DES PISTES POUR ENSEIGNER LES GRANDS NOMBRES AU CYCLE 3

Frédérick TEMPIER[1]
INSPÉ de l'Académie de Versailles,
CY Cergy Paris Université, LDAR, Universités de Paris, Artois, Creteil, Rouen

Résumé. L'apprentissage de la numération des grands nombres entiers pose certaines difficultés aux élèves de cycle 3 (Chesné & Fisher, 2015). Des travaux de didactique (Mercier, 1997 ; Ligozat & Leutenegger, 2004 ; Chambris, Tempier & Allard, 2017) ont pointé des manques de savoir de référence pour cet enseignement. Pourtant, la compréhension des règles d'écriture des grands nombres entiers peut permettre de généraliser les connaissances de numération et de renforcer l'apprentissage des nombres décimaux. Après la conception d'une première ressource (Tempier, 2013) visant à enrichir l'enseignement de la numération pour les nombres à 4 chiffres, nous avons étendu cette réflexion pour concevoir une ressource sur les grands nombres en cycle 3. Les analyses (mathématiques, épistémologiques et didactiques) menées pour concevoir cette ressource nous amènent à proposer des pistes de travail pour enrichir l'enseignement des grands nombres.

Mots-clés. Numération, grands nombres, unités, enseignement, ressource.

Introduction

Dans ce texte[2], nous nous intéressons à l'apprentissage des nombres entiers dans les dernières années de l'école primaire et le début du collège. L'enjeu principal annoncé par les programmes actuels (MEN, 2015) et plus anciens est la compréhension des *« grands nombres »*, c'est-à-dire supérieurs à dix-mille (et inférieurs à un billion). Cet apprentissage peut permettre de généraliser les connaissances de numération et de renforcer l'apprentissage des décimaux. Mais il n'est pas sans difficulté pour les élèves. Des travaux de recherche ont montré que ces difficultés pouvaient être mises en relation avec une certaine transparence des savoirs mathématiques en jeu pour les enseignants. Nous les rappellerons dans la partie 1. Notre recherche en cours vise à clarifier ces savoirs et à identifier des conditions permettant d'enrichir l'enseignement actuel des grands nombres. Pour cela, nous nous appuyons sur une méthodologie d'ingénierie didactique pour le développement d'une ressource. Cette méthodologie, ainsi que la ressource conçue, seront rapidement présentées dans la partie 2. Nous nous appuyons sur des analyses mathématiques, épistémologiques et didactiques que nous expliciterons dans les parties 3 et 4. Elles nous permettront de dégager, dans la partie 5, des pistes de travail pour enrichir l'enseignement des grands nombres au cycle 3.

1. Certaines difficultés d'apprentissage et d'enseignement des grands nombres

Dans beaucoup de manuels de cycle 3, le travail sur les grands nombres est souvent centré sur

[1] frederick.tempier@cyu.fr

[2] Une version similaire a été publiée dans le n°108 de la revue *Petit x*.

l'apprentissage de la lecture et de l'écriture en chiffres de ces nombres (associer l'écriture en chiffres et l'écriture en lettres), même si cette compétence n'est plus citée dans les programmes actuels. Pourtant, Chesné et Fischer (2015) rappellent que *« un quart des élèves (respectivement un tiers) arrivant en sixième hors éducation prioritaire (respectivement en éducation prioritaire) ne savent pas écrire un grand nombre »*. Les deux auteurs évoquent ces résultats en relation avec l'item d'écriture en chiffres de « un-million-six-cent-mille » de l'évaluation nationale en sixième de 2008 qui est réussi par 76 % des élèves, alors que presque tous les élèves réussissent à écrire un nombre plus petit comme « trois mille-trois » (96 % de réussite).

En proposant nous-même une évaluation en fin de sixième auprès de 151 élèves (dont 41 en REP), nous avons constaté que la difficulté à écrire « un-million-six-cent-mille » est moins importante à ce moment de la scolarité pour notre échantillon (89 % de réussite) mais que l'écriture d'un nombre comme « dix-sept-millions-deux-mille-cinquante-huit » est toutefois encore un obstacle pour beaucoup d'élèves : 69 % de réussite au total, 59 % pour les élèves de REP (Chambris, Tempier & Allard, 2017). Cela semble sans doute lié à la difficulté à écrire des « 0 » qui ne s'entendent pas à l'oral (les « zéros muets »). Cette évaluation montre également le peu de connaissance des relations entre unités des grands nombres en fin de cycle 3 : la moitié des élèves environ ne savent pas convertir 4 millions en centaines de milliers ou 3 millions en milliers. C'est ce qui nous amène à penser, comme Chesné et Fischer (2015), que la conceptualisation des nombres entiers est insuffisante pour beaucoup d'élèves de cycle 3, ce qui peut également avoir des conséquences sur leur compréhension des nombres décimaux.

On retrouve aussi ces difficultés d'élèves dans des études proposant des analyses de séances de numération sur les grands nombres dans des classes de cycle 3 (Blanchard-Laville, 1997 ; Ligozat & Leutenegger, 2004). Ces travaux pointent surtout les difficultés auxquelles sont confrontés des enseignants dans l'articulation entre le système de numération parlé et le système de numération écrit. Par exemple, Mercier (1997) montre que, quand il s'agit d'écrire un nombre en chiffres (« dix-sept-millions-deux-mille-cinquante-huit »), face à certaines erreurs d'élèves (17 2000 58, 17 2 58, 017 200 058), *« l'enseignante se retrouve dans une impasse au moment où elle doit invalider »* ces propositions. Selon Mercier (*ibid.*), ces difficultés du côté des élèves et de l'enseignante s'interprètent comme un *« manque à savoir institutionnel »*, c'est-à-dire que le manque de textes de référence sur la question des grands nombres rend ces savoirs transparents (au sens de Margolinas et Laparra, 2011) pour les enseignants. L'enseignante observée fait alors comme s'il n'y avait rien à savoir pour écrire un nombre en chiffres, comme si cela allait de soi.

Une étude plus récente (Chambris, Tempier & Allard, 2017) vient confirmer et préciser ces résultats, dans le cas d'une enseignante de CM1 ayant pourtant participé à un travail approfondi sur les nombres entiers inférieurs à 10 000. L'enseignante réinvestit l'idée d'un travail sur les relations entre unités[3] (un enjeu important dans le travail réalisé sur le millier) en termes de relations entre unités, milliers et millions, autrement dit sur les relations entre unités de base 1000. Cependant, elle ne semble pas faire des relations entre les unités consécutives (par exemple dizaines de milliers, centaines de milliers et millions), un enjeu d'apprentissage pour les grands nombres. De plus, à plusieurs moments de la séance, l'enseignante semble démunie face à certaines difficultés éprouvées par ses élèves. Par exemple, face à un élève qui n'arrive pas à écrire « douze-mille-cinq-cents » ou à un autre qui écrit 34.20 pour « trente-quatre-mille-vingt », elle semble ne pas mettre en relation ses connaissances de numération, en particulier sur la

[3] Ceci est d'ailleurs conforme aux programmes actuels mais pourrait ne pas être un enjeu dans les manuels actuels. En effet, Paillard (2017) conclut de son analyse de six manuels scolaires : *« Les mots « mille » et « millions » sont ajoutés au lexique déjà connu ou fréquenté de la numération, sans donner lieu à un travail spécifique soulignant leur fonction de bases auxiliaires pour l'oral (base 1000) »*.

valeur des chiffres dans l'écriture positionnelle, avec ces difficultés. Ceci peut s'interpréter par le fait qu'elle ne prend en compte que le fonctionnement de la numération parlée comme savoir de référence. Elle s'attache, par exemple, à écrire des points entre les classes pour marquer les positions des millions et des milliers, ce qui ne semble pas adapté pour aider les élèves à comprendre la nécessité d'écrire les « 0 » muets. Finalement, le principe de position (par rangs) est remplacé par un principe de position par classes, sans que le lien entre rangs et classes ne soit explicite. Cet enseignement n'est pas suffisant pour permettre aux élèves de renforcer leurs connaissances de la numération écrite alors que les programmes actuels promeuvent la compréhension des règles de la numération pour les grands nombres, les compositions et décompositions en appui sur une connaissance des unités de numération et de leurs relations, *etc.* (MEN, 2015). Cette dernière étude laisse aussi penser qu'il ne suffit pas d'outiller et d'accompagner les enseignants sur les nombres inférieurs à 10 000 pour leur permettre d'être suffisamment armés pour enseigner les grands nombres. Certaines caractéristiques particulières du savoir en jeu nécessitent des apports spécifiques.

2. Conception d'une ressource sur les grands nombres

C'est l'objet de cette recherche en cours (commencée il y a trois ans) de clarifier les savoirs mathématiques sur les grands nombres dont on vise l'apprentissage et ceux qui sont utiles à maîtriser pour les enseigner. Comme nous l'avons déjà fait dans un travail précédent (Tempier, 2013), pour concevoir cette ressource, nous nous appuyons sur l'ingénierie didactique de développement (Perrin-Glorian, 2011) qui est une méthodologie compatible avec cette approche puisqu'elle permet d'étudier, d'une part, les choix fondamentaux de la séquence, d'autre part, les choix de conception pour avoir une ressource qui soit utilisable dans l'enseignement ordinaire par des enseignants n'ayant pas reçu de formation spécifique. Cette méthodologie utilise des cycles de conception et d'expérimentation dans les classes.

La première année a permis la conception d'un prototype de ressource suite à l'observation d'une enseignante de CM1 et a donné lieu à la conception d'un parcours m@gistère[4]. La deuxième année a permis d'expérimenter ce prototype dans une recherche-action menée avec Pascale Masselot : un petit groupe d'enseignants et de formateurs a testé la ressource avec des retours réguliers afin de construire une première version, qui a été expérimentée l'année suivante dans deux classes de REP+ avec des observations régulières de la mise en œuvre.

La version actuelle de la ressource[5] comprend une présentation des enjeux de la séquence, une description détaillée des séances, des fiches photocopiables et une évaluation initiale à proposer avant de tester la ressource. Les déroulements des séances sont décrits de manière assez détaillée : on peut parler d'une ressource « clé en main » où l'on cherche à proposer des supports directement utilisables dans la classe et à limiter le travail de préparation de l'enseignant. La séquence est composée de 4 étapes de 2 séances chacune, avec des prolongements possibles (*cf.* annexe 3). Nous avons cherché à limiter la taille de la séquence pour éviter un surinvestissement du travail sur les grands nombres qui pourrait se faire au détriment d'autres notions mathématiques. Le nombre de séances proposées semble compatible avec le temps qu'un enseignant de cycle 3 peut raisonnablement accorder à cette notion.

