ENSEIGNER LES NOMBRES RATIONNELS AU CYCLE 3 ? UNE PROPOSITION DIDACTIQUE

Claire MARGOLINAS[1]
Laboratoire ACTé, Université Clermont-Auvergne
INSPÉ Clermont-Auvergne

Résumé. L'ingénierie de Guy Brousseau (Brousseau & Brousseau, 1987) sur les rationnels et les décimaux dans la scolarité obligatoire est le point de départ de ce travail. Brousseau introduit le rationnel-mesure dans la première partie de cette ingénierie en deux temps, en développant une première situation fondamentale mise en scène dans des situations de désignation de l'épaisseur de feuilles de papier. Les pratiques ordinaires d'enseignement des fractions (terme usuel) reposent quant à elles exclusivement sur le fractionnement de l'unité. Dans cet article, nous décrivons une proposition didactique argumentée qui repose sur des bases assez similaires à celle de Brousseau, mais qui pourrait être plus compatible avec les instructions officielles des programmes de mathématiques. Cette proposition s'appuie sur une situation fondamentale mise en scène dans des situations de partage utilisant le guide-âne.

Mots-clés. Nombre rationnel, partage, guide-âne, fraction, théorie des situations.

Introduction

Le contexte

L'ingénierie de Guy Brousseau (Brousseau & Brousseau, 1987) sur les rationnels et les décimaux dans la scolarité obligatoire a été, pour moi comme pour beaucoup d'autres chercheurs, un élément essentiel pour une compréhension de la théorie des situations didactiques et de l'ingénierie didactique. J'ai d'ailleurs analysé dans ma thèse les articulations de cette ingénierie (Margolinas, 1993).

Dans les années 1986-1987, j'ai eu aussi l'occasion d'enseigner à des adultes qui reprenaient des études à un niveau fin d'école primaire et passaient le Brevet des Collèges en trois ans, en m'appuyant sur cette ingénierie. J'ai pu en éprouver en pratique la puissance sur les apprentissages de mes étudiants et aussi en comprendre mieux les subtilités en position d'enseignante. L'étude de cette ingénierie m'a aussi permis de mieux comprendre les rationnels eux-mêmes, et pas seulement leur enseignement.

Formatrice à l'IUFM[2] puis l'ESPE[3], puis l'INSPÉ[4] Clermont-Auvergne, j'interviens depuis 2007 dans la formation des Professeurs des Écoles (PE). Dans ce cadre, nous devons prendre en compte les textes officiels et il n'est pas vraiment possible de trop nous écarter de ces cadres

[1] claire.margolinas@uca.fr

[2] Institut universitaire de formation des maîtres

[3] École supérieure du professorat et de l'éducation.

[4] Institut national supérieur du professorat et de l'éducation.

alors que nos étudiants doivent passer un concours ou bien être titularisés.

En 2019, intervenant dans la formation des référents mathématiques de circonscription dans le cadre de la mission Villani-Torossian (Villani & Torossian, 2018), j'ai réfléchi à une proposition didactique qui pourrait permettre de respecter une partie de l'ingénierie didactique de Brousseau tout en étant plus proche des textes officiels et des documents d'accompagnement qui proposent souvent de s'appuyer sur le guide-âne pour introduire des partages (Barilly & Le Poche, 2012 ; MEN, 2016a, 2016b). Cet article est le résultat de cette réflexion.

Si je parle ici de « proposition didactique » c'est que je considère qu'il faut réserver le terme d'ingénierie didactique à une proposition ayant fait l'objet de mises en œuvre et d'observations en classe, ce qui n'est pas le cas, en ce qui me concerne, à l'heure actuelle.

Quelques mots sur l'ingénierie de Brousseau et Brousseau (1987)

Guy Brousseau a montré dans l'ingénierie la plus importante pour son travail théorique (Brousseau, 1980 ; Brousseau, 1980, 1981, 1990 ; Brousseau & Brousseau, 1987) récemment publiée en anglais (Brousseau, Brousseau & Warfield, 2014) qu'il est possible, dans des conditions expérimentales, d'enseigner les rationnels par des situations. Les 65 leçons de la séquence ont été reproduites, aux niveaux CM1-CM2, pendant 25 ans dans le cadre du COREM[5] (Salin & Greslard, 1998). Sans rentrer dans les détails, le projet théorique de la théorie des situations didactiques (Brousseau, 1998) est de modéliser les différentes significations des savoirs mathématiques par des situations « fondamentales » (Bessot, 2011) qui peuvent, par un jeu de variables, engendrer des situations didactiques qui permettent de construire les connaissances relatives à ces savoirs.

L'ingénierie de Brousseau s'appuie sur l'idée d'introduire d'abord les rationnels comme des mesures de longueurs impossibles à distinguer facilement et à mesurer avec des instruments traditionnels : la mesure de l'épaisseur d'une feuille de papier, ce qui permet d'introduire le rationnel-mesure. La situation fondamentale du rationnel-mesure consiste à trouver un moyen de communiquer à autrui l'épaisseur d'une feuille de papier pour reconnaître un paquet de feuilles d'une qualité donnée parmi d'autres paquets de feuilles de même couleur et de même format, un pied à coulisse rudimentaire étant disponible. Les élèves comprennent facilement qu'il faut communiquer deux nombres : le nombre de centimètres correspondant à un nombre de feuilles, ce qui conduit dans un premier temps à diverses écritures d'un couple (ex : 2 *cm* pour 17 *f*). L'écriture conventionnelle $\frac{2}{17}$ est alors introduite dans ce contexte de mesure de l'épaisseur d'une feuille de papier. La question « est-ce que ce sont des nombres ? » est posée explicitement une fois que l'usage initial est stabilisé. Cette première partie de la séquence permet d'introduire tout ce que l'on peut faire avec des rationnels-mesure : relation fondamentale $\frac{a}{b} \times b = a$, propriété $\frac{a}{b} = \frac{a \times c}{b \times c}$, comparaison, addition et donc multiplication par un entier. Une deuxième partie, qui introduit une autre situation fondamentale (l'agrandissement), permet d'introduire un processus qui conduit à la multiplication de deux rationnels, ce qui n'est pas possible dans un contexte de rationnels-mesure et permet de construire les rationnels comme des nombres à part entière, en se détachant du contexte de mesure (Brousseau, 1981). Dans les années 70-80 ces deux aspects étaient pertinents à l'école élémentaire puisque la multiplication de fractions et de décimaux y

[5] Centre pour l'Observation sur l'Enseignement des Mathématiques, impulsé par Guy Brousseau, qui a fonctionné au sein d'une école primaire (Jules Michelet, Talence) de 1973 à 2000.

était étudiée.

Il n'est pas utile ici de décrire plus avant cette séquence expérimentale. Son intérêt repose à la fois sur l'étude historique et didactique de l'enseignement des rationnels et des décimaux (Brousseau, 1980) et sur l'étude mathématique et didactique des rationnels et des décimaux (Brousseau, 1981).

Une précision est importante ici puisqu'elle motive notre texte : comme Guy Brousseau l'a plusieurs fois affirmé, la séquence des 65 leçons des rationnels et décimaux dans la scolarité obligatoire, même si elle a été utilisée comme base de l'enseignement dans ce domaine pendant 25 ans à l'école Jules Michelet, n'a jamais été destinée à une reproduction telle quelle dans les classes non expérimentales. On n'en trouve d'ailleurs de trace dans aucun des documents d'accompagnement des programmes, même anciens.

Un très grand nombre d'études internationales montrent par ailleurs que les rationnels, souvent désignés par le terme « fractions » (voir ci-dessous) sont très mal compris par les élèves et entraînent de très nombreuses erreurs. Leur compréhension est pourtant essentielle pour la suite de la scolarité en mathématiques, car les nombres rationnels sont omniprésents en algèbre, notamment dans les résolutions d'équations du premier degré (solutions des équations $ax+b=0$, $a\neq 0$). Ces résultats coïncident avec le ressenti quotidien des professeurs, non seulement ceux qui enseignent au niveau auquel les « fractions » sont introduites (fin d'école élémentaire), mais aussi aux niveaux suivants (collège et lycée). Il suffit d'introduire un nombre en écriture fractionnaire dans un exercice d'algèbre pour faire chuter la réussite, même au lycée...

Il semble donc d'une grande actualité de revenir sur l'enseignement des nombre rationnels. Cet article a pour but de poser les bases d'une séquence d'enseignement des rationnels-mesures qui s'appuie sur une situation fondamentale qui semble *a priori* assez compatible avec les attentes institutionnelles du cycle 3, en restant au plan épistémologique proche de l'ingénierie de Brousseau.

Quelques remarques sur les pratiques ordinaires observées

Avant de parler des pratiques ordinaires, une précision de lexique s'impose entre « nombres rationnels » et « fractions ».

Les nombres rationnels sont définis en mathématiques en tant qu'élément du corps $\mathbb{Q}$.

Le terme de « fraction » est plus ambigu. Il désigne parfois : une fonction (prendre les deux-tiers de) ; une écriture de forme $\frac{\textit{numérateur}}{\textit{dénominateur}}$; un nombre. Par exemple, dans *Wikipédia*, article fraction (math)[6] l'ambiguïté est assez nette : *« une fraction est un certain nombre de parts considérés après la division d'un nombre entier en parties égales »*. Le terme de fraction réfère à un fractionnement — le plus souvent d'une unité — en plusieurs parts.

Dans ce texte, le mot « fraction » n'est utilisé que quand il réfère aux programmes et aux pratiques ordinaires, car c'est le terme usuel, le mot « nombre rationnel ou rationnel » sera utilisé au sens mathématique, pour désigner des nombres du corps $\mathbb{Q}$, avec la définition usuelle :

> *Un réel q est un nombre rationnel si et seulement s'il existe deux entiers relatifs a et b avec* $b\neq 0$ *tels que* $q=\frac{a}{b}$ *(Bouvier et al., 1979, p. 628, les lettres ont été modifiées pour homogénéiser avec la suite du texte).*

[6] https://fr.wikipedia.org/wiki/Fraction_(math%C3%A9matiques) (consulté le 20/07/20).

