DE LA THÉORIE DES JEUX À L'ÉLABORATION D'ACTIONS D'ENSEIGNEMENT ET DE VULGARISATION : Le cas de jeux de type Nim

Alix BOISSIÈRE
Plaisir Maths R&D, IMAG
Nicolas PELAY
Plaisir Maths R&D
Lisa ROUGETET
ESPE de Bretagne, Université de Bretagne Occidentale

Résumé. Dans cet article, nous présentons le projet de recherche et développement « les mathématiques, c'est stratégique », conçu au sein de Plaisir Maths, structure de diffusion des mathématiques. La mise en place de ce projet repose sur la collaboration de chercheurs, d'animateurs mathématiques et d'enseignants afin de réaliser plusieurs enjeux : développer le plaisir du jeu et de la recherche chez les participants grâce à des jeux combinatoires ; montrer que la recherche sur la théorie des jeux est vivante, qu'elle a une histoire et que cette histoire se poursuit ; apporter des éléments culturels et historiques sur la théorie des jeux et les récréations mathématiques ; transmettre à des jeunes (à partir de 8 ans) et aux adultes des connaissances et des savoirs en théorie des jeux. Dans une première partie, l'article présente le cadre théorique dans lequel ce projet s'inscrit ; dans un second temps, sont donnés quelques éléments historiques et culturels de la théorie des jeux combinatoires. Enfin, sont détaillés des enjeux didactiques et ludiques spécifiques des jeux combinatoires de type Nim. Ce projet trouve une résonance avec la récente réforme des programmes (septembre 2016) et la mise en place du nouveau thème « algorithmique et programmation » au cycle 4.

Mots clés. Théorie des jeux ; jeux combinatoires ; algorithmique ; contrat didactique et ludique.

Abstract. In this article, we present the research and development project entitled "mathematics is strategic", conceived by Plaisir Maths, an organization that aims to spread mathematics. The implementation of this project is based on a collaboration of researchers, mathematical leaders and teachers, in order to take up several challenges: developing the fun of playing and of searching thanks to combinatorial games; demonstrating that the research on combinatorial game theory is alive, that it has a history which still goes on; providing cultural and historical elements on game theory and on recreational mathematics; passing on knowledge about game theory to young persons and adults. In the first part, the article presents the theoretical frame in which the project takes place. Then, in a second step, we provide several historical and cultural elements of combinatorial game theory. Finally, we describe some didactical and playful issues, which are specific to Nim-like games. This project finds a particular resonance with the recent reform of secondary school curricula in France (September 2016) and the creation of a new theme entitled "algorithmic and programming".

Key words. Game theory; combinatorial games; algorithmic; didactic and play-based contract.

Introduction

En mars 2016, le logiciel Alphago a battu Lee Sedol, un des meilleurs joueurs de Go au monde. Après la défaite de Garry Kasparov en 1997 contre le programme Deep Blue, cet événement marque un nouveau tournant dans l'histoire de la programmation des jeux sur ordinateur, le jeu de Go étant considéré comme l'un des derniers jeux où les êtres humains étaient encore capables de battre la machine. Ces progrès considérables ont été rendus possibles par des avancées importantes en intelligence artificielle (Silver et al., 2016).

Reposant sur le développement de l'informatique et l'augmentation de la puissance de calcul des ordinateurs, ces travaux s'inscrivent également dans le développement de la théorie des jeux dits *combinatoires*.[1]
Au cours de cette même année 2016, la thématique « Algorithmique et programmation » fait son apparition dans les nouveaux programmes de mathématiques de cycle 4. Elle répond à des enjeux sociétaux importants, et elle présente, selon nous, l'intérêt d'offrir de réelles opportunités d'apprendre des mathématiques par le jeu. En effet, les jeux combinatoires trouvent leurs origines dans les mathématiques récréatives et c'est pourquoi nous faisons l'hypothèse que le jeu peut être un puissant levier pour la dévolution et l'apprentissage de nouveaux concepts mathématiques et algorithmiques liés à la théorie des jeux combinatoires.

C'est dans cette perspective que se développe, au sein de Plaisir Maths[2], le projet « les mathématiques c'est stratégique » sur le thème de la théorie des jeux avec une perspective culturelle, historique, didactique et ludique, et qui poursuit plusieurs objectifs :

- Développer le plaisir du jeu et de la recherche chez les participants grâce à des jeux combinatoires.
- Montrer que la recherche sur la théorie des jeux est vivante, qu'elle a une histoire et que cette histoire se poursuit.
- Apporter des éléments culturels et historiques sur la théorie des jeux et les récréations mathématiques.
- Transmettre à des jeunes (à partir de 8 ans) et aux adultes des connaissances et des savoirs en théorie des jeux.

Ce projet est conçu comme un projet de recherche et développement, où collaborent des chercheurs, des animateurs mathématiques, et des enseignants, avec des enjeux d'action (mise en place d'actions de diffusion dans et hors l'école), et des enjeux de recherche (élaboration d'ingénieries didactiques et ludiques, conception d'un modèle théorique pour une activité de diffusion des mathématiques).

Le volet recherche du projet est actuellement mené par les trois auteurs de l'article, qui sont aussi des acteurs du projet pour le volet diffusion en tant qu'animateurs, conférenciers et intervenants sur les ateliers mathématiques.

[1] Les jeux combinatoires, au sens strict, sont des jeux qui se jouent alternativement à deux joueurs, sans hasard, et à information complète. Par ailleurs, le nombre de coups est fini, il n'y a pas de partie nulle et le gagnant (il y en a toujours un) est uniquement défini par le dernier coup de la partie. Le jeu de Nim, par exemple, est un jeu combinatoire au sens strict. En réalité, les jeux qui admettent des parties nulles, comme les Échecs, ou les jeux à score, comme le Go, entrent dans la catégorie des jeux combinatoires étendus.

[2] Plaisir Maths est une structure de diffusion des mathématiques qui regroupe des animateurs, des enseignants, et des chercheurs pour construire et faire vivre des projets mathématiques, didactiques et ludiques à destination du grand public et des scolaires (stages, ateliers mathématiques, des conférences, etc.). Une composante Recherche & Développement permet de développer les projets avec une composante de recherche en didactique.

- Nicolas Pelay est docteur en didactique des mathématiques, responsable du pôle de Recherche et Développement de Plaisir Maths, dont il est le fondateur. Il travaille sur les liens entre jeu et apprentissage (Pelay, 2011, 2012 2016), et les récréations mathématiques.
- Lisa Rougetet est docteure en histoire des sciences et épistémologie. Ses thèmes de recherche portent essentiellement sur les jeux mathématiques, leur histoire et leur utilisation dans l'enseignement.
- Alix Boissière est ingénieure didactique à Plaisir Maths et doctorante en didactique des mathématiques. Elle travaille sur la conception de jeux et l'élaboration d'ingénieries didactiques et ludiques, dont notamment le ©mathelier[3] « les mathématiques, c'est stratégique ».

Cet article est le premier d'une série de deux qui seront publiés dans Petit X. Il est centré sur les enjeux théoriques du projet au niveau didactique et historique, tandis que le deuxième article sera centré sur sa mise en place pratique et les expérimentations.
Dans une première partie, nous précisons comment le projet « les mathématiques, c'est stratégique » s'inscrit dans un projet théorique général de concevoir et analyser avec une perspective didactique des actions de diffusion intégrant des enjeux culturels, didactiques et ludiques (Pelay & Mercat, 2012, Pelay & Boissière, 2015).
Dans une deuxième partie, nous décrirons les avancées historiques importantes de la formalisation des stratégies des jeux combinatoires. Nous présenterons les éléments principaux de la thèse de Lisa Rouget (2014), en montrant que les premiers jeux combinatoires et leur analyse trouvent leur source dans des ouvrages de récréations mathématiques (16ème - 17ème siècles), mais qu'il faut attendre le début du 20ème siècle pour qu'un jeu combinatoire soit résolu complètement mathématiquement, entraînant de nouvelles analyses et de nouveaux résultats essentiels pour le développement de la théorie des jeux combinatoires.
Dans une troisième partie, nous présenterons des enjeux didactiques et ludiques de la théorie des jeux, en appui sur le travail de thèse de Colipan (2014) sur l'étude didactique des jeux de type Nim, la théorie des situations didactiques (Brousseau, 1998), et les travaux sur la dialectique jeu/apprentissage (Pelay, 2011).

1. Le projet « les mathématiques, c'est stratégique »

Le projet « les mathématiques, c'est stratégique » s'inscrit dans une réflexion théorique et pratique sur la possibilité d'étudier dans le champ de la didactique des mathématiques des actions de diffusion des mathématiques dans différents contextes (école, stages, animations scientifiques, etc.) avec des enjeux culturels, ludiques et didactiques.

1.1. Une approche théorique pour articuler enseignement/vulgarisation

Nous observons ces dernières années une croissance importante du nombre d'actions de vulgarisation et de popularisation des mathématiques en France, et la didactique des mathématiques a un rôle à jouer dans la compréhension de ces processus de diffusion :

[3] Un ©*mathelier* est atelier mathématique développé par Plaisir Maths qui vise à faire apprendre les mathématiques par le jeu en s'appuyant sur une méthodologie de recherche en didactique des mathématiques basée sur l'articulation de trois pôles : pratique, théorique et expérimental.