L'objet de ce texte n'est pas la présentation de cette ressource mais de certains choix qui ont

[4] Parcours intitulé « Enrichir l'apprentissage des nombres entiers en fin de cycle 2 et en cycle 3 » (CANOPÉ).

[5] La ressource est disponible à l'adresse http://numerationdecimale.free.fr, puis en cliquant sur l'onglet « grands nombres » (consulté le 06/01/2020, *cf.* annexe 2).

guidé cette conception et qui ont été enrichis par les allers-retours entre analyses et expérimentations dans les classes. Nous considérons que ces choix peuvent constituer des pistes de travail sur les grands nombres pour enrichir l'enseignement actuel. Ils seront illustrés par des exemples extraits de notre ressource mais ils visent à avoir une portée plus large pour servir de point d'appui à des concepteurs de manuels ou de ressources diverses ainsi que pour la formation des enseignants.

Dans la partie suivante, nous allons montrer en quoi le concept d'unité constitue un fondement mathématique, épistémologique et didactique pour la conception de situations d'apprentissage de la numération.

3. Un fondement mathématique, épistémologique et didactique : le concept d'unité

3.1. Le concept d'unité

Keller (2016) rappelle que, pour un signe graphique comme celui-ci :

I I I I I

on peut considérer un bâton comme étant une unité et on reconnaît alors le signe du nombre 5, mais on peut aussi considérer chaque extrémité de ces bâtons et reconnaître alors le nombre 10, ou encore considérer ce signe tout entier comme étant une chose et reconnaître alors le nombre 1. L'unité n'est donc pas donnée par l'objet lui-même ou la collection mais est à construire par la pensée. Les anglo-saxons nomment « *unitizing* » la capacité à considérer une pluralité d'objets comme une entité individuelle[6] :

> *Unitizing these ten things as one thing — one group — requires almost negating their original idea of number. It is a huge shift in thinking for children, and in fact, was a huge shift in mathematics, taking centuries to develop (Fosnot & Dolk, 2001).*

Quand on utilise le mot unité dans le contexte des systèmes de numération, cela peut donc faire référence soit à l'unité simple soit à une notion plus générale d'unité, suggérée par cette idée d'*unitizing*. En français, le même mot est utilisé pour ces deux sens alors que les anglo-saxons utilisent le terme « *ones* » pour « unités simples » et « *unit* » pour « unité ».

Pour faire le lien entre ce concept et la compréhension de l'écriture chiffrée, Brissiaud (2005) rappelle que :

> *Comprendre la numération décimale, c'est comprendre des « changements d'unités de comptes » [...] : l'écriture chiffrée 347 par exemple, doit être considérée comme le symbole de l'équivalence entre les deux procédures suivantes. Pour construire une collection ayant 347 objets, il est évidemment possible de les « compter 1 à 1 », mais ce sera long ! Mieux vaut « changer d'unités » et commencer par « compter des cents » plutôt que de compter des uns : « 1 cent, 2 cents, 3 cents ». Ce faisant, on compte les « grandes unités » que sont les cents comme on compterait n'importe quelle autre unité ! Et lorsqu'il ne reste plus assez d'objets pour compter des cents, plutôt que de « compter des uns », mieux vaut continuer en « comptant des dix » (Brissiaud, 2005, p. 230).*

[6] Traduction : *« Unitiser ces dix choses comme une chose, un groupe, demande déjà de rejeter leur notion originale de nombre. C'est une immense évolution dans la pensée des élèves et en fait cela a été une immense évolution dans les mathématiques, qui a pris des siècles à se développer ».*

Les unités (unités simples, dizaines, centaines, ...) sont en relation entre elles, ce qui produit une complexification croissante des relations entre les différentes unités. Les travaux de Fuson et *al.* (1997), repris ensuite par Thanheiser (2009), montrent les différentes interprétations qui en découlent pour chaque unité (décrit dans Tempier, 2016). Si on considère l'exemple de l'unité « centaine », il est possible de considérer la centaine comme cent unités, dix dizaines ou une centaine.

Dans Tempier (2016), nous avons rappelé que la flexibilité dans l'interprétation possible de la centaine (et des autres unités) en lien avec l'écriture chiffrée permet une compréhension profonde de la numération, c'est-à-dire comme système d'unités.

Baturo (2000) considère ce système d'unités comme un réseau de relations multiplicatives. Dès le travail sur les nombres entiers, on peut considérer des relations allant à la fois dans le sens des multiplications et des divisions par 10 : 10 dizaines font 1 centaine mais 1 centaine c'est aussi composée de 10 dizaines. Ces relations peuvent être étendues vers la gauche pour définir de nouvelles unités, ce sera l'objet du travail sur les grands nombres. Et pour un nombre décimal, les principes d'écriture se prolongent aux unités inférieures : dixièmes, centièmes, millièmes, *etc.* qui sont obtenues par des fractionnements de l'unité en dix. Les dixièmes peuvent parfois être à considérer comme un nombre de centièmes, de millièmes, *etc*. Réciproquement, les centièmes peuvent parfois être considérées comme un nombre de dixièmes, d'unités simples, de dizaines, *etc*.

3.2. Possibilité d'une « théorie » de la numération basée sur les unités

Du point de vue historique, la notion d'unité est le principe de base de l'invention des systèmes de numération. Les travaux d'Ifrah (1981) montrent que le fait de considérer dix (pour les systèmes décimaux) comme une unité et de réitérer ce processus permet la constitution d'un système de numération décimale selon un principe itératif : dix unités d'un certain ordre font une unité de l'ordre supérieur. Dans les systèmes additifs, on représente chacune des unités utilisées par des signes juxtaposés (comme le système inventé par les égyptiens dans l'antiquité), en utilisant des chiffres pour les nombres de un à neuf, on obtient un système hybride[7] (comme le système chinois, utilisé encore actuellement). Dans un système positionnel comme celui qui est aujourd'hui utilisé de façon universelle, les unités sont repérées par la position des chiffres dans l'écriture ; elles ne sont donc pas codées par un symbole comme dans les systèmes précédents. C'est ce qui permet une économie d'écriture et la possibilité d'écrire tous les nombres avec seulement 10 symboles. La nécessité d'utiliser le symbole « 0 » apparaît dans ce système positionnel pour marquer l'absence d'unités à certaines positions. Ce système de numération s'appuie sur ces deux principes indissociables :

- le principe décimal, qui correspond à l'organisation du système d'unités utilisés qui obéit à une règle itérative : dix unités d'un certain ordre sont égales à une unité de l'ordre immédiatement supérieur ;
- le principe de position, qui permet de définir la position de chaque unité dans l'écriture en chiffres : unités simples au premier rang à partir de la droite, dizaines au deuxième rang, *etc*.

Chambris (2008) a montré qu'il est possible, pour l'enseignement, de décrire les savoirs de la numération avec les unités. Elle a rappelé l'existence d'une théorie mathématique de la

[7] Le lecteur intéressé trouvera dans l'ouvrage d'Ifrah (1981) une présentation détaillée des exemples de systèmes additifs et hybrides cités ici ainsi que de bien d'autres systèmes historiques.

numération qui s'appuie sur les unités, comme c'est le cas dans de traités anciens tels que celui de Condorcet (1799) ou celui de Bézout et Reynaud qui ont constitué des références pour l'enseignement avant les mathématiques modernes. Cette théorie se différencie de la théorie « moderne » où « l'écriture chiffrée d'un nombre est la suite des coefficients dans la décomposition polynomiale d'un entier dans une base » (Chambris, *ibid.*), comme par exemple $6452 = 6 \times 1000 + 4 \times 100 + 5 \times 10 + 2 \times 1$. La théorie en unités semble plus adaptée, en termes de savoirs à mobiliser, pour l'enseignement de la numération à l'école primaire (Chambris, *ibid.*). Pour l'illustrer, nous donnons ici un exemple de la définition du millier dans le livre de Condorcet (1988), s'appuyant sur les unités d'ordres inférieurs :

> *Si l'on suit la même démarche, et que l'on place un quatrième chiffre à la gauche de ceux qui indiquent des centaines, il indiquera autant de dixaines de centaines, ou autant de mille, qu'il auroit désigné de centaines, s'il avoit été moins avancé d'un rang ; [...] ainsi, 6452, indique six mille quatre centaines cinq dixaines et deux unités, exprime le nombre six mille quatre cent cinquante-deux (Condorcet, 1988, p. 38).*

Des formulations plus actuelles et accessibles de ces savoirs sont proposées dans Tempier (2013, pp. 22-30) et peuvent constituer des points d'appui pour une explicitation des savoirs en jeu auprès des enseignants (des extraits sont proposés en annexe 1).

3.3. Un troisième système pour dire et écrire un nombre

Les unités fournissent aussi un moyen de désigner les nombres qui apparaît comme une alternative notamment pour dire un nombre (par exemple 123 : une centaine deux dizaines trois unités) sans utiliser la numération parlée (et ses irrégularités). De plus, un nombre peut être écrit (ou lu) de plusieurs manières. Par exemple, 123 peut être lu ou écrit comme 1 centaine 2 dizaines, 3 unités ou 12 dizaines, 3 unités ou 1 centaine 23 unités, *etc*. Dans Houdement et Tempier (2019), nous considérons cette désignation des nombres avec les unités comme un troisième système pour désigner un nombre qui peut être mis en relation avec les systèmes écrits et parlés (figure 1).

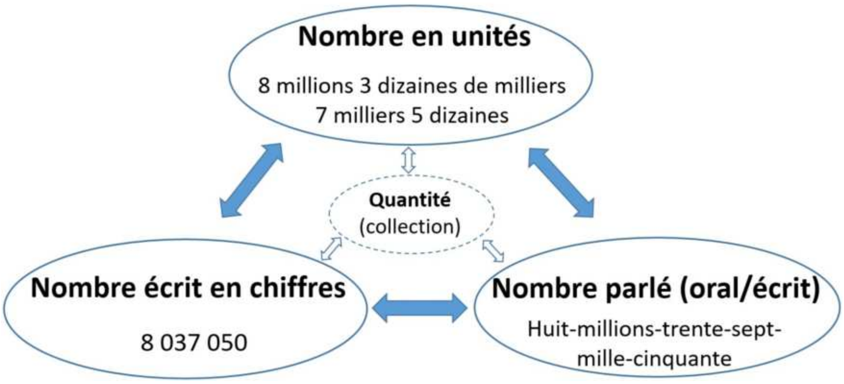


Figure 1 *: trois systèmes pour représenter les nombres.*

Nous pensons qu'il est essentiel de mettre en relation ces trois systèmes pour l'apprentissage de la numération, mais aussi pour celui des opérations posées, des nombres décimaux (Houdement & Tempier, *ibid.*). De plus, cela peut servir de point d'appui pour l'apprentissage des unités de mesure (Chambris, 2008).