D'après nos observations en tant que formatrice, les fractions sont introduites la plupart du temps dans un contexte qui présente plusieurs caractéristiques :

- on introduit d'abord un fractionnement d'une unité de mesure, cette « unité » est matériellement assez grande pour pouvoir être fractionnée physiquement ;
- cette unité est déjà fractionnée dans un schéma qui est souvent circulaire et parfois rectangulaire (bande) ou d'autres formes ;
- on introduit alors une fraction, par exemple $\frac{1}{4}$ pour parler d'un morceau (une fraction) qui correspond à une partie du schéma, qui est souvent définie comme une part d'une unité que l'on a coupée en 4 parts égales ;
- les élèves sont appelés à mesurer des grandeurs (le plus souvent longueur ou aire) en utilisant des fractions, pour cela ils doivent compter le nombre de parts qui divisent l'unité puis le nombre de parts coloriées (par exemple) ;
- dans beaucoup de documents à destination des élèves, l'unité qui est partagée est implicite (voir annexes).

Les élèves ont assez peu de choses à faire : ils doivent compter en combien de parts est divisée l'unité, la seule difficulté est donc de comprendre ce qui, dans le schéma, représente une unité (ce qui est plus ou moins explicite dans les pratiques ordinaires). Ils doivent ensuite compter le nombre de parts. Ces nombres étant assez petits, il n'y a aucune difficulté particulière pour réaliser cette tâche de dénombrement. Bien sûr il peut arriver que les élèves ne mettent pas ces deux nombres au bon endroit dans l'écriture fractionnaire (inversion du numérateur et du dénominateur), mais après tout ce n'est qu'une question de convention d'écriture.

Les difficultés sérieuses commencent notamment :

- quand on cherche à comparer des fractions qui n'ont pas le même dénominateur ;
- quand il faut représenter des fractions supérieures à l'unité.

En 2018-2019, des étudiants de 1re année du Master MEEF[7] de l'ESPE Clermont-Auvergne ont recueilli de nombreuses erreurs d'élèves au sujet des fractions durant leurs stages en classe. Arrêtons-nous un instant sur deux de ces documents.

Dans le document en annexe 1, Zoé (CM1) montre qu'elle sait répondre à presque toutes les questions de l'évaluation. Dans les exercices 1, 2 et 3, il fallait pour réussir, compter le nombre total de parts, inscrire ce nombre au dénominateur puis inscrire le nombre de parts coloriées au numérateur ou inversement à partir de l'écriture donnée, colorier le nombre de parts de disques ou de bandes déjà partagés. Dans l'exercice 5, il fallait savoir que $\frac{n}{n}=1$ et que si $a<b$, alors $\frac{a}{b}<1$. Zoé est donc une élève qui apprend ses leçons et qui montre qu'elle a des connaissances. Cependant tout se gâte dans l'exercice 4 (figure 1).

Comme dans l'exercice 2, les subdivisions sont déjà faites : la plaque de chocolat est subdivisée en 8 rectangles identiques mais, contrairement à l'exercice 2 (réussi), ces subdivisions ne correspondent pas toujours au nombre inscrit au dénominateur. Zoé colorie le nombre de parts correspondant au numérateur sans se soucier du dénominateur.

[7] Métiers de l'Enseignement de l'Éducation et de la Formation.

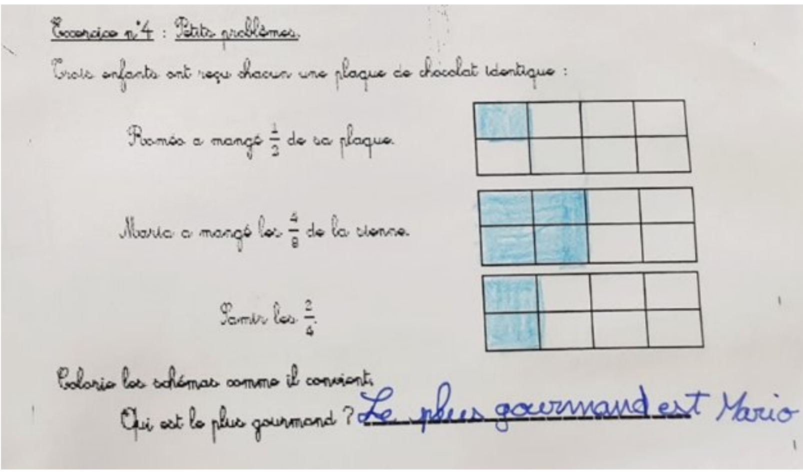


Figure 1 *: Erreur recueillie au CM1.*

Evan, au CM2 (annexe 2), sait lui aussi répondre à des questions qui n'impliquent pas une connaissance de ce que représente une fraction : il sait en particulier traduire en mots les écritures mathématiques des fractions et opérer cette traduction dans l'autre sens (dictée). Cependant, il produit exactement la même erreur que Zoé.

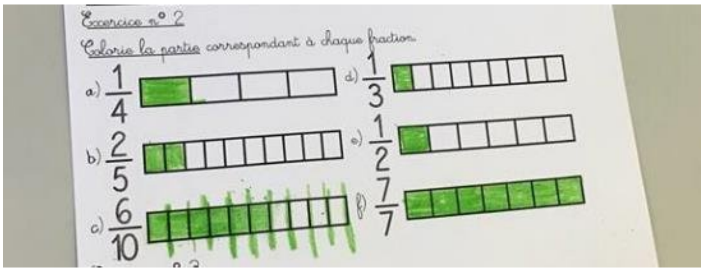


Figure 2 *: Erreur recueillie au CM2.*

Pour réussir plus ou moins les évaluations, les élèves n'ont besoin que de quelques connaissances qui parfois, même quand elles sont fausses, se révèlent souvent efficaces (si l'on compte la proportion de réponses fausses sur l'ensemble des réponses, on obtient seulement 7,5 % pour Zoé et 12 % pour Evan, autrement dit, ils ont bien réussi l'évaluation...). Pour autant, la compréhension des fractions n'est pas assurée.

Objectifs de la proposition didactique

Les objectifs de cette proposition didactique pour le cycle 3, que nous allons détailler dans tout le texte, sont :

- de définir les rationnels par le partage comme un prolongement de la division, en s'appuyant sur un dispositif (le guide-âne) présent dans des textes officiels, des documents d'accompagnement et des documents contemporains destinés aux enseignants (voir infra) ;
- de construire une situation fondamentale pour les rationnels-mesure en s'appuyant sur le milieu du partage ;
- de définir de nouveaux nombres dans un contexte de mesure ;
- d'établir la relation fondamentale et la propriété des rationnels, qui n'ont pas d'équivalent pour les entiers ;
- d'étudier les comparaisons et l'addition des rationnels.

La multiplication des rationnels ne peut être abordée dans un tel contexte, ce qui sera fait ultérieurement (conformément aux programmes de 2015). Dans l'ingénierie initiale de Brousseau, la multiplication des rationnels était travaillée en s'appuyant sur une autre situation fondamentale, nous allons dans le même sens.

La division

La division est étudiée dans des situations de partage, implicitement aux cycles 1 et 2 et explicitement au cycle 3. La division, en tant qu'opération qui à deux nombres fait correspondre un troisième nombre n'est pas toujours possible dans $\mathbb{N}$. En effet, on peut diviser 12 par 3, ce qui a pour résultat 4 car $12=3\times4$, ce que l'on peut écrire $12\div3=4$, mais par contre on ne peut pas obtenir un nombre entier en divisant 10 par 3.

On a donc des égalités suivantes : $12\div3=4$ car $12=3\times4$, et aussi $12\div4=3$. Mais que donne $10\div3$?

La « division » euclidienne est une réponse possible à ce problème, elle permet un partage avec reste. Cependant la division euclidienne ce n'est pas une opération au sens strict puisqu'à deux nombres, la division euclidienne fait toujours correspondre deux nombres et non pas un seul.

C'est dans l'ensemble des rationnels $\mathbb{Q}$ que l'on trouve une réponse à ce problème : pour tout entiers a et b (avec b non nul) il existe un nombre rationnel q tel que $q\times b=a$, que l'on note $q=\frac{a}{b}$. Dans $\mathbb{Q}$, $10\div3=\frac{10}{3}$.

1. Rationnels et relation fondamentale

1.1. Situation fondamentale

Il s'agit de considérer qu'un rationnel est le nombre q qui vérifie la relation $b\times q=a$ (a et b sont des entiers, $b\neq0$). Cette relation fondamentale est mise en scène ici dans un dispositif de partage de longueur. Dans ce cadre, a et q sont des mesures de longueurs dans une unité u donnée, b est un nombre entier (non nul) qui définit le partage de a unités en b parties égales. Nous construisons donc des rationnels-mesure, comme le fait Brousseau dans la première partie de son ingénierie[8].

Par rapport à la situation fondamentale mise en scène dans la situation des feuilles de papier, il y a une différence importante. Dans la situation des feuilles de papier, il n'y a pas de partage et d'ailleurs la mesure de l'épaisseur d'une feuille est implicite, au départ au moins. Il y a une relation (une fonction) entre le nombre de feuilles et l'épaisseur du paquet, relation qui caractérise la qualité du papier (par son épaisseur). Dans ce contexte, dans la relation $b\times q=a$, b représente le nombre de feuilles de papier (c'est donc bien un nombre sans dimension), q est la mesure de l'épaisseur d'une feuille en centimètres et a est la mesure de l'épaisseur du tas de feuilles en centimètres. Tant que q reste implicite (dans les premières séances), (a, b) représente un couple de nombres dont le premier est une mesure en centimètres et le second un nombre de feuilles, couple qui permet de désigner un tas de feuilles pour le distinguer des autres.

[8] Nous présentons nos excuses aux lecteurs qui ne connaîtraient pas l'ingénierie de Brousseau (Brousseau & Brousseau, 1987), pour lesquels la comparaison entre ce qui est présenté ici et la situation fondamentale des feuilles de l'épaisseur d'une feuille de papier pourrait être obscure et nous les invitons à à passer sans hésiter au paragraphe suivant.

