GENÈSE DU MODÈLE EXPONENTIEL
Situations de modélisation pour la classe de terminale scientifique

Mariza GRAND'HENRY-KRYSINSKA
Maggy SCHNEIDER-GILOT
Université de Liège

Résumé. La transposition didactique standard des fonctions exponentielles s'appuie sur le symbole a^x qui est présenté et manipulé sans se soucier de sa signification pour d'autres nombres que les entiers, si ce n'est, au mieux, pour les rationnels. Dans l'article, on montre comment la modélisation d'une équation fonctionnelle permet de fournir les différentes significations de a^x. On y explique aussi comment des équations fonctionnelles peuvent former un milieu pour la genèse des fonctions exponentielles et logarithmes, et ainsi constituer des supports de situations fondamentales correspondant à ces fonctions.

Mots-clés. Fonctions exponentielles, équations fonctionnelles

Abstract. The standard didactic transposition of the exponential functions is based on the symbol a^x which is presented and manipulated without regard to its meaning for numbers other than integers, at best for rational numbers. In the article, we show how the modeling of a functional equation contributes to the different meanings of a^x. It also explains how functional equations can form a favorable 'milieu' to the genesis of exponential functions and logarithms and thus constitute fundamental situations corresponding to these functions.

Key words. Exponential functions, logarithms functions, functionals equations

Introduction

La transposition didactique standard des fonctions exponentielles en Belgique s'appuie d'entrée de jeu au lycée sur le symbole a^x, travaillé au mieux pour des exposants rationnels et dont l'extension à tous les réels est absente ou travaillée dans un tout autre thème du programme. Ultérieurement, on dérivera ces fonctions pour rarement mettre en évidence qu'elles deviennent ainsi solutions de l'équation différentielle $f'(x) = k\,f(x)$. Dans une telle approche standardisée, cette équation devient modèle du système formé par le symbole a^x qui peut être manipulé sans connaître sa signification pour d'autres nombres que les entiers, ce que nous appelons ici la transparence du symbole a^x. Ceci est renforcé par l'usage des logiciels permettant de calculer rapidement les valeurs d'une puissance pour des valeurs non entières de la variable indépendante. Cette transparence de a^x devient un obstacle didactique à la genèse des fonctions exponentielles comme nous l'expliquerons dans la section 3.3.

La perspective envisagée dans cet article est tout autre : elle fait d'une équation fonctionnelle comme $f(x+y) = f(x)\cdot f(y)$ le système de départ auquel il convient d'associer, sous de « bonnes » hypothèses le modèle $f(x) = a^x$. Le processus de modélisation envisagé dans cet article fait perdre la transparence au symbole a^x par sa détermination et par ses diverses significations au moyen d'une condition fonctionnelle.

Pourtant, le renversement annoncé ci-dessus ne va pas de soi. D'abord, parce que l'écriture même des équations fonctionnelles mobilise des notations propres à un regard plus théorique, notations dans lesquelles la signification et les manipulations associées à l'écriture « $f(x)$ » ne sont pas évidentes. Ensuite, parce que regarder des fonctions comme des solutions d'équations est un point de vue tout à fait nouveau pour les élèves considérés. C'est même là un regard à côté duquel peuvent passer des élèves, forts en l'occurrence, à qui l'on a enseigné préalablement les fonctions exponentielles et leurs dérivées.

Principaux outils d'analyse didactique

Deux concepts didactiques liés entre eux, *situation fondamentale* et *milieu*, nous seront utiles dans l'analyse de notre une situation et de son expérimentation.

Le concept de *situation fondamentale d'un savoir* servira à questionner le caractère fondamental des équations fonctionnelles pour la genèse des fonctions exponentielles. Salin (2002) définit ainsi la situation fondamentale :

> Pour qu'elle (la situation fondamentale) soit fondamentale pour l'apprentissage de la connaissance visée par des élèves disposant d'un répertoire donné, il faut qu'elle puisse provoquer la genèse de cette connaissance, grâce à la détermination d'un processus : une suite de situations articulées répondant à un certain nombre de conditions dont celles relatives à 'l'antagonicité' du milieu, et celles concernant l'adéquation des connaissances nécessaires à l'entrée dans le processus avec le répertoire des élèves. Le choix des valeurs des variables est déterminant à ce niveau.

De ce point de vue, la résolution des équations fonctionnelles annoncée plus haut ne peut que déboucher sur les fonctions qu'on cherche à enseigner, en même temps qu'elles donnent prise à leur construction *ex nihilo,* comme nous le montrons dans la sous-section 1.1.

Dans la définition de la situation fondamentale, on fait référence au concept de *milieu qui* sera pertinent pour l'analyse des phénomènes observés lors de l'expérimentation présentée dans la section 2. Il n'est pas aisé de choisir sa définition tant les points de vue sont multiples *a priori*. Nous optons d'emblée pour une formulation souple, inspirée de Rouchier (un propos oral) :

> Le milieu est ce sur quoi peut s'appuyer le professeur pour dévoluer à l'élève la construction d'une part de savoir qui sera ultérieurement institutionnalisée comme telle.

Nous la complétons par la description plus détaillée proposée par Salin (2002) :

> 1. Le milieu doit être facteur de contradictions, de difficultés, de déséquilibres (...) Il faut que l'élève puisse engager les connaissances dont il dispose pour tenter de contrôler ce milieu mais qu'il en reçoive des rétroactions lui montrant l'insuffisance de ses moyens de contrôle. C'est ce rôle du milieu qui est qualifié d'antagoniste du sujet dans la situation. (…)
>
> 2. Le milieu doit permettre le fonctionnement autonome de l'élève.(…)
>
> 3. L'apprentissage doit conduire à la maîtrise de savoirs mathématiques identifiés comme tels, et pas seulement des connaissances.

Structure de l'article

L'article est composé de quatre parties.

Dans la première partie, nous expliquons pourquoi les équations fonctionnelles constituent des situations fondamentales pour les fonctions exponentielles et en quoi elle peuvent former un milieu pour la genèse de ces fonctions. Plus particulièrement, nous montrons le mécanisme par lequel on obtient les solutions de l'équation fonctionnelle $f(x+y) = f(x)\cdot f(y)$ sous forme des fonctions qui mettent en correspondance les suites arithmétiques et géométriques. Une telle approche des fonctions exponentielles favorise la construction des différentes significations du symbole a^x (AHA, 1999 ; Krysinska & Schneider, 2001).

Dans la deuxième partie, nous présentons une situation de modélisation de l'équation $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$ et ses enjeux didactiques, la relation de son expérimentation suivie de l'analyse didactique des phénomènes observés.

La troisième partie contient l'analyse *a posteriori* qui permet de situer cette expérimentation et d'en analyser les résultats à une échelle plus globale. En particulier, nous montrons que la genèse des fonctions exponentielles doit être lue à la lumière d'apprentissages plus vastes, plus diffus aussi : l'étude du concept de fonction, celle des réels et l'apprentissage de la modélisation.

Dans la quatrième partie, nous mettons en perspective l'approche développée dans les parties précédentes : nous élargissons la démarche de modélisation exponentielle aux fonctions logarithmes et aux quatre équations fonctionnelles mises en boucle, dont chacune est obtenue comme modèle d'une situation extra ou intra-mathématique.

1. Équation fonctionnelle $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$ et genèse des fonctions exponentielles

1.1 Caractère fondamental des équations fonctionnelles pour la genèse des fonctions exponentielles

Comme annoncé au début de l'article, notre intention est d'étudier une genèse possible des fonctions exponentielles comme solutions de l'équation fonctionnelle $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$ et qui en constituent des 'raisons fondamentales' ou une situation fondamentale. En effet, la résolution de ces équations constitue un milieu pour l'apprentissage des fonctions exponentielles et logarithmes.
D'autres arguments, plus sociaux, se profilent dans la théorie des situations didactiques et se réfèrent à un futur non didactique. On peut interpréter ainsi les propos de Brousseau (1998) lorsqu'il dit :

> [l'élève] n'aura véritablement acquis cette connaissance que lorsqu'il sera capable de la mettre en œuvre de lui-même dans des situations qu'il rencontrera en dehors de tout contexte d'enseignement et en l'absence de toute indication intentionnelle.

Nous aimerions ajouter à ce futur non didactique les transferts de connaissances au sens des psychologues (Tardif, 1999) qui peuvent se réaliser au sein d'une institution scolaire. En l'occurrence, un élève qui reconnaît de lui-même l'opportunité d'utiliser les fonctions exponentielles ou logarithmes quelque temps après leur enseignement, que ce soit ou non au sein de la même institution scolaire, se situe dans un milieu effectivement épuré de l'intention de lui enseigner ces mêmes fonctions. Le milieu non didactique est donc fort relatif.