L'intérêt de s'appuyer sur des quantités organisées dans l'apprentissage des nombres, notamment les matériels de numération, est largement admis (Fuson et *al.*, 1997). Selon Wagner et Davis (2010), cet appui sur des collections peut permettre d'enrichir la compréhension des nombres en développant un certains *« sens des quantités »*. Nous faisons l'hypothèse (Houdement & Tempier, *ibid.*) que l'utilisation de collections organisées peut permettre de donner du sens aux unités de numération[8] : elles peuvent être un point d'appui pour les enseignants pour dépasser l'usage des mots dizaines, centaines, ... uniquement comme des positions dans l'écriture en chiffres, comme nous l'avons observé dans les classes (Tempier & Chambris, 2017). Mais nous considérons qu'il est aussi nécessaire d'amener les élèves à dépasser la référence aux collections dans l'apprentissage de la numération et de rencontrer des situations où ils sont amenés à utiliser des conversions entre unités afin de construire les principes de position et de décimalité.

Nous allons maintenant présenter quelques spécificités des systèmes de numération écrits et parlés pour les grands nombres (supérieurs à dix-mille).

4. Quelques spécificités des systèmes de numération pour les grands nombres

4.1. Désignation des grands nombres avec les systèmes écrits et parlés

Actuellement, nous utilisons deux systèmes principaux pour désigner les nombres : le système de numération écrit en chiffres et le système de numération parlé (à l'oral ou à l'écrit en lettres). Cela n'a pas toujours été le cas. Pendant longtemps, le système de numération parlée a été utilisé avec la numération romaine pour écrire les nombres et l'abaque pour faire des calculs. Comme le rappelle Mounier (2017) :

> *Historiquement pour les langues indo-européennes, la numération positionnelle chiffrée n'est devenue que tardivement le système écrit utilisé en parallèle du système parlé (Mounier, 2017, pp. 364-365).*

La numération de position s'est installée plus tardivement et a mis plusieurs siècles pour être véritablement acceptée. Selon Scharlig (2010, il a fallu cinq siècles, et même au bout de ces cinq siècles son occupation n'était que partielle :

> *Commencée dès la première moitié du 12e siècle, et achevée vers la fin du 16e , cette conquête de l'Europe par les chiffres arabes s'est étalée de notre point de vue de narrateur, sur cinq siècles. Mais en fait, leur occupation du territoire occidental n'a été que partielle, même après ces cinq siècles (Scharlig, 2010, p. 257).*

Puisque ces deux systèmes n'ont pas été conçus à l'origine pour être utilisés ensemble, on peut alors se demander quelles sont les spécificités de chacun et comment ils s'articulent.

Notre système de numération écrit, qui est un système décimal de position, est régulier : quelle que soit la taille des nombres, les principes de position et de décimalité s'appliquent toujours, même si le nom de certaines unités se construit à partir du nom d'unités plus petites (« dizaines » de « milliers » par exemple). Ainsi dix milliers font une dizaine de milliers, qui s'écrit au 5e rang, dix dizaines de milliers font une centaine de milliers, qui s'écrit au 6e rang, *etc*. (figure 2). Pour décrire le fonctionnement de ce système écrit, il n'est donc pas nécessaire d'utiliser la notion de « classes » (tranche de trois chiffres), même pour les grands nombres.

[8] Cependant, l'usage de collections (réelles ou représentées) n'a pas toujours les effets espérés. Brissiaud (2005), par exemple, met en garde contre certains usages des représentations figurées de matériels de numération : l'élève peut ne pas faire le lien entre le matériel représenté et les groupements par 10 qui en sont à l'origine.

***Figure 2** : extension des principes de la numération écrite pour les grands nombres.*

Les classes et les irrégularités pour les grands nombres proviennent du système parlé. Notre système de numération parlée est un système hybride hérité de la langue latine. L'énonciation des nombres correspond à une addition de multiples de puissances de dix. Il s'appuie en fait sur plusieurs systèmes d'unités imbriqués :

- en base dix, avec les irrégularités bien connues sur les nombres inférieurs à cent (Mounier, 2017) ; par exemple 3 dizaines se dit « trente » et non « trois-dix »,
- en base mille, qui amène à utiliser le nom des nombres inférieurs à mille associé aux mots mille, million et milliard,
- et en base un million[9], pour dire les très grands nombres en appui sur les mots billion, trillion, *etc*.

Ainsi, comme le rappelle Salin (1997) :

> *Les trois premières puissances de dix ont un nom différent : dix, cent, mille, à l'aide desquels on peut fabriquer les noms de tous les nombres jusqu'à 9 999. Si la même « logique » était appliquée aux nombres à partir du successeur de 9 999, il faudrait un nom pour 10 000, un pour 100 000, etc. Ce n'est pas la solution retenue par notre numération orale, qui utilise pour les nombres compris entre 10 000 et 1 000 000 la décomposition en base mille du nombre dont le nom est recherché : « abcdef » décomposé en base mille a pour nombre des unités « def » et pour nombre de mille « abc ». Son nom est donc donné par la suite : « nom de abc (exprimé en base dix) mille nom de def » (Salin, 1997, pp. 32-33).*

Ce fonctionnement de la numération parlée a des conséquences sur la numération écrite. C'est ce qui nous amène à écrire un espace entre les groupes de trois chiffres pour mettre en évidence la décomposition selon les puissances de mille : *« c'est une aide apportée au lecteur qui peut ainsi repérer plus rapidement les puissances de mille »* (Salin, *ibid.*). Il s'agit bien d'une spécificité de notre numération parlée. Pour d'autres numérations parlées, il y a d'autres façons de « découper » l'écriture chiffrée pour lire les grands nombres. Par exemple, dans le système de numération parlé chinois c'est dix-mille (donc la dizaine de millier) qui sert de base auxiliaire[10] : le nombre cent-mille s'exprime alors comme « dix dizaines de milliers », le nombre un-million comme « cent dizaines de milliers », et dix-millions comme « mille dizaines de milliers » ; ensuite il y a un nouveau nom pour « dix-mille dix-milliers », *etc*. (figure 3). Lorsqu'ils se servent de l'écriture chiffrée positionnelle, les Chinois utilisent un séparateur (la virgule, qui est l'équivalent de notre espace de séparation) pour écrire les nombres par tranches de quatre chiffres (exemple : 5,6700 pour le nombre 56 700). Cela permet d'avoir une cohérence entre la façon de lire et d'écrire les nombres (figure 3).

[9] Officiellement c'est le système proposé par Chuquet au XVe siècle qui est utilisé en France pour la lecture des grands nombres, comme cela a été proposé par la conférence des poids et mesures de 1949. Le mot « billion » correspond à 10^{12} et non à 10^{9} comme c'est le cas par exemple aux Etats-Unis où c'est l'échelle courte qui est utilisée (base mille).

[10] On retrouve ce type de découpage en Grèce Antique avec les *myriades* (10^4), les myriades de myriades, *etc*.

Le nom des premières puissances de dix

(nous avons entouré les puissances de la base dix-mille)

Numerals	Characters	Pinyin
1,000,000,000	十亿	shíyì
100,000,000	亿	yì
10,000,000	千万	qiānwàn
1,000,000	百万	bǎiwàn
100,000	十万	shíwàn
10,000	万	wàn
1,000	千	qiān
100	百	bǎi
10	十	shí
1	一	yī

Exemples de grands nombres

Chinese split	Characters	Pinyin
1,0000	一万	yīwàn
1,2000	一万二	yīwàn èr
1,3200	一万三千两百	yīwàn sānqiān liǎngbǎi
5,6700	五万六千七百	wǔwàn liùqiān qībǎi

Figure 3 *: Nom des grands nombres dans le système chinois*[11].

Il a également existé au moins un système de numération parlée ne faisant pas intervenir de base autre que la base 10, donc sans base auxiliaire. C'est le cas de la numération sanskrite, dont nous donnons ci-dessous le nom des différentes unités (figure 4), pour laquelle les savants indiens avaient défini le nom de chaque unité jusqu'à 10^{17} aux alentours du III^e^ siècle (Ifrah, 1981). Il existe un nom de nombre différent pour chaque puissance de la base dix. Il n'y a pas de relation entre le nom de 1000 par exemple et celui de 10 000 ou de 100 000, *etc*. Ifrah (*ibid.*) explique qu'ensuite on en est venu à supprimer le nom des puissances de dix. Par exemple, le nombre neuf cent trente et un se dirait un, trois, neuf (on les dit dans le sens inverse de notre numération parlée). Il parle alors d'une numération parlée de base dix fondée sur le principe de position[12].

ORDRE D'UNITÉ	NOM CORRESPONDANT	VALEUR NUMÉRIQUE	PUISSANCE DE DIX
1	**eka*	1	1
2	**daśhan*	10	10
3	**śhata*	100	10^2
4	**sahasra*	1 000	10^3
5	**ayuta*	10 000	10^4
6	**laksha*	100 000	10^5
7	**prayuta*	1 000 000	10^6
8	**koti*	10 000 000	10^7
9	**vyarbuda*	100 000 000	10^8
10	**padma*	1 000 000 000	10^9
11	**kharva*	10 000 000 000	10^{10}
12	**nikharva*	100 000 000 000	10^{11}
13	**mahâpadma*	1 000 000 000 000	10^{12}
14	**śhankha*	10 000 000 000 000	10^{13}
15	**samudra*	100 000 000 000 000	10^{14}
16	**madhya*	1 000 000 000 000 000	10^{15}
17	**antya*	10 000 000 000 000 000	10^{16}
18	**parârdha*	100 000 000 000 000 000	10^{17}

Figure 4 *: Nom des puissances de dix dans la numération sanskrite, extrait d'Ifrah (1981).*

[11] Extrait de : https://resources.allsetlearning.com/chinese/grammar/Big_numbers_in_Chinese (consulté le 06/01/2020).

[12] Ifrah (1981) fait un lien entre l'intérêt des savants indiens pour les grands nombres et l'invention du système positionnel. La volonté d'avoir une désignation efficace des grands nombres a pu être un moteur de l'invention du système positionnel.