Pour désigner la mesure de l'épaisseur d'une feuille de papier, les élèves sont souvent amenés à considérer un assez grand nombre de feuilles (par exemple $1\,cm$ pour 31 feuilles du tas A). L'avantage est de considérer d'emblée de nombreux couples comme légitimes et en même temps d'en rejeter certains : si d'autres élèves écrivent que les feuilles du tas A peuvent se désigner par $2\,cm$ pour 40 feuilles, par exemple, les élèves peuvent dire qu'il y a une erreur et le vérifier. Le contexte : mesure de l'épaisseur d'une feuille de papier en centimètres, conduit uniquement à des mesures plus petites que 1. Dans la proposition développée dans ce texte, les nombres naturels en jeu dans les mesures de longueur ne sont pas très grands (autour de 10 et 12 au début) et les partages non plus (pas plus de 8), par contre les mesures rencontrées sont d'emblées plus grandes que 1.

Cependant, il s'agit de propositions assez proches dans la mesure où elles s'appuient au départ uniquement sur la relation fondamentale (dans le milieu des feuilles de papier, la mesure de l'épaisseur q d'une feuille multipliée par le nombre b de feuilles d'un tas est égale à la mesure de l'épaisseur du tas) et sur la propriété des rationnels (dans le milieu des feuilles de papier, si la mesure de l'épaisseur d'un tas de 17 feuilles est $2\,cm$, alors la mesure de l'épaisseur d'un tas de 2×17 feuilles est $2 \times 2\,cm$). Dans les deux propositions, la valeur 1 de l'unité ne joue aucun rôle particulier et l'on n'introduit pas au départ le fractionnement de l'unité. Dans les deux cas, on n'utilise pas le vocabulaire des fractions (demi, tiers, etc.), le fractionnement de l'unité n'étant introduit que dans un second temps (Ratsimba-Rajohn, 1982).

Dans la théorie des situations,

> *ce qui est fondamental ce n'est donc pas une situation, mais un ensemble de situations et leur articulation, situations générées dans le paradigme que représente une situation fondamentale (Bessot, 2011, p. 40).*
>
> *Un paradigme est une représentation du monde, une manière de voir les choses, un modèle cohérent de vision du monde qui repose sur une base définie (ibid., p. 39).*

Une situation fondamentale n'est donc pas une « introduction » qui, une fois passée, sera vite mise de côté au profit d'une formalisation et de calculs, c'est au contraire une situation qui engendre les situations d'une séquence qui va rendre possible, la construction des connaissances qui participent à un savoir visé pendant une durée importante.

1.2. Un dispositif de partage (le guide-âne)

Le guide-âne (voir infra) sert comme dispositif de partage, ce qui est une proposition courante au cycle 3 (Anselmo et *al.*, 1999 ; Anselmo & Zucchetta, 2018 ; Barilly & Le Poche, 2012 ; MEN, 2016a, 2016b). Nous avons choisi d'utiliser à la fois une règle graduée en unités entières informable (sur laquelle on peut écrire au feutre effaçable) et des bandes de papier de différentes longueurs (qui peuvent être découpées avant l'activité). Le partage matériellement réalisé avec le guide-âne doit pouvoir contribuer à la validation, sachant qu'une mesure est toujours liée à une précision plus ou moins grande. Il est normal, dans le cadre d'un travail sur les nombres rationnels, de trouver un lien avec les grandeurs et les mesures, qui sont toujours associées à une précision (voir à ce sujet les cours de Michèle Arthaud et de Floriane Wozniak donnés lors de la vingtième école d'été de didactique des mathématiques à paraître en 2021).

Les questions posées, dans différentes situations, reviennent à produire, comparer, additionner les mesures de longueurs résultant de partages ou bien à trouver le partage à faire pour produire une mesure de longueur donnée.

1.3. Installation du milieu « 12-en-3 »

Le dispositif matériel de partage est introduit d'abord dans le cas d'une bande de 12 unités. Une règle informable *ad hoc* a été fabriquée, il faut en effet disposer d'une règle sur laquelle seule les unités entières sont indiquées, ce qui n'est jamais le cas dans les règles du commerce. L'unité à laquelle nous nous référons dans ce texte correspond donc à l'unité de cette règle informable, qui sera toujours la même au cours des différentes situations.

La technique du guide-âne doit sembler fiable aux élèves (qui, au cycle 3, ne peuvent pas justifier mathématiquement des propriétés de cette technique), cette technique doit être entraînée car elle joue un rôle indispensable dans la validation par le milieu de toutes les situations.

Il s'agit d'un point délicat : comme avec toute technique matérielle de mesurage, la mesure obtenue relève d'une approximation. Cependant si la technique n'est pas suffisamment entraînée et raisonnablement fiable, cela risque de conduire les élèves à rejeter la validation par le milieu, ce qui conduirait à une impasse des situations suivantes. C'est pourquoi il peut être judicieux à la fois d'entraîner et de vérifier la fiabilité de la technique avec des partages conduisant à des résultats entiers facilement vérifiables sur la règle graduée informable.

Des bandes de papier qui sont toutes de longueur $12u$ sont disponibles et peuvent être pliées. Le guide-âne s'utilise de la manière suivante :

- on pose la bande dont la longueur mesure $12u$ sur le guide-âne en faisant correspondre une extrémité de la bande avec la ligne 0 du guide-âne ;
- on fait correspondre l'autre extrémité de la bande avec la ligne 3 du guide-âne ;
- on marque au crayon les intersection entre les lignes du guide-âne et la bande ;
- on plie la bande suivant ces marques et on obtient une bande pliée en 3 parties égales.

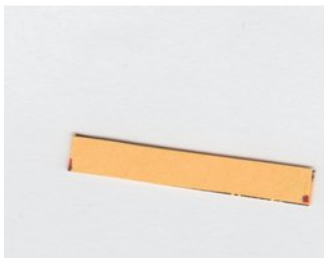



Figure 3 *: La technique du guide-âne pour « 12-en-3 ».*

Lors des premières utilisation, il est judicieux d'utiliser aussi la règle graduée informable avec la technique du guide-âne pour vérifier que la technique fonctionne :

- on pose le repère 0 (l'origine de la mesure) de la règle sur la ligne 0 du guide-âne et le repère 12 de la règle sur la ligne 3 ;
- on marque les intersections entre les lignes du guide-âne ;
- le dispositif du guide-âne de « 12-en-3 » conduit à marquer les repères 4 et 8 sur la règle, qui sont distants de $4u$;
- la bande pliée lors d'expérience précédente a bien une longueur qui mesure $4u$ sur la règle.

Figure 4 *: La technique du guide-âne pour « 12-en-3 » sur la règle graduée informable.*

Les opérations matérielles correspondent à deux égalités connues :

- en partageant $12\,u$ en 3, on obtient 3 parties de $4\,u$: $12\,u \div 3 = 4\,u$;
- en mettant bout à bout les 3 parties de $4\,u$, on obtient la bande totale de $12\,u$: $3 \times 4\,u = 12\,u$.

À ce stade, il ne s'agit que d'une expérience amusante, qui permet de partager en 3 une bande de 12 unités. Il est important de montrer que le résultat ne change pas avec des guide-ânes ayant des réseaux de parallèles plus ou moins resserrés. C'est ici l'appropriation et l'usage de la technique, essentielle à la séquence, qui est travaillée.

Le dispositif matériel introduit n'a bien entendu aucune raison de fonctionner seulement pour une bande de $12\,u$. Il n'induit pas non plus que l'on ne puisse faire qu'un partage en 3, puisque le dispositif du guide-âne permet de nombreux partages, seulement limités par le nombre de parallèles effectivement représentées. Ce sont ces possibilités que nous allons exploiter maintenant.

1.4. Une situation de communication

Comme dans la séquence des rationnels-mesure de Brousseau, nous introduisons alors une situation de communication. Il s'agit pour les élèves de se rendre compte qu'il faut *deux* nombres entiers pour désigner la longueur d'une bande pliée :

> Des bandes non marquées, déjà découpées, de $10\,u$, $11\,u$, $12\,u$ et $13\,u$ sont disponibles en nombre suffisant pour avoir une bande de chaque type pour chaque groupe d'élèves. Chaque groupe d'élèves dispose d'un guide-âne et d'une règle graduée informable. On organise une communication écrite entre des groupe d'émetteurs et des groupe de récepteurs. Pour éviter les communications orales intempestives, les élèves ne savent pas qui va recevoir leur message, qui est transmis par le PE (Professeur des Écoles).
>
> PE : *Vous allez choisir une bande et la plier comme vous le souhaitez en utilisant la technique du guide-âne. Vous écrivez le nom de votre groupe sur la bande et vous la gardez.*
>
> *Vous devez ensuite écrire un message pour que le groupe qui va lire votre message puisse fabriquer une bande pliée qui aura la même longueur que la vôtre.*
>
> *On vérifiera ensuite si la longueur des bandes pliées est bien la même dans les deux groupes.*

Pour réussir, il faut donner deux informations : longueur de la bande choisie et nombre à atteindre sur le guide-âne. À la suite de cette situation, le PE propose une désignation orale sur le modèle suivant : « dix-unités-en-trois » désigne la mesure de la longueur de la bande de dix unités pliée en trois.

1.5. Introduction d'un questionnement « 10-en-3 »

En utilisant la technique du guide âne pour une longueur de $10\,u$ partagée en 3 sur la règle graduée informable, plusieurs constatations peuvent être faites :

- Dans la situation précédente, personne n'a eu de difficulté à partager la bande de $10\,u$ en 3.
- En utilisant la règle informable, on constate que le dispositif du guide-âne de « 10-en-3 » conduit à marquer deux repères qui ne tombent pas sur des unités entières.
- En reportant ces marques sur la bande de $10\,u$ et en pliant, on obtient bien un partage de la bande en 3 parties égales.

