de lignes et de points » : elle n'a pas décalqué, elle a tracé les côtés de la figure à la règle en prenant des repères avec des points. La production de Laure indique une vision 0D/2D car on peut voir qu'elle a tracé des sommets de la figure à reproduire. Ainsi, même si cette activité semblait devoir renforcer une vision iconique et l'idée qu'une transformation n'agit que sur une figure, les élèves développent d'eux-mêmes des stratégies variées qui relèvent des différents types de vision.

Pourtant l'enseignante semble se limiter à une vision 2D/2D de la forme car, d'une part, elle partage la conception erronée d'une transformation qui transforme la figure et non le plan en entier (voir le cas de la rotation sur la reconstitution du tableau noir en annexe 4) ; d'autre part, elle confond l'image par isométrie avec l'isométrie (voir en annexe 5 ses annotations sur les productions des élèves).

5.3 Synthèse du travail collectif après la leçon

Lors de ce cycle *lesson study*, il n'y a pas eu d'autre leçon de recherche sur le thème des transformations géométriques car le groupe s'est dit satisfait de la leçon de recherche et du travail effectué :

> SC14 -17:47-18:23 Océane : Mais c'est vrai que entre les fois où je l'ai faite et puis cette fois j'étais beaucoup plus... satisfaite cette fois. Entre autres parce que il y a eu une mise en commun, une institutionnalisation et avant en fait... chacun allait à son bout de rythme et puis individuellement ou t'as fait ça mais voilà ça restait là et puis je n'étais jamais vraiment satisfaite et ces derniers temps je ne la faisais pas à cause de ça. Je me disais mais elle est tellement compliquée pour... le peu de satisfaction pour tous après...

Le groupe a discuté de la problématique du mouvement lors des séances qui ont suivi mais pas du langage qui sert à décrire les mouvements prototypiques. Dans le plan de leçon final (diffusé sur www.hepl.ch/3ls/), le groupe a conservé l'association entre transformation géométrique et mouvement, sans donner d'indication sur la difficulté du langage qui y est associée (voir extrait ci-dessous). Le groupe a relevé les questionnements liés à l'invisibilité d'une transformation géométrique et au fait que c'est une transformation de tout le plan et non uniquement de la figure (voir extrait ci-dessous) :

> Extrait du plan de leçon final : La notion de transformation géométrique est difficile à appréhender, car la transformation a un aspect de mouvement. Une translation par exemple n'est ni la figure de départ ni la figure d'arrivée, mais bien ce qui transforme l'une en l'autre. Il est ainsi difficile de la représenter sur le papier (on le fait avec une flèche ou, plus tard, avec un vecteur) ou, comme dans l'aquarium, avec le mouvement du papier calque. […]
>
> Par ailleurs, une transformation géométrique est bien une transformation de tout le plan. Ce n'est pas seulement une figure qui subit, par exemple, une translation, mais bien tout le plan, chaque point du plan. Cet aspect est masqué dans les tâches où plusieurs transformations sont effectuées sur la même feuille, ce qui est le cas ici.

5.4 Bilan de l'analyse *a posteriori* et alternatives possibles

Comme nous l'avons vu, le choix d'associer une transformation géométrique à un mouvement a impliqué des confusions langagières chez l'enseignante et également chez les élèves. Ainsi, au niveau du langage, il y a eu systématiquement une confusion entre isométrie et image par isométrie, la symétrie et la symétrie glissée ont été associées au même verbe « tourner », qui était lui-même parfois associé à la rotation. On peut aussi s'interroger sur le choix des termes « déplacer simplement » pour caractériser le cas de la translation. L'enseignante a investi une marge de manœuvre laissée par le travail collectif concernant plus particulièrement la reconnaissance et la catégorisation des isométries, et s'est ainsi retrouvée confrontée aux limites et difficultés liées aux choix du groupe concernant l'association entre transformation géométrique et mouvement. Elle a identifié des isométries qui ne correspondaient pas aux trois cas travaillés collectivement, elle est parvenue à les reconnaître, à les catégoriser et à gérer cette difficulté lors de son enseignement.

Quelles auraient été les alternatives possibles à l'activité choisie pour cette leçon de recherche ? Plusieurs pistes sont envisageables, pour éviter de conforter la conception erronée d'une transformation qui transforme la figure, il aurait été possible de donner sur une même fiche élève plusieurs quadrillages avec chacun une figure initiale à reproduire une seule fois dans une position différente.

Par rapport à l'invisibilité des isométries, lors de la reconnaissance, il aurait été possible d'indiquer par une flèche par exemple l'isométrie qui permet de passer de la figure initiale à la figure image afin d'éviter la confusion entre l'image par isométrie et l'isométrie elle-même.

Par rapport au langage, il aurait été possible de déterminer collectivement des termes qui permettent de décrire les mouvements prototypiques associés aux isométries et d'employer un langage plus précis au lieu de dire faire/produire une translation/rotation/symétrie, dire tracer l'image du poisson par translation/rotation/symétrie. En effet, ces abus de langage ont participé aux confusions relevées dans l'activité de l'enseignante pendant la leçon.

Par rapport à la confusion entre symétrie axiale et symétrie glissée, il aurait été possible de demander aux élèves de plier leur fiche selon un axe de symétrie et de vérifier ainsi par transparence si l'isométrie est une symétrie glissée ou une symétrie axiale.

6. Conclusion

Le groupe *lesson study* a proposé et développé des conceptions sur les transformations géométriques et leur enseignement, notamment le fait d'associer une transformation géométrique à un mouvement et le fait d'associer une isométrie à l'image de la figure par isométrie. Le groupe a ainsi développé un langage commun dans lequel ces conceptions ont été partagées. Océane s'est cependant retrouvée face à des difficultés d'enseignement lors de la leçon de recherche en investissant des marges de manœuvre laissées par le travail collectif. Notamment, le caractère ouvert de l'activité mathématique a impliqué des procédures d'élèves non-anticipées et la reconnaissance d'une isométrie ne figurant pas au programme du PER, non-anticipée également. Océane a alors demandé aux élèves d'identifier les deux isométries qui composent les symétries glissées. Ainsi, le groupe a dû remettre en question certains choix effectués pendant la préparation de la leçon de recherche. Malgré un travail collectif avec des enseignants expérimentés et des facilitateurs, ce sujet d'enseignement demeure complexe et a posé des difficultés d'enseignement lors de la leçon de recherche.
Par ailleurs, il convient de questionner le choix de l'activité : d'une part, il est difficile de construire les figures sur un quadrillage avec les instruments mis à disposition. D'autre part, pour ce cycle *lesson study*, le groupe visait à réaliser une institutionnalisation sur la reconnaissance et la dénomination des trois isométries ainsi que sur les propriétés de conservation des mesures et de superposabilité des figures par isométrie. C'est ce qui les a conduit à concevoir une leçon en deux phases en ajoutant à l'activité initiale des moyens d'enseignement sur la reproduction de poissons, la phase de reconnaissance, dénomination et catégorisation des différentes isométries

L'enseignement des transformations géométriques en primaire repose sur de la géométrie I et en secondaire 1 sur de la géométrie II. L'activité « Dans l'aquarium » s'inscrit en géométrie I, d'une part, car les isométries ne sont caractérisées ni par leur axe de symétrie, ni leur vecteur de translation, ni leur centre de rotation ; d'autre part, car les transformations géométriques sont associées à des mouvements. Le groupe s'est ainsi confronté à un changement de paradigmes entre ce qui est demandé aux élèves dans l'activité mathématique et l'objectif poursuivi par le groupe à savoir mettre en œuvre une institutionnalisation des isométries et de leurs propriétés.