Ces deux exemples de systèmes de numération parlée permettent de mettre en lumière les spécificités, présentées précédemment, de notre propre système de numération parlée et de son lien avec la numération écrite.

4.2. Le double système d'unités : base dix, base mille

Si on se limite aux nombres jusqu'au milliard, comme le font actuellement les programmes de cycle 3, il y a un double système d'unités en jeu dans l'étude des nombres : en base dix et en base mille, ce qui correspond à une lecture en « rangs » et en « classes » de l'écriture chiffrée. À l'intérieur de chaque classe on retrouve un système en base dix avec les unités, dizaines et centaines (figure 5).

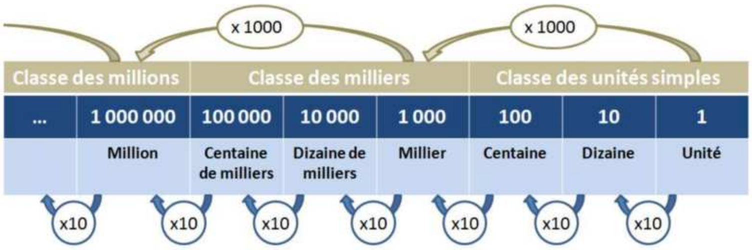


Figure 5 *: Le double système d'unités base dix - base mille.*

Prendre en compte ce double système pour l'enseignement des grands nombres peut permettre aux élèves, d'une part, d'enrichir leur compréhension de la numération écrite par la prise de conscience de la régularité du système écrit selon la base dix et, d'autre part, de s'approprier les noms des grands nombres en les mettant en relation avec l'écriture chiffrée.

En effet, la désignation d'un nombre avec les unités permet de produire des écritures (ou lectures) variées et notamment selon la base dix et la base mille (voir l'exemple de la figure 6). Le passage d'une désignation selon la base dix à la base mille se fait à l'aide de conversions d'unités. Cette désignation en unités est un système de désignation intermédiaire entre la numération écrite et parlée qui fournit un moyen de justifier l'écriture en chiffres d'une désignation orale (ou écrite en lettres) et notamment de l'écriture des zéros qui ne s'entendent pas.

Considérons l'exemple de l'écriture en chiffres de « huit-millions-trente-sept-mille-cinquante » (figure 6).

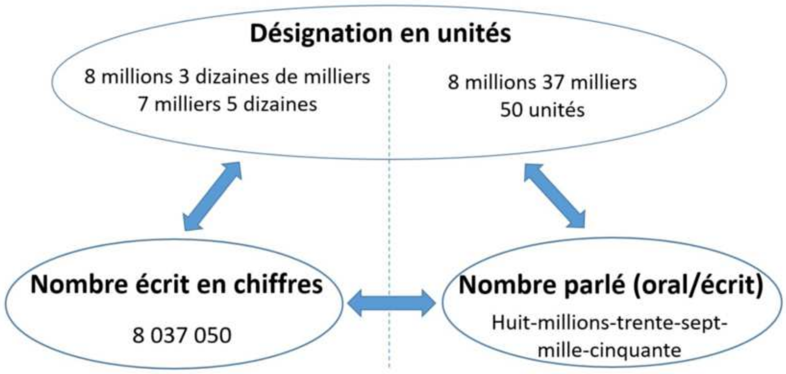


Figure 6 *: Liens entre trois désignations des nombres.*

Ce nombre peut s'écrire (ou se dire) avec les unités de numération « 8 millions 37 milliers

50 unités ». Il peut aussi s'écrire (ou se dire) « 8 millions 3 dizaines de milliers 7 milliers 5 dizaines » par la conversion de 37 milliers en 3 dizaines de milliers et 7 milliers qui s'appuie sur des connaissances relevant des nombres inférieurs à mille (37 = 3 dizaines 7 unités). Le nombre obtenu peut alors s'écrire 8, 0, 3, 7, 0, 5, 0 par le principe de position de la numération écrite (le chiffre des millions s'écrit au 7e rang, celui des centaines de milliers au 6e rang, *etc*.) et l'écriture de zéros pour marquer l'absence de certaines unités. Ce type de justification est un savoir important pour l'enseignant. C'est un savoir de référence qui peut permettre de combler certains manques pointés dans les travaux de Mercier (1997) ainsi que de Ligozat et Leutenegger (2004).

Pour un nombre donné, deux types de décompositions sont donc essentielles :

- la première est celle qui est liée à la numération écrite, selon les unités de base 10 (pour l'exemple ci-dessus : 8 millions 3 dizaines de milliers, 7 milliers, 5 dizaines) ;
- la deuxième est celle liée à la numération parlée et à la base 1000 (pour l'exemple ci-dessus : 8 millions 37 milliers 50 unités).

Cette dernière s'articule aisément avec le nom du nombre (par exemple : « huit-millions-trente-sept-mille-cinquante »).

Enfin, l'appui sur le double système d'unités pourrait aussi favoriser la compréhension des ordres de grandeurs des grands nombres. Par exemple comprendre le million met en jeu la relation avec des nombres plus petits : un million, c'est « dix fois cent-mille » ainsi que « mille fois mille ».

Les allers-retours entre les analyses présentées dans ces deux dernières parties et les expérimentations réalisées dans les classes nous ont permis d'identifier des pistes de travail sur les grands nombres. Elles sont l'objet de la partie suivante.

5. Des pistes de travail pour enseigner les grand nombres

À travers les propositions que nous faisons dans cette partie, nous ne cherchons pas à révolutionner l'enseignement actuel mais à identifier certaines conditions essentielles pour son amélioration. Ces pistes de travail visent à combler certains manques que nous avons pointés dans les analyses des parties précédentes. Nous les illustrerons par des exemples issus de la ressource que nous avons conçue.

5.1. Développer la perception des quantités associées aux grands nombres

Selon Wagner et Davis (2010), il est important de développer une compréhension des nombres (compréhension de la numération et du calcul) en étroite relation avec un *« sens des quantités » (ibid.)*, que ce soit pour les petits nombres mais aussi pour les plus grands. Pour cela, l'appui sur des (grandes) collections ou d'autres grandeurs, comme les longueurs, les aires, les volumes, peut permettre de rendre les élèves plus conscients de la signification des nombres. En effet, d'après Wagner et Davis (*2010*), on peut souvent observer dans l'enseignement que :

> *Alors que le nombre est doucement mais sûrement abstrait des contextes, les élèves deviennent insensibles à la signification des symboles numériques qu'ils apprennent à manipuler (Wagner et Davis, 2010, p. 40).*

De plus, comme cela a déjà été indiqué, nous faisons l'hypothèse que l'utilisation de collections organisées peut permettre de donner du sens aux unités de numération (Houdement & Tempier, 2019).

Ainsi, lors du travail sur les grands nombres, il nous paraît utile de proposer aux élèves des occasions de rencontrer de grandes quantités (ou d'autres grandeurs comme les longueurs, les aires ou les volumes) pour développer la perception des quantités (ou grandeurs) associées à ces grands nombres.

Wagner et Davis (*ibid.*) proposent différents exemples de problèmes, inspirés des problèmes de Fermi, visant à développer une perception des grands nombres, comme par exemple de trouver le nombre approximatif de grains de riz dans un récipient donné. Les stratégies utilisées par les élèves sont très diverses : faire des tas approximatifs de 100 par exemple, utiliser un instrument de mesure de capacité comme un capuchon de stylo, utiliser les calculs d'aires, *etc*. Après avoir trouvé le résultat (environ 10 000 à plus ou moins 1 500 près), ils poursuivent le problème avec des questions mettant en jeu des plus grands nombres, comme par exemple : quelle capacité devrait avoir un récipient pour contenir 1 000 000 de grains de riz ? Et pour 1 000 000 000 ? Dans ces activités les élèves sont amenés à mettre en relation des expériences sur les quantités avec leurs capacités de calcul. Selon les auteurs, c'est cette mise en relation des connaissances arithmétiques et du sens des quantités qui permet de donner plus de signification au travail sur les nombres.

Dans la ressource, nous commençons la séquence par un problème permettant de travailler sur une grande collection. Nous proposons en effet le dénombrement exact des carreaux d'une feuille de papier millimétré. L'organisation des carreaux sur le papier millimétré permet d'identifier différents types de groupements, notamment par 100. Les élèves peuvent alors mobiliser des procédures de numération, par exemple en comptant les groupes de 100, 1000, ..., ou de calcul, par exemple en utilisant les groupes de 25 carreaux de 100 qui sont mis en évidence sur le papier ou encore en multipliant le nombre de carreaux de chaque ligne par les nombres de carreaux de chaque colonne (dont le comptage de 10 en 10 est facilité par l'organisation de la feuille). Ainsi, conformément aux propositions de Wagner et Davis (*ibid.*) les élèves sont amenés à mettre en relation leur perception des quantités avec leurs connaissances sur les nombres (numération et calcul). De plus, dans la ressource, cette situation permet d'introduire les unités de numération comme unités possibles pour le comptage de cette grande collection puis de faire le lien entre ces unités et l'écriture en chiffres.

5.2. Des moments spécifiques de travail sur la numération écrite

Nous avons montré (partie 4) certaines spécificités des systèmes de numération écrits et parlés. Or il nous semble que, dans l'enseignement actuel, les caractéristiques de la numération parlée « écrasent » celles de la numération écrite (*cf.* partie 1, p. 75). Nous avons, par exemple, rappelé le cas d'une enseignante qui souhaite introduire tout de suite les relations de base mille et le découpage par tranches de trois chiffres (Chambris, Tempier & Allard, 2017).

Il est important de réserver des moments spécifiques d'étude de la numération écrite pour comprendre la régularité du système de numération écrit (base 10), la position des unités et le rôle du chiffre 0.

Pour cela, il est nécessaire d'introduire et travailler ensemble la dizaine de millier, la centaine de millier et le million.

Dans la ressource, le choix a été fait de commencer par travailler l'écriture en chiffres sans dire les mots-nombres. C'est alors le lien entre l'écriture en chiffres et les unités de numération qui est sollicité et ce sont uniquement les relations de base dix entre les unités qui sont en jeu (figure 7).