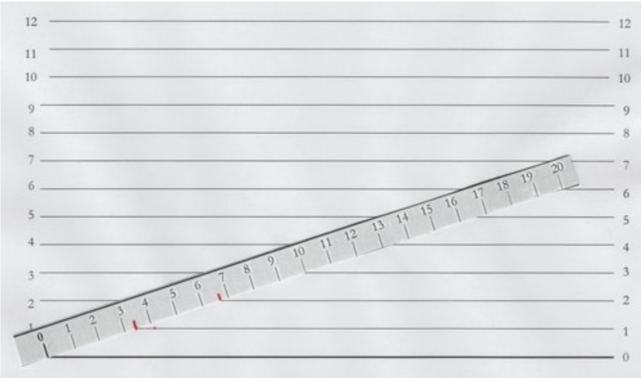


Figure 5 *: La règle marquée par le partage de 10-en-3 avec le guide-âne.*

Les opérations matérielles réalisée pour le partage de $10\,u$ en 3 correspondent à des égalités inconnues :

- En partageant $10\,u$ en 3, on obtient 3 parties, mais on ne sait pas encore désigner par un nombre la mesure de la longueur de ces parties.
- Quand nous avions partagé $12\,u$ en 3, le résultat, $4\,u$, correspondait bien à la division de $12\,u$ par 3.
- La division de $10\,u$ par 3 ne tombe pas juste mais, en mettant bout à bout les 3 parties obtenues par le guide-âne, on obtient la bande totale.
- Si l'on savait écrire la mesure de la longueur en unités u de ces parties alors le produit de cette mesure par 3 serait $10\,u$.

Cette introduction est basée sur l'idée intuitive (admise comme telle) qu'à toute marque dans le repère de la règle graduée ou à toute mesure de longueur dans une unité donnée (ce qui revient au même) correspond un nombre. Remarque : mathématiquement, la correspondance entre la droite réelle et les nombres réels conduit à la construction de $\mathbb{R}$; dans le cas de l'obtention de points sur la droite réelle par le dispositif du guide-âne appliqué à des segments de mesures entières, on n'obtient que des rationnels.

Notre expérience montre qu'il y a des nombres (dans ce sens) qui ne sont pas entiers. Le choix de « 10-en-3 » est stratégique : la longueur de la bande pliée n'est pas entière (elle n'est même pas décimale), cela montre bien qu'il y a quelque chose de tout à fait nouveau par rapport à « 12-en-3 ».

Contrairement à ce que l'on rencontre le plus souvent, notre situation n'est pas basée sur le partage de « l'unité ». Toutes les bandes mesurent des longueurs différentes et de ce fait il y a bien deux nombres qui sont nécessaires pour définir la longueur de la bande pliée. De plus, nous travaillons avec une unité qui est proche des unités usuelles (sur les photos, une unité mesure $2\,cm$ mais l'on pourrait prendre tout aussi bien le centimètre comme unité, même si l'utilisation des règles usuelles est exclue en raison de la présence de millimètres, qui correspondent à des décimaux), alors que pour travailler sur le « partage de l'unité », l'on est contraint d'introduire comme « unité » une bande suffisamment grande qui, de ce fait, ne sert pas d'unité pour mesurer mais est une construction *ad hoc* à partager.

Par ailleurs, la relation avec la multiplication est le point nodal de la séquence : quand on prend trois fois la longueur de la bande pliée en trois, on retrouve la bande totale (ce qui, matériellement, correspond à déplier la bande).

1.6. Une écriture conventionnelle correspondant à « 10-en-3 »

Nous concluons cette phase en introduisant une écriture conventionnelle. Pour désigner la mesure en unités u de la longueur de la bande de $10\,u$ partagée en 3, nous ne pouvons pas écrire $(10 \div 3)\,u$ pour les raisons déjà évoquées, pourtant il existe un nombre d'unités u qui résulte du partage de $10\,u$ en 3.

Nous écrivons ce nombre « $\frac{10}{3}$ ». Dans le contexte du guide-âne ce nombre est lu « dix-en-trois » et de même, $\frac{10}{3}u$ se lit « dix-en-trois u », puisqu'il s'agit bien du nombre (dix-en-trois) d'unités u.

Introduire ici le mot « tiers » pourrait conduire à une impasse car nous ne savons pas ce qu'est un « tiers » dans cette situation, puisque nous n'avons pas partagé l'unité. De plus les élèves connaissent ces mots et y attachent parfois des connaissances erronées qu'il n'est pas nécessaire de traiter maintenant, le mot « tiers » sera utilisé par l'enseignant seulement quand nous partagerons une unité, en toute fin de séquence.

Si des élèves proposent la lecture « dix-tiers », l'enseignant pourra indiquer que la relation entre « dix-en-trois » et « dix tiers » sera faite à la fin de la séquence. Si besoin, pour les élèves qui savent que le tiers de l'unité correspondent à une unité partagée en trois et que dix tiers correspond à prendre dix tiers d'unités, l'enseignant peut faire remarquer que l'unité n'a pas été partagée en trois dans notre expérience du guide-âne.

Sur le guide-âne, nous avons disposé une bande de mesure $10\,u$ de la ligne 0 jusqu'à la ligne 3, ce qui nous a permis de partager 10 en 3 et d'obtenir une mesure en unités u que nous appelons donc « 10-en-3 ». Les opérations matérielles correspondent donc à la relation fondamentale :

- En partageant $10\,u$ en 3, on obtient 3 parties de mesure $\frac{10}{3}u$.
- En mettant bout à bout les 3 parties de mesure $\frac{10}{3}u$ on obtient la bande totale de $10\,u$.
- $\frac{10}{3}u \times 3 = 10\,u$, c'est la *relation fondamentale des rationnels-mesures*.

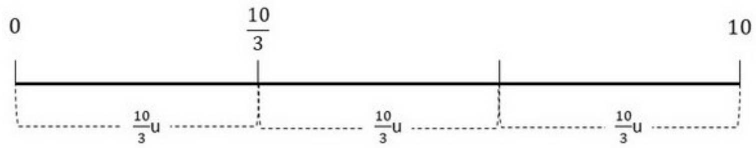


Figure 6 *: Schéma du partage de 10 en 3. Relation fondamentale.*

Notre proposition est donc d'emblée appuyée sur la relation fondamentale, que nous ne voyons pas apparaître dans les pratiques usuelles, car celle-ci est masquée par le décompte des subdivisions. Nous ne pensons pas à ce stade de la séquence que beaucoup d'élèves vont s'approprier l'égalité de la relation fondamentale. Ils vont petit à petit s'acculturer à la dénomination « 10-en-3 ; 11-en-3 ; 10-en-4, etc. » pour parler du nombre d'unités de la mesure de longueur d'une bande de $10\,u$ pliée en 3, etc. Ils vont progressivement utiliser l'écriture $\frac{10}{3}$ pour écrire « dix-en-trois ». Les allers-et-retours entre le dispositif matériel, les schémas et les écritures numériques vont rester constants pendant toute la séquence : il ne faut perdre personne en route...

1.7. Renforcement de la technique du guide-âne et autres questionnements : « 10-en-4 »

Le partage de $10\,u$ en 4 est demandé à tous les élèves[9]. Il s'agit à la fois de vérifier le maniement du dispositif, de susciter de nouvelles questions et de continuer à s'acculturer aux nouvelles écritures.

L'observation collective de la règle graduée informable disposée sur le guide-âne semble montrer qu'une des marques correspond à un repère entier. Il faut donc se demander pourquoi c'est le cas. Plusieurs réponses sont possibles, notamment :

- C'est au milieu sur la bande pliée.
- Je sais plier une bande en 4 sans guide-âne : il faut plier en 2 (on obtient le pli du milieu) puis en 2 (on obtient les deux autres), le résultat est bien le même qu'avec le guide-âne.

On peut produire des schémas correspondant à cette expérience.

On peut aussi écrire de nouvelles relations :

- En partageant $10\,u$ en 4, on obtient 4 parties dont la longueur mesure $\frac{10}{4}u$.
- En mettant bout à bout les 4 parties de $\frac{10}{4}u$, on obtient la bande totale.
- $\frac{10}{4}u \times 4 = 10\,u$, c'est la *relation fondamentale*.
- En partageant $10\,u$ en 2, on obtient 2 parties de longueur $\frac{10}{2}u$.
- $\frac{10}{2}u = 10\,u \div 2 = 5\,u$.

[9] Nous ne nous intéressons pas, dans ce texte, aux aspects organisationnels : travail en groupe, par deux, individuel, etc. Il ne s'agit pas ici de décrire une mise en œuvre en classe mais les propriétés d'une séquence. D'autres travaux expérimentaux suivront qui, eux, seront basés sur l'analyse de résultats empiriques.

- En mettant bout à bout les 2 parties de longueur $\frac{10}{2}u$, on obtient la bande totale.
- $\frac{10}{2}u \times 2 = 10u$, c'est la *relation fondamentale*.

Au cours du travail, on a aussi rencontré d'autres résultats :

- $2u < \frac{10}{4}u < 3u$;
- $\frac{10}{4}u \times 2 = \frac{10}{2}u$.

Ces résultats ne sont pas institutionnalisés, mais ils peuvent être enregistrés dans un « journal » (Sensevy, 1998, 1997) ou bien plus classiquement dans un cahier de résultats. La relation fondamentale des rationnels-mesure est continûment institutionnalisée et commence à être mémorisée.

Il est possible de traiter d'autres exemples (« 11-en-3 », « 12-en-5 », par exemple).

Dans cette partie de la séquence, il est surtout important :

- d'ancrer les nombres rationnels dans une situation qui permet une rétroaction d'un milieu ;
- d'appuyer cette connaissance implicite par la production de schémas (qui n'ont pas à être institutionnalisés) ;
- de permettre la compréhension en situation et la mémorisation de la relation fondamentale.

Remarque : la situation du guide-âne n'est pas destinée à être abandonnée au profit d'écritures de nombres ou de schémas. En effet, son rôle est essentiel dans la compréhension et dans la validation durant toute la séquence.

1.8. Rationnel-mesure et nombre rationnel

Dans cette séquence, comme dans celle de Brousseau, mais aussi (souvent implicitement) comme le font tous les manuels à propos des « fractions », les nombres rationnels sont introduits dans le contexte des mesures, il y a bien un nombre d'unités (et donc un nombre) mais ce nombre n'est pas conçu indépendamment de sa mesure, ce que Brousseau appelle le rationnel-mesure.