> La didactique des mathématiques, qui vise la compréhension des processus de diffusion des mathématiques dans toutes les institutions qui se donnent de tels objectifs, doit se doter des outils théoriques, conceptuels et méthodologiques qui permettent de travailler ces problématiques. (Artigue & Pelay, 2016)

Nous faisons l'hypothèse qu'il n'y a pas d'un côté le monde de la vulgarisation, de l'autre le monde de l'enseignement et qu'il est possible de développer un cadre théorique qui soit commun pour étudier des actions menées dans différents contextes. Selon nous, il existe des connexions, des objets, des situations, des ressources qui circulent dans différents contextes qu'il s'agit de pouvoir décrire et spécifier avec une approche théorique adaptée. C'est le cas d'un film comme « Dimensions »[4] qui a visée de vulgarisation mais dont certains extraits sont diffusés par les enseignants dans leur cours de mathématiques pour illustrer ou expliquer certaines notions. Ainsi, nos recherches s'inscrivent en cohérence avec la ligne directrice suivante :

> Mener ce travail implique aussi de ne pas réduire la didactique des mathématiques à l'étude des phénomènes d'enseignement et d'apprentissage. Dans le contexte actuel d'évolution profonde des rapports aux savoirs dans nos sociétés, nous pensons que les formes de diffusion sont de plus en plus articulées et complémentaires, selon les lieux, contextes, publics, dans lesquelles elles se déroulent, et qu'il faut poursuivre le mouvement en cours de développement du champ de la didactique comme étude des phénomènes de diffusion et de dissémination de la culture mathématique sous toutes ses formes. (Artigue & Pelay, 2016)

C'est dans cette perspective que se développe l'approche théorique de Nicolas Pelay et de ses collaborateurs (Pelay & Mercat, 2012 ; Pelay & Boissière, 2015), et donc nous allons décrire quelques éléments théoriques en cours de développement qui sont dans ces articles.

1.2 Quelques éléments de la réflexion théorique en cours[5]

Trajectoire d'une action de diffusion des mathématiques

Une « action de diffusion » des mathématiques est définie comme la mise en place d'un dispositif de nature mathématique dans un contexte donné, par un acteur de la diffusion et pour un public donné.
Le terme « diffusion » est à prendre dans un sens général et neutre afin de pouvoir caractériser toute action, indépendamment des nombreux et différents termes qui peuvent la caractériser (vulgarisation, popularisation, dissémination, animation, médiation, enseignement, etc.).

Dans cette approche, une action de diffusion des mathématiques est définie comme une trajectoire qui se réalise dans la zone de diffusion permise par le dispositif. L'adaptation au public est directement liée à l'adéquation de la nature des connaissances et savoirs mathématiques entre le public et les informations qu'il reçoit.
Trois zones sont définies :

[4] *Dimension* est un film réalisé par Etienne Ghys et Aurélien Alvarez.

[5] Le travail présenté est à considérer comme émergent. Les éléments théoriques sont à considérer avec prudence, les termes et schémas sont susceptibles d'être remis en question, si bien qu'il faut considérer les éléments présentés comme une approche théorique et aucun cas comme un cadre théorique.

- la **zone inaccessible**[6] est la zone où le public n'a aucune prise sur ce dont on lui parle. Il ne peut faire référence à des choses déjà connues. Plus la distance est grande, plus les mathématiques paraissent inaccessibles et en quelque sorte magiques pour le public. Souvent invisible ou incompréhensible, le savoir expert est tellement éloigné de celui du public que celui-ci a peu – voire aucune – prise sur la réalité mathématique qui lui est proposée.
- la **zone maîtrisée** est la zone où le public a une certaine maîtrise du contenu mathématique. Les connaissances mathématiques évoquées ont du sens, et il peut se « raccrocher » à des choses connues. Il peut toujours y avoir des approfondissements dans cette zone, mais l'intervenant va la considérer comme connue par son public.
- la **zone didactique** est la zone où une compréhension et un approfondissement sont possibles autour d'une notion, d'un théorème, d'une technique, etc. Cette zone est souvent celle dans laquelle un enseignant passe une grande partie de son temps de classe.

Ces zones étant définies, nous considérons qu'un dispositif de diffusion des mathématiques est comme un vaste territoire mathématique que l'intervenant peut exploiter différemment en fonction du contexte et de son public, et en s'appuyant sur différents ressorts (didactiques, ludiques, magiques, etc.) : il peut poser des jalons et des étapes, et organiser temporellement son action pour réaliser les enjeux fixés.

Le dessin ci-dessous, bien qu'encore très schématique, permet de donner une représentation visuelle de la notion de trajectoire entre différentes zones. Les axes représentent le niveau des connaissances mathématiques portées par le dispositif et par le participant[7].

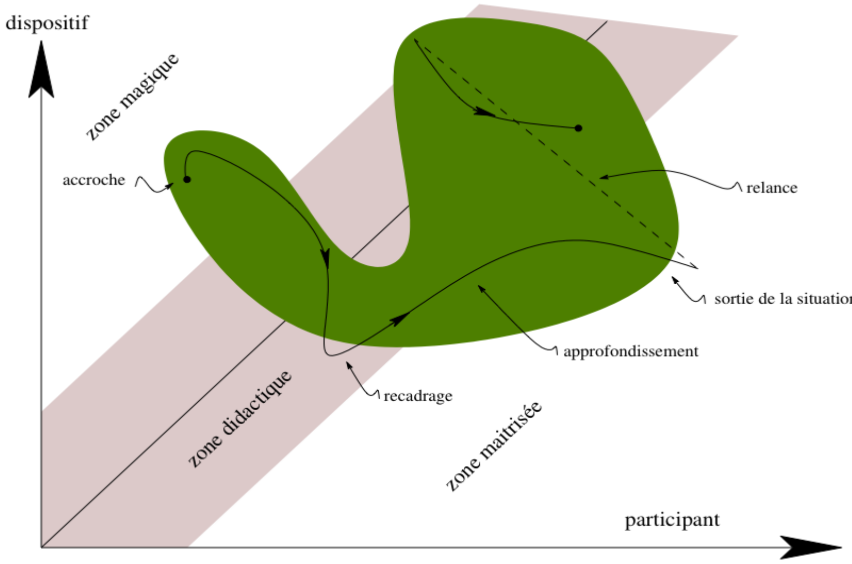

Figure 1. *Trajectoire individuelle et collective dans l'espace des connaissances*

[6] Il faut préciser que le terme initial dans les deux publications citées était « zone magique » mais il a été modifié à la suite d'échanges scientifiques avec L'aspect magique est un ressort ou une sensation que peut ressentir le public quand on lui présente un savoir inaccessible, mais nous ne considérons plus qu'il caractérise la zone.

[7] De nombreuses critiques pertinentes ont été faites sur ce schéma, et il est en train d'être retravaillé. Il faut aussi lire « zone inaccessible » au lieu de « zone magique ».

Les enjeux et intentions d'une action de diffusion

Nous considérons qu'une action de diffusion des mathématiques peut poursuivre simultanément plusieurs enjeux. Pour décrire les différents enjeux, nous reprenons actuellement le modèle de Sousa Do Nascimento (1999), présenté dans sa thèse sur l'animation scientifique[8].

INTENTIONS	ENJEUX	RÔLE DE L'ANIMATEUR
Elucidation	Valeurs (conscientisation, démystification)	Militant
Production	Procédures (règles, normes, techniques de fabrication)	Technicien
Médiation	Culture scientifique et technique partagée	Médiateur
Instruction	Connaissances scientifiques	Instructeur
Loisirs	Plaisir, sensibilisation	Amuseur

Tableau 1. *Les modèles d'analyse de l'animation scientifique*

Ainsi, nous pouvons commencer à appréhender comment notre modèle peut décrire différentes actions de diffusion. En contexte scolaire, l'enjeu principal est souvent celui qui place l'enseignant dans le rôle d'« Instructeur » avec une intention d'« Instruction », il passe ainsi beaucoup de son temps dans la « zone didactique ». Ce schéma permet aussi d'expliciter d'autres rôles que peut avoir l'enseignant dans ses interactions avec ses élèves : médiateur quand il s'agit de montrer comment l'émergence historique de certains concepts ou le rôle qu'ils ont pu jouer dans certaines découvertes scientifiques ou techniques, amuseur quand il s'agit de transmettre à ses élèves le plaisir à faire des mathématiques, etc. Réciproquement, on comprend aussi qu'un médiateur scientifique (d'un musée ou d'une exposition) ou un vulgarisateur (livre, conférence, vidéo, etc.) peut poursuivre des objectifs très différentes et variés, passer beaucoup de son temps dans la zone inaccessible, car son enjeu principal n'est pas d'enseigner.

Le contrat didactique et ludique

Les enjeux que poursuit l'intervenant impactent ses choix dans sa façon de concevoir, d'organiser et de mener son action de diffusion. Ses interactions avec le public – élèves, enfants, adultes, spectateurs, etc. – influent aussi sur des choix ou des adaptations qu'il est susceptible de réaliser en action, à prioriser certains enjeux sur d'autres, ou à tenter d'en faire coexister plusieurs simultanément, etc.

Le contrat didactique et ludique vise à étudier les interactions entre l'intervenant et le public dans une action de diffusion. Il trouve son origine dans la thèse de Nicolas Pelay (2011). Il a adapté des ingénieries didactiques conçues initialement pour le contexte scolaire à des contextes d'animation scientifique, et a observé que, dans le cadre d'animations scientifiques, les enjeux ludiques étaient très présents, et prenaient même parfois le pas sur les enjeux didactiques. Étudier une action de diffusion des mathématiques et ses enjeux peut ainsi être décrit d'un point de vue théorique par la nature du contrat didactique et ludique qui se met en place et son évolution au cours du temps.