Par ailleurs, les seuls types de transfert que les enseignants sont à même d'observer se déroulent dans un milieu plus proprement didactique. Nous préférerions dès lors parler, au pluriel, de futurs didactiques ou non. A quoi ressemblent ces futurs dans le cas qui nous occupe ? Sans nous étendre sur des situations précises que nous ne pourrions décrire en l'espace de ces quelques lignes, nous pouvons défendre l'idée que les équations fonctionnelles y jouent un rôle prédominant. Il s'agira pour l'étudiant, par exemple, de repérer dans des tableaux numériques ceux qui correspondent à des fonctions exponentielles en utilisant le critère des rapports constants qui permettent de reconnaître les suites géométriques ou des fonctions exponentielles dans des énoncés tels que : « *Des lames de verre identiques d'une épaisseur donnée sont juxtaposées. Chacune d'elle absorbe un pourcentage constant de la lumière. On suppose que toute la lumière qui sort d'une lame est reçue par la suivante. Si* x *est un nombre réel positif qui mesure en millimètres la distance parcourue par la lumière dans le bloc de verre, quelle est la quantité de lumière non absorbée par le verre lors du parcours* x ? » ou « S*ur une période de temps donné il y a une proportion fixe des atomes qui se désintègrent en devenant un nouvel élément radioactif. En connaissant la demi-vie d'une matière radioactive, calculer le pourcentage de la masse radioactive qui reste après* t *jours. »*, ou de penser la résolution de tels problèmes en termes de classe paramétrée de fonctions exponentielles pour déterminer ensuite les paramètres au moyen des conditions limites. Dans tous ces cas effectivement joue l'équation fonctionnelle relevée *supra*, ce qui, à nos yeux, corrobore son caractère fondamental.

Pour justifier le fait que l'équation $f(x+y) = f(x)\cdot f(y)$ constitue une situation fondamentale associée aux fonctions exponentielles, il faudrait donc conjuguer critères mathématiques et critères plus sociaux. Nous relevons toutefois la nécessité de pondérer leur importance relative pour s'adapter ne fût-ce qu'au public visé : futurs mathématiciens ou futurs utilisateurs de mathématiques.

Symbole a^x au cœur de la modélisation de l'équation $f(x+y) = f(x)\cdot f(y)$

De manière formelle, on peut montrer qu'une fonction f qui vérifie $f(x+y) = f(x)\cdot f(y)$ est soit la fonction nulle, soit une fonction qui ne possède pas de racine ; si elle n'est pas nulle alors toutes ses valeurs sont positives et $f(0) = 1$. Surtout, on peut montrer pas à pas, qu'elle est entièrement déterminée sur **Q** par la valeur de $f(1)$:

$$f(n) = (f(1))^n,\ n \text{ entier naturel}$$
$$f(1/k) = {}^k\sqrt{f(1)},\ k \text{ entier naturel}$$
$$f(n/k) = ({}^k\sqrt{(f(1))}^n$$
$$f(-(n/k)) = 1/(({}^k\sqrt{(f(1))}^n$$

La convention de notation ${}^k\sqrt{f(1)} = (f(1))^{1/k}$, $({}^k\sqrt{(f(1))}^n = (f(1))^{n/k}$, $1/(({}^k\sqrt{(f(1))}^n = (f(1))^{-n/k}$ permet d'utiliser un seul symbole $(f(1))^x$ pour toutes les valeurs rationnelles de la variable x. Ainsi, la valeur de la variable indépendante est présente dans le symbole de la puissance qui représente la fonction exponentielle $f(x) = a^x$ où $a = f(1)$. Remarquons que, par cette définition, l'image de la suite arithmétique (n) est la suite géométrique $((f(1))^n)$ et l'image de toute suite arithmétique de raison $1/k$ est une suite géométrique de raison ${}^k\sqrt{f(1)}$. Cela montre l'importance de telles suites pour la construction des fonctions exponentielles.

Extension aux nombres réels qui débouche sur la nécessité de formuler des axiomes relatifs aux réels

Sans hypothèses supplémentaires, il existe plusieurs prolongements aux réels d'une fonction définie sur des rationnels. Ces hypothèses sont donc nécessaires lorsqu'on souhaite garantir l'unicité du prolongement. Il y en a deux qui s'imposent naturellement : la première, celle de continuité parce que, intuitivement, on souhaite remplir les « trous » dans le graphique de la fonction de telle manière que la courbe obtenue soit « continue » ; la seconde, celle de monotonie car la fonction exponentielle définie sur des rationnels est déjà monotone et donc, il s'agit d'étendre cette propriété à son prolongement. Ces deux hypothèses sont équivalentes : si on construit un prolongement continu, il sera aussi monotone, et inversement, si on construit un prolongement monotone, il sera aussi continu. Chacune de ces deux propriétés est importante : la continuité permettra d'établir son ensemble des valeurs et la monotonie assurera l'existence de la fonction réciproque.

Ce prolongement dépend aussi de la manière avec laquelle on définit le caractère continu des nombres réels. Pour se faire une idée de sa réalisation, considérons l'exemple de $a^{\sqrt{2}}$ et construisons une suite infinie d'intervalles emboîtés dont les extrémités sont rationnelles :

$1 < \sqrt{2} < 2$ car $1<2<2^2$
$1,4 < \sqrt{2} < 1,5$ car $1,4^2=1,96 < 2< 2,25 = 1,5^2$
$1,41 < \sqrt{2} < 1,42$ car $1,41^2=1,988 < 2< 2,0164 = 1,42^2$
… $a_n< \sqrt{2} < a_n + 0,1^{-n}$

La longueur $0,1^{-n}$ de ces intervalles tend vers zéro car, par le principe d'Archimède, la suite de nombres 10^n peut dépasser n'importe quel nombre.
La monotonie (stricte) de la fonction donnée par a^x, monotonie qu'on peut prouver sur l'ensemble des nombres rationnels et supposer pour l'ensemble des nombres réels, permet d'établir la suite des intervalles emboîtés de $a^{\sqrt{2}}$. Par exemple, si $a>1$, on a la suite infinie :

$$a < a^{\sqrt{2}} < a^2$$
$$a^{1,4} < a^{\sqrt{2}} < a^{1,5}$$
$$a^{1,41} < a^{\sqrt{2}} < a^{1,42}$$
$$\dots$$

En s'appuyant de nouveau sur l'axiome d'Archimède, on peut prouver que leur longueur tend vers 0. Par l'axiome d'intervalles emboîtés, le nombre $a^{\sqrt{2}}$ est défini alors comme le nombre unique qui est contenu dans leurs intersections.

Nous voyons par conséquent que la possibilité d'extension des fonctions exponentielles aux irrationnels doit être justifiée, ce qui rend explicites les propriétés des nombres réels souvent passées sous silence et met en évidence la nécessité de formuler des axiomes sur ces nombres : ici l'axiome d'Archimède et celui des intervalles emboîtés.

1.2 Retournement d'une situation comme producteur de milieu dans le cas de résolution d'une équation fonctionnelle

Une forme de retournement est présente dans l'approche des fonctions exponentielles comme solutions des équations fonctionnelles. Il s'agit de construire, à la fois l'expression analytique et le graphique, des fonctions qui répondent à certaines conditions. Les situations évoquées dans ce texte constituent ainsi un premier jeu de recherche d'inconnues d'équation fonctionnelle. La théorie qui leur fait suite permet de déterminer toute la classe des fonctions qui vérifient l'équation fonctionnelle mobilisée. Cette approche est en rupture avec ce qui se pratique d'habitude sur le mode de l'ostension où on déduit les propriétés de ces fonctions de leur définition initiale à l'aide du symbole a^x.

Le milieu porteur ici est ce que l'on peut appeler le milieu de construction d'un objet mathématique ou d'une classe d'objets répondant à certaines conditions imposées *a priori*. Il renvoie aux conditions déterminantes de cet objet ou de cette classe d'objets et pose donc, à la fois, des problèmes d'existence et d'unicité. Les effets d'un tel milieu et ses potentialités quant à l'autonomie des élèves pourraient être observés à propos d'autres contenus : détermination de figures géométriques par conditions suffisantes, construction de figures géométriques par la méthode des lieux, détermination de fonctions par la méthode des coefficients indéterminés.

Le retournement d'une situation est définie par Bloch (2005) comme la « *modification d'un milieu allié en un milieu antagoniste* ». Dans un des exemples qu'elle considère, le mot retournement prend un sens assez littéral. Au lieu de considérer un jeu « direct »: construire le graphique d'une fonction-produit à partir des graphiques de chacun des facteurs et énoncer des règles sur ce produit, cette auteure imagine un jeu « retourné » : imposer des contraintes sur la fonction-produit et demander ce qu'il faut imposer aux fonctions-facteurs pour obtenir le résultat attendu. Ce retournement rend nécessaires les connaissances en jeu principalement par le fait que les justifications deviennent théoriques. Le processus de retournement est donc un producteur de milieu antagoniste. On peut en imaginer d'autres.