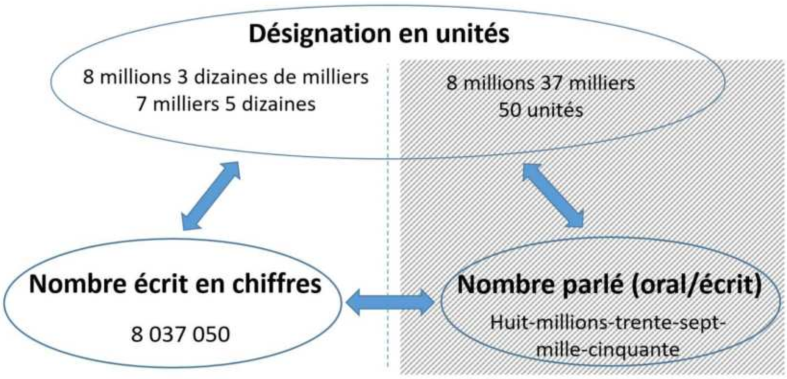


***Figure** 7 : Lien privilégié entre écriture en chiffres et désignation en unités de base 10.*

Pour dire les nombres à l'oral, on privilégie alors soit la lecture de chacun des chiffres dans l'ordre (« huit », « zéro », « trois », *etc.*), soit l'utilisation des unités (« huit millions trois dizaines de mille ... »). Il ne s'agit pas d'interdire aux élèves de dire les nombres selon la manière conventionnelle (en utilisant la numération parlée) si certains savent déjà le faire, mais cet apprentissage ne se fera que dans une étape suivante de la séquence.

La séquence proposée dans la ressource commence par un problème de dénombrement de carreaux de feuilles de papier millimétré visant d'une part à installer un premier ordre de grandeur du million et à introduire les nouvelles unités (dizaine de milliers, centaine de milliers et million) ainsi que leur position dans l'écriture en chiffres :

$\overline{\text{M}}$	CM	DM	M	C	D	U

Il est à noter que, dans l'enseignement usuel des grands nombres, les tableaux de numération de ce type, c'est-à-dire sans les classes, est peu courant. Ce tableau met en avant la régularité du système de numération écrit.

Nous proposons ensuite des exercices de dénombrements de carreaux de papier millimétré où les carreaux ne sont plus donnés mais leur quantité est décrite en unités, comme par exemple : « 8 centaines de milliers », « 4 unités 2 centaines 9 milliers 1 centaine de milliers et 7 millions », « 5 millions 8 dizaines de milliers », *etc*.

C'est le principe de position et le rôle du chiffre 0 dans l'écriture en chiffres qui est principalement en jeu ici. Comme pour le travail sur le millier (Tempier, 2013), les dénombrements sans conversion permettent de s'approprier la position de chacune des unités dans l'écriture en chiffres. Les variations sur l'ordre de présentation des unités, l'absence d'unités de certains ordres, la taille du nombre à trouver peuvent permettre de s'assurer d'une bonne compréhension de ces savoirs par les élèves. Des activités rituelles complémentaires comme le « furet des unités » (qui consiste à réciter à tour de rôle le nom de l'unité « suivante » ou « précédente ») sont aussi proposées aux élèves pour faciliter la mémorisation du nom des unités et de leur ordre. Cette automatisation est importante pour éviter aux élèves d'avoir un recours systématique au tableau de numération.

5.3. Des moments de travail sur les décompositions en unités selon les bases dix et mille pour préparer la lecture et l'écriture des grands nombres

Les études de séances sur l'écriture de grands nombres en chiffres (Mercier, 1997 ; Chambris, Tempier & Allard, 2017), rappelées dans l'introduction, semblent montrer que l'enseignant peut se retrouver dans des impasses quand il est confronté à certaines difficultés ou erreurs de ses élèves. Or nous avons montré que, pour articuler la désignation en chiffres et la désignation orale (ou en lettres), les unités de numération peuvent constituer un point d'appui et permettent des justifications mathématiques adaptées aux connaissances des élèves de cycle 3. Du côté des élèves, nous avons déjà rappelé les difficultés relatives aux connaissances des relations entre unités, même pour les grands nombres (Chambris, Tempier & Allard, 2017) : seulement la moitié des élèves environ savent convertir 4 millions en centaines de milliers (relation de base dix) ou 3 millions en milliers (relation de base mille). Le travail sur les décompositions doit se faire en lien étroit avec la connaissance de ces relations entre les unités.

Il est important de réserver des moments de travail sur les décompositions en unités selon la base dix et selon la base mille. Cela permet de préparer la lecture et l'écriture de grands nombres (associer la désignation en chiffres à la désignation orale ou en lettres) et le travail sur les relations entre les nombres.

Dans beaucoup de manuels ou ressources pédagogiques de cycle 3, la lecture et l'écriture des grands nombres ne sont pas mises en relation avec ces deux types de décompositions. Les tâches d'écriture et de lecture des nombres sont même parfois travaillées avant les tâches de décomposition. Ce sont alors des règles comme celles-ci qui sont mises en avant : écrire un espace (ou un point) quand on entend « mille », « million », *etc.*, compléter les rangs vides en écrivant des « 0 » pour avoir trois chiffres par classe, *etc*. Elles ne sont pas mises en relation avec les principes de la numération, notamment avec la décomposition en unités de base dix qui est un point d'appui pour justifier l'écriture des zéros que l'on n'entend pas.

Dans notre ressource, dans le but de travailler les décompositions, le choix a été fait d'une reprise de la situation de « commande » d'une collection, avec jeu sur le stock du « marchand » comme dans la séquence sur le millier (Tempier, 2013). Il s'agit, par exemple, de commander :

- 2400600 carreaux avec la contrainte « pas de carrés par millions » (réinvestissement des relations entre unités de base 10 : 10 centaines de milliers = 1 million) ;
- 403012068 carreaux avec la contrainte « seulement des unités, milliers et millions disponibles ».

Les contraintes sur le stock visent à amener les élèves à utiliser les deux décompositions de référence, selon la base dix et selon la base mille (figure 8), ainsi qu'à mobiliser des relations « simples » entre les unités (1 million = 10 centaines de milliers, par exemple).

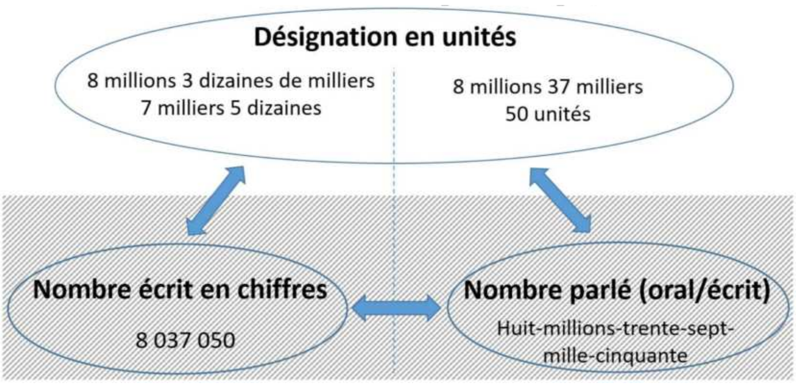


Figure 8 *: Deux types de désignation en unités (selon la base dix et selon la base mille).*

Dans le premier exemple ci-dessus (2400600 carreaux), les élèves vont pouvoir commander 24 centaines de millions, ce qui permet de réinvestir la relation entre 10 centaines de milliers et 1 million. Dans le deuxième exemple (403012068), la contrainte « seulement des unités, milliers et millions disponibles » permet de faire des décompositions selon la base mille et de préparer l'introduction de la numération parlée. On peut, par exemple, commencer à mettre en évidence le lien entre ces décompositions et le découpage par tranches de trois chiffres :

C$\overline{\text{M}}$	D$\overline{\text{M}}$	$\overline{\text{M}}$	CM	DM	M	C	D	U
4	0	3	0	1	2	0	6	8

403 millions — 12 mille — 68 unités

La lecture et l'écriture des grands nombres sont introduites seulement après ce travail sur ces deux décompositions de référence. Cette approche nous semble à même de remettre des mathématiques dans le travail de lecture/écriture des nombres. Ce n'est qu'au moment du travail sur la lecture/écriture des grands nombres que sont introduits des espaces entre les classes dans l'écriture chiffrée. Jusque-là, dans la séquence proposée dans la ressource, les nombres étaient systématiquement écrits sans aucun signe particulier pour repérer les tranches de trois chiffres. Les élèves devaient donc apprendre, par exemple, qu'après le million, il y a 6 chiffres (ou que le million correspond au 7^{e} chiffre), pour repérer la valeur du chiffre des millions. Au moment de l'apprentissage de la lecture/écriture des grands nombres, l'espace entre les classes (tranches de trois chiffres) est alors amené comme moyen de faciliter cette lecture/écriture.

Pour faire apprendre l'écriture des grands nombres, nous proposons une situation de communication. Un nombre est écrit en chiffres derrière le tableau. Un élève vient le lire à haute voix. Les autres l'écrivent en chiffres sur leur ardoise. L'enseignant organise alors une phase collective de discussion sur la validité des réponses proposées par les élèves. Il faut se mettre d'accord sur une seule écriture. La vérification finale se fait en ouvrant le tableau et en comparant au nombre trouvé par la classe. Le choix des nombres est important : ce sont les cas où il y a des zéros qui ne s'entendent pas qui sont à privilégier (exemples : 1 002 054, 47 080 309, 651 000 004). Les phases de discussions, permettent de réinvestir les savoirs sur les décompositions et sur la position des unités dans l'écriture chiffrée.

5.4. Viser la connaissance de relations entre les nombres dans des contextes variés

Les élèves semblent avoir un déficit de connaissances des relations entre unités (millions, centaines de millier et milliers). Au-delà de l'aspect « compréhension des systèmes de numération » dont cette difficulté témoigne, on peut considérer également que cela pourrait être une manifestation plus générale d'un manque de connaissances des grands nombres et de leurs ordres de grandeur. Connaître le million, c'est, notamment, savoir qu'un million c'est dix fois cent-mille et aussi mille fois mille. Le réinvestissement des connaissances sur les grands nombres dans des contextes variés doit prendre en compte cet objectif.

Nous considérons qu'il faut viser la connaissance des relations entre les nombres « repères » de la numération (1, 10, 100, 1 000, 10 000, ...), sans toutefois chercher à atteindre une connaissance exhaustive des relations entre ces nombres. Par exemple, pour un-million, viser la connaissance des relations entre un-million et cent-mille et entre un-million et mille est un objectif essentiel mais raisonnable. Par contre, connaître la relation entre un-million et cent n'est pas nécessaire. Cela peut être retrouvé par un calcul ou un raisonnement sur les unités.

Il est important de prévoir des moments visant la connaissance de relations entre les nombres dans des contextes variés : quantités, mesures de grandeurs continues, droite graduée, calcul.