[8] Précisions que, à ce stade de nos recherches, la question reste ouverte de savoir si ce modèle doit être adapté ou complémenté pour une action de diffusion des mathématiques. La dimension artistique est par exemple absente de schéma, et pourrait constituer un axe complémentaire à ajouter.

La Théorie des Situations Didactiques (Brousseau, 1998) ne permettant pas d'étudier de façon complète l'imbrication des phases ludiques et didactiques, Pelay (2011) a développé le concept de contrat didactique et ludique en croisant le concept de contrat didactique (Brousseau, 1998) et celui de contrat ludique de Colas Duflo (1997) :

> Le contrat didactique et ludique est l'ensemble des règles et comportements, implicites et explicites, entre un « éducateur » et un des « participants » dans un projet qui lie, de façon explicite ou implicite, jeu et apprentissage dans un contexte donné. (Pelay 2011, p. 284)

Ce concept permet de se donner l'outillage théorique pour décrire et analyser la façon dont évoluent les intentions et les enjeux dans une action mêlant jeu et apprentissages mathématiques. Il permet ainsi de repérer des moments où un contrat didactique se met en place en lien avec la transmission d'un savoir mathématique précis, des moments où un contrat ludique s'instaure pour faire jouer les participants, ou leur raconter une anecdote amusante, et des moments où le contrat didactique et ludique se stabilise pour faire vivre simultanément des enjeux didactiques et ludiques.

La question se pose de la façon dont ce concept doit être adapté pour étudier la prise en compte d'autres enjeux dans l'étude des activités de diffusion.

1.3. « Les mathématiques c'est stratégique » : un projet culturel, ludique et didactique

Un projet de recherche et de développement

Le volet « Développement » de ce projet est assuré par la mise en place d'actions de diffusion à différents niveaux :

- Des jeux combinatoires sont intégrés à la ludothèque mathématique développée par Plaisir Maths, et qui est déployée dans de nombreux contextes : salons des jeux, interventions dans des structures socioculturelles, fête de la science, semaine des mathématiques, etc.
- Les ©matheliers : ce sont des ateliers mathématiques et ludiques, développés par Plaisir Maths, qui permettent à des élèves de 8 à 18 ans de découvrir la théorie des jeux. Ils sont expérimentés à la maison à la Maison des Mathématiques et de l'Informatique de Lyon depuis septembre 2014, et ont aussi été transmis à la Maison des Mathématiques de Quaregnon (Belgique) au moment de son ouverture en septembre 2015.
- Le projet « Les mathématiques, c'est stratégique » est aussi déployé depuis 2016 au cours du stage MathsC2+ à Lyon : il s'agit d'un stage de mathématiques de 4 jours à destination d'élèves de fin de seconde, organisé en collaboration entre le rectorat de Lyon, l'IREM de Lyon et Plaisir Maths.

Le volet « Recherche » est déployé sur deux axes :

- Axe « transposition didactique » : Étudier la théorie des jeux d'un point de vue culturel, historique, didactique et ludique, et réaliser une transposition didactique de la théorie des jeux afin de permettre le développement des activités de diffusion sur ce thème.
- Axe « Processus de diffusion » : Développer un cadre théorique pour étudier et modéliser une activité de diffusion des mathématiques. Le projet est l'occasion d'étudier les processus de diffusion dans une action qui a pour objectif explicite trois des cinq enjeux définis par Sousa Do Nascimento (1999) : diffusion d'une

culture scientifique sur les récréations mathématiques, transmission de connaissances liées à la théorie des jeux, plaisir du jeu.

Les recherches se déroulent de façon conjointe et articulée aux différentes actions et expérimentations menées par Plaisir Maths. La méthodologie utilisée est la méthodologie des trois pôles (Pelay, 2016), qui sera décrite dans l'article consacré à la partie expérimentale.

Notre projet repose sur deux hypothèses :

Hypothèse historique : Les récréations mathématiques ont joué un rôle important dans l'émergence de la théorie des jeux ; la prise de recul historique a un rôle déterminant à jouer dans l'étude et la mise en place d'activités de diffusion sur la théorie des jeux.

Hypothèse ludique : La mise en place d'un contrat didactique et ludique joue un rôle déterminant pour donner du sens aux concepts fondamentaux de la théorie des jeux.

La suite de l'article est consacrée à l'étayage de ces deux hypothèses, qui nous serviront par la suite pour concevoir les activités du projet « les mathématiques c'est stratégique ».

2. Petite histoire de la théorie des jeux combinatoires

L'objectif de cette partie est de présenter aux lecteurs les éléments historiques essentiels de l'évolution des jeux combinatoires et de la théorie mathématique qui s'est construite à partir de leur analyse, en se focalisant sur l'histoire du jeu de Nim et de ses variantes[9]. Ce travail a été mené dans la thèse en histoire des mathématiques de Lisa Rougetet (2014). Elle a rejoint le projet « les mathématiques c'est stratégique » en juin 2016 pour apporter son expertise sur les aspects culturels et historiques liés à la théorie des jeux.
Si le terme *jeu combinatoire* apparaît dans les ouvrages francophones[10] à la fin des années 1970, d'autres expressions sont utilisées plus tôt, comme *jeu de combinaisons* par Édouard Lucas à la fin du 19ème siècle, et des sources bien antérieures présentent et analysent des jeux qu'on qualifierait aujourd'hui de jeux combinatoires. C'est le cas de certains ouvrages de *Récréations mathématiques* à la fin du 16ème et au début du 17ème siècle.

2.1. Dans les ouvrages de *Récréations mathématiques*

Avant la publication en 1901 de l'article de Charles Leonard Bouton (Bouton, 1901), qui fera l'objet du paragraphe 2.2, on trouve des jeux combinatoires sous forme de *problèmes* dans des ouvrages de récréations mathématiques, notamment dans des problèmes arithmétiques[11]. La première apparition européenne connue remonte à la

[9] En parlant « du jeu de Nim », nous faisons référence au jeu présenté par Charles Leonard Bouton dans son article de 1901, et par « jeux de type Nim » nous entendons des jeux qui sont des variantes du jeu de Nim de Bouton.

[10] Traduit du terme anglais *combinatorial game* qui apparaît au début des années 1970 dans les ouvrages anglophones.

[11] On trouve également dans les récréations mathématiques des problèmes de nature géométrique, physique ou mécanique.

Renaissance avec le mathématicien italien Fra Luca Bartolomeo de Pacioli (1445-1517) et son manuscrit *De Viribus Quantitatis* rédigé entre 1496 et 1508 (Pacioli, 1508). Dans cet ouvrage, un des objectifs majeurs de Pacioli est de révéler la puissance que présentent les nombres et de montrer que leur compréhension est possible de manière tangible à travers les jeux les plus couramment pratiqués à la cour.

Un des problèmes arithmétiques de la première partie de l'ouvrage, considéré comme le plus ancien jeu combinatoire recensé dans un manuscrit (Singmaster, 2008), est le suivant : « finir n'importe quel nombre avant l'autre, sans prendre plus qu'un certain nombre limité » (Pacioli, 1508). Par exemple, Pacioli propose à deux personnes d'atteindre le nombre 30 en additionnant à tour de rôle des nombres compris entre 1 et 6, et demande s'il y a un avantage à commencer la partie ou non. Ce problème se retrouve dans *la course à 20* (atteindre 20 en additionnant 1 ou 2 à chaque tour) développée par Guy Brousseau dans les années 80 pour introduire sa théorie des situations didactiques (Brousseau, 1998). Pacioli explique que pour gagner, il suffit d'atteindre les *paliers* 2, 9, 16 et 23. En effet, en raisonnant par la fin, si un joueur ne veut pas que son adversaire gagne en atteignant 30, il doit lui proposer le plus grand nombre tel qu'en lui ajoutant 1, 2, 3, 4, 5 ou 6 il ne puisse atteindre 30. Ce nombre est 23, car quel que soit le nombre que l'adversaire ajoute à 23, il obtiendra un nombre supérieur ou égal à 24, mais inférieur ou égal à 29. Le joueur pourra alors compléter la somme jusqu'à 30 au tour suivant. En raisonnant de la même façon avec 23, on trouve que le palier précédent est 16, puis 9, puis 2. Le joueur qui atteint le premier un de ces paliers pourra ensuite atteindre les autres, et ce jusqu'à 30. De manière générale, pour trouver les paliers qui permettent de gagner quels que soient les nombres-cibles choisis, Pacioli explique qu'il faut « toujours diviser le nombre auquel on veut arriver par un de plus que ce qui peut être enlevé et le reste de ladite division sera toujours le premier palier de la progression » (Pacioli, 1508). Le palier suivant se déduit en additionnant « un de plus que ce qui peut être enlevé » du palier précédent. Ainsi, pour atteindre 35 en additionnant des nombres compris entre 1 et 6, il faudra d'abord atteindre 7, puis 14, 21, 28 et 35 (le reste de la division euclidienne de 35 par 7+6=1 étant nul).