2. Expérimentation : détermination du symbole a^x et de ses diverses significations au moyen d'une équation fonctionnelle

2.1 Dispositif expérimental : hypothèses sur la croissance d'une population toutes les demi-heures et tous les quarts d'heures

L'histoire de la formulation des questions à proposer aux élèves est significative tant de l'intention d'aménager les conditions pour le fonctionnement autonome de l'élève que des difficultés à la réaliser. Ces questions ont été empruntées à des élèves à qui l'on a posé la question suivante : « C*onsidérez une population de bactéries qui double d'heure en heure. Que fait-elle de demi-heure en demi-heure ? Et de quart d'heure en quart d'heure ?* ». Les élèves qui les ont formulées ne connaissaient pas la signification de 2^t pour des valeurs de t non entières. Par contre, les autres se sont empressés de se servir du symbole 2^t pour répondre : après une demi-heure, la population vaut $P_0 2^{1/2}$. Et c'était une réponse acceptable à la question posée, d'où l'impossibilité du professeur de la remettre en cause sans utiliser d'autres connaissances, du style « *J'attends une formulation dans le langage courant et non pas une formule* ». De là, la décision de rédiger les questions afin de permettre une confrontation entre les connaissances des uns à propos du symbole 2^t et la virginité des autres face à ce problème.

En proposant les quatre questions ci-dessous à des élèves vierges de tout enseignement sur le sujet, nous espérons qu'émergent les différents modèles à partir de la seule hypothèse de doublement, comme ceux proposé dans la figure 1, modèles *a contrario* desquels les caractéristiques du modèle exponentiel pourront être mieux mises en évidence.

Si cela n'était pas le cas, il nous serait loisible de mettre nous-mêmes ces modèles sur le tapis.

Situation de modélisation exponentielle

1. Une population de bactéries double toutes les heures. Comment peut-elle évoluer pendant chacune de ces heures ? Proposer un graphique possible de cette évolution.
2. On ajoute l'hypothèse suivante : le doublement de nombre de bactéries d'heure en heure a lieu peu importe le début de l'heure. Les graphiques que vous avez proposé décrivent-ils un tel phénomène de croissance ?
3. On ajoute l'hypothèse supplémentaire selon laquelle la population de bactéries augmente chaque fois dans un même rapport sur des intervalles de temps de même durée. Les graphiques proposés par vous décrivent-ils un tel phénomène de croissance ? Pourquoi ?
4. Dans quel rapport augmenterait cette population de bactéries de demi-heure en demi-heure, de quart d'heure en quart d'heure ? De n^e d'heure en n^e d'heure ? Augmente-t-elle dans un même rapport sur des intervalles de temps de même durée ?

Question 1
Cette question a pour but d'obtenir plusieurs représentations graphiques en guise de réponses, lesquels joueront le rôle de milieu étant mis ensuite à l'épreuve de la condition caractéristique. On espère obtenir les deux graphiques de la figure 1 qui montrent que d'autres modèles de croissance sont compatibles avec la seule hypothèse du doublement d'heure en heure. Remarquons que le graphique a) de la figure 1 qui représente le doublement synchrone est réaliste dans le cas d'une culture de bactéries dans un laboratoire.

Le doublement d'heure en heure se traduit par l'expression $P(n) = P_0 2^n$ pour tout n naturel.

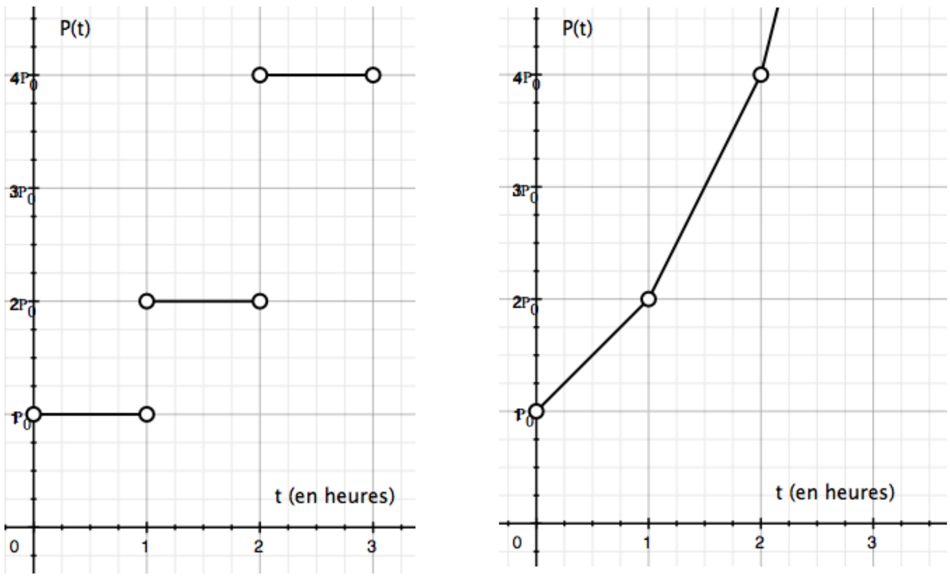

Figure 1. Évolution possible de la population des bactéries : a) par palier, b) en ligne brisée

Question 2
Les deux graphiques de la figure 1 sont compatibles avec l'hypothèse supplémentaire selon laquelle le doublement du nombre de bactéries d'heure en heure a lieu peu importe le début de l'heure. La vérification de cette hypothèse peut se faire par la comparaison des figures géométriques qui sous-tendent des graphiques possibles, en passant d'une unité à l'autre sur l'axe du temps. Par exemple, si le graphique ressemble à celui de la figure 1b), il s'agit de comparer les trapèzes successifs pour remarquer que chacun d'eux (sauf le premier) est obtenu par un étirement vertical de rapport 2 du trapèze précédent.
Le doublement d'heure en heure, peu importe le début de l'heure, se traduit par l'expression $P(t+1) = 2P(t)$ et cette condition n'est pas le synonyme de la croissance exponentielle.

Question 3
L'hypothèse supplémentaire selon laquelle la population de bactéries augmente chaque fois dans un même rapport sur des intervalles de temps de même durée n'est vérifiée par aucun des deux graphiques de la figure 1. Il suffit de le vérifier pour l'intervalle d'une demi-heure. Par exemple, dans le cas du graphique en ligne brisée (Fig.1b), on aurait :

$$P(1)/P(1/2) = 2/(3/2) = 4/3 \text{ et } P(1/2)/P(0) = (3/2)/1 = 3/2.$$

L'exploration de cette hypothèse est l'occasion d'approfondir l'expression « *augmenter dans un même rapport sur des intervalles de temps de même durée* » et de mettre en évidence que ce rapport dépend de la longueur des intervalles de temps considérés.

Elle prépare donc à la question 4.

Question 4
La structure du calcul mis en place à la question 3 pourra aider à trouver le bon rapport. Par exemple, dans le cas du graphique de la ligne brisée, (Fig. 1b), le rapport correspondant à la première demi-heure est égal à 3/2 et le rapport sur la deuxième demi-heure est égal à 4/3. Aucun des deux rapports 3/2 et 4/3 ne convient pour des raisons suivantes. En effet,
– si la population augmentait de demi-heure en demi-heure dans le rapport 3/2, alors après deux demi-heures, on aurait le rapport $3/2 \cdot 3/2 = 9/4 > 2$
– si la population augmentait de demi-heure en demi-heure dans le rapport 4/3, alors après deux demi-heures, on aurait le rapport $4/3 \cdot 4/3 = 16/9 < 2$.
Donc le bon rapport k sera celui qui, multiplié par lui-même, donnera exactement 2 : $k \cdot k = 2$. D'où le rapport recherché est $\sqrt{2}$.
Finalement, si la population croît dans le rapport 2 toutes les heures, elle croît dans le rapport $\sqrt{2}$ toutes les demi-heures et dans le rapport $\sqrt{\sqrt{2}}$ tous les quarts d'heures.
Le symbole 2^t est étendu aux valeurs de t fractionnaires pour des raisons de commodité car il utilise explicitement la valeur de t. Par exemple, $P(1/2) = \sqrt{2}P(0)$ sera noté utilement $2^{1/2}P(0)$.
Ensuite, les élèves doivent densifier les suites arithmétiques correspondant aux intervalles du temps et, en même temps, densifier les suites géométriques correspondant à la croissance de la population des bactéries. Cette entrée par la densification des suites dans le sujet des fonctions exponentielles correspond à la nécessité de respecter les contraintes sur l'évolution de la population de bactéries en fonction du temps : les rapports égaux et les conditions initiales.