Notre étude a permis d'apporter des éléments de réponse à la question : « quelles sont les difficultés d'enseignement liées aux transformations géométriques ? ».

- L'antagonisme transformation versus isométrie a mis en évidence une difficulté possible : faire comprendre aux élèves la particularité des isométries dans la famille des transformations géométriques.
- Le lien supposé naturel entre une isométrie et un mouvement se révèle être une difficulté pour les isométries négatives, les antidéplacements. Ce lien avec les mouvements est productif, mais doit néanmoins être dépassé car il peut créer des conceptions erronées (comme renforcer l'idée chez les élèves que la transformation n'agit que sur la figure, voire sur un demi-plan pour une symétrie et pas sur le plan dans son entier).
- Une transformation géométrique est invisible, seules les figures de l'état initial et de l'état final sont visibles.

La force de ce dispositif *lesson study* est la leçon de recherche qui est d'abord préparée collectivement, puis observée par les enseignants et facilitateurs, et enfin analysée. Dans ce cas particulier de cycle sur l'enseignement des transformations géométriques, certains partis pris du groupe n'ont été questionnés à aucun moment du dispositif (par exemple identifier une isométrie avec l'image par isométrie). Ceci interroge la plus-value du dispositif de formation qui n'a pas su faire émerger les problématiques sur les transformations géométriques telles que développées plus haut. Cependant les apports du dispositif lors la préparation de la leçon de recherche concernent davantage l'institutionnalisation (sur son importance et sur son organisation en classe : choix des exemples, modalités...) et l'utilisation des instruments (chablon) qui peut agir sur les différentes manières de voir et sur les procédures des élèves.

Au niveau de l'analyse de la leçon, les apports du dispositif *lesson study* se situent sur la posture des enseignants en chercheurs qui analysent un sujet, enseignent ou observent une leçon, puis analysent les activités des élèves pendant la leçon et améliorent la leçon. Cette leçon de recherche a effectivement provoqué une remise en question et une analyse des choix collectifs effectués pendant les séances de préparation, sur le lien entre isométrie et mouvement notamment. De plus, le travail collectif a abouti à la diffusion d'un plan de leçon[15] qui reprend les éléments mathématiques, didactiques et pédagogiques discutés pendant les cinq séances avant et les trois séances après la leçon, ainsi qu'à la publication d'un article dans une revue professionnelle.

Sur un autre plan, apparaît une particularité de ce dispositif de formation en comparaison avec d'autres dispositifs collaboratifs qui a été saillante pour cette étude : la leçon de recherche ne vise pas à être une leçon parfaite, elle est intégrée dans une démarche de cycle en étapes avec des séances collectives avant et après, et des ré-enseignements possibles de la leçon améliorée sur la base des analyses de la première leçon. Ce dispositif est ancré dans les pratiques ordinaires des enseignants : le sujet a pour origine une difficulté d'enseignement ou d'apprentissage exprimée par les enseignants, la leçon de recherche peut porter sur une activité connue des enseignants (ce qui a est le cas dans cette étude). Une autre particularité de ce dispositif est de terminer un cycle par la rédaction et la diffusion d'un plan de leçon qui reprend l'ensemble des réflexions d'ordre mathématique, didactique et pédagogique. Cette mise à distance du travail accompli permet aux enseignants de prendre une posture réflexive.

Notre étude s'inscrit dans une recherche doctorale qui porte sur l'évolution des pratiques d'enseignants (dont Océane) dans le cadre du dispositif *lesson study*. Cette étude a mis en évidence toute la complexité liée au sujet d'enseignement sur les transformations géométriques, au parti pris du groupe et aux confusions langagières. À travers cette complexité, nous avons démêlé dans le travail de thèse ce qui était propre aux pratiques d'Océane et ce qui a émané de ce travail collectif afin d'identifier des régularités dans ses pratiques. Cette étude soulève la question : quel peut être le développement professionnel de cette enseignante avec cette expérience de leçon de recherche et de travail collectif sur l'enseignement des transformations géométriques ? Pour tenter d'y répondre il est nécessaire de prendre en compte des évolutions sur du plus long terme portant sur plusieurs leçons, ce que nous faisons dans notre thèse (à paraître) mais qui dépasse le cadre de cet article.

Bibliographie

ARTIGUE M. (1990) Épistémologie et didactique. *Recherche en didactique des mathématiques,* **10(23)**, 241-286.

BA C. & DORIER J.-L. (2007) Liens entre mouvement de translation et translation mathématique: une proposition pour un cours intégrant physique et mathématiques. *Repères IREM,* **69**, 81-93.

[15] Voir http://www.hepl.ch/3ls (consulté le 8 mai 2018).

BAETSCHMANN K., BALEGNO M., BAUD E., CHEVALLEY M., CLERC-GEORGY A., CLIVAZ S., WEBER A. (2015) Une expérience de Lesson Study en mathématiques en 5-6 Harmos. *L'Educateur,* **11**, 32-34.

BARRIER T., CHESNAIS A. & HACHE C. (2014) Décrire les activités des élèves en géométrie et leur articulation avec celle de l'enseignant. *Spirale - Revue de Recherches en Éducation,* **54**, 175 -193.

BATTEAU V. (2014) Une étude de l'évolution des pratiques d'enseignants primaires vaudois dans le cadre du dispositif de formation continue lesson study en mathématiques. *Paper presented at the Séminaire national de l'ARDM ; présentation de poster, Paris.* http://ardm.eu/files/Actes_S%C3%A9mARDM_ann%C3%A9e 2014.pdf

BATTEAU V. & CLIVAZ S. (2016) Le dispositif de lesson study : travail autour d'une leçon de numération. *Grand N,* **98**, 27-48.

BKOUCHE R. (1991) De la géométrie et des transformations. *Repères IREM,* **4**, 134-158.