Le manuscrit du *De Viribus Quantitatis* est un recueil de *mathematici ludi*, mathématiques ludiques, incluant des jeux ou des problèmes dans lesquels l'auteur a souhaité enseigner les mathématiques mais en évitant l'ennui créé par la répétition d'exercices fréquemment demandés[12]. Bien qu'il n'ait jamais été publié – l'ouvrage reste dans les archives de l'université de Bologne pendant près de 500 ans –, il fut consulté un certain nombre de fois depuis le Moyen-Âge et a, sans nul doute, servi de source pour des ouvrages ultérieurs.

On retrouve en effet le problème de Pacioli dans les *Problemes plaisans et delectables, qui se font par les nombres*, publié en 1612 par le Français Claude-Gaspard Bachet de Méziriac (1581-1638) :

> Si deux ont proposé entre eux, de dire chacun l'un après l'autre alternativement un nombre à plaisir, qui toutefois ne surpasse point un certain nombre précis, pour voir ajoutant ensemble les nombres qu'ils diront qui arrivera plutôt à quelque nombre prescrit ; faire si bien qu'on arrive toujours le premier au nombre destiné. (Bachet, 1612, p. 99)

12 D'autres auteurs avant Pacioli ont eu la même idée (comme Alcuin, Fibonacci à qui Pacioli dit avoir particulièrement emprunté, ou Pier Maria Calandri). Voir (Singmaster, 2008, pp. 81-82).

Bachet considère et analyse le cas où les deux personnes doivent atteindre 100 en additionnant des nombres compris entre 1 et 10. Il remarque justement que « si les deux qui jouent à ce jeu savent tous deux la finesse infailliblement celui qui commence remporte la victoire. »[13] (Bachet, 1612, p. 100)

Le 17ème siècle est marqué par les déplacements des scientifiques à travers l'Europe. Ce mouvement n'est pas nouveau, mais il prend de l'ampleur et permet de nouer des liens entre les lettrés, de visiter les bibliothèques et autres cabinets de curiosités et d'en constituer. Les échanges épistolaires entre les savants se développent et permettent la circulation des savoirs. Le problème arithmétique initialement posé par Pacioli et repris par Bachet se retrouve alors dans d'autres ouvrages de récréations mathématiques, comme le *Deliciae Physico-Mathematicae* de l'Allemand Daniel Schwenter (1585-1636), les *Récréations mathématiques et physiques* du Français Jacques Ozanam (1640-1718), les *Amusemens mathématiques* d'André-Joseph Panckoucke (1703-1753), les *Nouvelles récréations physiques et mathématiques*, d'Edmé-Gilles Guyot (1706-1786), les *Rational Recreations* du Britannique William Hooper en 1774, et bien d'autres encore jusqu'au début du 20ème siècle. Ce problème n'a sans doute pas été déterminant pour la construction de la théorie mathématique des jeux combinatoires – contrairement au jeu de Nim de Bouton que nous développons dans le prochain paragraphe – mais c'est un marqueur historique fort : il se retrouve dans de nombreux ouvrages de récréations jusqu'au 20ème siècle, parfois sous la forme d'un « Piquet sans cartes »[14], parfois simplement comme un jeu à deux joueurs. Certains auteurs l'exposent sous une forme soustractive (on part du nombre n et on peut retirer au maximum k à chaque coup), et on commence à le voir jouer en version misère[15]. Ces faits laissent à penser que les règles et les mécanismes de résolution du problème posé par Pacioli ont certainement inspiré ceux du jeu de Nim de Bouton.

2.2. L'article de Charles Leonard Bouton (1901)

L'article de Bouton paraît en 1901 dans le journal américain *Annals of Mathematics* et constitue la première publication d'une résolution mathématique générale d'un jeu combinatoire – le jeu de Nim – dans une revue mathématique de recherche. En effet, dans les ouvrages de récréations mathématiques cités ci-dessus, les jeux sont traités dans des cas particuliers, sur des exemples. C'est pour cette raison que l'article de Bouton est considéré comme « fondateur » pour la théorie des jeux combinatoires, car il analyse le jeu de Nim dans un cadre général, avec des données numériques quelconques.

Voici les règles du jeu : sont disposés sur une table trois rangées d'objets de toute sorte, chacune contenant un nombre quelconque d'objets. Les deux joueurs A et B sélectionnent à tour de rôle une des rangées et retirent autant d'objets qu'ils veulent : un, deux, trois, … ou la rangée entière, mais au moins un objet doit être retiré. Le joueur qui prend le(s) dernier(s) objet(s) gagne la partie.

[13] Il suffira d'atteindre les paliers 1, 12, 23, 34, 45, 56, 67, 78, 89 et 100.

[14] À l'origine, le Piquet est un jeu de cartes jadis ayant porté le nom de « Cent de Piquet », car c'est le nombre total de points qu'il faut obtenir pour gagner une partie.

[15] Pour un jeu combinatoire, on distingue une partie jouée en version *normale*, quand le dernier joueur qui peut jouer gagne la partie, d'une partie jouée en version *misère*, c'est-à-dire quand le dernier joueur qui peut jouer perd la partie.

Par exemple, la figure ci-dessous présente une configuration initiale possible avec 3 rangées contenant respectivement 3, 5 et 7 allumettes.

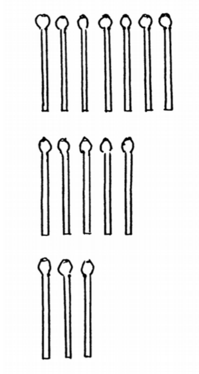

Figure 2. *Configuration initiale possible au jeu de Nim.*

Le but de l'article est de montrer que si A, après avoir bien joué, laisse une certaine position de jeu à son adversaire (appelée *safe combination* par Bouton, qui signifie littéralement *combinaison sûre*) et qu'il ne commet ensuite aucune erreur, B ne peut gagner. Pour déterminer si une position est une *safe combination* ou non, Bouton propose dans un premier temps de transcrire les nombres d'allumettes de chacune des rangées en binaire. Ces équivalents obtenus, il faut les placer sur trois lignes horizontales, en alignant les chiffres de la même unité dans la même colonne, comme pour poser une addition. Ensuite, on somme les chiffres de chaque colonne, on note le résultat et si toutes les sommes des colonnes se ramènent à un 2 ou un 0, alors les trois rangées forment une *safe combination*. Ainsi, la position initiale de la figure ci-dessus n'est pas une *safe combination*, et pour en obtenir une il faudrait enlever une allumette dans une des trois rangées pour obtenir des sommes de colonnes égales à 0 ou à 2 (Rougetet, 2016a). Cette addition un peu particulière est aujourd'hui appelée *Nim-somme* ou *Nim-addition* au sein de la théorie des jeux combinatoires. Elle correspond à la fonction booléenne OU exclusif, très utile pour l'algorithmique et la programmation en informatique (pour combiner deux bits), qui associe un résultat qui est VRAI si et seulement si les deux opérandes ont des valeurs distinctes.

Bouton remarque ensuite qu'étant donnés deux nombres quelconques, la façon de choisir le troisième pour former une *safe combination* est toujours uniquement déterminée. Ceci aboutit à deux théorèmes énonçant les propriétés des *safe combinations* :

- Théorème 1 : Si le joueur A laisse une *safe combination* sur la table, B ne peut laisser une *safe combination* après avoir joué.
- Théorème 2 : Si A laisse une *safe combination* sur la table, et que B diminue une des rangées, A pourra toujours diminuer une des deux autres rangées et laisser une *safe combination*.

On comprend alors – comme dans le cas des paliers chez Pacioli et Bachet – que le joueur A qui arrive le premier à laisser une *safe combination* à son adversaire B pourra toujours en atteindre une autre, quoi que joue B, et gagnera la partie. Bouton présente alors une liste des premières *safe combinations* si les rangées contiennent au maximum 16 objets.

4. A List of Safe Combinations, $n = 4$. The following are the 35 safe combinations all of whose piles are less than 16:

1	2	3	2	4	6	3	4	7	4	8	12
1	4	5	2	5	7	3	5	6	4	9	13
1	6	7	2	8	10	3	8	11	4	10	14
1	8	9	2	9	11	3	9	10	4	11	15
1	10	11	2	12	14	3	12	15			
1	12	13	2	13	15	3	13	14			
1	14	15									

5	8	13	6	8	14	7	8	15
5	9	12	6	9	15	7	9	14
5	10	15	6	10	12	7	10	13
5	11	14	6	11	13	7	11	12

Of course, to give *all* safe combinations of numbers less than 16 we should have to add to the above table the 15 of the form $0, n, n$.

***Figure 3**. Liste des safe combinations données par Bouton (1901).*

Pour généraliser le jeu à un nombre quelconque de rangées, Bouton explique qu'il suffit de procéder de la même manière qu'avec trois tas : une position est une *safe combination* quand les sommes de chaque colonne des équivalents binaires sont paires, c'est-à-dire congrues à 0 modulo 2.

La publication de Bouton suscite l'intérêt d'autres mathématiciens, en Europe et aux États-Unis, et constitue un prétexte à la création de nouveaux modèles et aux développements de leurs solutions. En effet, immédiatement après la parution de l'article en 1901, le jeu de Nim et sa résolution mathématique sont à nouveau présentés dans un journal allemand par Wilhelm Ahrens (1872-1927), mathématicien et auteur sur les récréations mathématiques. Rapidement, de nombreuses modifications du jeu de Nim voient le jour, dont les résolutions, aussi diverses et complexes soient-elles, se ramènent tout compte fait à une configuration du Nim de Bouton. Ce résultat remarquable sera démontré indépendamment par l'Allemand Roland Sprague en 1935 et l'Anglais Patrick Michael Grundy en 1939. Il est connu aujourd'hui sous le nom de théorème de Sprague-Grundy.