2.2 Principal savoir visé

En nous référant à la définition du concept de milieu adoptée dans l'introduction, nous devons étudier la situation de modélisation proposée tant du point de vue du savoir visé, mais aussi du point de vue des rétroactions du milieu et du degré d'autonomie de l'élève.
Le savoir visé est ici principalement d'ordre relationnel : le modèle exponentiel de croissance d'une population est déterminé par l'hypothèse *« le nombre d'individus augmente dans un même rapport sur des intervalles de temps de même durée »*. En effet, c'est cette hypothèse qui permet de densifier le premier tableau ci-dessous en conservant le caractère arithmétique de la suite des valeurs de la variable indépendante et le caractère géométrique des valeurs de la variable dépendante : des images dans un même rapport pour des écarts d'abscisses constants. Cette densification conduit à la suite de valeurs comme dans le Tableau 1 :

t	0	1	2	3	...	n
$P(t)$	P_0	$2P_0$	$4P_0$	$8P_0$	...	2^nP_0

t	0	1/2	1	...	$n/2$
$P(t)$	P_0	$\sqrt{2}P_0$	$2P_0$	...	$(\sqrt{2})^nP_0$

t	0	1/4	1/2	3/4	1	...	$n/4$
$P(t)$	P_0	$\sqrt[4]{2}P_0$	$\sqrt{2}P_0$	$(\sqrt[4]{2})^3P_0$	$2P_0$	...	$(\sqrt[4]{2})^nP$

Tableau 1. *Densification du tableau, étape par étape*

Cette recherche de cohérence se double, comme on l'a vu plus haut, d'un argument de commodité d'écriture pour justifier l'expression du symbole 2^t en termes d'opérations connues et ce, forcément, d'une manière différenciée suivant la nature de t : un produit si t est un naturel ; l'inverse d'un produit si t est un entier négatif et, sinon, la composée d'une puissance entière et d'un radical d'indice n. L'extension de la signification de ce symbole à des valeurs irrationnelles se fait, comme on le verra dans la sous-section 3.5, à l'occasion du problème inverse.

Un autre savoir qui est visé, c'est évidemment la relation entre la représentation algébrique 2^t et la représentation graphique correspondant.
Travailler les fonctions exponentielles et logarithmes permet de visiter à nouveau le concept de fonction et celui de réel. Nous ne pouvons pas développer ce point en l'espace de ces quelques pages : il est traité dans Henrotay et al. (2015).

2.3 Organisation d'un face à face de l'élève avec le milieu

Il ressort clairement de l'analyse faite en 2.1 que le doublement d'heure en heure d'une population d'individus ne suffit pas à rendre nécessaire le modèle exponentiel pour des valeurs non entières du temps, ni pour l'allure de son graphique. Comment alors aurait-on pu introduire le modèle exponentiel ? On peut imaginer facilement une approche qui aurait fait la part belle aux connaissances liées au contrat, c'est-à-dire aux connaissances non requises par le problème posé et fonctionnant grâce à des implicites engendrés par des expériences antérieures. En ce qui concerne les fonctions exponentielles, l'élève s'attend à ce qu'un phénomène soit modélisé par une écriture algébrique unique, laquelle peut donc être mise en évidence grâce aux seules valeurs entières du temps. Le professeur aurait pu s'appuyer là-dessus pour étendre aux fonctions exponentielles les suites géométriques déjà connues des élèves. Il lui aurait suffi de leur faire constater qu'une calculatrice graphique trace la courbe qui passe par quelques valeurs d'une telle suite, si l'on y programme la fonction donnée par $y = a^x$ pour une base a appropriée. Il aurait défini ensuite la fonction exponentielle de base a comme une fonction qui, à toute valeur réelle de x, fait correspondre la valeur de a^x dont la signification est fournie par la seule calculatrice par le biais d'une valeur numérique. Ce symbole jouirait donc d'une forme de transparence évoquée dans l'introduction, pour des valeurs non entières de la variable indépendante et son usage servirait ainsi d'alibi pour passer de valeurs entières à d'autres sans se poser de questions. De plus, le graphique de la fonction fourni par la calculatrice est, comme l'attend l'élève, une vraie courbe lisse, non une ligne polygonale, d'un seul tenant, passant par les points déjà calculés et c'est là une autre connaissance liée au contrat.

C'est précisément pour éviter ces connaissances liées au contrat qu'on a décidé de proposer aux élèves de confronter l'hypothèse déterminant le modèle exponentiel à d'autres hypothèses. Cette confrontation doit déboucher sur l'examen de ce que signifient différentes hypothèses présentes dans la situation de modélisation traitée ci-dessus, en termes numériques et algébriques.

Pourtant, certaines réactions d'élèves témoignent de la difficulté persistante de transformer le savoir en connaissance, au sens où l'entendent Conne (1992) puis Bloch (1999). Si besoin est, des réactions d'élèves-professeurs corroborent ce fait. Ces derniers refusent le graphique en ligne brisée comme celui présenté à la figure 1b) en arguant que : « *D'après le graphique,* $P(1/2) = 3/2 \cdot P(0)$; or, $P(t) = P(0) \cdot 2^t$ et $P(0) \cdot 2^{1/2}$ *vaut environ* $1{,}4 \cdot P(0)$ *et non* $1{,}5 \cdot P(0)$ ». Comme on le voit, ces étudiants « dérapent » en prenant le symbole de la fonction comme argent comptant, alors que c'est justement le sens de ce symbole qui fait l'objet de la situation. Mais, le problème est qu'ils savent précisément que la croissance d'une population est souvent modélisée par une telle fonction. Cette dernière joue donc un rôle de réponse formelle, sans être véritablement intégrée dans leur répertoire personnel en tant que réponse autonome. La difficulté que nous avons ressentie consiste à leur faire plonger après-coup ce savoir dans un problème de validation pour le confronter à un milieu objectif fait d'hypothèses, sans gain réel au niveau de l'action parce que, de toute façon, cette confrontation aboutit à la réponse déjà connue des élèves.

Pour conclure, nous voudrions insister, à l'instar de Schneider (2001), sur l'enjeu majeur de « *l'organisation d'un face à face direct de l'élève avec un milieu et avec ses propres connaissances »*. Faire prendre conscience aux élèves que l'hypothèse du doublement d'heure en heure ne suffit pas à assurer le modèle exponentiel, contrairement à ce qu'ils imaginent, participe, nous semble-t-il, à l'organisation de ce face à face.

2.4 Des fonctions solutions d'équation fonctionnelle $f(x+y) = f(x)\cdot f(y)$

L'hypothèse qui détermine le modèle exponentiel, à savoir « *croître dans un même rapport sur des intervalles de temps de même durée* » s'exprime en langage symbolique par la condition : $P(t+\Delta t)/P(t) = P(\Delta t)/P(0)$ (1)

qui revient à la propriété fondamentale des fonctions exponentielles pourvu que $P(0)$ soit choisi comme unité de mesure de la population de bactéries. En effet, la relation (1) devient alors $P(t+\Delta t) = P(t)P(\Delta t)$ (2)

ou sous sa forme générique

$$f(x+y) = f(x)\cdot f(y)$$

À long terme, cette situation prépare donc les élèves à déterminer la classe des fonctions $f(x) = a^x$ comme solutions d'une l'équation fonctionnelle de type (2), ou la classe des fonctions $f(x) = ba^x$ comme solutions d'une équation semblable à (1) au cas où $P(0)$ ne serait pas unitaire.

2.5 Choix et environnement didactiques

Plusieurs choix didactiques commandent la situation de modélisation exponentielle étudiée ici. Ils sont très diversifiés et, surtout, leurs justifications *a priori* relèvent d'aspects fort hétérogènes du milieu. Voici, dans le désordre, quelques exemples : le choix de la base 2 du premier modèle exponentiel rencontré, lié au facteur 2 correspondant au doublement d'une population et particulièrement prégnant dans les problèmes à croissance multiplicative ; le choix d'un contexte dans lequel la variable indépendante est le temps, variable continue par excellence, ce qui facilite la construction de la fonction par densification ; la formulation dans le langage véhiculaire des hypothèses à mettre à l'épreuve sur le modèle de croissance de la population de bactéries, pour provoquer une réflexion sur le sens du symbole a^x.

La référence à des facettes plus institutionnelles du milieu oblige à s'interroger, au minimum, sur les aspects de l'amont didactique qui sont susceptibles de « faire milieu » pour la situation analysée ici. Dans le cadre du manuel AHA, les fonctions sont introduites comme outils de modélisation de problèmes issus de contextes divers mobilisant des grandeurs variables qui sont géométriques, numériques, cinématiques. Les fonctions sont étudiées ensuite, non pas une à une et de manière systématique (comme dans les exercices de variations de fonctions), mais classe par classe en sélectionnant pour chaque classe les outils d'investigation les plus pertinents qui mettent en évidence ses caractéristiques les plus saillantes. Dans cette perspective, les choix de repères et d'échelles, les changements de registre, la détermination de paramètres sont monnaie courante. On peut donc imaginer qu'un élève ayant pu tirer parti d'une telle formation ne soit pas forcément gêné, pour faire un graphique, par l'écriture paramétrée du nombre de bactéries au temps $t = 0$ (ainsi que nous avons pu l'observer) et soit quelque peu entraîné à traduire en langage symbolique des énoncés du langage courant.