Les nombres rationnels ont pour raison d'être de représenter des mesures de grandeurs dont les rapports sont entiers par ailleurs, les nombres (entiers, rationnels, etc.) sont toujours impliqués dans la problématique des grandeurs (Chambris, 2012).

Le problème didactique se pose alors de considérer des opérations sur des nombres et non pas des opérations sur des mesures. Les préconisations des programmes ont beaucoup varié à ce sujet (*ibid.*). À l'heure actuelle, et tout particulièrement aux cycles 3 et 4, il est recommandé d'être très attentifs aux unités de mesure et à l'homogénéité des calculs. C'est dans cette perspective que, dans ce texte, nous avons systématiquement indiqué les unités dans les calculs de relations entre mesures.

Ce choix est d'autant plus pertinent dans les calculs dans lesquels il y a à la fois une mesure et un nombre sans dimension comme dans la relation fondamentale des rationnels-mesure

$\frac{10}{4}u \times 4 = 10u$.

Cependant, les nombres rationnels vont modéliser cette réalité, qui en fait ne dépend pas de l'unité u (qui pourrait être d'ailleurs aussi bien une unité d'aire qu'une unité de longueur, par exemple). Le professeur sait bien que l'égalité $\frac{10}{4} \times 4 = 10$ est vraie également.

Dans le contexte des rationnels-mesure, cela ne peut pas être montré formellement car on n'a introduit la multiplication que par addition répétée, ce qui fait que l'on ne sait multiplier une mesure que par un entier, cette « multiplication » représente l'ajout successif de longueurs de mesures égales mais on ne sait pas ce que représente la multiplication par $\frac{10}{4}$. Dans l'ingénierie de Brousseau, une autre situation fondamentale était introduite ensuite (l'agrandissement) qui permettait d'introduire les rationnels comme des coefficients d'agrandissement (des coefficients de fonctions linéaires) et donc comme des nombres[10]. Dans les programmes actuels, cette stratégie n'est pas possible puisque la multiplication des rationnels n'est pas étudiée avant le cycle 4.

Plusieurs choix sont donc possibles :

- Il est possible de faire le choix d'indiquer systématiquement les unités, car cela permet d'être le plus proche de la réalité des mesures. Cependant, c'est parfois délicat et de plus les programmes visent certaines opérations sur des fractions simples.
- Il est possible, dès le départ, de faire le choix de ne jamais indiquer l'unité, sachant que tant que l'on n'a qu'une seule unité dans le calcul cela n'introduit pas d'erreur de calcul.
- Il est possible enfin d'écrire au départ les égalités sur les mesures et donc avec les unités et de passer ensuite à des égalités sur des nombres toutes les fois où cela ne semble pas poser problème.

Remarquons que cette difficulté n'apparaît ici que parce que ce texte cherche à modéliser avec rigueur la réalité des situations qui sont présentées aux élèves. Si elle n'apparaît pas dans les manuels les plus courants, c'est parce que l'unité est en fait gommée d'emblée, ce qui produit les erreurs montrées dans l'introduction, cependant les mesures des aires de parties de disques-unité coloriées dans les manuels ne sont jamais des nombres sans dimension, même si les unités sont gommées.

Dans ce texte, nous avons fait le choix d'écrire les égalités sur les mesures et d'indiquer qu'on admettra l'égalité sur les nombres, de manière à alerter l'attention du lecteur sur le fait qu'il s'agit d'un glissement qui, dans le contexte des mesures, ne peut pas être justifié. Les professeurs peuvent choisir ou non d'utiliser cette façon de s'exprimer.

Par exemple :

- $\frac{10}{4}u \times 4 = 10u$, c'est la *relation fondamentale des rationnels-mesure*.
- On admet que $\frac{10}{4} \times 4 = 10$, qui est la *relation fondamentale des rationnels*.

[10] Remarque mathématique : il s'agit d'une forme de passage au dual des applications linéaires, ce qui permet de définir la multiplication des rationnels via la composition des applications linéaires.

2. Propriété des rationnels, un nombre et des écritures

2.1. Situation d'action : anticipation

Jusqu'à présent, nous avons fait en sorte que les élèves rencontrent des connaissances implicites en situation et qu'ils soient acculturés à une écriture culturelle, celle des nombres rationnels ainsi qu'à une relation fondamentale qui fonde les rationnels-mesure. Nous adoptons pour ce faire une ostension assumée (Matheron & Salin, 2002, p. 40), même si celle-ci est produite dans un contexte favorable à la compréhension de la nécessité de nouveaux nombres et de nouvelles désignations basée sur la donnée de deux paramètres (la mesure en unités *u* de la longueur de la bande et le nombre de parties de longueurs égales à la bande pliée résultant du partage au guide-âne).

Nous allons maintenant pouvoir introduire une situation d'action dans laquelle un enjeu est donné dans le milieu qui est maintenant installé.

PE : *Voici une bande de 10 u pliée en 3. Combien mesure la longueur de la bande pliée ?*

À ce moment de la séquence, presque tous les élèves doivent savoir dire que la bande pliée mesure 10-en-3 unités (ou $10u$-en-3) que le PE va écrire $\frac{10}{3}u$.

PE : *Je vous distribue des bandes bleues de longueur 20 u. Vous devez trouver comment utiliser le guide-âne pour plier cette bande bleue pour obtenir exactement la même longueur que celle de la bande de 10 u pliée en 3*

Le PE montre la bande de $10u$ pliée en 3.

PE : *Il faut bien utiliser uniquement la technique du guide-âne, qui est maintenant bien connue. Quand vous pensez avoir trouvé, je viendrai avec la bande de* 10*u pliée en 3 pour vérifier.*

La solution consiste à partager $20u$ en 6. Certains élèves vont peut-être essayer de partager $20u$ en 3, mais le résultat est bien trop grand ! Des ajustements perceptifs sont possibles (par exemple partager en 8 par pliages en 2 successifs) mais ils ne résisteront pas à la validation par superposition et ne pourront pas être expliqués.

On a donc trouvé deux nombres égaux :

- Nous avons fabriqué une bande dont la longueur mesure $\frac{20}{6}u$.
- $\frac{10}{3}u = \frac{2\times 10}{2\times 3}u = \frac{20}{6}u$, c'est une propriété des rationnels-mesure.
- On admet que $\frac{10}{3} = \frac{2\times 10}{2\times 3} = \frac{20}{6}$ c'est une propriété des nombres rationnels.

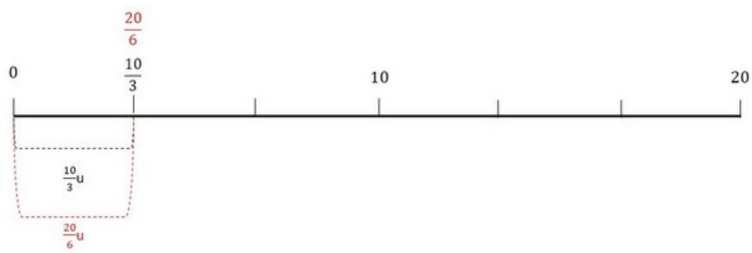


***Figure** 7 : Le partage de 10 u en 3 et de 20 u en 6 ; propriété des rationnels-mesure.*

Certains élèves commencent peut-être à comprendre cette propriété, cependant, des répétitions de cette situation sont nécessaires pour ne pas perdre en route des élèves moins rapides. Comme précédemment, le choix est de commencer par se placer dans un cas qui, parce que le résultat n'est pas décimal (ce que les élèves ignorent), est un cas plus général et d'utiliser ensuite des réplications de la situation dans des cas qui vont fournir des cas particuliers.

2.2. Variations de la situation d'action

On peut répliquer la situation avec $12\,u$-en-4. Comme partager en 4 a été automatisé par le guide-âne, certains élèves ne s'apercevront pas nécessairement que le résultat est une bande pliée dont la longueur est une mesure entière. Dans tous les cas, le passage obligatoire par le guide-âne impose de considérer $12\,u$-en-4 comme une mesure rationnelle, même si c'est aussi une mesure entière.

- Nous avons fabriqué la bande pliée dont la longueur mesure $\frac{24}{8}u$.
- On peut résumer cette fabrication en écrivant les calcul suivants :
  - $\frac{12}{4}u=\frac{2\times12}{2\times4}u=\frac{24}{8}u$;
  - $\frac{12}{4}u=12u\div4=3u$;
  - $\frac{24}{8}u=24u\div8=3u$.
- On admet que $\frac{12}{4}=\frac{2\times12}{2\times4}=\frac{24}{8}$ et que $\frac{12}{4}=12\div4=3$.
- Les entiers peuvent être aussi des rationnels.
- Les rationnels sont parfois des entiers.

Il y a donc une cohérence entre les nombres que nous connaissons depuis longtemps (les entiers) et les nouveaux nombres (les rationnels).

On peut répliquer la situation d'action en faisant varier la relation multiplicatives entre les deux bandes à comparer (par exemple $10\,u$-en-3 et $30\,u$-en-?) et avec les autres nombres en jeu précédemment ($10\,u$-en-4, $11\,u$-en-3, $12\,u$-en-5, etc.). Cependant, on va vite atteindre les limites matérielles de la situation, ce qui va conduire à modifier le rôle du schéma.

2.3. Modification du rôle du schéma

Le schéma, qui était pour l'instant un outil pour représenter à l'écrit l'action avec le guide-âne, va devenir progressivement un moyen pour réfléchir à des expériences que l'on ne peut pas réaliser concrètement mais que l'on peut faire par la pensée. Cependant, il est très important de ne pas perdre le fil et, toutes les fois où c'est possible, de procéder au pliage en se servant du guide âne (ou de pliages déjà marqués dans les bandes).