2.3. L'évolution de la théorie des jeux combinatoires

Le théorème de Sprague-Grundy généralise la résolution des jeux combinatoires dits *impartiaux*[16] en s'appuyant sur la solution donnée par Bouton en 1901. La principale contribution de ces deux mathématiciens a été de trouver une connexion entre les versions dérivées et la version standard du jeu de Nim, et de la généraliser en ramenant toute position quelconque d'un jeu impartial à une position particulière du jeu de Nim. Le fait que les variantes de Nim affectent davantage l'apparence du jeu pour les joueurs que la substance mathématique sous-jacente avait été pressenti par Ahrens qui, en 1910, dans son ouvrage *Mathematische Unterhaltungen und Spiele*, présente un jeu nommé

[16] Dans un jeu combinatoire *impartial*, les coups ne dépendent que de la position de jeu, et non du joueur dont c'est le tour. C'est le cas du jeu de Nim, mais pas du jeu d'Échecs par exemple, où une couleur est attribuée à chaque joueur.

Der Letzte gewinnt! : sur une rangée de 9 cases, indicées de *a* à *i*, sont situées 3 pierres placées sur les cases *d*, *f*, et *i*. À tour de rôle, les joueurs déplacent une des pierres dans le sens de la flèche. Deux pierres peuvent occuper la même case et une pierre peut sauter par dessus une autre. Le joueur qui amène la dernière pierre sur la case *a* remporte la partie (Ahrens, 1910, p. 80).

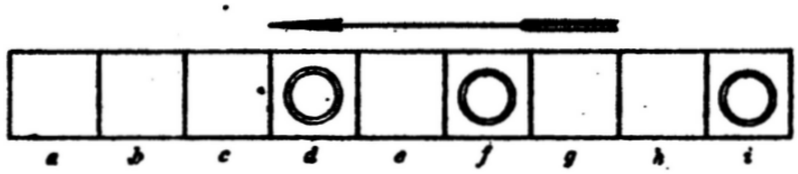

Figure 4. *Configuration initiale du jeu Der Letzte gewinnt! (Ahrens, 1910, p.80).*

Ahrens fait le lien avec le Nim de Bouton de la façon suivante : il suffit de voir les écarts entre les positions des trois pierres et la case *a* comme étant respectivement une rangée d'un jeu de Nim. Les trois positions forment une configuration d'un jeu de Nim à trois rangées, contenant chacune 3, 5 et 8 allumettes. « On reconnaît immédiatement l'identité complète de ce jeu avec notre Nim. » (Ahrens, 1910, p. 80)

Par la suite, le mathématicien et joueur d'Échecs allemand Emanuel Lasker (1868-1941) publie en 1931 un ouvrage consacré aux jeux de table (Lasker, 1931) dans lequel il analyse des *Mathematische Kampfspiele* (littéralement *jeux de combat mathématiques*). À travers l'analyse de l'un d'eux, maintenant appelé le *Lasker Nim*[17], Lasker comprend qu'il y a un lien de parenté avec le Nim de Bouton, mais confie modestement qu'il n'a pas trouvé le théorème général. En revanche, il introduit un vocabulaire qui sera propre à la future théorie des jeux combinatoires tel que *position perdante* (*Verluststellung*), *position gagnante*[18] (*Gewinnstellung*). Il montre également pour chacun des jeux qu'il examine que l'ensemble des positions se divise toujours en un sous-ensemble de positions perdantes et un de positions gagnantes, et donne diverses propriétés concernant la nature d'une position qui serait formée disjointement par deux autres (Rougetet, 2016b).

Ces considérations, ainsi que le vocabulaire, sont reprises et approfondies, quelques années plus tard, par Sprague qui cite Lasker, dans son article de 1935, et qui introduit la notion de *rang* d'une position. Le rang est un nombre entier non négatif affecté à une position de jeu de sorte que : A) aucune position n'a le même rang que ses précédentes, et B) pour chaque position de rang $R>0$, et pour chaque entier P tel que $0\leq P<R$, il existe au moins une position descendante de rang P. Le rang est aujourd'hui appelé *nimber* ou *nombre de Grundy*, l'article de ce dernier ayant connu davantage de succès que celui de Sprague[19].

[17] Au Lasker Nim, il y a un nombre quelconque de tas sur la table, chacun contenant un nombre quelconque d'objets. Celui dont c'est le tour peut diviser n'importe quel tas en deux nouveaux tas distincts, ou bien le réduire, c'est-à-dire lui enlever un certain nombre d'objets. Par exemple, à partir de la position 1, 2, 3, on peut séparer le tas de 2 en deux tas de 1 ; ou bien séparer le tas de 3 en un tas de 1 et un tas de 2, ou bien réduire un seul des trois tas.

[18] Une position est *gagnante* si elle présente une stratégie gagnante pour le joueur, et *perdante* si elle présente une stratégie gagnante pour le joueur adverse.

[19] En effet, l'article de Grundy est publié dans *Eureka*, journal destiné à des étudiants de premier cycle universitaire, par conséquent à large diffusion, tandis que celui de Sprague est publié dans magazine japonais, le *Tohoku Mathematical Journal*, périodique dont l'accès devient de plus en plus difficile dans le monde occidental en 1935.

La condition B) assure que les positions finales ne peuvent avoir qu'un rang égal à 0. À partir de là, le rang d'une position quelconque est déterminé par le plus petit rang qui n'apparaît pas dans la liste des rangs des positions descendantes, et dans un jeu combinatoire impartial quelconque, les positions qui ont un rang égal à 0 sont des positions perdantes.

Voyons comment déterminer le rang/*nimber* de la position 1-2 au Lasker Nim, quand il n'y a que 2 tas composés respectivement d'un objet et de deux objets. On commence par représenter l'arbre des positions qu'il est possible d'atteindre à partir de 1-2, ainsi que celles qu'il est possible d'atteindre à partir de ces dernières, ainsi de suite jusqu'aux positions finales.

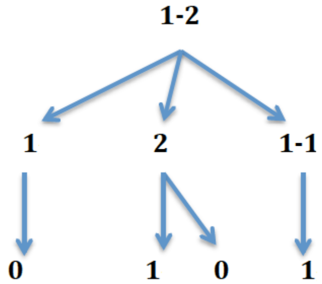

Figure 5. *Arbre de jeu à partir de la position 1-2 au Nim de Lasker (par souci de place, nous n'avons pas représenté les dernières branches qui, de la position 1, arriveraient à la position finale 0).*

La condition B) sur le rang nous permet d'assigner aux positions finales un nimber égal à 0.

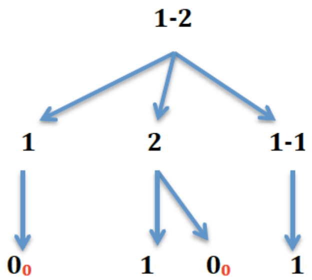

Figure 6. *On assigne aux positions finales un rang/nimber égal à 0.*

Puis, selon les conditions A) et B), le rang d'une position qui mène à une position finale est égal au plus petit entier différent du rang de la position finale, c'est-à-dire le plus entier différent de 0, donc 1. On complète alors l'arbre :

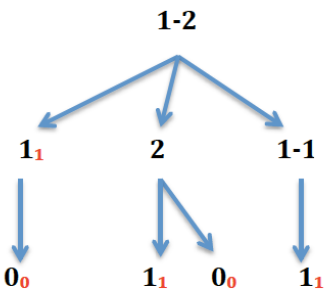

Figure 7. *Les rangs des positions menant à une position finale valent 1.*

En réitérant ce processus, on trouve que la position 2 a un rang égal à 2, que la position 1-1 a un rang égal à 0 (car la seule position suivante possible, 1-1, a un rang égal à 1), et que donc la position initiale 1-2 a un rang égal à 3 :

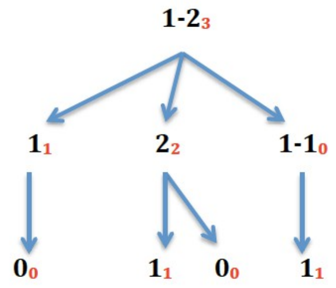

Figure 8. *L'arbre des positions de jeu au Lasker Nim, assignées de leur rang.*

À présent, le rang d'une position donnée plus complexe que 1-2, par exemple 1-2-3-1, et qui n'est autre qu'une somme disjointe de positions plus simples , ,… , est déterminé en calculant la Nim-somme des rangs des différents positions , ,… . Et si cette Nim-somme est nulle, comme dans la résolution du Nim de Bouton, la position est une position perdante.