Dans la ressource, le choix a été fait de développer la connaissance des grands nombres et de leur ordre de grandeur dans des activités de calcul mental ainsi que dans des situations de placements exacts et approchés sur une demi-droite graduée.

Le calcul mental sur les grands nombres est utilisé pour des multiplications et divisions par 10, 100, 1 000. L'activité proposée est un jeu de rapidité : les élèves devront être plus rapides qu'un élève qui fera le même calcul avec la calculatrice. Ils doivent dans un premier temps trouver le nom du nombre, puis l'écrire en chiffres sur leur ardoise. Voici quelques exemples de calculs :

- dix fois trois-cent-mille,
- six-millions divisé par dix,
- trois-millions-huit-mille fois dix,
- mille fois huit-mille,
- deux-cent-cinquante-mille fois cent,
- *etc*.

Dans cette activité, les nombres ne sont pas écrits en chiffres mais dictés ou écrits avec leur nom (à l'oral ou à l'écrit en lettres). En effet, avec l'écriture chiffrée pour faire ce type de calculs, les élèves disposent déjà d'une procédure automatisée très efficace (règle des zéros). Son utilisation ne suffit pas pour construire une connaissance des relations entre les nombres. L'objectif est d'amener les élèves à raisonner avec le nom des nombres et en particulier avec les mots « mille » et « million ». Les élèves peuvent par exemple utiliser le fait que multiplier par dix revient à « passer » à l'unité immédiatement supérieure. Par exemple pour « dix fois deux-cent-mille » il est possible de « passer » de cent-mille à un-million (ou des centaines de milliers aux millions en utilisant les unités) par la multiplication par dix, ce qui permet d'obtenir le résultat deux-millions. Une autre procédure consiste à utiliser les milliers : « dix fois deux-cent-mille » c'est dix fois deux-cents fois mille, soit deux-mille fois mille : cette fois, c'est la relation mille fois mille = un-million qui permet d'obtenir le résultat deux-millions. Ce sont ces types de raisonnements qui sont visés dans cette activité.

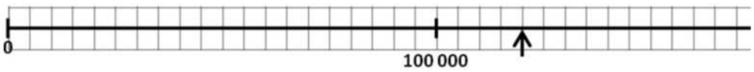
...	1 000 000	100 000	10 000	1 000	100	10	1
	Million	Centaine de milliers	Dizaine de milliers	Millier	Centaine	Dizaine	Unité
	x 10	2	0	0	0	0	0
	2	0	0	0	0	0	0
		x 1000		5	0	0	0
	5	0	0	0	0	0	0

Figure 9 *: Une illustration du lien entre la multiplication par 10 (respectivement par 1000) et le décalage des chiffres d'un rang (respectivement trois rangs) vers la gauche.*

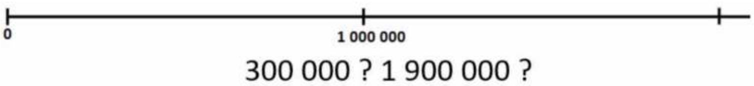
Les calculs de multiplication par 10 et par 1 000 amènent à généraliser la règle de multiplication des nombres (écrits en chiffres) par 10, 100 ou 1 000 en lien avec le décalage de chaque chiffre dans le tableau de numération (figure 9). Dans la multiplication par 10, par exemple, la valeur de chaque chiffre est multipliée par dix, ce qui revient à les décaler d'un rang vers la gauche. Cela permet de justifier la « règle des zéros » en mettant en relation l'écriture de zéros à droite avec ce décalage. Cela permet aussi de préparer le terrain pour les décimaux où le même type de justification pourra être utilisée.

Dans la ressource, la connaissance des relations entre les nombres est réinvestie dans des activités de repérage et de placement de nombres sur une demi-droite graduée où les élèves sont amenés à repérer le pas de graduation et à le diviser en dix de manière exacte ou approchée. Voici deux exemples :

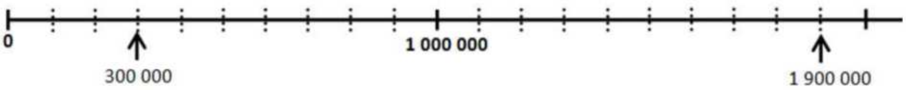
• repérage de nombres sur une demi-droite graduée :



• placement approché de nombres sur une demi-droite graduée :



Ce deuxième exemple met en jeu un partage approximatif du pas de graduation en 10. Cela permet d'obtenir un pas de 100 000, pour placer les nombres 300 000 et 1 900 000. C'est notamment la relation entre 100 000 et 1 000 000 qui est à mobiliser ici :



D'autres procédures sont possibles (comme par le partage en deux, puis en quatre, ... du pas de graduation) mais pourraient être moins précises.

Ce travail sur les droites graduées est aussi un moyen de préparer ou de réinvestir le travail sur les fractions et nombres décimaux où ce type d'activité est souvent utilisé. Il est important, pour les entiers ou les décimaux, de faire travailler les élèves sur des sous-graduations qui ne sont pas données directement mais dont le pas peut être retrouvé en mobilisant les relations entre les nombres.

Conclusion

En nous appuyant sur des études préalables sur l'enseignement des grands nombres présentées dans la première partie ainsi que nos analyses dans les parties suivantes, nous avons proposé des pistes de travail sur les grands nombres, que ce soit pour leur introduction en CM1 ou CM2, leur reprise en début de sixième ou pour une remédiation. Selon nous, dans l'enseignement des grands nombres au cycle 3, il est utile de proposer aux élèves des occasions de rencontrer de grandes quantités (ou d'autres grandeurs) pour développer la perception des quantités (ou grandeurs) associées à ces grands nombres. Lors du travail sur ces grands nombres, il nous semble important de réserver des moments :

- spécifiques d'étude de la numération écrite pour comprendre la régularité du système de numération écrit (base dix), la position des unités et le rôle du chiffre 0 ;
- de travail sur les décompositions en unités selon la base dix et selon la base mille. Cela permet de préparer la lecture et l'écriture de grands nombres et le travail sur les relations entre les nombres ;

Enfin, il est important de viser la connaissance de relations entre les nombres dans des contextes variés : quantités, mesures de grandeurs continues, calcul, droite graduée, *etc*.

Pour illustrer ces propositions, nous avons utilisé des exemples issus de la conception de notre ressource sur la numération. Plus généralement, avec ces propositions, nous espérons pouvoir outiller les professeurs des écoles dans l'exploration des grands nombres et leur utilisation dans des situations variées. Cela peut aussi nourrir la formation, où il nous semble nécessaire d'accompagner ces propositions d'un travail sur leur mise en œuvre effective dans l'enseignement. En effet, les premières observations de l'usage de la ressource que nous avons conçue ont montré qu'une ressource ne peut pas toujours apporter ces éléments aux enseignants. Nous avons toutefois pu observer que certains ont pu bénéficier des apports de la ressource pour mieux prendre en compte les difficultés de leurs élèves. Cela s'est manifesté, par exemple, lors de la mise en œuvre d'une séance sur la lecture et l'écriture de grands nombres où une enseignante proposait des justifications mathématiques pour aider ses élèves à s'approprier le passage à l'écriture en chiffres et notamment à dépasser des difficultés liées à l'écriture des « 0 » muets. Cette enseignante nous indiquait dans l'entretien post-séance qu'elle ne ressentait plus le besoin d'utiliser le tableau de numération alors que jusque-là elle ne voyait pas comment s'en passer, tant l'enseignement des grands était associé à cet outil. Ce type de question professionnelle (« quelles alternative à l'utilisation du tableau de numération pour aider un élève à écrire un grand nombre en chiffres ? ») peut être une entrée intéressante pour la formation car susceptible de questionner les pratiques des enseignants. Les principes que nous avons énoncés dans ce texte peuvent apparaître comme fournissant certains éléments de réponse qu'il faudrait associer à des questions liées à la mise en œuvre effective avec les élèves, afin d'amener les enseignants à exercer une certaine vigilance didactique (Charles-Pézard, 2010) et dépasser certaines difficultés d'enseignement rappelées au début de ce texte (Blanchard-Laville, 1997 ; Ligozat & Leutenegger, 2004 ; Chambris, Tempier & Allard, 2017).

La liste de ces principes n'est bien sûr ni exhaustive ni définitive et nous espérons que ce texte contribuera à lancer et nourrir des discussions autour de la question de l'enseignement des grands nombres.

Références bibliographiques

Baturo, A. (2000). Construction of a numeration model: A theoretical analysis. In J. Bana & A. Chapman (Eds.), In *Proceedings 23rd Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia*, 95-103.

Bézout, E. & Reynaud, A. A. L. (1784/1821). *Traité d'arithmétique à l'usage de la marine et de l'artillerie, 9e édition*. Notes sur l'arithmétique de Bézout, par A.A.L Reynaud (1821).

Blanchard-Laville, C. (1997). *Variations sur une leçon de mathématiques. Analyses d'une séquence : « L'écriture des grands nombres »*. Paris : L'Harmattan.

Brissiaud, R. (2005). Comprendre la numération décimale : les deux formes de verbalisme qui donnent l'illusion de cette compréhension. *Rééducation Orthophonique, 223*, 225–238.

Chambris, C. (2008). *Relations entre les grandeurs et les nombres dans les mathématiques de l'école primaire. Évolution de l'enseignement au cours du 20e siècle. Connaissances des élèves actuels*. Thèse de l'Université Paris Diderot.

Chambris, C., Tempier, F. & Allard, C. (2017). Un regard sur les nombres à la transition école-collège, *Repères-IREM, 108*, 63-91.

Chambris, C. & Tempier, F. (2017). Dealing with large numbers: What is important for students and teachers to know? In T. Dooley & G. Gueudet (Eds.), *Proceedings of the Tenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, 245-252. Dublin, Ireland: DCU Institute of Education and ERME.

Charles-Pézard, M. (2010). Installer la paix scolaire, exercer une vigilance didactique. *Recherches en didactique des mathématiques, 30*(2), 197-261.

Chesné, J.-F. & Fischer, J.-P. (2015). Les acquis des élèves dans le domaine des nombres et du calcul à l'école primaire. *Rapport pour la conférence de consensus Nombres et opérations : premiers apprentissages à l'école primaire*. CNESCO.

Condorcet, N. (1988). *Moyens d'apprendre à compter sûrement et avec facilité*. Paris : ACL - Les éditions du Kangourou. (1re édition : 1799).

Fosnot, C. T. & Dolk, M. (2001). *Young mathematicians at work. Constructing number sense, addition, and subtraction*. Portsmouth, NH: Heinemann.