PE : *Expliquez par quelle méthode vous pouvez plier une bande de $20u$, de $30u$, de $40u$, de $100u$ de manière à obtenir la même longueur que celle d'une bande de $10u$ pliée en 3 ? Justifiez votre réponse par un raisonnement et/ou un schéma.*

- $\frac{10}{3}u=\frac{2\times10}{2\times3}u=\frac{3\times10}{3\times3}u=\frac{4\times10}{4\times3}u=\frac{10\times10}{10\times3}u$.
- Les propriétés précédentes nous permettent aussi d'écrire directement les relations sur les

nombres : $\frac{10}{3}=\frac{2\times10}{2\times3}=\frac{3\times10}{3\times3}=\frac{4\times10}{4\times3}=\frac{10\times10}{10\times3}$.

• Les nombres rationnels ont plusieurs écritures ! Ils sont différents des nombres entiers connus depuis la maternelle qui, même s'ils avaient plusieurs écritures aussi (001 et 1, par exemple), en avaient une que l'on utilise presque toujours (1). C'est une propriété essentielle des nombres rationnels[11].

Cette propriété est institutionnalisée et mémorisée.

2.4. Jeux de renforcement de la propriété des rationnels et exercices

On a admis et institutionnalisé précédemment les relations entre les nombres rationnels, que l'on a appuyées sur l'étude systématique des rationnels-mesure. Il devient possible de s'interroger sur les nombres rationnels, et de revenir au rationnel-mesure pour fonder le raisonnement. Suivant l'avancée de tous les élèves, le retour systématique au contexte de la mesure peut être plus ou moins nécessaire : schéma, technique du guide-âne.

Écritures d'un rationnel

Écrire rapidement sur son ardoise plusieurs nombres rationnels égaux à un nombre donné écrit au tableau.

Intrus

Trouver rapidement l'intrus (à écrire sur l'ardoise) parmi des nombres rationnels qui sont tous égaux à un nombre rationnel donné, sauf l'intrus.

Exemple : parmi les nombres $\frac{14}{8}$; $\frac{20}{8}$; $\frac{20}{14}$; $\frac{100}{40}$; lesquels sont égaux à $\frac{10}{4}$? Écrire les égalités et expliquer les non égalités par un schéma ou un raisonnement.

$\frac{14}{8}$ et $\frac{20}{14}$ ont été choisis car ils représentent des procédures additives fausses (ajouter respectivement 4 et 10 au numérateur et au dénominateur). Ils ont été choisis aussi car il est possible de raisonner à leur sujet. Si je sais que $\frac{10}{4}=\frac{20}{8}$ (relation fondamentale), alors ce n'est pas possible qu'en réalisant le pliage de $14u$ en 8 on obtienne une longueur de mesure $20u$-en-8 car la bande que l'on plie est plus longue. De même ce n'est pas possible non plus qu'en prenant $20u$ en 14 on obtienne une longueur de mesure $20u$-en-8 car on plie la même bande en 14 au lieu de la plier en 8.

Il est pertinent, si au moins un élève ne semble pas suivre le raisonnement, de vérifier au guide-âne tout en expliquant. À ce stade de la séquence, on ne doit laisser personne en chemin.

Écritures égales sous contraintes

Exercices visant à produire des écritures égales à un nombre rationnel donné et respectant certaines contraintes :

• $\frac{10}{3}=\frac{40}{?}$ *; Fais un schéma pour trouver ou pour expliquer ta réponse.*

---

[11] Comme les entiers sont aussi des rationnels, ils vont acquérir de nouvelles écritures, par exemple $1=\frac{4}{4}$ et plus généralement $1=\frac{n}{n}$.

• $\frac{10}{3} = \frac{?}{18}$; *Fais un schéma pour trouver ou pour expliquer ta réponse.*

Certains élèves sont maintenant capables d'essayer de répondre à ce type de question, posée directement dans le cadre numérique, c'est bien mais il ne faut pas qu'ils rentrent dans un jeu purement formel qui n'aurait rapidement plus de sens : ils doivent faire un schéma pour expliquer leur réponse, même s'ils n'en ont pas besoin pour produire cette réponse.

D'autres élèves ont besoin d'un schéma pour trouver la réponse. Ils peuvent dessiner des segments de $10\,u$ bout-à-bout (en ligne ou non) partagés en 3, ils dessinent donc 4 segments pour arriver à $40\,u$ et peuvent compter les subdivisions : il y en a 3 et encore 3 et encore 3 et encore 3, ce qui fait 12. Remarque : ils schématisent alors à la fois le numérateur représenté par une longueur et le dénominateur représenté par un nombre de partages, contrairement aux schéma à compléter que nous avons rencontrés dans l'introduction qui, le plus souvent, représentent l'unité déjà partagée. Lors de la correction de l'exercice, s'ils ne l'ont pas vu avant, ils feront le rapport avec $4\times 10\,u$ et 4×3.

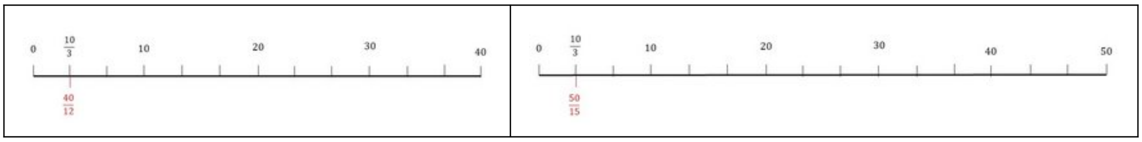


Figure 8 *: Égalités entre nombres rationnels.*

3. Comparer des rationnels

Si les rationnels sont bien des nombres, alors on doit pouvoir déterminer, sans recourir toujours au guide-âne, lequel de deux nombres donnés est le plus petit ou le plus grand. Il faut expliciter l'objectif de cette nouvelle partie de la séquence aux élèves, car ils ne sont toujours pas sûrs que ces objets sont des nombres : pour l'instant ils ont surtout des propriétés jamais rencontrées ! Dans cette partie, on inverse en fait le propos : au lieu de modéliser la mesure de la longueur des bandes pliées par un nombre d'unités, on va chercher des propriétés sur les nombres en s'appuyant sur la modélisation des bandes pliées. Nous n'aurons donc recours aux unités de mesure que quand cela semblera nécessaire pour la signification de l'égalité.

3.1. Des rationnels que l'on peut comparer assez facilement

• *Nous allons comparer* $\frac{10}{3}$ *et* $\frac{13}{3}$ *en utilisant les bandes pliées. Pouvez-vous anticiper le résultat ? Expliquez votre réponse.*

Le raisonnement est simple : $10<13$, le pliage de la bande la moins longue donne la plus petite bande pliée, la réponse est donc $\frac{10}{3}<\frac{13}{3}$.

Remarque : nous n'avons pas encore fait la relation entre $\frac{10}{3}$ et $10\times\frac{1}{3}$, on ne peut donc pas raisonner de cette manière. Cette relation sera faite le plus tard possible dans notre séquence.

• *Nous allons comparer* $\frac{10}{3}$ *et* $\frac{10}{4}$ *en utilisant les bandes pliées. Pouvez-vous anticiper le résultat ? Expliquez votre réponse.*

Là aussi le raisonnement est simple : on a plié la même bande en parts égales, quand on fait un partage avec plus de parts, les parts sont plus petites, le résultat est donc $\frac{10}{4}<\frac{10}{3}$.

On s'aperçoit donc que, dans quelques cas au moins, on sait comparer deux rationnels.

3.2. Les premiers problèmes de comparaison

Même partage

- *Nous allons comparer $\frac{10}{3}$ et $\frac{13}{6}$ en utilisant les bandes pliées. Pouvez-vous anticiper le résultat ? Expliquez votre réponse.*

Le raisonnement n'est pas évident puisque $10<13$, mais $3<6$, ce qui a été établi précédemment n'est donc d'aucune utilité. Dans cette situation, pour la première fois, les élèves vont être amenés à utiliser la propriété qui permet de trouver une autre écriture d'un rationnel comme une connaissance utile (Conne, 1992).

Dans ce cas particulier (6 est multiple de 3), la solution est de se ramener à un même partage : $\frac{10}{3}=\frac{20}{6}$, or $\frac{13}{6}<\frac{20}{6}$, donc $\frac{13}{6}<\frac{10}{3}$.

Bandes de même longueur

- *Nous allons comparer $\frac{10}{3}$ et $\frac{20}{7}$ en utilisant les bandes pliées. Pouvez-vous anticiper le résultat ? Expliquez votre réponse.*

Le raisonnement n'est pas évident puisque $10<20$, mais $3<7$. Dans ce cas particulier (20 est multiple de 10), la solution est de se ramener à deux bandes de même longueur $(20u)$: $\frac{10}{3}=\frac{20}{6}$, or $\frac{20}{7}<\frac{20}{6}$, donc $\frac{20}{7}<\frac{10}{3}$.

Il est théoriquement possible d'aborder alors la comparaison dans le cas général, cependant il ne me semble pas pertinent, au CM, d'automatiser ces calculs, ils le seront en fin de cycle 3 et au cycle 4, au collège. Le risque de la perte de sens augmente avec la complexité des calculs.

Au terme de cette recherche, plusieurs conclusions peuvent être tirées :

- On peut comparer les rationnels, ce qui est important pour qu'ils puissent bien être considérés comme des nombres.
- Cette comparaison est parfois facile, parfois difficile, il faut utiliser la propriété pour obtenir des égalités de rationnels.

3.3. Comparaison entre rationnels et entiers

Jusqu'à présent, nous n'avons pas considéré les entiers de manière particulière, en particulier, $\frac{12}{4}$ et $\frac{12}{3}$, qui sont des entiers, n'ont pas été traités différemment de $\frac{10}{4}$ et $\frac{10}{3}$ qui ne sont pas des entiers. En effet, dans le contexte du partage égal des bandes par le procédé du guide-âne, les entiers n'ont pas de statut particulier.

Cependant, depuis le début, sur la règle graduée informable, nous avons marqué les points correspondant aux intersections avec les lignes du guide-âne et nous avons pu comparer la position de ces points dans le repère de la règle, par rapport aux graduations entières. Il s'agissait jusque-là d'une simple constatation.