Aujourd'hui, le théorème de Sprague-Grundy s'énonce ainsi : chaque position d'un jeu combinatoire impartial est équivalente à une position du jeu de Nim[20]. Ce résultat est redécouvert par les mathématiciens Richard Guy et Cedric Smith (Guy & Smith, 1955) dans un article dans lequel est présentée l'analyse complète des jeux impartiaux, ainsi que des conditions de classification des jeux octaux[21]. Cet article permet la rencontre en 1966 entre Richard Guy et Elwyn Berlekamp lors d'une conférence en analyse combinatoire. De cette rencontre émerge l'idée d'une collaboration sur l'écriture d'un ouvrage sur les jeux, à laquelle se joint John Conway. À l'issue de quinze années de collaboration (1966-1982) entre les trois hommes est publiée l'ouvrage *Winning Ways for Your Mathematical Plays*, consacré aux jeux mathématiques et à leur analyse. Ce livre, mêlant théorie et pratique, est encore considéré actuellement comme une des références les plus complètes au sujet de la théorie des jeux combinatoires. Le point central de *Winning Ways* est la mise en place d'une méthode pour assigner une valeur à un jeu ou à une position de jeu en utilisant les nombres de Grundy/nimbers. La relation entre les nombres et les jeux fut également amplement exploitée par John Conway dans son ouvrage *On Numbers and Games*, dans lequel il introduit le concept de nombre surréel et pose les bases de la théorie des jeux partisans[22], mais ces considérations dépassent amplement le cadre de cet article (voir Rougetet, 2016b).

[20] Ainsi, le jeu de Pacioli peut se ramener à la configuration du jeu de Nim de Bouton dans lequel il y aurait 5 rangées de 6 objets, chacun des joueurs pouvant retirer des jetons d'un seul tas (et donc 6 au maximum).

[21] Un jeu *octal* est un jeu combinatoire impartial dont les règles autorisent de retirer des objets d'un tas ou de scinder ce même tas en deux. Le *Lasker Nim*, par exemple, est un jeu octal.

[22] Contrairement à un jeu impartial, un jeu *partisan* tient compte du joueur dont c'est le tour, comme aux Échecs par exemple (le joueur qui a les pièces noires ne peut jouer une des pièces blanches, et vice-versa).

2.4. L'intérêt de la prise de recul historique

L'étude historique de la théorie des jeux combinatoires permet de comprendre que son développement est lié à la façon dont la science se constitue de manière générale : la connaissance scientifique est le savoir obtenu par démonstration, elle procède d'une généralisation d'expériences singulières menées, ou non, intuitivement, elle s'enrichit d'essais et d'erreurs, et vise, à travers le particulier, la compréhension du phénomène général. L'histoire permet de voir que les savoirs mathématiques sous-jacents aux jeux n'ont pas toujours été là ; ils ont été inventés et modifiés au cours de l'histoire pour résoudre des problèmes et résultent d'un processus qui s'inscrit dans le temps et dans l'espace. Intégrer cette histoire dans un enseignement permet une approche culturelle de la discipline mathématique, indispensable à la construction des connaissances.

> Savoir ne suffit donc pas, il faut aussi savoir pourquoi et comment on a su. En répondant à cette exigence, l'histoire permet de voir les mathématiques, non comme un amas de connaissances scolaires, mais comme une activité intellectuelle, un prélude au plaisir de faire des mathématiques. (Cerquetti-Aberkane et al., 1997, préface)

Nous pouvons ainsi noter l'importance de la dimension ludique tout au long de l'histoire de la théorie des jeux. Cette théorie a réellement émergé à partir du jeu de Nim et du développement des récréations mathématiques au cours de l'histoire. Leur étude historique permet d'ailleurs de se rendre compte que la question du plaisir dans l'enseignement n'est pas inédite, ces dernières témoignent en effet d'une certaine volonté de rendre l'enseignement des mathématiques plus ludique, plus récréatif, plus « plaisant » et plus « délectable », pour reprendre les termes de Bachet. Jacques Ozanam est un exemple de personnage qui a joué un rôle important dans cette histoire : véritable passionné de mathématiques et de jeux, il abandonne sa carrière cléricale et devient un enseignant de mathématiques réputé dont les travaux[23] inscrivent les récréations dans une tradition ancienne et universelle où les jeux d'esprit permettent tout à la fois d'être utiles et agréables, avec une portée éducative universelle (Chabaud, 2009 ; Pelay, 2011).

3. Enjeux didactiques et ludiques des jeux de type Nim

Dans cette partie, nous nous intéressons à l'étude didactique des jeux de type Nim :

- Le premier paragraphe présente les bases d'une étude didactique des jeux de type Nim, en appui sur la récente thèse de Ximena Colipan (2014): *Étude didactique des situations de recherche pour la classe concernant des jeux combinatoires de type Nim*
- Le deuxième paragraphe explique l'importance de jouer et de place d'un contrat didactique et ludique pour la mise en place d'activité sur des jeux de type Nim.

3.1 Les enjeux didactiques des jeux de type Nim

Dans sa thèse, Colipan (2014, p. 35) distingue les savoir-faire de l'activité mathématique des savoirs notionnels[24]. Nous avons souhaité reprendre cette distinction car certains des savoir-faire sont accessibles dès le cycle 3 tandis que les notions mathématiques en jeu demandent plus de maturité.

[23] Il est l'auteur du premier *Dictionnaire de mathématiques* en langue française, publié en 1691, ainsi que d'un *Cours de mathématiques*, publié en 1693, sur les mathématiques de l'époque.

[24] Les savoir-faire de l'activité mathématique sont les compétences mises en œuvre dans les tâches d'ordre mathématiques. Les savoirs notionnels sont les savoirs relatifs aux notions mathématiques auxquelles les élèves font appel dans l'analyse d'un jeu combinatoire.

Prenons, pour exemple, le jeu de Pacioli : un des savoirs notionnels en jeu est la division euclidienne de nombres entiers. La décomposition en sous-problème et la généralisation mises en œuvre pour déterminer les *paliers* font partie des savoir-faire de l'activité mathématique. Voyons à présents quels savoir-faire se retrouvent dans une activité autour d'un jeu de type Nim.

Savoir- faire de l'activité mathématique

Dans les actions de diffusion des mathématique telles que MATh.en.JEANS[25], de MathαLyon[26], les stages MathsC2+[27], ou dans les activités proposées par les IREM (Bernard et al., 2004), les jeux de type Nim sont utilisés comme des situations de recherche[28]. De même, Colipan utilise dans sa thèse deux jeux de type Nim pour construire deux situations de recherche pour la classe, dont elle fait l'étude[29].
La raison pour laquelle les jeux de type Nim sont principalement utilisés comme situations de recherche c'est que l'analyse d'un jeu de type Nim fait appel à des savoir-faire de l'ordre de la démarche scientifique tels que :

- analyser un problème et le décomposer en sous-problèmes
- traiter et interpréter des informations
- modéliser
- formuler des conjectures
- raisonner
- argumenter et démontrer
- généraliser
- structurer
- synthétiser
- présenter ses résultats
- dégager une méthode de travail.

Savoirs notionnels mathématiques

Les savoirs notionnels mathématiques mobilisés par l'étude d'un jeu de type Nim se distinguent en deux catégories : les savoirs relatifs aux jeux combinatoires et à la théorie des jeux, et les savoirs spécifiques au jeu étudié. Si nous reprenons l'exemple du jeu de Pacioli, la notion de *palier*, qui correspond à la notion de position perdante au sens de Lasker (cf. 2.3), est un savoir relatif aux jeux combinatoires, tandis que les savoirs relatifs à la division euclidienne de nombres entiers mobilisés pour identifier ces *paliers* sont eux spécifiques au jeu de Pacioli et à ses variantes. Parmi les notions mathématiques relatives aux jeux combinatoires de type Nim en général, citons :

- Les quantificateurs existentiels et universels. Colipan précise : « les notions de position gagnante et position perdante sont basées sur ces notions mathématiques. Plus généralement, les axiomes de jeu combinatoire reposent sur ces quantificateurs.» (Colipan, 2014, p. 35)

25 La liste des sujets proposés comporte chaque année des sujets autour des jeux de Nim : http://www.mathenjeans.fr/sujets
26 http://mmi-lyon.fr/?site_atelier=math%ce%b1lyon
27 http://www.animath.fr/spip.php?rubrique263
28 « [Les situations de recherche en classe] sont des situations didactiques particulières qui peuvent être considérées comme la transposition pour la classe de l'activité du chercheur en mathématiques » (Godot 2006, p.34).
29 Il existe à ce jour peu d'études didactiques sur le sujet et la thèse de Colipan semble être une première du genre.

- La récursivité : les notions de position gagnante et position perdante sont définies de façon récursive.
- La preuve par récurrence : « La plupart des preuves dans la théorie des jeux combinatoires comportent des arguments par récurrence, parfois à plusieurs reprises. » (Colipan, 2014, p. 36)
- Le binaire et l'addition binaire sans retenue : nous l'avons vu dans la partie 2.2., la démonstration de Bouton (Bouton, 1901) fait appel à l'écriture des nombres en binaire et à l'addition binaire sans retenue appelée *Nim-somme.* Ces notions sont aussi à la base des nombres de Grundy, également appelés *nimbers*.
- Les graphes : les graphes permettent de modéliser les jeux combinatoires de type Nim sous forme d'arbre de jeu et le noyau du graphe correspond à l'ensemble des positions gagnantes.

Ces notions sont communes à tous les jeux de type Nim, et certains jeux présentent également une stratégie qui met en avant une notion institutionnelle particulière. Nous pouvons citer, par exemple :

- la course à 20 (Brousseau, 1998) ou le jeu de Pacioli, qui mettent en avant la division euclidienne ;
- le jeu de Nim Fibonacci[30] qui, comme son nom l'indique, s'appuie sur la suite des nombres de Fibonacci ;
- le jeu d'Euclide[31], géométrique ou non (Colipan, 2014), qui est basé sur l'algorithme d'Euclide pour trouver le PGCD de deux nombres.