2.6 Compte-rendu de l'expérimentation

L'expérimentation a été menée dans une classe de sixième année du secondaire composée de 25 élèves de 18 ans poursuivant le cours de mathématiques fort (6 heures par semaine). A ces élèves, nous avons présenté le dispositif expérimental présentée en sous-section 2.1. Le professeur a invité ceux-ci à former des groupes de quatre ou cinq élèves. Il a annoncé que les élèves devaient répondre à quelques questions et il a distribué des feuilles avec les énoncés. Les élèves, après s'être organisés en groupes, se sont mis au travail. Le professeur passait d'un groupe à l'autre en discutant avec les élèves.

Nous avons pu assister au travail d'un groupe particulier pendant deux heures de cours consécutives. Dans ce groupe d'élèves observés, la fonction exponentielle n'avait pas été institutionnalisée, le symbole 2^x non plus, du moins en tant qu'expression fonctionnelle, même si l'un d'eux avait rencontré ce symbole en suivant les cours préparatoires aux examens d'admission aux facultés de sciences appliquées et même si ces élèves avaient rencontré certains phénomènes exponentiels comme la radioactivité dans le cadre de l'enseignement de la physique.

La progression des élèves s'appuie sur un chassé-croisé entre les registres mobilisés. Résumons-la selon ce point de vue. Les élèves commencent par débattre du nombre de bactéries au temps $t = 0$ pour conclure que la fonction cherchée ne peut s'annuler en cet instant et qu'elle ne peut pas être négative. Alors que l'évolution des bactéries en fonction du nombre d'heures n'est pas demandée explicitement dans la question, l'un d'eux énumère le nombre de bactéries en chaque heure pour en tirer la forme exponentielle : *« [...] la fonction est* x *exposant* y*. C'est une fonction exponentielle* », réponse que ne commente pas l'observateur craignant une sorte de parasitage du travail de recherche proposé, au sens décrit supra. Un autre élève fait le lien avec un travail numérique antérieur relatif à une feuille de papier qu'on plie en deux plusieurs fois de suite. Le symbole algébrique se précise alors sous la forme *«* 2 *exposant* x *»* où *« le temps* x *égale* n *».*

L'observateur voulant savoir ce qui se passe pendant une heure, un élève interprète graphiquement l'évolution des bactéries en précisant que *« au plus le temps avance, au plus la courbe est raide »*. Pour illustrer les différents modèles de croissance, les élèves proposent alors, l'un une courbe à l'allure exponentielle et, les autres, trois variantes de graphiques en escalier ou en ligne brisée censés rendre compte d'une incertitude quant au moment auquel les bactéries se dédoublent : *« On ne sait pas quand une bactérie se dédouble. Elle peut se dédoubler au début de l'heure ou à la fin de l'heure ».* Ils envisagent aussi qu'elles se dédoublent au milieu de l'heure : *« quand cela double au milieu »*. Il est à noter que, dans leurs propos, les bactéries se dédoublent d'une manière synchrone, bien que leurs graphiques ne traduisent pas tous ce fait.

L'observateur engage ensuite les élèves à vérifier sur leurs graphiques *« si le nombre de bactéries double peu importe le début de l'heure »,* ce qui conduit certains à glisser horizontalement un segment de longueur unitaire : *« J'avance d'une unité et je regarde si cela double ».* Cette vérification ne donne lieu à aucun raisonnement plus général.

Lors du cours suivant, à l'invite de l'observateur, les élèves tentent de tester sur leurs graphiques s'il est exact que le nombre de bactéries augmente dans de mêmes rapports sur des intervalles de temps égaux. À ce stade-là, pour certains élèves, la signification des rapports constants n'est pas encore stabilisée car ils confondent avec des accroissements constants, surtout à propos du graphique dit « constant » (celui en ligne brisée dont les pentes sont jugées constantes) : *« En une demi-heure, on obtient la moitié du segment »* (en plus, veut-il dire). L'observateur revient à la charge fréquemment pour faire comprendre ce que signifie numériquement parlant l'hypothèse *a priori*. Comme la compréhension de la croissance dans un même rapport ne va pas de soi, les élèves supposent qu'il y a 100 bactéries au départ. Finalement, ils établissent que les deux rapports correspondants aux deux premières demi-heures successives sur la ligne brisée, sont égaux à 3/2 et 4/3 et, sur cette base, rejettent le modèle de la ligne brisée comme candidat vérifiant l'hypothèse des rapports constants.
À l'étape suivante, la moyenne arithmétique des rapports 3/2 et 4/3 est un nouveau candidat du rapport constant recherché. En le testant sur la condition initiale de 120 bactéries au moment zéro, les élèves constatent que ce rapport ne convient pas :

$$120\cdot((3/2+4/3)/2)\cdot((3/2+4/3)/2) = 120\cdot17/12\cdot17/12.$$

Finalement, les élèves trouvent le bon rapport en s'appuyant sur le schéma de calcul utilisé pour tester le rapport17/12*,*suite à de multiples interventions de l'observateur qui leur suggère : « *Reprenez par écrit vos calculs de tout à l'heure* » et qui les pousse à « rassembler » leur calcul :

Élève : Je prends 120, après une heure, je dois avoir 240.

L'élève note dans le cahier $(17/12)\cdot 120 = 170$

$170\cdot(17/12) = 280{,}833$

Observateur : Essaie de rassembler ce calcul en une seule ligne pour le rendre compact.

L' élève écrit $((17/12\cdot 120)\cdot 17/12$

Observateur : Simplifie encore cela.

L' élève écrit $(17/12)^2\cdot 120$

Observateur : Et vous voudriez que cela soit égal à deux cent quarante. Où est alors le problème ?

Elève : Si je mets au carré

L' élève écrit $(17/12)2 = 2{,}0069444$

Observateur : Pourquoi ce rapport dix-sept sur douze n'est-il pas le bon ?

Élève : Car dix-sept sur douze au carré n'est pas égal à deux.

Observateur : Donc quel est le bon rapport ?

Élève : C'est la racine de 2.

Le symbole $\sqrt{2}$ utilisé pour noter l'évolution de la population des bactéries toutes les demi-heures permet enfin de mettre en évidence la structure multiplicative de la suite ainsi construite, sous forme de tableaux numériques. Quant à l'évolution de la population des bactéries de quart d'heure en quart d'heure, les élèves formulent trois propositions pour le rapport : la racine de la racine carrée de deux, racine quatrième de deux, la moitié de la racine carrée de deux. Les observations se terminent à cette étape du travail des élèves.

3. Analyse *a posteriori*

3.1 Un milieu, tantôt antagoniste, tantôt allié, qui suppose un chassé-croisé d'un registre à l'autre

L'expérimentation présentée à la sous-section 2.6 montre que le travail de recherche de solutions évolue par changements fréquents de registres. En effet, le traitement du problème se fait à l'aide de trois représentations fonctionnant en concomitance : représentation graphique, numérique et algébrique. La première représentation utilisée est algébrique : il s'agit du symbole 2^x. Le travail de recherche se poursuit à l'aide des représentations graphiques, utilisées comme moyens d'exprimer les différents modèles de croissance. Dans la suite du travail, ces représentations deviennent le milieu pour faire fonctionner les représentations numériques. Ces dernières servent pour exprimer les rapports de croissance d'un intervalle de temps à un autre et pour représenter des tableaux de valeurs de plus en plus « denses ». Ce dernier est devenu, à son tour, le milieu pour le symbole algébrique : l'expression $(\sqrt{2})^n$.

Mais ce compte-rendu d'expérimentation illustre aussi comment ces changements de registres répondent à des sollicitations de l'observateur qui, loin de vendre la mèche sur le fond, ponctue ses interventions de conseils et sollicitations qui ont créaient le milieu attesté par la progression même des élèves. En effet, les interventions de l'observateur ont facilité la poursuite du travail des élèves d'une conjecture à l'autre en relançant régulièrement le processus de validation ou d'invalidation des conjectures successives. Parmi les gestes décrits ci-dessus, nous retenons l'importance de ceux qui facilitent la construction de plusieurs graphiques illustrant l'évolution possible d'une population de bactéries, de ceux qui encouragent de tester sur ces graphiques l'hypothèse relative à la croissance dans un même rapport et de ceux qui conduisent les élèves à trouver le bon rapport pour l'intervalle d'une demi-heure.

Un point important à soulever est que le milieu ainsi créé est aussi bien allié qu'antagoniste. Il est antagoniste dans la mesure où certains graphiques ont pu être rejetés car contredisant l'hypothèse *a priori* d'une croissance selon des rapports égaux. Cependant, cette démarche d'invalidation, à son tour, a donné à cette hypothèse une certaine visibilité, la dégageant de la prégnance dont la formule exponentielle jouissait, même si cette visibilité est apparue *a contrario* : les élèves ont compris l'hypothèse des rapports égaux en la mettant à l'épreuve sur des exemples qui ne la vérifiaient pas. En outre, c'est en reproduisant à l'identique - à la sollicitation du professeur - le calcul fait alors, celui qui a servi à rejeter le rapport 17/12, que les élèves ont établi la valeur du rapport constant pour les demi-heures, conforme tant à l'hypothèse *a priori* qu'au doublement des bactéries d'une heure à l'autre. C'est donc une fausse conjecture faite par les élèves qui a constitué le nouveau milieu, allié cette fois, pour établir le résultat correct. Cette étape permet de nuancer une certaine interprétation de la théorie des situations didactiques de G. Brousseau selon laquelle seul un milieu antagoniste pourrait favoriser un apprentissage par adaptation.