BULF C. (2009) Étude des effets de la symétrie axiale sur la conceptualisation des isométries planes et sur la nature du travail géométrique au collège. Texte présenté au *Séminaire national de Didactique des Mathématiques.*

BURGERMEISTER P.-F. & DORIER J.-L. (2013) La modélisation dans l'enseignement des mathématiques en Suisse romande. *Petit x*, **91**, 5-24.

CASSAN S. (1997) Centre de symétrie d'une figure, comparaisons de productions d'élèves de CM2 et de cinquième. *Petit x,* **46**, 55-84.

CHARLES-PÉZARD M., BUTLEN D. & MASSELOT P. (2012) *Professeurs des écoles débutants en ZEP. Quelles pratiques? Quelle formation?* Grenoble: La pensée sauvage.

CHESNAIS A. (2009) *L'enseignement de la symétrie axiale en sixième dans des contextes différents : les pratiques de deux enseignants et les activités des élèves.* Thèse Université PARIS 7.

CLERC-GEORGY A. & CLIVAZ S. (2016) Évolution des rôles entre chercheurs et enseignants dans un processus lesson study : quel partage des savoirs? In F. Ligozat, M. Charmillot & A. Muller (Eds.), *Le partage des savoirs dans les processus de recherche en éducation* (189-208). Série Raisons Educatives, n°20. Bruxelles: De Boeck.

CLIVAZ S. (2015a) French Didactique des Mathématiques and Lesson Study: a profitable dialogue? *International Journal for Lesson and Learning Studies,* **4**, 245-260.

CLIVAZ S. (2015b) Les Lesson Study ? Kesako ? *MATH-ECOLE,* **224**, 23-26.

CLIVAZ S. (2016) Lesson Study: from professional development to research in mathematics education. *Quadrante,* **XXV(1)**, 97-111.

DANALET C., DUMAS J. P., STUDER C. & VILLARS-KNEUBÜHLER F. (1999) *COROME Mathématiques. Livre du maître 4P.*

DENYS B. & GRENIER D. (1986) Symétrie orthogonale : des élèves français et japonais face à une même tâche de construction. *Petit x,* **12**, 33-56.

DORIER J.-L. & MARECHAL C. (2008) Analyse didactique d'une activité sous forme de jeu en lien avec l'addition. *Grand N,* **82**, 69-89.

DUDLEY P. (2011) Lesson Study development in England: from school networks to national policy. *International Journal for Lesson and Learning Studies,* **1**, 85-100.

DUVAL R. (2005) Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie: développement de la visualisation, différenciations des raisonnements et coordination de leurs fonctionnement. *Annales de didactique des mathématiques et de sciences cognitives,* **10**, 5-55.

DUVAL R. & GODIN M. (2005) Les changements de regard nécessaires sur les figures. *Grand N,* **76**, 7-27.

ERMEL (2006) *Apprentissages géométriques et résolution de problèmes : cycle 3*. Paris: Hatier.

FERNANDEZ C. & YOSHIDA M. (2004) *Lesson Study, A Japanese Approach to Improving Mathematics Teaching and Learning*. New York: Routledge.

GRENIER D. (1988) *Construction et étude du fonctionnement d'un processus d'enseignement sur la symétrie orthogonale en sixième. Modélisation et simulation..* Thèse, Université Joseph-Fourier, Grenoble I. Retrieved from https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00331264

GRENIER D. (1990) Construction et étude d'un processus d'enseignement de la symétrie orthogonale : éléments d'analyse du fonctionnement de la théorie des situations. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* **10(1)**, 5-60.

GRENIER D. & LABORDE C. (1988) Transformations géométriques – Le cas de la symétrie orthogonale. Texte présenté à *Didactique et acquisition des connaissances scientifiques, Actes du colloque de Sèvres* Mai 1987, Grenoble.

GU F. & GU L. (2016) Characterizing mathematics teaching research specialists' mentoring in the context of Chinese lesson study. *ZDM*, 1-14.

HART L.C., ALSTON A.S. & MURATA A. (2011) *Lesson Study Research and Practice in Mathematics Education*: Springer.

HOUDEMENT C. & KUZNIAK A. (2006) Paradigmes géométriques et enseignement de la géométrie. *Annales de didactique et de sciences cognitives,* **11**, 175-193.

JAHN A.P. (1998) *Des transformations des figures aux transformations ponctuelles : étude d'une séquence d'enseignement avec cabri-géomètre II relation entre aspects géométriques et fonctionnels en classe de seconde.* Thèse, Grenoble 1, Grenoble

LEWIS C. & HURD J. (2011) *Lesson study, Step by step, How teacher learning communities improve instruction*. Portsmouth, Etats-Unis.

LIMA I. (2006) *De la modélisation de connaissances des élèves aux décisions didactiques des professeurs: étude didactique dans le cas de la symétrie orthogonale.* Thèse, Université Joseph-Fourier, Grenoble.

MARTON F. & LING L. M. (2007) Learning from "The Learning Study". *The Journal of Teacher Education and Research,* **14(1)**, 31-44.

MIYAKAWA T. & WINSLØW C. (2009) Étude collective d'une leçon : un dispositif japonais pour la recherche en didactique des mathématiques. In I. Bloch & F. Conne (Eds.), *Nouvelles perspectives en didactique des mathématiques. Cours de la XIVe école d'été de didactique des mathématiques* (1-17). Grenoble: La Pensée Sauvage.

PELTIER-BARBIER M.-L., BUTLEN D., MASSELOT P., NGONO B., PEZARD M., ROBERT A. & VERGNES D. (2004) *Dur d'enseigner en ZEP. Dur pour les élèves. Dur pour les enseignants. Analyse des pratiques de professeurs des écoles enseignant les mathématiques en réseaux d'éducation prioritaire*. Grenoble: La pensée sauvage.

PERRIN-GLORIAN M.-J., MATHE A.-C. & LECLERCQ R. (2013) Comment peut-on penser la continuité de l'enseignement de la géométrie de 6 à 15 ans ? *Repères IREM,* **90**, 5-41.

ROBERT A. & ROGALSKI J. (2002) Le système complexe et cohérent des pratiques des enseignants de mathématiques : une double approche. *Revue canadienne de l'enseignement des sciences, des mathématiques et des technologies,* **2(4)**, 505–528.

STIGLER J. & HIEBERT J. (1999) *The teaching gap. Best ideas from the worlds teachers for improving education in the classroom*. New York: The Free Press.

TAVIGNOT P. (1993) Analyse du processus de transposition didactique. Application à la symétrie orthogonale en sixième lors de la réforme de 1985. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* **13(3)**, 257-294.