Nous allons maintenant poser la question de façon explicite.

- *Nous voulons encadrer $\frac{10}{3}$ entre deux nombres entiers en utilisant les bandes pliées. Pouvez-vous anticiper le résultat ? Expliquez votre réponse.*

Deux solutions sont possibles.

Relation fondamentale et division

Nous savons que $\frac{10}{3} \times 3 = 10$, c'est la relation fondamentale. Si nous effectuons la division euclidienne de 10 par trois, nous obtenons $10 = 3 \times 3 + 1$. On peut en déduire que $\frac{10}{3}$ est plus grand que 3 ($3 \times 3 = 9$) et plus petit que 4 ($4 \times 3 = 12$).

Propriété des rationnels et division

Nous avons déjà rencontré la relation entre des entiers et des rationnels (12-en-3, 12-en-4) et la division. Nous pouvons donc écrire des entiers sous une forme rationnelle : $3 = 9 \div 3 = \frac{9}{3}$ et $4 = 12 \div 3 = \frac{12}{3}$. Or $\frac{9}{3} < \frac{10}{3} < \frac{12}{3}$, donc $3 < \frac{10}{3} < 4$.

Remarque : nous pourrions dire que $\frac{10}{3} = \frac{3 \times 3 + 1}{3}$, mais nous ne saurions pas quoi en déduire. Nous n'avons pour l'instant aucun moyen de savoir ce qui se « distribue » ou pas. On ne peut pas encore faire le rapport avec la multiplication par $\frac{1}{3}$, qui ne sera étudiée qu'au collège. Il est important de ne pas considérer comme « évident » ce qui ne peut pas se justifier dans le contexte de la situation fondamentale.

4. Addition des rationnels

Il s'agit de la dernière partie de la séquence, conformément aux programmes de 2015. Si les rationnels sont des nombres, alors on peut les additionner. Le raisonnement va être très proche de celui de la partie précédente, ce qui va renforcer les techniques à l'œuvre.

4.1. Des rationnels que l'on peut additionner facilement

Une situation de communication

Pour introduire l'addition, nous pouvons engager les élèves dans une situation de communication. En effet, nous n'avons pas encore fait le rapport entre $\frac{10}{3}$ et $10 \times \frac{1}{3}$. Il faut donc trouver un autre moyen pour comprendre le résultat. Cela va nous permettre de rencontrer la relation fondamentale comme une connaissance utile. Un rationnel-mesure est défini dans notre cadre par la mesure d'une longueur (un nombre dans un système d'unité donné) et un nombre qui définit le partage sur le guide-âne.

- Des bandes déjà découpées de différentes longueurs ($10u$, $11u$, $12u$, $13u$), toutes pliées en 3, sont disponibles en nombre suffisant pour chaque groupe d'élèves. Chaque groupe d'élèves dispose d'un guide-âne. On organise une communication écrite entre un groupe d'émetteurs et un groupe de récepteurs. Pour éviter les communications orales intempestives, les élèves ne savent pas qui va recevoir leur message, qui est transmis par le PE.

PE : *Vous allez mettre bout-à-bout deux bandes pliées. Vous devez écrire un message pour que le groupe qui va le lire puisse fabriquer une bande pliée qui aura la même longueur que celle que vous avez fabriquée en mettant bout à bout vos deux bandes pliées. Vous pouvez découper les bandes pliées si besoin.*

Pour trouver la longueur de la bande qu'il faut plier, il faut retravailler sur la relation fondamentale des rationnels. Si l'on a choisi par exemple de mettre bout à bout une bande de $10u$ pliée en 3 et une bande de $11u$ pliée en 3, il faut réorganiser physiquement ou schématiquement les morceaux de bande pliées, dont la longueur totale mesure $21u$. Le schéma ou le découpage et la recomposition permettent de constater qu'il faut désigner une bande de $21u$ pliée en 3.

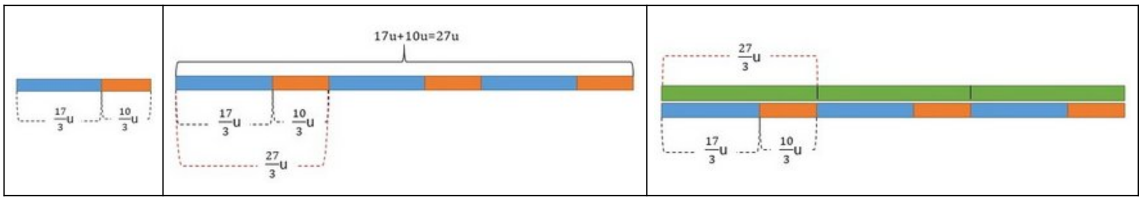


***Figure 9** : Addition de rationnels.*

La manipulation fait apparaître que $\left(\frac{10}{3}+\frac{11}{3}\right)\times 3=21$, soit $10+11$, et par conséquent que $\frac{10}{3}+\frac{11}{3}=\frac{21}{3}=\frac{10+11}{3}$

Certains élèves peuvent se laisser entraîner par les nombres en jeu et penser que le résultat doit être $\frac{10}{3}+\frac{11}{3}=\frac{10+11}{3+3}=\frac{21}{6}$. Ils ont tort, ce qu'ils peuvent comprendre à la fois par le raisonnement et par la validation dans le milieu : le dépassement de cette erreur fait partie de l'apprentissage, non seulement pour ceux qui l'ont commise mais aussi pour les autres élèves. En effet, dans le contexte des bandes et du guide-âne, certains élèves ne feront pas cette erreur mais ils pourront la faire dans un contexte purement numérique. Ils doivent pouvoir se souvenir que c'est faux et pourquoi c'est faux.

4.2. Multiplication d'un rationnel par un entier

- *Nous voulons multiplier $\frac{10}{4}$ par 3 en mettant bout à bout des bandes pliées. Pouvez-vous anticiper le résultat ? Expliquez votre réponse.*

Il faut mettre bout à bout 3 bandes pliées. On peut remarquer au passage que cela sera en tout cas plus petit que 10, car il y faut une bande pliée de plus pour obtenir 10 (relation fondamentale).

Nous savons additionner les rationnels quand ils représentent un partage par le même nombre :

$3\times\frac{10}{4}=\frac{10}{4}+\frac{10}{4}+\frac{10}{4}=\frac{10+10+10}{4}=\frac{3\times10}{4}$.

Il n'est peut-être pas pertinent au CM de systématiser cette propriété, surtout hors d'un contexte dans lequel elle a du sens. Comme c'était le cas pour l'addition (non répétée), la même erreur peut se produire pour les mêmes raisons et certains élèves peuvent répondre : $3\times\frac{10}{4}=\frac{3\times10}{3\times4}$.

Ils ont tort et cela fait aussi partie de l'apprentissage que de le savoir et aussi de comprendre les raisons qui fondent le résultat correct.

Conclusion

Relation avec les fractions

Même si notre séquence n'est pas à proprement parler sur les « fractions », puisque nous n'avons pas fractionné l'unité, nous sommes en fait restés au plan numérique dans le domaine de ce qui peut être modélisé par des « fractions simples » au sens du document d'accompagnement de programme, en prenant toujours un petit nombre de parts :

> *Lorsque le partage de l'unité se fait en un petit nombre de parts (2, 3, 4, ...) et que l'on prend un petit nombre de telles parts, on parle de fraction simple :* $\frac{2}{3}, \frac{5}{4}, \frac{3}{10}$, *etc.*
>
> [en note de bas de page] : *la notion de « fraction simple » n'est pas définie de manière précise en mathématiques] (MEN, 2016a, p. 1).*

La relation avec les fractions demande de fractionner l'unité, c'est-à-dire de partager une bande dont la longueur mesure 1 unité. Sur les photos, la longueur de l'unité choisie mesure $2\,cm$, ce qui permet le partage en 4 avec un guide-âne avec des parallèles espacées d'au plus $0{,}5\,cm$.

Il est alors possible de faire la relation entre ce que l'on appelle d'habitude un quart et le rationnel $\frac{1}{4}$ (un-en-quatre), et de même pour les autres fractions « usuelles ». Puisque les élèves connaissent la multiplication par un entier, il est alors possible de retrouver la relation avec $10\times\frac{1}{4}=\frac{10}{4}$. On pourra donc lire $\frac{10}{4}$ « dix quarts » pour satisfaire à l'usage, sans oublier toutefois que dix quarts (10 quarts d'unité) est aussi dix-en-quatre (10 unités partagées en 4).

Rôle de la situation fondamentale

Notre ambition, dans cet article, même si la séquence est assez détaillée, est de montrer comment un enseignant pourrait s'appuyer sur la situation fondamentale du guide-âne pour fonder un enseignement des fractions correspondant aux objectifs mathématiques qui sont ceux du début du cycle 3 (CM1 et CM2). Il y a d'autres solutions possibles, cette description n'est pas un « carcan ».

Cependant, il nous semble très important, contrairement à ce qui se produit très souvent dans les classes, de ne pas considérer la situation du guide-âne comme une « manipulation » qui ne sert qu'à une introduction et qui peut être écartée rapidement. Dans ce texte, nous nous sommes toujours référée à la situation de partage permise par le guide-âne et la référence à la mesure de longueur est restée essentielle jusqu'à la fin de la séquence.

La situation fondamentale du partage et, dans celle-ci, la validation par le milieu du guide-âne, est indispensable pour comprendre les propriétés des nombres étranges que nous avons construits. Plus la référence à la situation fondamentale est forte pour les élèves et plus ils auront, plus tard, la possibilité de remédier eux-mêmes aux erreurs qu'ils pourraient être tentés de faire.

Abandonner trop vite la validation par le milieu pourrait compromettre les apprentissages des élèves les plus fragiles : ceux qui ont un rapport délicat avec l'écrit, ceux qui sont plus lents, ceux qui ont tendance à penser qu'il n'y a rien à comprendre en mathématiques. Il vaut mieux attendre que les élèves, même les plus fragiles, soient exaspérés par le retour constant au milieu pour la validation et qu'ils interdisent au professeur d'y avoir recours...