Fuson, K. C., Wearne, D., Hiebert, J., Human, P., Murray, H., Olivier, A., Carpenter, T. P. & Fennema, E. (1997). Children's conceptual structures for multidigit numbers and methods of multidigit addition and subtraction. *Journal for Research in Mathematics Education, 28*, 130-162.

Houdement, C. & Tempier, F. (2019). Understanding place value with numeration units. *ZDM mathematics education, 51*(1), 25-37.

Ifrah, G. (1981). *Histoire universelle des chiffres*. Paris : Editions Seghers.

Keller, O. (2016). *L'invention du nombre : Des mythes de création aux Éléments d'Euclide*.

Paris : Éditions Classiques Garnier.

Ligozat, F. & Leutenegger, F. (2004). La bivalence mathématique et langagière dans les pratiques d'enseignement sur la numération. *Actes du 9e colloque de l'AIRDF*. Québec, Canada.

Margolinas C. & Laparra, M. (2011). Des savoirs transparents dans le travail des professeurs à l'école primaire. In J.-Y. Rochex & J. Crinon (dir.), *La construction des inégalités scolaires*, 19-32. Rennes : Presses universitaires de Rennes.

Mercier, A. (1997). La relation didactique et ses effets. In C. Blanchard-Laville (Ed.), *Variations sur une leçon de mathématiques. Analyses d'une séquence : « L'écriture des grands nombres »*, 259-312. Paris : L'Harmattan.

Mounier, E. (2017). Nouveaux outils d'analyse des procédures de dénombrement pour explorer leur lien avec la numération écrite chiffrée et la numération parlée. *Recherches en didactique des mathématiques, 36*(3), 347-396.

Paillard, M. (2017). Les unités de masse, un support pour enseigner autrement la lecture et l'écriture des nombres supérieurs à 10 000 en 6e SEGPA, *Grand N, 99*, 51-68.

Perrin-Glorian, M.-J. (2011). L'ingénierie didactique à l'interface de la recherche avec l'enseignement. Développement de ressources et formation des enseignants. In C. Margolinas et al. (Eds.), *En amont et en aval des ingénieries didactiques* (pp. 57-78). Grenoble : La Pensée Sauvage.

Scharlig, A. (2010). *Du zéro à la virgule. Les chiffres arabes à la conquête de l'Europe, 1143-1585*. Lausanne : Presses polytechniques et universitaires romandes.

Tempier, F. (2013). *La numération décimale de position à l'école primaire. Une ingénierie didactique pour le développement d'une ressource*. Thèse de l'Université Paris Diderot, Paris 7.

Tempier, F. (2016). Composer et décomposer : un révélateur de la compréhension de la numération chez les élèves, *Grand N, 98*, 67-90.

Tempier, F. & Chambris, C. (2017). Concevoir une ressource pour l'enseignement de la numération décimale de position, *Recherches en Didactique des Mathématiques, 37*(2-3), 289-332.

Thanheiser, E. (2009). Preservice Elementary School Teachers' Conceptions of Multidigit Whole Numbers. *Journal for Research in Mathematics Education, 40*, 251-281.

Wagner D. & Davis, B. (2010). Feeling number: Grounding number in a sense of quantity. *Educational Studies in Mathematics, 74*, 39-51.

MEN (2015). Programmes de l'école primaire : *BO Hors série n°11 du 26 novembre 2015*.

Annexe 1
Un exemple de construction de la numération avec les unités

Extraits de Tempier (2013)

Les neuf premiers nombres

On définit les neufs premiers nombres ainsi :

Écrit	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Parlé	un	deux	trois	quatre	cinq	six	sept	huit	neuf

Ainsi, on peut exprimer le nombre d'unités simples (ou unités du premier ordre) avec ces nombres indifféremment sous la forme :

- 3 unités (ou 3) ;
- trois unités (ou trois).

Lorsque l'on ne précise pas l'unité utilisée (comme ici « 3 »), c'est qu'il s'agit d'unités simples. On écrit *u* pour désigner l'unité simple en abrégé.

Construction de la numération des nombres de 10 à 99

Le choix d'une base est à l'origine de l'invention des systèmes de numération, comme le précise Ifrah (1994) :

> *L'être humain se trouva donc désormais confronté à un problème insurmontable à première vue : comment désigner des nombres élevés avec le moins possibles de symboles ? [...] La solution a été de privilégier un groupement particulier (comme la dizaine, la douzaine, la vingtaine ou la soixantaine par exemple) et d'organiser la suite régulière des nombres selon une classification hiérarchisée fondée sur cette assise. [...] C'est ce que l'on appelle le principe de la base. Sa découverte a marqué la naissance des systèmes de numération : systèmes dont la « base » n'est autre que le nombre d'unités qu'il est nécessaire de grouper à l'intérieur d'un ordre donné pour former une unité de l'ordre immédiatement supérieur (Ifrah, 1994, p. 73).*

Le choix de dix comme base est un choix parmi d'autres possibles. Pourtant la base dix *« a eu une fortune absolument exceptionnelle »* dans l'histoire (Ifrah, 1994, p. 103), mais non pour des raisons liées à *« des avantages pratiques ou mathématiques »* (*ibid.*, p. 105). Car selon Ifrah, *« ce sont bien les dix doigts qui ont imposé à l'homme l'idée des groupements par paquets de dix »* (*ibid.*, p. 112). [...]

Avec les unités de numération : $9\,unités + 1\,unité$ forme une nouvelle unité appelée une *dizaine* (ou unité du deuxième ordre). On écrit *d* pour dizaine.

Dans notre système écrit, qui est un système positionnel, l'écriture se fait en ligne et chaque unité s'écrit à un certain rang. Le rang des unités (simples) est le premier rang (à partir de la droite[13]) et l'unité de rang supérieur s'écrit au rang situé immédiatement à sa gauche. Ainsi une dizaine s'écrit au deuxième rang. C'est le *principe de position*.

[13] Pour numéroter les rangs, nous prendrons pour convention de le faire systématiquement de la droite vers la gauche.

Le principe de position permet d'écrire les nombres supérieurs à 9 en utilisant encore les mêmes chiffres 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 et 9, auxquels il faut ajouter maintenant le chiffre 0. En effet, une conséquence du principe de position est la nécessité d'utiliser un nouveau symbole pour marquer l'absence d'unités (simples) isolées car on ne peut pas écrire « 1 » pour une dizaine, cette écriture désignant déjà une unité. Notre système de numération écrit utilise le chiffre 0 (zéro) pour marquer cette absence. Ainsi, $1d$ s'écrit 10, ..., $2d$ s'écrit 20, ..., $9d$ s'écrit 90. On écrit un 0 seulement à un rang pour lequel il existe des unités à un rang supérieur. Par exemple $7u$ ne s'écrit pas 07. Pour un nombre à deux chiffres le chiffre 0 ne peut s'écrire qu'au rang des unités (simples).

Un nombre admet plusieurs *écritures en unités de numération (EUN)*, par exemple $50u=5d$. On appellera *écriture canonique en unités de numération (EUNC)* l'écriture pour laquelle on a un nombre d'unités de chaque ordre compris entre 1 et 9. En cas d'absence d'unités simples, on n'écrit que les dizaines dans l'écriture canonique (5 dizaines pour l'exemple ci-dessus).

L'écriture canonique en unités permet de passer directement (par le principe de position) à l'écriture en chiffres en écrivant les unités au premier rang et les dizaines au deuxième. Par exemple, $5d\,7u$ s'écrit 57.

Dans le système parlé, une dizaine s'écrit (et se dit) *dix*, deux dizaines s'écrit *vingt*, trois dizaines s'écrit *trente*, quatre dizaines s'écrit *quarante*, cinq dizaines s'écrit *cinquante*, six dizaines s'écrit *soixante*, sept dizaines s'écrit *soixante-dix*, huit dizaines s'écrit *quatre-vingts*, neuf dizaines s'écrit *quatre-vingt-dix*. Pour écrire les nombres entre deux dizaines consécutives, on fait suivre le nom de chaque dizaine par les noms des nombres compris entre un et neuf. Par exemple cinq dizaines sept unités s'écrit *cinquante-sept*. Cependant il existe des exceptions à cette règle :

- une dizaine une unité s'écrit *onze*, une dizaine deux unités s'écrit *douze*, une dizaine trois unités s'écrit *treize*, une dizaine quatre unités s'écrit *quatorze*, une dizaine cinq unités s'écrit *quinze*, une dizaine six unités s'écrit *seize*.
- sept dizaines une unité s'écrit *soixante-et-onze*, ..., sept dizaines neuf unités s'écrit *soixante-dix-neuf*,
- neuf dizaines une unité s'écrit *quatre-vingt-onze*, ..., neuf dizaines neuf unités s'écrit *quatre-vingt-dix-neuf*. Dans les systèmes en unités et parlé, le zéro est inutile, ce qui n'est pas le cas du système écrit en chiffres.

Le nombre $3d\,12u$ ne peut s'écrire « 312 » ou même « 3 12 » car cela pourrait donner lieu à des interprétations différentes de cette écriture : $3d\,12u$ ou $31d\,2u$(ou encore avec les nombres à 3 chiffres $3c\,1d\,2u$). Il est alors nécessaire pour avoir une écriture unique en chiffres, de n'écrire que des nombres à 1 chiffre par rang. C'est donc l'écriture canonique qui permet (et c'est en cela que cette écriture est canonique) d'associer directement un nombre écrit avec les unités de numération et le nombre correspondant en chiffres par le principe de position : les unités (simples) s'écrivent au premier rang (à partir de la droite) et les dizaines au deuxième rang.

L'écriture en chiffres des nombres à deux chiffres étant ainsi définie, on peut maintenant écrire, par exemple, $38u$ (ou $3d\,8u$). Mais l'écriture en chiffres (et canonique) de $38d$ n'est pas encore définie, il faut pour cela introduire une nouvelle unité : la dizaine de dizaines.

Construction de la numération des nombres de 100 à 999

Guitel (1975) explique que, du point de vue historique, le passage de la dizaine à la centaine ne va pas de soi :

> *rien n'obligeait à considérer le carré de la base comme une nouvelle unité. [...] Le corps humain qui a contribué à donner une base à la numération ne pouvait être en effet d'aucun secours quand il a fallu s'élever dans l'échelle des nombres.*

Une fois le passage au carré réalisé, le passage au cube semble, lui, se faire plus aisément.

Avec les unités de numération : $9\,d\,9\,u+1\,u$ (soit $99\,u+1\,u$) forme une nouvelle unité appelée une *centaine* (ou unité du troisième ordre). On écrit *c* pour centaine.