THIENARD J.-C. (2006) Les transformations en géométrie: introduction à une approche historique. *Repères - IREM,* **63**, 27- 52.

VYGOTSKY L. (1934/1997) *Pensée et langage* (F. Sève, Trans. 3ème édition ed.). Paris: La Dispute.

WALTER A. (2000-2001) Quelle géométrie pour l'enseignement en collège? *Petit x,* **54**, 31-49.

Annexe 1. Activité originale « Aquarium »

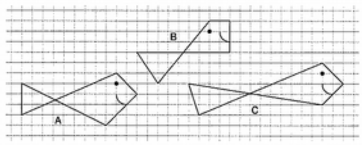
(Livre du maître 4P*,* Danalet, Dumas, Studer & Villars-Kneubühler, 1999, p. 256)

Aquarium

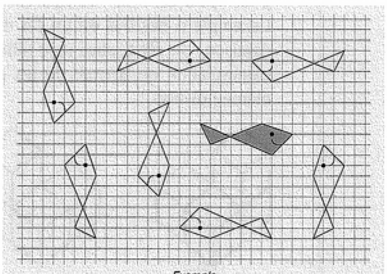
Tâche

- Dans un réseau quadrillé, reproduire un dessin en lui faisant subir des rotations, des translations ou des symétries.

Aquarium



Choisis un poisson modèle (A, B ou C) et dessine-le plusieurs fois sur du papier quadrillé. Comme dans l'exemple, chaque poisson doit être placé dans une position différente.



Exemple

6

Nombre d'élèves

- 1

Matériel

- LE p. 6

Mise en commun

- Les élèves comparent leurs résultats et confrontent les méthodes de reproduction utilisées.

Prolongement

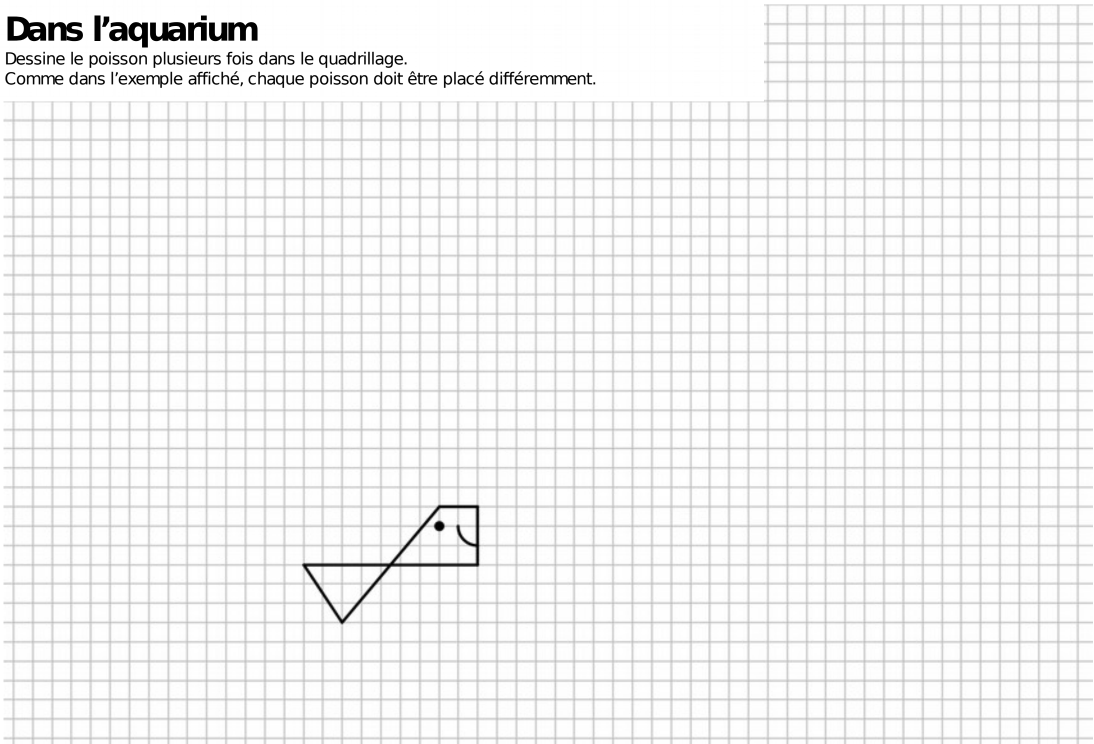
- L'enseignant propose la consigne suivante: *"Invente un dessin simple et reproduis-le dans toutes les positions possibles."*
- **"Une ombre au tableau"** FE p. 59

Quelques démarches

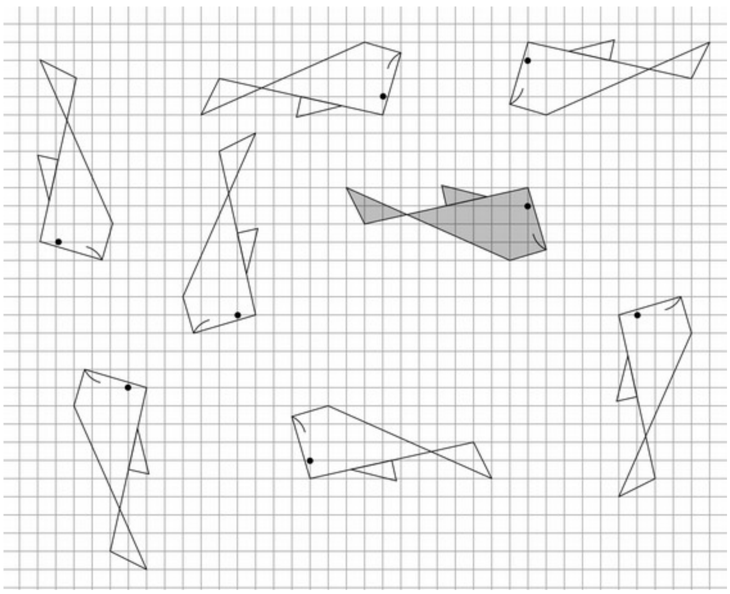
- Copier le poisson sur un papier calque
- Faire pivoter le LE pour obtenir une rotation
- Observer le LE par transparence pour obtenir une symétrie
- Reproduire chaque segment du poisson en comptant le nombre de carrés qui en séparent les extrémités

Annexe 2. Dans l’aquarium – activité modifiée par le groupe LS

Fiche élève



Exemple affiché au rétro pendant la leçon
Dans l’aquarium
Exemple :



Annexe 3. Plan de leçon

La leçon est mise en œuvre en deux temps (environ 45' à chaque fois)

1) les élèves produisent des transformations de nature différente
2) mise en commun et catégorisation des différents types de transformations isométriques.