Mais le milieu en question ne pouvait en constituer un si les élèves n'avaient pu se l'approprier. C'est pourquoi, nous avons fait la liste de quelques savoir-faire qui ont permis aux élèves de formuler des conjectures, d'en invalider et de faire des raisonnements locaux :

- se servir de la représentation graphique pour y lire des valeurs des fonctions et calculer des rapports.
- vérifier si un rapport donné pour une demi-heure est conforme à l'hypothèse de doublement

des bactéries toutes les heures.

- exprimer par une formule la régularité d'un tableau de nombres.
- vérifier que la racine quatrième de 2 est égal à la racine carrée de la racine carrée de 2.

3.2 Une démarche de réfutation des modèles à l'épreuve d'une condition fonctionnelle

La réfutation est un procédé logique qui sert à mettre à l'épreuve et éventuellement invalider une proposition ou un argument, par la recherche d'un contre-exemple ou la preuve par l'absurde. Dans le cas de l'expérience menée ici, il s'agit de la réfutation des modèles graphiques (fig. 2) d'une fonction du temps qui croît dans de mêmes rapports sur des intervalles de temps égaux. Il s'agit là d'une hypothèse plutôt théorique pour laquelle on ne questionne pas vraiment l'existence d'une éventuelle justification expérimentale : on cherche à modéliser cette hypothèse au moyen d'une expression analytique dont le sens est précisé de proche en proche, pour des valeurs du temps d'abord entières, puis rationnelles et enfin, irrationnelles (comme le temps du triplement traité plus loin, dans la sous-section 3.5). Le « bon » modèle, en l'occurrence le modèle exponentiel, sera celui qui résistera à une tentative de réfutation de divers modèles candidats, en s'imposant cette hypothèse théorique. Une telle démarche correspond à la réfutation décrite par Popper (1973) et appliquée ici dans le cas du modèle exponentiel à l'épreuve d'une condition fonctionnelle.

3.3 Des modèles concurrents d'une expression algébrique prégnante et transparente

Encore faut-il qu'il y ait d'autres modèles-candidats. La difficulté majeure à les envisager spontanément tient surtout, nous semble-t-il, au phénomène de transparence dont les expressions analytiques font l'objet. Ce phénomène, doublé ici d'une forte prégnance de la forme exponentielle, apparait dans nos expérimentations de plusieurs façons.

D'abord, plusieurs élèves sont prompts à conclure qu'il s'agit d'un modèle exponentiel dès qu'ils entendent parler du doublement des bactéries d'heure en heure, sans se douter qu'il s'agit là d'une conclusion hâtive : « *On remarque que le nombre de bactéries croît de plus en plus. Il double à chaque heure. C'est donc une fonction exponentielle* ».

Ensuite, certains élèves sont obnubilés par la formule exponentielle qu'ils étendent inconsciemment des naturels à tous les nombres et qui semble bénéficier à leurs yeux d'un crédit *a priori*. A tel point qu'ils ne voient pas que cette formule contredit d'autres de leurs affirmations sur la croissance des bactéries. Ainsi, lors d'une expérience, un élève généralise la formule $y = (g\cdot 2)^n$ par la formule $y = (g\cdot 2)^t$ et, plus loin, il affirme qu' « *entre chaque heure, il est possible d'envisager les différentes variations du nombre de bactéries* ». Un autre élève fait une erreur semblable : « *On remarque que le nombre de bactéries croît de plus en plus. Il double à chaque heure. C'est donc une fonction exponentielle. Entre chaque heure, on peut imaginer plusieurs façons possibles d'évolution de la croissance des bactéries ».*

Enfin, des élèves savent que l'on doit arriver à la forme analytique caractéristique de l'exponentielle, ce qui parasite leur apprentissage empêchant, chez eux, une quelconque réceptivité à la nécessité de mettre ce modèle à l'épreuve sous la contrainte d'une croissance selon des rapports égaux en de mêmes intervalles de temps. Un épisode cité ci-dessus montre comment la facilité de manipulation du symbole 2^t, qui transporte implicitement des propriétés des exposants naturels aux exposants rationnels, rend nulle et non avenue cette hypothèse sur la croissance. En effet, c'est en utilisant ce symbole qu'un élève entend répondre à la question : « *sachant qu'une population de bactéries augmente dans un même rapport, calculez le rapport correspondant à l'évolution d'une demi-heure à l'autre* ».

Voici son calcul :

$$2^{t+(1/2)}/2^t = (2^t\, 2^{1/2})/2^t = 2^{1/2} = \sqrt{2}$$

Ce faisant, l'élève déduit la réponse attendue de la notation algébrique du modèle supposé sans se rendre compte que l'intention du professeur est tout autre : il s'agit d'établir que, sur des demi-heures, ce rapport vaut $\sqrt{2}$ pour en conclure ensuite seulement que la valeur de la fonction en 1/2 peut s'écrire sous la forme $2^{1/2}$ où, par commodité, l'exposant rappelle la valeur du temps considérée. Cette transparence du symbole 2^x rend difficile le rôle du professeur qui, à plusieurs reprises, est obligé d'attirer l'attention des élèves sur cette fameuse hypothèse *a priori* de croissance selon des rapports égaux et à l'épreuve exclusive de laquelle il convient de jauger les modèles candidats.

Ajoutons à ces observations d'autres que nous avons pu faire dans le cadre d'une formation initiale de professeurs du cycle supérieur (niveau lycée) prompts à réfuter un graphique composé de fonctions affines par morceaux pour pouvoir garder le modèle exponentiel dont ils savent que le graphique est « courbe », en évoquant un argument qui ne tient pas la route : « *Sur un tel graphique, le nombre de bactéries double toutes les heures mais uniquement pendant les heures situées entre deux valeurs entières du temps* ». D'où l'intérêt de la question 2 prévue dans le dispositif expérimental présenté dans la sous-section 2.1.

Dans la situation analysée ici, les modèles concurrents de l'expression exponentielle sont principalement des modèles graphiques. En effet, vu la prégnance de cette expression, il eût été illusoire de lui en opposer une autre. Par contre, invités à formuler d'autres possibilités d'évolution des bactéries dans un registre graphique, les élèves en proposent effectivement dans plusieurs expérimentations réalisées. Au point, comme on l'a vu plus haut, de ne pas s'apercevoir des contradictions entre, d'une part, la formule proposée et, d'autre part, les graphiques dessinés. Ce choix peut expliquer les nombreuses réponses obtenues : des graphiques en escaliers, des droites, des lignes brisées contenant ou non des paliers ou contenant des segments parallèles à l'axe des ordonnées, des courbes dont la "pente" croît, ou dont la pente décroît … : autant de réponses que le professeur et les élèves vont pouvoir tester à l'épreuve de l'hypothèse *a priori*.

L'important n'est pas d'obtenir ces réponses spontanément des élèves car le professeur pourrait injecter lui-même des suggestions inspirées par le déroulement de l'expérimentation. Mais ce qui est primordial c'est que ces suggestions puissent être confrontées aux modèles *a priori* de telle sorte que tous, hormis le modèle exponentiel, puissent être falsifiés par l'exigence d'une croissance suivant des rapports égaux sur de mêmes intervalles de temps.

3.4 Un paramétrage balbutiant

L'expérience décrite ici met en scène des élèves pour lesquels l'idée de paramétrage est peu disponible, sans doute pour ne l'avoir guère rencontrée auparavant dans une perspective de modélisation fonctionnelle. Aucun élève, par exemple, ne désigne par un paramètre, le nombre de bactéries existant au temps initial : ils proposent une bactérie voire zéro.

L'idée d'un plus grand nombre de bactéries surgit, comme on l'a vu, dès que les élèves doivent effectuer des calculs avec ce nombre, par exemple diviser par 2 ou multiplier par 3/2 sans pouvoir considérer des moitiés de bactéries :

Élève 1 : S'il y en cent au début, on a « cent demi bactéries ».
Élève 2 : Il n'y a pas de demi-bactéries.
Observateur : On ne compte pas demi-bactéries.
Élève 4 : Cela fait donc cent cinquante bactéries.

Et c'est là sans doute des circonstances qui permettraient de mettre en évidence l'intérêt de paramétrer.