Nous venons de montrer que les jeux combinatoires trouvent leur place dans le programme scolaire, aussi bien par la richesse des savoirs mathématiques qu'ils présentent que par les savoir-faire mathématiques qu'ils permettent d'exploiter. Par ailleurs, la réforme des collèges, entrée en application en septembre 2016, offre une nouvelle place aux jeux combinatoires dans le programme scolaire du cycle 4.

La réforme des collèges

Dans le nouveau programme de mathématiques du cycle 4, un nouveau thème intitulé « algorithme et programmation » vient s'ajouter aux quatre thèmes traditionnels : thème A -nombres et calculs ; thème B - organisation et gestion de données, fonctions ; thème C -grandeurs et mesures ; et thème D – espace et géométrie. Le dossier ressource « algorithmique et programmation »[32], mis à disposition par Eduscol, récapitule les compétences qui doivent être développées au cours du cycle 4 dans cette thématique :

Cet enseignement a pour objectif de développer chez les élèves les compétences suivantes :

> • décomposition : analyser un problème compliqué, le découper en sous-problèmes, en sous-tâches ;
>
> • reconnaissance de schémas : reconnaître des schémas, des configurations, des invariants, des répétitions, mettre en évidence des interactions ;

30 Un nombre arbitraire de jetons est disposé en un tas sur la table. Le premier joueur peut éliminer tous les pions sauf un. Ensuite, chaque joueur peut retirer jusqu'au double des pions enlevés par son adversaire au tour précédent. Celui qui prend les derniers pions du jeu et vide le tas est le gagnant.

31 On prend un couple d'entiers naturels (a, b) avec $a<b$. À tour de rôle, les joueurs peuvent soustraire autant de fois qu'ils le souhaitent le plus petit des deux nombres au plus grand, tant que le résultat est positif. Le gagnant est le joueur qui réussi à amener un des deux termes à 0.

32 http://cache.media.eduscol.education.fr/file/Algorithmique_et_programmation/67/9/RA16_C4_MATH_algorithmique_et_programmation_N.D_551679.pdf

• généralisation et abstraction : repérer les enchaînements logiques et les traduire en instructions conditionnelles, traduire les schémas récurrents en boucles, concevoir des méthodes liées à des objets qui traduisent le comportement attendu ;
• conception d'algorithme : écrire des solutions modulaires à un problème donné, réutiliser des algorithmes déjà programmés, programmer des instructions déclenchées par des événements, concevoir des algorithmes se déroulant en parallèle.

Or, comme le stipule Colipan (2014, p. 35), « la notion de stratégie gagnante [...] consiste à trouver un algorithme qui permet de toujours gagner. ». Cette recherche de la stratégie se fait par *reconnaissance de schémas* au cours de diverses parties, par *généralisation* des hypothèses obtenues sur des *sous-problèmes*. Les compétences mises en œuvre dans la recherche d'une stratégie gagnante font parties des compétences que les élèves doivent acquérir au cours du cycle 4 en mathématiques et particulièrement en algorithmique et programmation. Par ailleurs, parmi les exemples de situations et d'activités pour les élèves proposées par le programme scolaire dans cette thématique nous trouvons : « Jeux dans un labyrinthe, jeu de Pong, bataille navale, jeu de Nim, tic tac toe. »
L'utilisation de jeux de type Nim est donc pertinente pour construire une situation d'enseignement des mathématiques, en particulier si elle s'inscrit dans le thème D (algorithmique et programmation). Toutefois, l'utilisation de ces jeux en classe ne doit pas se faire au détriment du ludique, ce que nous développons dans le point suivant.

3.2 L'importance de jouer

Mettre en place une activité mathématique sur les jeux combinatoires de type Nim nécessite, selon nous, de laisser une place conséquente au jeu, primordiale au bon déroulé de l'activité. Dans cette sous-partie, nous exposons certains enjeux ludiques relatifs aux jeux de type Nim.

Entrée dans l'activité par le jeu

Dans sa thèse sur la dialectique jeu/apprentissage dans les contextes d'animations scientifiques, Pelay (2011, p. 109) affirme :

> Il ne suffit pas d'avoir bien conçu une animation pour qu'elle soit réussie. Il faut donner aux enfants l'envie de jouer. Jouer est associé à une idée de plaisir : lorsqu'un individu s'engage dans un jeu, c'est qu'il s'attend à éprouver un plaisir ludique qu'il « évalue » et qui va décider de son engagement puis de son implication. Plus l'envie de jouer est grande, et plus l'implication dans le jeu sera importante dès le début de l'activité. C'est un point essentiel de l'animation, et une partie importante de sa réussite.

En mettant en place une activité sur un jeu, on donne aux participants l'envie d'entrer dans l'activité. De plus, les jeux de type Nim portent naturellement en eux une dimension ludique qu'il est impossible d'éviter si on souhaite exploiter leur potentialité mathématique. Leur analyse est centrée sur une phase de recherche qui débute par le fait de jouer quelques parties et de se rendre compte qu'il y a une stratégie.

Le jeu comme moteur de la dévolution

Le jeu permet de rentrer dans l'activité d'analyse d'un jeu de type Nim, mais il est aussi un véritable moteur de la dévolution : l'importance de jouer est d'autant plus grande que le fait de jouer un grand nombre de parties est nécessaire pour développer des stratégies.

Brousseau, dans son étude de la course à 20, a dressé un tableau du nombre de parties nécessaires pour voir apparaître l'émergence d'un théorème[33] (Brousseau 1998, p. 43) :

	Nombre de parties nécessaires pour l'émergence d'un théorème						
Théorèmes	20	17	14	11	8	5	2
Situation d'action	1	3	9	15*	26*	46	-
sit. formulation après action	1	4	16	-	-	-	-
sit. de preuve	1	6	10	10	-	-	-
institutionnalisation	1	4	9	10	10	10	10

* le théorème 11 apparu à la 15ème partie, disparaît après la 30ème, le théorème 8 ne se maintient que pendant une quinzaine de parties et disparaît, le théorème 5 apparaît à la 46ème partie.

Tableau 2. *Nombre de parties nécessaires pour l'émergence d'un « théorème »*

Ce tableau nous montre que, dans le cas de la course à 20, il faut 3 parties pour observer la première position gagnante, puis 9 pour la deuxième, etc.

De plus, la pratique des jeux combinatoires permet d'acquérir des méthodes d'analyse, de repérer plus vite les premières positions perdantes au sens de Lasker (cf partie 2.3). Un exemple de ce type de méthode est celle de la symétrie : pour de nombreux jeux de type Nim, certaines positions peuvent être qualifiées de symétriques lorsqu'elle présente une symétrie (par exemple deux tas avec le même nombre de jeton, ou une disposition géométrique symétrique). Dans ce cas, en jouant un coup similaire à celui de l'adversaire on retombe systématiquement sur une position qualifiée de symétrique. Prenons par exemple le jeu de Nim de Bouton, les positions correspondant à deux rangées de n allumettes chacune, modélisées par le couple (n, n), peuvent être qualifiées de symétriques. En effet, si l'adversaire enlève k jetons dans une rangée, $k \leq n$, nous pouvons enlever k jetons dans l'autre rangée et ramener le jeu à la position $(n\text{-}k, n\text{-}k)$ qui est à nouveau symétrique. On peut jouer ainsi jusqu'à ce que l'adversaire vide une rangée, on vide alors l'autre rangée et on gagne la partie.

Si l'histoire des jeux combinatoires nous montre qu'il est possible d'étudier les jeux de façon empirique, elle montre surtout l'écart mathématique qu'il y a entre la théorie des jeux combinatoires, qui permet de donner la stratégie sans jouer, et les notions mathématiques relatives aux stratégies trouvées empiriquement. Des rudiments de théorie des jeux peuvent être introduits aux élèves, mais nous ne pouvons pas, en revanche, attendre de leur part une maîtrise suffisante pour pouvoir analyser un jeu sans jouer. Par contre, l'étude empirique d'un jeu est tout à fait accessible.

Le contrat didactique et ludique spécifique des jeux combinatoires

Les jeux combinatoires ont un contrat didactique et ludique qui leur est propre du fait de l'imbrication des enjeux didactiques et ludiques dans la situation. Les jeux combinatoires ont en effet cet avantage que les enjeux ludiques ne sont pas déconnectés des enjeux didactiques. Le jeu en lui-même est porteur de la situation didactique : pour

[33] Le terme « théorème » est utilisé par Brousseau pour désigner une conjecture « acceptée par tous ». (Brousseau 1998, p.37).

gagner il faut trouver la stratégie gagnante. L'enjeu ludique, qui est de gagner, motive la recherche de stratégie. Afin que les participants comprennent et soient convaincus qu'il y a une façon de gagner à tous les coups (une stratégie gagnante), il faut qu'ils fassent l'expérience d'un certain nombre de parties et en particulier d'un certain nombre d'échecs. En effet, Brousseau a observé que « ce sont les enfants qui perdent une partie qui veulent le plus expliquer leur échec, ou les conditions de la réussite. » (Brousseau, 1998, p. 28) Cette remarque faite sur le cas de la course à 20 par Brousseau est également observable sur les autres jeux de types Nim, que nous avons expérimentés lors de nos animations.
Si le jeu permet aux élèves de poser la problématique de recherche d'une stratégie, il permet aussi, au cours de la recherche, de tester, valider et invalider les conjectures émises. Les élèves doivent pouvoir revenir systématiquement au jeu pour confronter leur modèle à la réalité. C'est pourquoi nous faisons l'hypothèse qu'il est très important de mettre en place des phases purement ludiques dans une action de diffusion, que soit dans une situation de vulgarisation ou une situation d'enseignement. Les expérimentations que nous décrirons ultérieurement viendront le montrer, et nous ferons l'analyse des évolutions de la nature du contrat didactique et ludique.