Phase1

Consigne. Dessine le poisson plusieurs fois dans le quadrillage. Comme dans l'exemple au rétroprojecteur, chaque poisson doit être dans une position différente.

Avec la consigne, l'enseignant projette l'exemple au rétroprojecteur (voir « transparent »). L'exemple reste projeté durant toute la leçon.

Dévolution de la tâche. Pendant que les élèves dessinent des poissons issus de diverses transformations géométriques, l'enseignant :

- Observe comment ils s'y prennent, quelles transformations sont mises en œuvre, quelles difficultés les élèves rencontrent, quels types de collaborations sont mises en œuvre, quels sont les obstacles (si ça bloque et pourquoi)
- Relance les élèves si nécessaire (le but est d'avoir plusieurs poissons issus d'isométries différentes)
    - éventuellement autoriser certains élèves à aller voir ce qu'ont fait d'autres élèves
    - questionner l'élève, faire avec lui des gestes
    - proposer un chablon (prédécoupé)

Phase2

La mise en commun ayant lieu le lendemain de la phase de production de transformations, l'enseignante laisse un moment aux élèves pour reprendre leur fiche et éventuellement la compléter

Mise en commun

– L'enseignant projette un transparent de la grille et du poisson de départ (fiche élève). Elle a à sa disposition un chablon (papier) pour faciliter la reproduction de poissons.

– Les productions effectuées par les élèves la veille sont photocopiées (transparents) par l'enseignant.

– Le but est d'amener les élèves à faire un classement des différentes transformations géométriques proposées.

Consigne : On va classer vos poissons : comment ?

- Placer un poisson-chablon selon les consignes des élèves, le dessiner.
- Faire en sorte d'avoir au moins deux exemples de chaque isométrie pour permettre le classement.
- Demander aux élèves de classer les poissons, nommer les transformations.

Institutionnalisation

Sur un support collectif (le tableau noir), avec l'exemple du F, l'enseignante écrit et dessine un exemple pour chaque type de transformation. Les éléments suivants font l'objet d'une institutionnalisation :

- Symétrie (au tableau, axe vertical et sur la fiche d'instit, axe oblique)
- Rotation (au tableau, rotation de 90° et sur la fiche d'instit, 55°)
- Translation
- Les mesures sont conservées / les figures sont superposables

Une fiche individuelle reprenant ce qui est exposé au TN sera distribuée ultérieurement.

Fin de la leçon

- Après la phase d'institutionnalisation, l'enseignante invite les élèves à retourner vers leurs productions individuelles et à identifier "lesquels est-ce que j'avais fait ?"
- L'enseignante dispose d'un chablon déjà découpé (avec l'œil est la bouche marquée de l'autre côté ?) pour chaque élève qui ne l'aurait pas construit durant la première partie de la leçon.
- L'enseignante passe de table en table

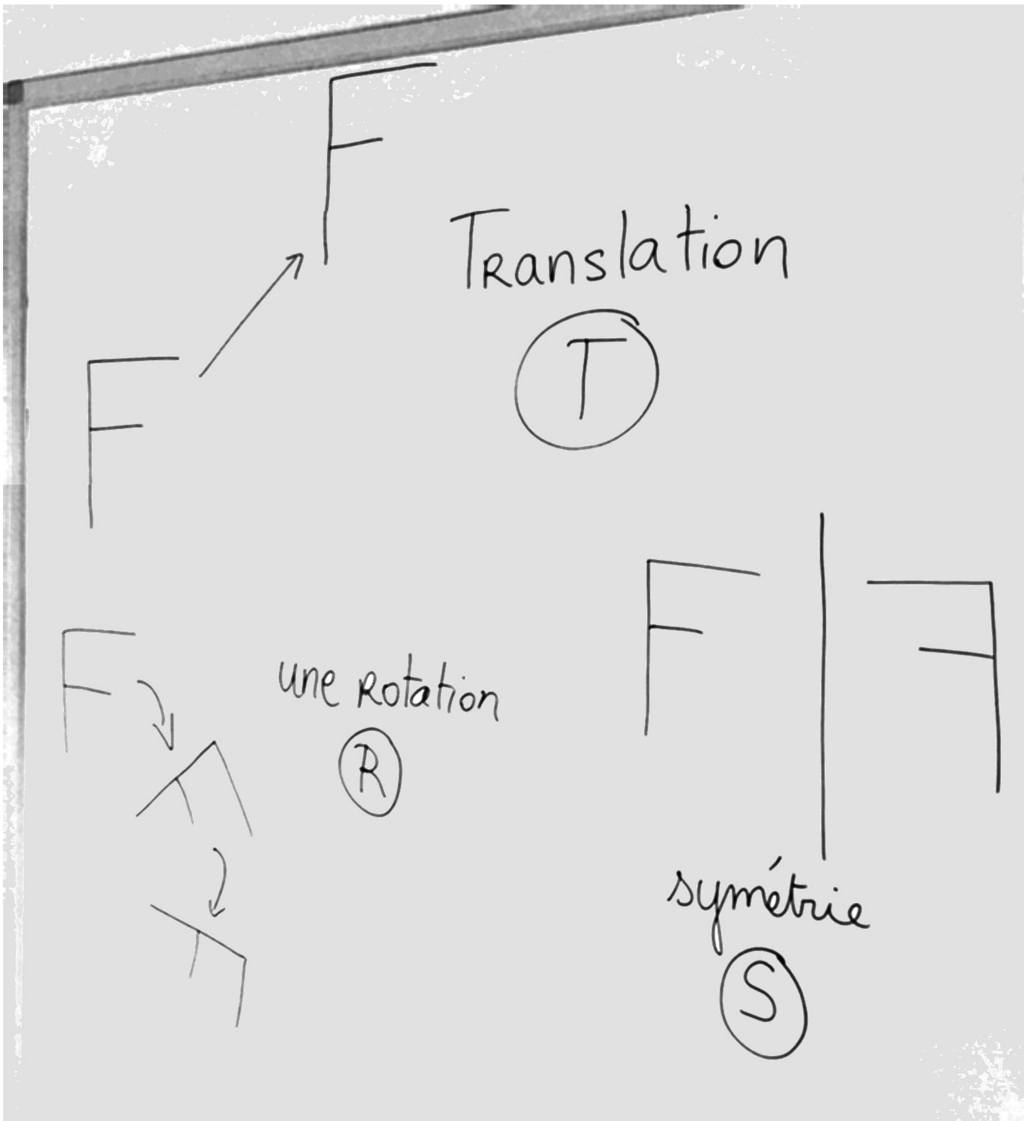
Matériel

Fiche élève avec le poisson de départ déjà dessiné

Des fiches poisson à disposition : pour découpage (sur demande ou alors proposé si élève perdu) ; prédécoupé pour la phase de validation (une couleur d'un côté, une couleur de l'autre.)