Mais nous voulons faire ici une remarque relative au paramétrage et qui nous parait importante. Lors d'une autre expérimentation, nous avons vu des élèves ajuster la base d'une fonction exponentielle (en racine quatrième de 2) pour rendre compte de ce que le nombre de bactéries double toutes les quatre heures. En comparant cette situation à celle de l'énoncé proposé ici, on voit la base du modèle s'adapter aux circonstances d'un énoncé à l'autre, ce qui revient à prendre cette base pour paramètre : cela parait relativement lourd à gérer. Il convient ici de noter que les scientifiques ne s'embarrassent pas forcément de diverses fonctions exponentielles aux bases multiples. Souvent, ils préfèrent choisir la même et adapter le modèle à l'énoncé concerné en jouant sur d'autres paramètres que la base. Le choix d'une base égale à « e » est assez canonique, le modèle paramétré s'écrivant alors $y = ae^{bx}$. Dans la plupart des problèmes de ce type, il est question d'une quantité ou d'une grandeur dont la vitesse de variation est proportionnelle à la valeur prise au début de la variation. Les particularités de la fonction exponentielle de base « e » et, en particulier le fait d'être égale à ses dérivées successives, font que le paramètre b est précisément le coefficient permettant d'exprimer cette proportionnalité. Le paramètre a correspond, quant à lui, à la valeur de cette grandeur ou quantité à l'instant initial : on dispose donc d'un modèle paramétré dont les paramètres ont une signification vis-à-vis du contexte considéré.

La prise de conscience, par l'élève, de tout cela requiert bien sûr un apprentissage en aval de celui que nous avons cherché à provoquer ici.

3.5 L'impasse sur les irrationnels … question à poursuivre

La modélisation de la croissance de la population des bactéries ne suppose pas forcément, à première vue, une extension aux nombres irrationnels. En effet, le tracé du graphique crée une continuité de nature géométrique alors que, du contexte qui est celui d'une quantité évoluant dans le temps, naît l'intuition d'une continuité physique. Ces deux sortes de continuité suppléent en quelque sorte l'absence d'une continuité numérique. En outre, dans tout univers expérimental, seules les valeurs rationnelles sont accessibles aux sens et aux mesures, ce qui rend pertinent l'avis des bourbakistes pour lesquels le physicien expérimentaliste n'a besoin que des nombres rationnels ou des décimaux autres que les illimités non périodiques.

D'ailleurs, nous avons pu observer des élèves qui pour des raisons d'ordre pratique, contestent l'intérêt de définir des puissances à exposants irrationnels : pourquoi faut-il définir pour des valeurs irrationnelles de t puisqu'en pratique le calcul de la population des bactéries en fonction du temps se fait pour des fractions d'une unité du temps ?

Cependant, c'est le propre d'un modèle mathématique de « vivre sa vie » de manière autonome, en dehors des contextes pour lesquels il constituait un outil utile : ce qui, tôt ou tard, débouche sur des questions plus spéculatives. La question théorique majeure qui se pose ici est de savoir si l'on peut définir des puissances à exposants irrationnels comme limites de suites de puissances à exposant rationnels. C'est à la fois une question d'existence et d'unicité qui ne s'est pas posée avant, hormis quelques conditions d'existence, les puissances à exposants rationnels se définissant sur base d'opérations déjà connues des élèves : des produits, des puissances n-ièmes, des inverses de telles puissances ou des racines n-ièmes. Mais cette question ne peut être traitée sans que la « continuité » même de l'ensemble des nombres sur lesquels on travaille soit questionnée et formalisée. Comme Henrotay et al. (2015) le montrent, la question de l'existence et celle de l'unicité ne peuvent être réglées sans mettre sur le tapis des axiomes, tel l'axiome d'Archimède ou celui des intervalles emboîtés que les réels doivent satisfaire pour pouvoir rendre compte du continu géométrique ou physique et pour pouvoir constituer le matériau de base de l'analyse continue.

Si de telles démonstrations sont indispensables pour « acculturer » des élèves à une approche plus formalisée de l'analyse, cette approche n'est peut-être pas accessible à tous les élèves. Par contre, le dispositif global présenté dans AHA (1999) et, en particulier, la question inverse « *À quel moment la population triplera-t-elle, sachant qu'elle double toutes les heures ?* » constitue une première rencontre, d'ordre numérique, avec les irrationnels.

En effet, l'écriture rationnelle du temps de triplement, t_3, s'avère impossible car l'égalité $2^{k/n} = 3$ conduirait à écrire $2^k = 3^n$ donc à égaler un nombre pair à un nombre impair. Le temps de triplement fournit ainsi l'exemple d'un exposant irrationnel dans une puissance égale à un nombre entier et montre par là la nécessité d'étendre l'expression aux irrationnels par la technique des intervalles emboîtés : on a $1,5 < t_3 < 1,6$ car $2^{1,5} < 3 < 2^{1,6}$.

4. Extension aux quatre équations fonctionnelles en boucle

Les fonctions exponentielles et logarithmes sont considérés comme modèles fonctionnels de divers systèmes mathématiques et extra-mathématiques. Comme Henrotay et al. (2015) le montrent, ces fonctions sont *grosso modo* des solutions de quatre équations fonctionnelles qui en constituent les « raisons fondamentales ». Derrière eux, se profile une organisation mathématique qui établit les relations entre elles (fig. 2). Deux critères jouent dans la mise en correspondance entre ces équations et leurs solutions : le caractère, soit exponentiel, soit logarithmique, d'une part et le nombre de paramètres, d'autre part.

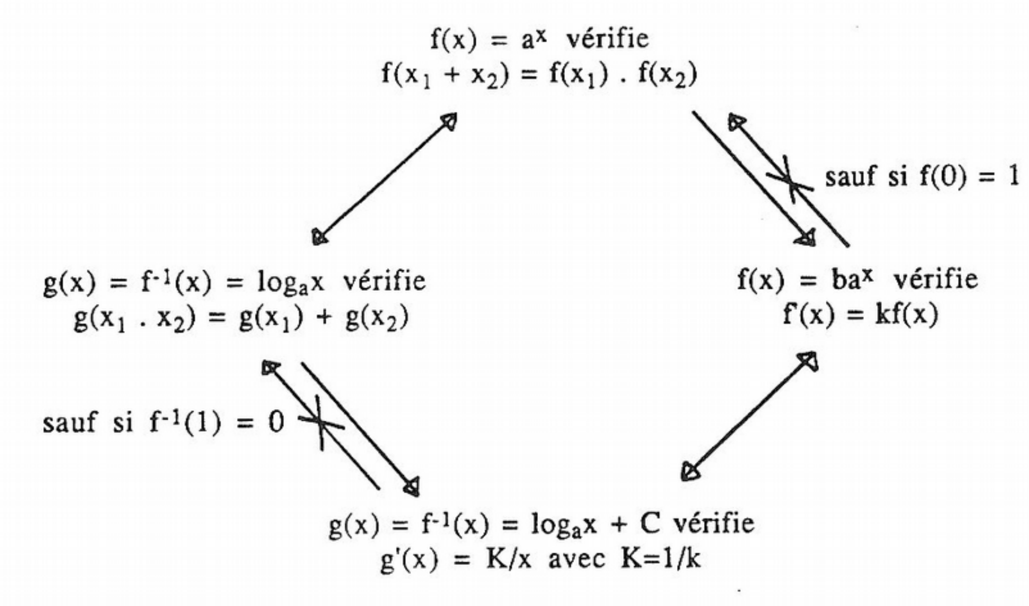

Figure 2. *Quatre équations fonctionnelles en boucle.*

Bien sûr, les solutions proposées pour résoudre ces équations fonctionnelles sont censées être bien « gentilles » : c'est-à-dire vérifier l'hypothèse de dérivabilité – les dérivées étant mobilisées dans deux équations fonctionnelles – et donc de continuité. L'exemple d'une théorie complète et cohérente qui y est associée est présent dans Henrotay et al. (2015).

Pour chacune des équations citées dans la figure 2, on peut trouver un contexte porteur, comme ceux présentés ci-dessous.

Équation $f(x_1+x_2) = f(x_1)\cdot f(x_2)$

Toute fonction vérifiant cette équation transforme la somme en produit et une suite arithmétique en suite géométrique. Dans la section 2, nous avons modélisé le problème de croissance d'une population de bactéries par la condition $P(t+\Delta t)/P(t) = P(\Delta t)/P(0)$. Cette condition traduit le caractère aléatoire de dédoublement de bactéries en dehors du laboratoire et lorsqu'il y a de l'espace et de la nourriture en suffisance.

Le modèle $P(t+\Delta t)/P(t) = P(\Delta t)/P(0)$ devient $P(t+\Delta t) = P(t)P(\Delta t)$ lorsque $P(0) = 1$.

Équation $g(x_1\cdot x_2) = g(x_1)+g(x_2)$

À l'inverse de l'équation précédente, cette équation transforme le produit en somme, une suite géométrique en suite arithmétique. D'où l'idée du problème inverse au problème de dédoublement de bactéries : « *Combien de temps pour tripler, pour quadrupler* , ... ? » proposé dans le manuel AHA. Il permet, par exemple, de calculer le temps de sextuplement comme la somme du temps de doublement et du temps de triplement. La fonction log_2 est alors définie comme fonction réciproque de exp_2, et le calcul du sextuplement correspond à la propriété fondamentale des logarithmes : $\log_2 6 = \log_2 2\cdot 3 = \log_2 2 + \log_2 3$.