Conclusion et perspectives

Nous avons ici exposé les aspects mathématiques, historiques et didactiques de notre projet, à partir duquel il est possible d'utiliser les jeux combinatoires dans l'apprentissage de l'algorithmique. Elles nous semblent fondamentales pour permettre aux enseignants de faire des choix pour les cours qu'ils vont concevoir par rapport à la réforme des programmes, et d'intégrer différents enjeux dans leur cours. Nous leur conseillons vivement de tenter de mettre en place des vrais moments de jeu dans leur classe, ils pourront voir les effets bénéfiques sur la motivation, l'implication dans les apprentissages, et la compréhension des notions par les élèves, et comment la dynamique de jeu peut créer une réelle synergie avec les apprentissages mathématiques.

C'est ce que nous montrerons dans le prochain article qui présentera le volet pratique et expérimental du projet « les mathématiques c'est stratégique » :

– Les ©mathelier « les mathématiques c'est stratégiques » menés avec des classes du CM1 à la Terminale à la maison des mathématiques et de l'informatique de Lyon, nous permettront de faire des observations stables et récurrentes pour étayer nos résultats.
– Le stage « MathsC2+ », mené à Lyon sur ce thème en 2016 et 2017 rendra compte d'une expérience sur 4 jours pour mettre en place un projet culturel, didactique et ludique, avec le scénario suivant :

Jour 1 : Mathelier découverte « les mathématiques, c'est stratégique » (2 heures). Pendant une heure, les jeunes vont jouer à des jeux combinatoires. Puis une phase de discussion s'engage pour savoir s'il existe des stratégies pour gagner. Les élèves ne sont bien sûr pas tous d'accord et, à la suite du débat, l'animateur propose l'approfondissement d'un jeu.

Jour 2 : Mathelier approfondissement « les mathématiques, c'est stratégique » (2 heures). La notion de « stratégie gagnante » et de « position sûre » est tout d'abord institutionnalisée dès le début de la deuxième séance. La position « 3 jetons » est alors exemplifiée : c'est une position sûre, et il existe une stratégie gagnante puisque si mon adversaire prend un jeton, j'en prend deux et je gagne, et s'il en prend deux, je prends le dernier et je gagne.

Jour 3 : Rallye mathématique, avec des jeux combinatoires. Les élèves réinvestissent dans le jeu les notions étudiées à travers un certain nombre de défis. Une fois compris, les jeunes sont invités à chercher toutes les positions sûres et les stratégies gagnantes. À mi-séance, selon l'avancement des élèves, la notion de graphe sera introduite.

Jour 4 : Conférence sur les récréations mathématiques. La conférence (emblématique de la vulgarisation) constitue pour nous, d'une part, un positionnement culturel important indissociable des enjeux ludiques et des savoirs théoriques visés au cours du stage et, d'autre part, un élément d'analyse pertinent pour notre modèle.

Références

AHRENS W. (1910) *Mathematische Unterhaltungen und Spiele*, Leipzig, Berlin : Verlag Von B.G. Teubner, 3ème édition, 1921.

ARTIGUE M., PELAY N. (2016) Vers une approche didactique des activités de diffusion et vulgarisation des mathématiques, et de leurs synergies possibles avec les activités scolaires, in Actes du *Séminaire national de didactique des mathématiques*, Paris, 18-19 mars 2016.

BACHET C.-G. (1612) *Problemes plaisans et delectables, qui se font par les nombres*, Lyon, 1ère édition.

BERLEKAMP E., CONWAY J. , GUY R. (2001) *Winning ways for your mathematical plays.* Vol. 1. A K Peters Ltd., Natick, MA, second édition, 2001.

BERNARD A. & al. (2004) *De l'arithmétique au collège*, IREM de Lyon, Villeurbanne, 2004, http://numerisation.irem.univ-mrs.fr/LY/ILY04002/ILY04002.pdf

BOUTON C. L. (1901) Nim, a Game with a Complete Mathematical Theory. *The Annals of Mathematics*, 2nd ser., **3**(4), 35-39.

BROUSSEAU G. (1998) *Théorie des situations didactiques*, Grenoble : La Pensée sauvage.

CERQUETTI-ABERKANE F., RODRIGUEZ A. & JOHAN P. (1997) *Les maths ont une histoire, activités pour le cycle 3*, Paris : Hachette. Préface d'Évelyne Barbin.

COLIPAN X. (2014) *Étude didactique des situations de recherche pour la classe concernant des jeux combinatoires de type Nim*. Thèse de doctorat en Mathématiques-Informatique, sous la direction de Sylvain Gravier et Denise Grenier, Grenoble, Université Joseph Fourier, 2014, 369 pp.

DUFLO C. (1997) *Jouer et philosopher,* Paris, PUF.

GODOT K. (2006) La roue aux couleurs : une situation recherche pour apprendre à chercher dès le cycle 3. *Grand N,* **78**, 31-52.

http://www-irem.ujf-grenoble.fr/revues/revue_n/fic/78/78n3.pdf

Guy R. & Smith C. (1955) Disjunctive Games with the Last Player Losing. *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society,* **53**(3), 527–533.

LASKER E. (1931) *Brettspiele der Völker*. Berlin : August Scherl.

PACIOLI L. (1508) *De Viribus Quantitatis*.

PELAY N. (2016) La méthodologie des trois pôles : une méthodologie de recherche et développement pour l'animation scientifique, *Questionner l'espace, les méthodes de recherche en didactique*, Presses universitaires Septentrion.

PELAY N. (2011) *Jeu et apprentissages didactiques : élaboration du concept de contrat didactique et ludique en contexte d'animation scientifique*. Thèse de doctorat en didactique des mathématiques, sous la direction de Pierre Crépel et Viviane Durand-Guerrier, Lyon, Université Claude Bernard, 358 pp.

PELAY, N. & BOISSIERE, A. (2015). Vulgarisation et enseignement des mathématiques dans le jeu Dobble. In L. Theis (Ed.), Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage – *Actes du colloque EMF2015* – Spé2 (pp. 944-956). https://www.emf.unige.ch/files/6014/6410/3671/EMF2015SP2PELAY.pdfhttps://www.emf.unige.ch/files/6014/6410/3671/EMF2015SP2PELAY.pdf

PELAY, N. & MERCAT, C. (2012). Quelle modélisation didactique de la vulgarisation des mathématiques. In J.-L. Dorier & S. Coutat (Eds.), Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle — *Actes du colloques EMF2012* – Spé4 (pp. 1914-1925). https://www.emf.unige.ch/files/6114/5321/1224/EMF2012SPE4PELAY.pdf POISARD, C. (2005). Ateliers de fabrication et d'étude d'objets mathématiques.

OZANAM J. (1694) *Récréations mathématiques et physiques, qui contiennent plusieurs problèmes d'arithmétique, de géométrie, de musique, d'optique, de gnomonique, de cosmographie, de mécanique, de pyrotechnique, & de physique. Avec un traité des horloges élémentaires*. Paris : Jombert, 1ère édition.

ROUGETET L. (2016a) Raconte-moi une nimstoire. *Repères Irem*, **105**, octobre 2016.

ROUGETET L. (2016b) "Autour du théorème de Sprague-Grundy". Images des Mathématiques, CNRS, 2016.

ROUGETET L. (2014) *Des récréations arithmétiques au corps des nombres surréels et à la victoire d'un programme aux Échecs. Une histoire de la théorie des jeux combinatoires au XXe siècle.* Thèse de doctorat en histoire des sciences et épistémologie, sous la direction de Jean-Paul Delahaye et Bernard Maitte, Lille, Université des Sciences et Technologies, 466 pp. – http://images.math.cnrs.fr/Autour-du-theoreme-de-Sprague-Grundy

SILVER D., HUANG A., MADDISON C. J., GUEZ, A., SIFRE L., VAN DEN DRIESSCHE G., SCHRITTWIESER J., ANTONOGLOU I., PANNERSHELVAM V., LANCTOT M. & al (2016). Mastering the game of Go with deep neural networks and tree search. *Nature*, **529**(7584): 484-489.

SINGMASTER D. (2008) *De Viribus Quantitatis* by Luca Pacioli: The First Recreational Mathematics Book. In: DEMAINE E., DEMAINE M., & RODGERS, T. (Eds.). *A Lifetime of Puzzles*, Wellesley : A K Peters, 77-122.

SOUSA DO NASCIMENTO, S. (1999), *L'animation scientifique : essai d'objectivation de la pratique des associations de culture scientifique et de techniques françaises,* Thèse, Université Paris VI.

Sitographie

Concernant le problème des partis : https://fr.wikipedia.org/wiki/Problème_des_partis, consulté le 25 septembre 2017.

Concernant le problème des sept ponts de Königsberg : https://fr.wikipedia.org/wiki/Problème_des_sept_ponts_de_Königsberg, consulté le 25 septembre 2017.