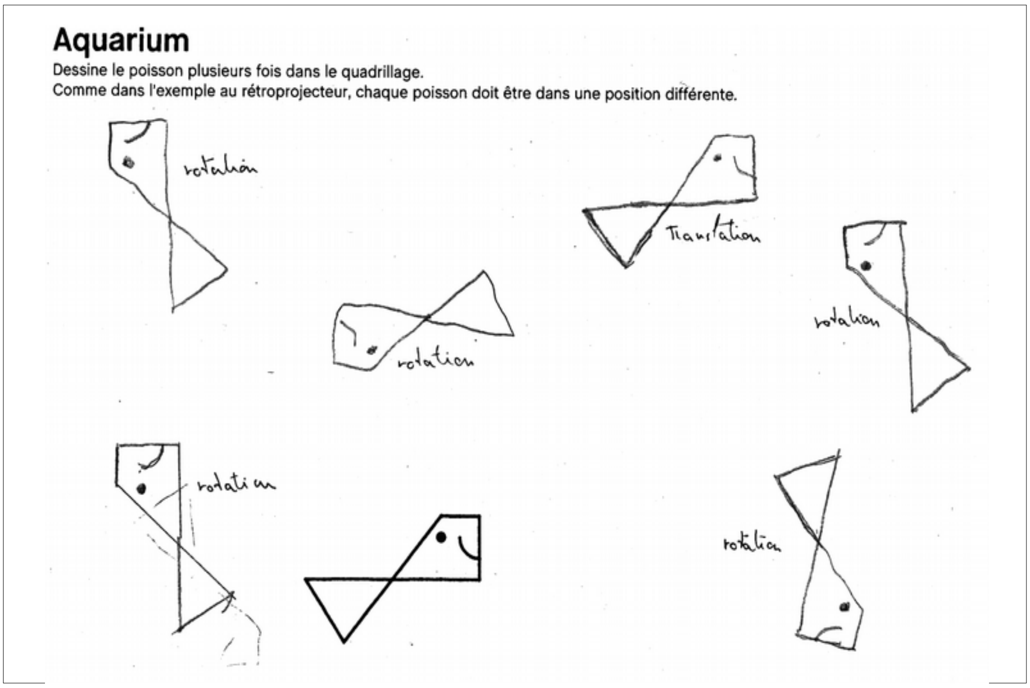
Papier calque, Papier, Ciseaux, Règles, Crayons, Fiche institutionnalisation, Transparent consigne.

Annexe 4. Reconstitution du tableau noir de la phase

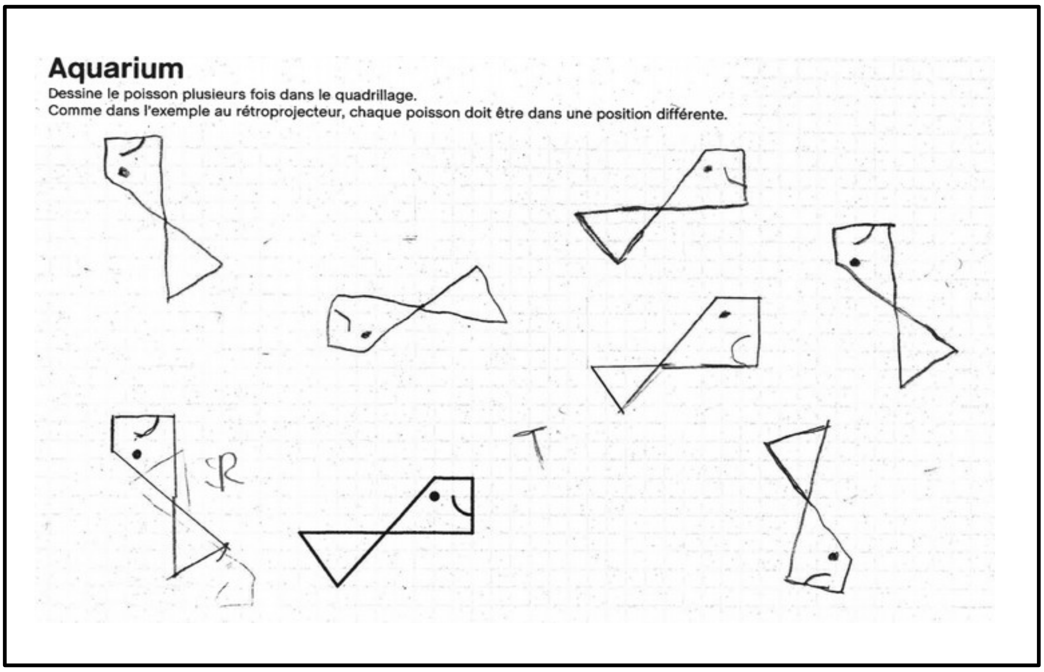


Annexe 5

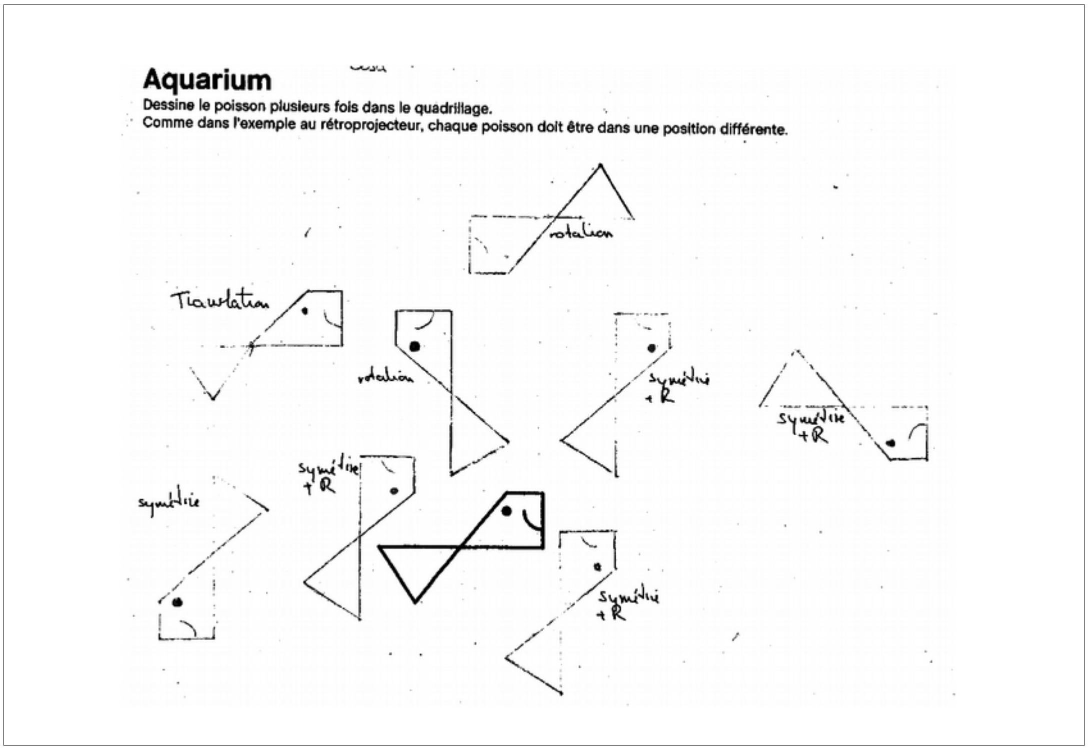
Production de Grégoire lors de la phase 1, annotée par Océane entre les phases 1 et 2