Équation $f'(x) = kf(x)$

Le contexte de la désintégration d'une matière radioactive est parmi les plus connus. Le physicien Rutherford et son équipe ont montré que les atomes de certains éléments dits « radioactifs » sont instables et que, sur une période de temps donné, la proportion fixe des atomes se désintègre spontanément pour former un nouvel élément. Puisque la radioactivité est une propriété des atomes, Rutherford a montré expérimentalement que la radioactivité d'une substance est directement proportionnelle au nombre d'atomes présents dans cette substance.

Ainsi, si $N(t)$ désigne le nombre d'atomes présents au moment t, $\Delta N = -(N(t)-N(t+\Delta t))$ le nombre d'atomes désintégrés pendant la durée Δt, alors $-\Delta N/\Delta t$ qui est le nombre d'atomes qui se désintègrent par unité de temps, est proportionnel à N : $\Delta N/\Delta t = -kN$. Après le passage à la limite, lorsque $\Delta t\rightarrow 0$, on obtient l'équation différentielle $dN/dt = -kN$.

Quant à la recherche d'une fonction proportionnelle à sa dérivée, le manuel AHA (1999) propose de déterminer les allures possibles des graphiques de fonctions, définies sur **R** et proportionnelles à leur dérivée première. Une expérimentation graphique, basée sur une stratégie d'essais et erreurs, permettrait aux élèves, d'après Grand'Henry et Schneider (1991), de réaliser, par exemple, que de telles fonctions ne peuvent posséder de racines. En effet, si f s'annule en changeant de signe, tout en restant monotone dans un voisinage de la racine, alors, dans ce voisinage, la dérivée garde un signe constant, ce qui contredit la proportionnalité de la fonction et de sa dérivée. On aboutit à une contradiction semblable dans le cas d'une annulation sans changement de signe. Cette nouvelle équation fonctionnelle : $f'(x) = kf(x)$ détermine donc, de proche en proche, des graphiques qui ressemblent à ceux des fonctions exponentielles. *À* partir de là se profile une conjecture : s'agit-il des mêmes fonctions ?

Ce parcours bouleverse la relation unilatérale classique entre les représentations algébrique et graphique des fonctions exponentielles, puisque ces représentations existent indépendamment l'une de l'autre avant d'être rapprochées. De plus, le graphique prend une signification nouvelle : c'est le lieu des points dont les coordonnées vérifient une équation différentielle.

Remarquons, au passage, que la propriété d'une matière radioactive établie par Rutherford selon laquelle sur une période du temps donné, la proportion fixe des atomes se désintègre, peut être aussi traduite par l'équation fonctionnelle $N(t+\Delta t)/N(t)=N(\Delta t)/N(0)$.
Cette observation permet donc de pressentir l'équivalence entre les équations $N(t+\Delta t)/N(t)=N(\Delta t)/N(0)$ et $dN/dt = -kN$.

Équation $g'(x) = K/x$

Dans le manuel AHA(1999), on propose la modélisation d'une loi en psychologie expérimentale qui exprime la dépendance entre l'excitation comme le bruit ou la lumière et la sensation liée à sa perception : l'accroissement Δy de la sensation y est inversement proportionnel à l'intensité x de l'excitation et directement proportionnel à l'augmentation Δx de l'intensité de l'excitation, autrement dit $\Delta y = \Delta x \cdot K/x$, et à la limite lorsque $\Delta t \rightarrow 0$, $dy/dx = K/x$.
Le problème de recherche d'une fonction dont la dérivée est proportionnelle à la fonction inverse conduit, par la technique des champs de tangentes, à des graphiques qui ressemblent à ceux des fonctions logarithmes, bien que demeure une certaine incertitude : lorsque ces graphiques s'approchent de l'axe des ordonnées, leur pente tend vers l'infini et, ainsi, soit ils peuvent atterrir sur l'axe des ordonnées, soit admettre cet axe pour asymptote.

Conclusion

La genèse de fonctions exponentielles présentée ici est réalisée via l'équation fonctionnelle $P(t+\Delta t)/P(t) = P(\Delta t)/P(0)$ qui permet l'investissement des modèles des suites arithmétiques et géométriques. Nous avons expérimenté cette équation fonctionnelle comme milieu de la détermination du sens du symbole a^x et de ses diverses significations. Ainsi, la perspective envisagée ici a été de considérer l'équation fonctionnelle comme système de départ à modéliser auquel il convient d'associer, sous de “bonnes” hypothèses, le modèle $f(x) = a^{x.}$
L'expérimentation nous a permis d'établir entre autres, que regarder des fonctions comme des solutions d'équations est un point de vue tout à fait nouveau pour les élèves, et cette démarche, où il faut obtenir une expression analytique qui modélise un système constitué d'une équation fonctionnelle, ne va pas de soi.

L'expérimentation a confirmé que l'illusion de la transparence du symbole 2^x et sa prégnance sont un obstacle à la genèse de la fonction exponentielle à partir de la contrainte formulée par l'équation fonctionnelle car les manipulations faciles de ce symbole rendent non nécessaire l'utilisation de cette contrainte. C'est la démarche de réfutation des modèles concurrents de la formule exponentielle, principalement les modèles graphiques, qui s'est avérée utile pour franchir cet obstacle car tous les modèles, hormis le modèle exponentiel, ont pu être réfutés par l'exigence d'une croissance suivant des rapports égaux sur de mêmes laps de temps.

L'expérimentation a montré que le milieu créé par les questions ou par les interventions de l'observateur est tantôt antagoniste, tantôt allié et suppose un chassé-croisé d'un registre à l'autre. En effet, il est antagoniste dans la mesure où certains graphiques ont pu être réfutés car contredisant l'hypothèse *a priori* d'une croissance selon des rapports égaux en des temps égaux. Cependant, cette réfutation a donné à l'hypothèse une certaine visibilité, la dégageant de la prégnance dont le symbole exponentiel jouissait : les élèves ont compris l'hypothèse des rapports égaux en la mettant à l'épreuve sur des exemples qui ne la vérifiaient pas. En outre,

une fausse conjecture de la valeur du rapport constant pour les demi-heures, faite par les élèves, a constitué un nouveau milieu, allié cette fois, pour établir le résultat correct.
La brève analyse de quatre équations fonctionnelles en boucle a montré que le processus de modélisation évolue par changements fréquents de registres, il progresse en particulier à l'aide de trois représentations fonctionnant en concomitance : représentations graphiques, numériques et algébriques.

Pour favoriser une approche des fonctions exponentielles et logarithmes par des équations fonctionnelles, il faudrait un amont didactique dans lequel l'enseignement et l'apprentissage des fonctions, depuis le collège, intègre la démarche de modélisation par fonctions et l'étude de classes paramétrées de fonctions qui est induite par cette modélisation.

Références

AHA (1999) *Vers l'infini pas à pas*, Manuel pour l'élève, De Boeck Wesmael.

BLOCH I. (1999) L'articulation du travail mathématique du professeur et de l'élève dans l'enseignement de l'analyse en première scientifique. Détermination d'un milieu - Connaissances et savoirs. *Recherches en didactique des mathématiques*, **19**/2,

https://www.researchgate.net/publication/267864382, 135-193.

BLOCH I. (2005) Dimension a-didactique et connaissance nécessaire : un exemple de 'retournement' d'une situation. *Sur la théorie des situations didactiques : Questions, réponses, hommage à Guy Brousseau*, M.H.Salin, P. Clanché et B. Sarrazy Eds., Grenoble : La Pensée Sauvage, 143-152.

BROUSSEAU G. (1998) *Théorie des situations didactiques,* Grenoble : La Pensée Sauvage.

CONNE F. (1992) Savoir et connaissance dans la perspective de la transposition didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* **12**/2.3.

GRAND'HENRY-KRYSINSKA M. ET SCHNEIDER, M. (1991) *Des fonctions qui modélisent des types particuliers de croissance,* Namur *:* F.U.N.D.P.

HENROTAY P., KRYSINSKA M., ROSSEL H., SCHNEIDER M. (2015) *Des fonctions taillées sur mesure*, Presse Universitaire de Liège.

KRYSINSKA M., SCHNEIDER M. (2001) Exploitation du concept de milieu pour analyser un enseignement relatif aux fonctions exponentielles et logarithmes. *Actes de la 11^e Ecole d'été de didactique des mathématiques*, Grenoble :La Pensée Sauvage.

POPPER K. 1973 (1959) *La logique de la découverte scientifique*, Paris, Payot, 286.

SALIN M-H., (2OO2) Repères sur l'évolution du concept de milieu en théorie des situations. *Actes de la 11e école d'été de didactique des mathématiques,* La Pensée Sauvage.

SCHNEIDER M. (2001) Praxéologies didactiques et praxéologies mathématiques, A propos d'un enseignement des limites au secondaire. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, **21**/1.2, 7-56.

TARDIF J. (1999) *Le transfert des apprentissages,* Montréal : Les éditions Logiques.