Voici donc les relations entre les différentes unités :
$\text{une}\,\mathit{centaine}=\text{une}\,\mathit{dizaine\ de\ dizaines}=\text{dix}\,\mathit{dizaines}=\text{cent}\,\mathit{unités}$. À partir de cet ordre il existe donc des relations entre unités qui ne sont pas seulement entre unités d'ordres consécutifs.

Dans le système écrit, les centaines s'écrivent au troisième rang, à partir de la droite (principe de position). Ainsi $1\,\mathit{centaine}$ s'écrit 100, ..., $2\,\mathit{centaines}$ s'écrit 200, ..., $9\,\mathit{centaines}$ s'écrit 900. L'écriture canonique en unités permet donc de passer directement à l'écriture en chiffres en écrivant les unités au premier rang, les dizaines au deuxième et les centaines au troisième. Par exemple $8\,c\,5\,d\,7\,u$ s'écrit 857. En cas d'absence d'unité ou de dizaine dans l'écriture canonique on écrit un zéro au rang correspondant. Par exemple $8\,c\,7\,u$ s'écrit 807 ou encore $8\,c\,5\,d$ s'écrit 850. Par contre on n'écrit pas de zéro au plus haut rang : $5\,d\,7\,u$ ne s'écrit pas 057.

Dans le système parlé, on fait suivre le nom du nombre (inférieur ou égal à neuf) de centaines du mot cent, sauf pour une centaine qui s'écrit (et se dit) *cent* (et non « un cent »). Pour les autres : deux centaines s'écrit *deux-cents*, trois centaines s'écrit *trois-cents*, ..., neuf centaines s'écrit *neuf-cents*.

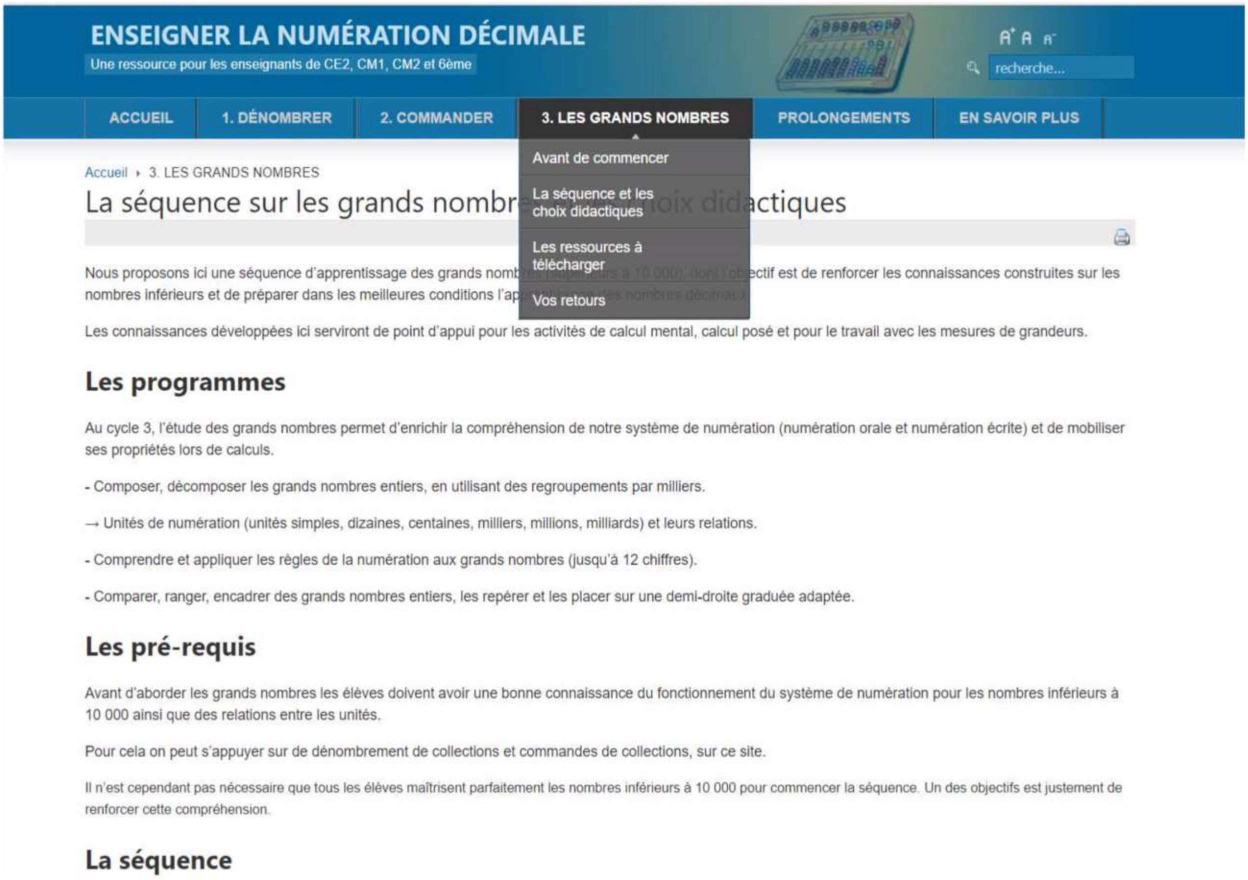
Pour écrire les nombres compris entre deux centaines consécutives, on fait suivre les mots désignant la centaine du nom du nombre inférieur à cent restant. Par exemple huit centaines cinq dizaines sept unités s'écrit (et se dit) *huit-cent-cinquante-sept*.

Un nombre peut admettre plusieurs écritures avec les unités de numération mais a toujours une unique écriture dans le système écrit et dans le système parlé. Par exemple, $3\,c\,12\,d=4\,c\,2\,d=42\,d=3\,c\,120\,u=\ldots$ Son écriture canonique est $4\,c\,2\,d$, elle est unique et permet d'en déduire l'écriture en chiffres et en lettres : 420 et *quatre-cent-vingt*.

Les nombres à trois chiffres étant définis, on peut maintenant écrire, par exemple, $238\,\mathit{unités}$ (ou encore $23\,d+8\,u$ ou bien $2\,c+38\,u$) ce qui est égal à $2\,c\,3\,d\,8\,u$ (qui est l'écriture canonique). Mais on ne sait pas encore écrire en chiffres $238\,d$ par exemple, il faut pour cela introduire une nouvelle unité : la dizaine de centaines. [...]

Annexe 2
Une capture d’écran de la ressource « enseigner la numération décimale »

http://numerationdecimale.free.fr



ENSEIGNER LA NUMÉRATION DÉCIMALE

Une ressource pour les enseignants de CE2, CM1, CM2 et 6ème

ACCUEIL | 1. DÉNOMBRER | 2. COMMANDER | 3. LES GRANDS NOMBRES | PROLONGEMENTS | EN SAVOIR PLUS

Avant de commencer

La séquence et les choix didactiques

Les ressources à télécharger

Vos retours

Accueil ‣ 3. LES GRANDS NOMBRES

La séquence sur les grands nombr… …ctiques

Nous proposons ici une séquence d’apprentissage des grands nomb… …ctif est de renforcer les connaissances construites sur les nombres inférieurs et de préparer dans les meilleures conditions l’ap…

Les connaissances développées ici serviront de point d’appui pour les activités de calcul mental, calcul posé et pour le travail avec les mesures de grandeurs.

Les programmes

Au cycle 3, l’étude des grands nombres permet d’enrichir la compréhension de notre système de numération (numération orale et numération écrite) et de mobiliser ses propriétés lors de calculs.

- Composer, décomposer les grands nombres entiers, en utilisant des regroupements par milliers.

→ Unités de numération (unités simples, dizaines, centaines, milliers, millions, milliards) et leurs relations.

- Comprendre et appliquer les règles de la numération aux grands nombres (jusqu’à 12 chiffres).

- Comparer, ranger, encadrer des grands nombres entiers, les repérer et les placer sur une demi-droite graduée adaptée.

Les pré-requis

Avant d’aborder les grands nombres les élèves doivent avoir une bonne connaissance du fonctionnement du système de numération pour les nombres inférieurs à 10 000 ainsi que des relations entre les unités.

Pour cela on peut s’appuyer sur de dénombrement de collections et commandes de collections, sur ce site.

Il n’est cependant pas nécessaire que tous les élèves maîtrisent parfaitement les nombres inférieurs à 10 000 pour commencer la séquence. Un des objectifs est justement de renforcer cette compréhension.

La séquence

Annexe 3
La séquence de la ressource « enseigner la numération décimale » (partie « grands nombres »)

Etape 1	Combien de carreaux ?
Activité d'introduction des grands nombres par le dénombrement d'une grande collection (carreaux d'une feuille de papier millimétré) pour donner un premier ordre de grandeur du million et comprendre la régularité du principe des groupements successifs par 10.	
Séance 1	Dénombrement et introduction de la dizaine de milliers, centaine de milliers et du million
Séance 2	Jeu du « qui est-ce ? »
Exercices de manuels	Convertir entre unités Composer un nombre Décomposer un nombre (de manière canonique)
Prolongements possibles	Dénombrement avec des conversions

Etape 2	Les millions. La classe !
Activités de décompositions variées de nombres suivies par la lecture et l'écriture de grands nombres en appui sur la décomposition en unités, milliers, millions, …	
Séance 1	Décompositions variées
Séance 2	Lire et écrire les grands nombres
Exercices de manuels	Décomposer un nombre Lire et écrire des grands nombres
Prolongements possibles	Lire de très très grands nombres (CM2/6ème)

Etape 3	Pas de graduation ?
Activités de repérage et placement de nombres sur une demi-droite graduée (aspect ordinal du nombre) de manière exacte et approchée.	
Séance 1	Placement exact sur une demi-droite graduée
Séance 2	Placement approché sur une demi-droite graduée
Exercices de manuels	Placer un nombre sur une demi-droite graduée Comparer, ranger, encadrer des nombres
Prolongements possibles	Distances des planètes au soleil dans le système solaire (CM2/6ème) Frise chronologique

Etape 4	Calculateurs prodiges !
Activité de calcul mental qui vise à renforcer les connaissances des relations entre les nombres.	
Séance 1	Multiplications et divisions par 10
Séance 2	Multiplications et divisions par 100 et 1000
Prolongements possibles	Retrouver le calcul : réinvestissement des séances 1 et 2. Ordre de grandeur : retrouver le résultat d'un calcul en utilisant l'ordre de grandeur