Un travail en cours

Ce texte représente une ébauche, même si la réflexion qui le nourrit est plus ancienne et provient tout particulièrement de la nécessité, en formation des enseignants, de trouver un compromis entre les instructions officielles et les ingénieries les plus originales et les plus fécondes.

Ce travail a été rendu possible et nécessaire dans le contexte de la conception de la formation des référents mathématiques de la circonscription de l'Académie de Clermont-Ferrand, dont la responsable, Stéphanie Tinayre (IEN) a conçu le dispositif et encouragé un travail de qualité dans d'excellentes conditions. Dans cette formation, l'association de formateurs de statuts variés : premier degré (PE, PEMF, conseillers pédagogiques) et second degré, a permis la conduite d'une réflexion à la fois concrète et rigoureuse dont cet article est, nous l'espérons, le reflet. C'est à la demande des référents mathématiques que nous l'avons rédigé car, sur un sujet délicat, il est important de disposer d'un écrit.

Peut-être que ce texte inspirera des déclinaisons en classe, c'est son ambition. En l'état, ce n'est qu'une proposition didactique.

Références bibliographiques

Anselmo, B., Bonnet, M., Colonna, A., Combier, G., Latour, J. & Planchette, P. (1999). *La sixième entre fractions et décimaux*. IREM de Lyon.

Anselmo, B. & Zucchetta, H. (Éd.) (2018). *Construire les nouveaux nombres au cycle 3. Fractions et décimaux*. Réseau Canopé/ IREM de Lyon.

Artaud, M. (à paraître). Besoins praxéologiques de la profession : Le cas des grandeurs et de leur mesure. In H. Chaachoua (Éd.), *Actes de la XX^{e} école d'été de didactique des mathématiques* - Titre provisoire. Grenoble : La Pensée Sauvage.

Barilly, B. & Le Poche, G. (2012). Les fractions. In J.-L. Durpaire & M. Mégard (Éd.), *Le nombre au cycle 3* (pp. 82-96). Paris : SCÉRÉN CRDP-CNDP.

Bessot, A. (2011). L'ingénierie didactique au coeur de la théorie des situations. In C. Margolinas, M. Abboud-Blanchard, L. Bueno-Ravel, N. Douek, A. Fluckiger, P. Gibel & F. Wozniak (Éd.), *En amont et en aval des ingénieries didactiques* (pp. 29-56). Grenoble : La pensée sauvage.

Brousseau, G. (1980). Problèmes de didactique des décimaux : première partie. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 1*(1), 11-59.

Brousseau, G. (1981). Problèmes de didactique des décimaux : deuxième partie. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 2*(1), 37-127.

Brousseau, G. (1990). Une expérience d'épistémologie sur l'enseignement des décimaux. *Études en didactique des mathématiques*. IREM de Bordeaux.

Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. Grenoble : La pensée sauvage.

Brousseau, G. & Brousseau, N. (1987). *Rationnels et décimaux dans la scolarité obligatoire*. https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00610769/fr/ (consulté le 19/07/20).

Brousseau, G., Brousseau, N. & Warfield, G. (2014). *Teaching Fractions through Situations: A Fundamental Experiment*. Dordrecht Heidelberg New-York London: Springer.

Chambris, C. (2012). Consolider la maîtrise de la numération des entiers et des grandeurs. Le système métrique peut-il être utile ? *Grand N, 89*(3), 39-69.

Conne, F. (1992). Savoir et connaissance dans la perspective de la transposition didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 12*(2-3), 221-270.

Margolinas, C. (1993). *De l'importance du vrai et du faux dans la classe de mathématiques*. Grenoble : La pensée sauvage.

Matheron, Y. & Salin, M.-H. (2002). Les pratiques ostensives comme travail de construction d'une mémoire officielle de la classe dans l'action enseignante. *Revue Française de Pédagogie, 141*, 57-66.

Ratsimba-Rajohn, H. (1982). Éléments d'étude de deux méthodes de mesures rationnelles. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 3*(1), 65-113.

Salin, M.-H. & Greslard, D. (1998). La collaboration entre chercheurs et enseignants dans un dispositif original d'observation de classes, et lors de la préparation d'une séquence de classe, le Centre d'Observation et de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques (COREM). http://guy-brousseau.com/wp-content/uploads/2010/08/Collaboration-entre-chercheurs-et-enseignants.pdf (consulté le 24/08/2020).

Sensevy, G. (1998). *Institutions didactiques : étude et autonomie à l'école élémentaire*. Paris : Presses Universitaires de France.

Sensevy, G. (1997). Un prototype d'ingénierie didactique: le Journal des Fractions. *Fascicule de didactique des mathématiques et de l'E.I.A.O, n°3*. Publications mathématiques et informatiques de Rennes. http://www.numdam.org/article/PSMIR_1997-1998___3_45_0.pdf (consulté le 19/07/20).

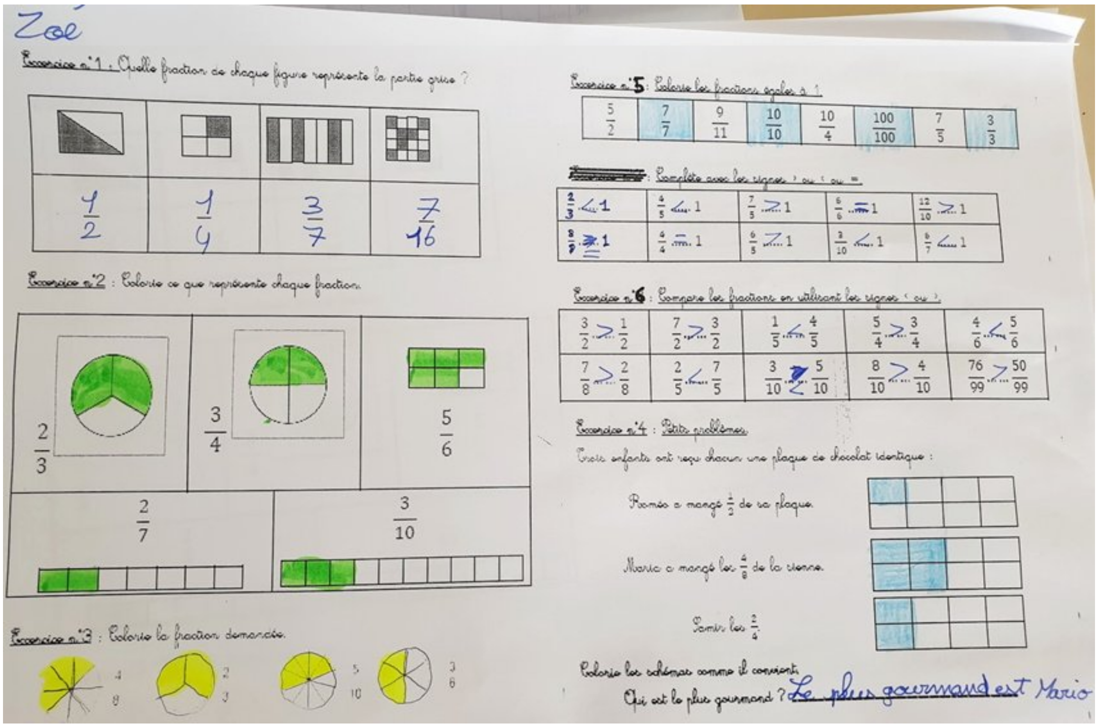
Villani, C. & Torossian, C. (2018). *21 mesures pour l'enseignement des mathématiques*. Ministère de l'éducation nationale, de l'enseignement supérieur et de la recherche.

Wozniak, F. (à paraître). « Grandeurs et mesures » un domaine connexe à la statistique : Impact sur le curriculum. In H. Chaachoua (Éd.), *Actes de la XX^{e} école d'été de didactique des mathématiques* - Titre provisoire. Grenoble : La Pensée Sauvage.

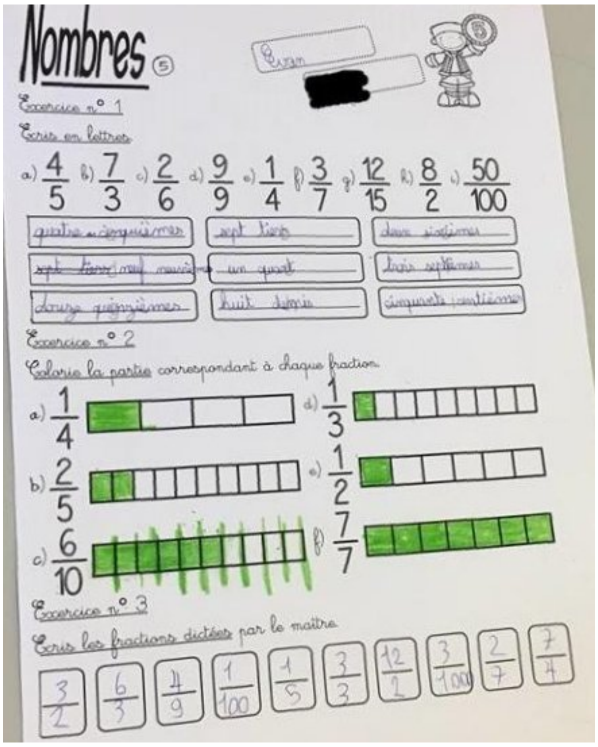
MEN (2016a). Fractions et nombres décimaux au cycle 3. Consulté à l'adresse http://cache.media.eduscol.education.fr/file/Fractions_et_decimaux/60/1/RA16_C3_MATH_frac_dec_doc_maitre_V2_681601.pdf (consulté le 24/08/2020).

MEN (2016b). Fractions et nombres décimaux au cycle 3 / Annexe 5 : le guide-âne. http://cache.media.education.gouv.fr/file/Fractions_et_decimaux/42/4/RA16_C3_MATH_frac_dec_annexe_5_673424.pdf (consulté le 24/08/2020).

Annexes
Documents recueillis par des groupes d'étudiants de M1 MEEF (ESPE Clermont-Auvergne, 2018-2019)



Annexe 1 : *CM1*



Annexe 2 : *CM2*