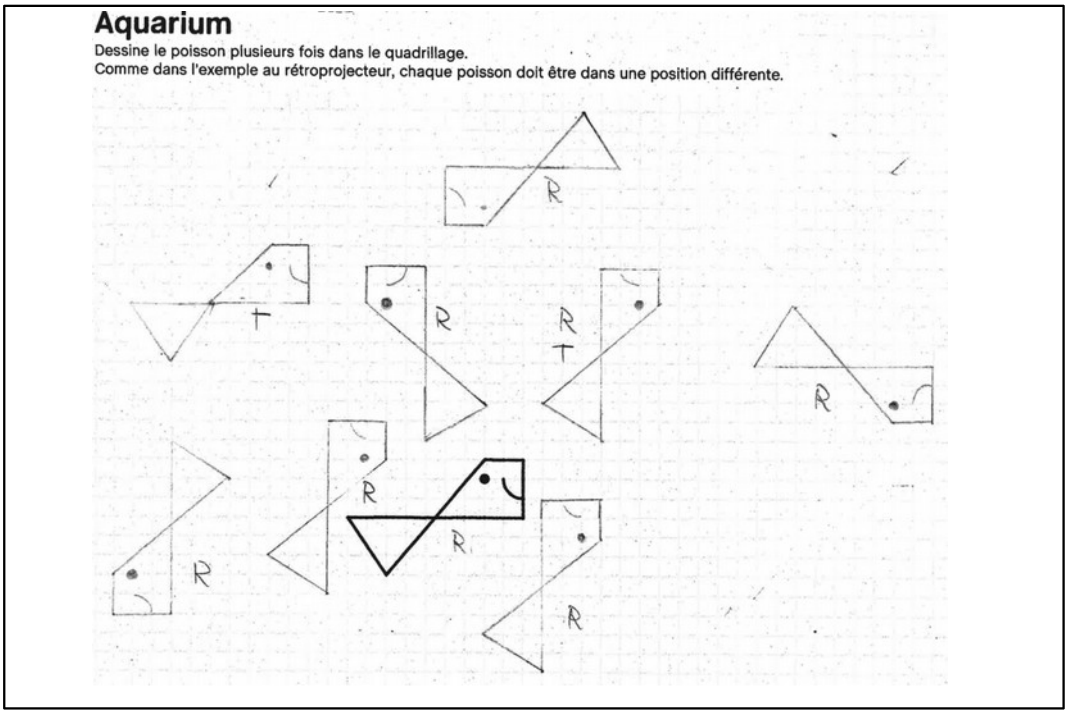
Production de Grégoire après la phase 2



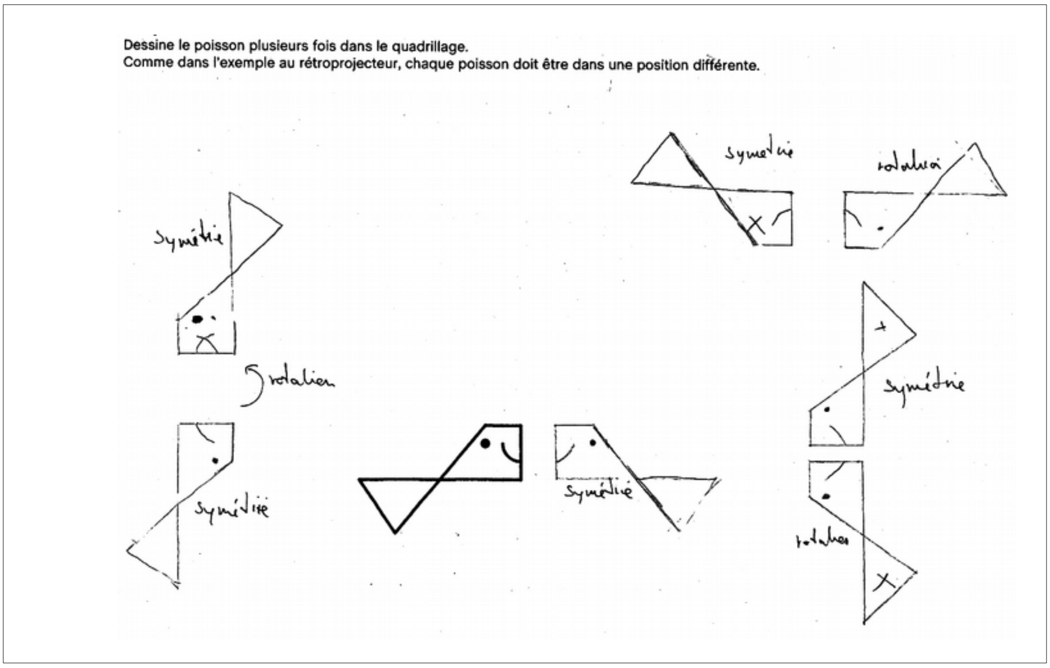
Production d'Élodie lors de la phase 1, annotée par Océane entre les phases 1 et 2



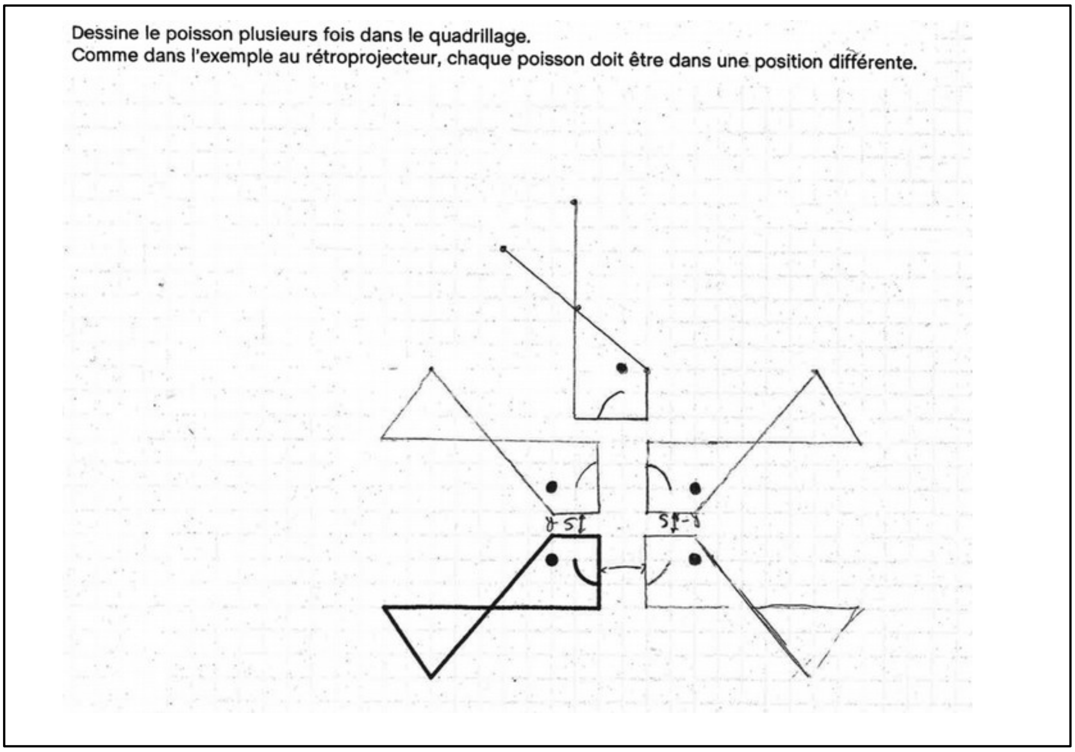
Production d'Élodie après la phase 2



Production de Laure lors de la phase 1, annotée par Océane entre les phases 1 et 2



Production de Laure après la phase 2



Annexe 6. Extraits de transcription de la leçon de recherche (phase 2)

Extrait 1 - Leçon (phase 2)

Océane : [...] (*Laure retourne son poisson calque*). Ok, donc tu as fait ? [...]

Anastasia : elle a fait un axe de symétrie.

Océane : voilà, tu as fait un axe de symétrie. [...] On a vu qu'il y avait plusieurs choses qui se sont passées avec les poissons. Des fois, ils se sont déplacés. (*Océane a dessiné deux F en translation au tableau*). [...] Est-ce qu'il a tourné ?

Élève : non.

Océane : il s'est juste déplacé. Il y a un poisson chez Grégoire qui s'est juste déplacé. [...]

Océane : il est juste monté. (*Océane fait un mouvement avec son bras qui monte d'un F à l'autre au tableau*). [...] on en a déjà parlé. Il a fait une translation. Quand il se déplace simplement. D'accord ? Ça s'appelle une translation. (*Océane écrit au tableau à côté du F le mot translation*). [...] Il a tourné. D'accord, il peut tourner euh plusieurs fois ? Comment est-ce qu'on appelle ce moment où justement il tourne ? Il pivote ? (*Océane a tracé au tableau trois F "en rotation"*).

Élève : c'est rotation.

Océane : une rotation. Exactement. (*Océane écrit au tableau "une rotation"*). Et on a encore vu autre chose. [...] C'est surtout chez Elodie et puis chez Laure. Mélodie ?

Mélodie : un axe de symétrie.

Océane : on a vu un axe de symétrie. (*Océane trace deux F en symétrie axiale et l'axe de symétrie*). Voilà. Ça s'appelle une symétrie hein.

Élève : un miroir.

Océane : voilà exactement. [...]

Extrait 2 - Océane : voilà exactement. (*Océane écrit le mot symétrie en dessous des deux* F). Alors, moi, j'ai une petite question. Parce que j'ai vu chez certains d'entre vous. Est-ce que on ne fait qu'une seule chose à la fois ? C'est-à-dire est-ce qu'on fait juste un déplacement ? Est-ce qu'on fait juste une rotation ? Est-ce qu'on fait juste une symétrie ? Ou bien est-ce qu'on ne pourrait pas faire deux choses en même temps ? Je ne sais pas, j'me pose la question.

Sam : euh, on peut mélanger un axe de symétrie et une rotation.

Océane : t'es sûr ? J'sais pas, je demande.

Sam : euh.

Océane : c'est possible ? Je ne sais pas.

Élodie : on peut faire deux choses de la même forme.

Océane : hum hum. Comme quoi ?

Élodie : on peut euh, on peut retourner, on peut faire une rotation. Euh, plusieurs choses.

Océane : d'accord. Moi, j'pense, j'pense que dans vos fiches, il y a plusieurs choses que vous avez faites. De deux choses, en général, vous en avez fait une, mais des fois, j'en ai vu deux. Maintenant, moi, j'ai aussi une autre chose que je voulais vous dire, c'est ce qu'on a fait aujourd'hui, entre hier et aujourd'hui. On a fait toujours, on a toujours pris le même poisson. Comment est-ce qu'on sait que c'est le même poisson ? Oui ?

Élève : parce qu'il a les mêmes carreaux. Comment dire, par exemple, euh ici, celui qu'on a dessiné, il y a toujours deux carreaux, toujours trois carreaux vers le bas. Si je me mets là.

Océane : oui.

Élève : il y a toujours le même système (?).

Océane : d'accord.

Élodie : il y a toujours les mêmes centimètres.

Océane : oui.

Nathalie : il y a toujours les mêmes longueurs.

Océane : exact. Les mêmes longueurs, centimètres, carrés.

Élève : largeurs.

Océane : largeurs. Tout ça, largeurs, longueurs, carrés, c'est quoi ?

Béatrice : des mathématiques.

Océane : oui, bien sûr.

Anastasia : des mesures.

Océane : des mesures. Voilà. Hein. C'est à dire que vous avez vu, vous avez eu un petit chablon, c'était toujours le même poisson. D'accord ? Donc, on a toujours utilisé le même poisson, puis on l'a mis dans des positions différentes, des fois on a simplement pivoté ou fait une rotation et des fois, on l'a retourné dans l'autre sens. On a fait un axe de symétrie.

Elodie : on a fait des translations.

Océane : et des translations. Déplacer. Translation. D'accord ? Alors maintenant, j'aimerais que vous regardiez ce que vous avez fait sur votre dessin et voir ce que vous avez fait translation, rotation, symétrie. Et puis si vous avez un souci, si vous ne savez pas très bien ce que vous avez fait, vous êtes à deux, vous pouvez vous poser des questions et essayer de répondre pour l'autre. D'accord ? Allez-y.