LA LOGIQUE FORMELLE AU NIVEAU UNIVERSITAIRE : UNE ÉTUDE EMPIRIQUE EN CONTEXTE DE DÉMONSTRATION

Sarah MATHIEU-SOUCY
Université Concordia

Denis TANGUAY
Université du Québec à Montréal

Résumé. Le but de l'étude rapportée ici est de discuter de l'influence d'un enseignement en logique formelle, et des connaissances et savoirs impliqués, sur la manière dont les étudiants universitaires produisent et valident des démonstrations. Dans ce contexte, nous avons demandé à huit étudiants de premier cycle universitaire ayant différents niveaux de connaissances en logique, et ayant ou non suivi un cours de logique, de produire et valider des démonstrations dans le cadre d'entrevues basées sur des tâches à résoudre. Nos résultats suggèrent que la réussite d'un cours de logique change la manière dont les étudiants abordent les démonstrations de plusieurs façons.

Mots clés. Logique formelle, démonstrations, cours de logique, étudiants universitaires, didactique des mathématiques

Abstract. The goal of the study presented in this paper is to discuss to what extent passing a course in formal logic, and mastering or not the underlying knowledge, changes the way students produce and validate proofs in the context of undergraduate mathematics. With that in mind, we asked 8 students with varied levels of knowledge and different academic backgrounds in formal logic to produce and validate proofs through a task-based interview, and we analyzed their work. Our empirical results suggest that succeeding in a logic course changes the way students deal with mathematical proof in many ways.

Keywords. Formal logic, proofs, logic course, university students, mathematics education

1. Problématique

1.1 Faire des mathématiques : la place de la logique

La communauté mathématique n'a pas un avis consensuel sur la place que doit occuper la logique formelle, tant dans l'activité mathématique générale comme celle qui est déployée en contexte scolaire, que dans celle plus pointue du mathématicien-chercheur. Durand-Guerrier (2008) rend bien compte de cette ambivalence quand elle oppose deux visions, celle du logicien Quine (1987) à celle qu'elle qualifie « d'hypothèse générale », dont on trouve la trace chez plusieurs mathématiciens :

> Toute sa vie, Quine a défendu la thèse de la fécondité de la logique pour analyser le raisonnement et les discours scientifiques, mais aussi le langage ordinaire. Cette position apparaît en opposition avec une hypothèse générale selon laquelle la logique n'est d'aucune utilité pour les mathématiques (Dieudonné, 1987; Thurston, 1994), ou que la déduction logique est nécessairement stérile (ne produit pas de nouvelles vérités). (Durand-Guerrier 2008, p. 1 ; notre traduction).

Selon Poincaré (1905, p. 33) par exemple, « la logique et l'intuition ont chacune leur rôle nécessaire. Toutes deux sont indispensables. La logique qui peut seule donner la certitude est l'instrument de la démonstration : l'intuition est l'instrument de l'invention ». Dans le même ordre d'idées, pour Kuiper (2004), une connaissance de la logique n'est pas suffisante pour faire des mathématiques même si celle-ci joue un rôle indispensable dans le raisonnement mathématique. Un mathématicien important comme Cauchy a commis des erreurs de nature essentiellement logique dans certaines de ses démonstrations et même si ces failles n'ont pas freiné sa prolifique activité de chercheur, c'est à travers l'examen attentif du rôle des quantificateurs et du statut logique des variables qu'on peut clarifier les notions — comme celle de *convergence uniforme* pour une suite de fonctions — qui ont permis de rectifier les constructions théoriques de Cauchy (cf. par exemple Durand-Guerrier et Arsac 2003).

L'hypothèse générale selon laquelle la logique ne serait pas d'une grande utilité aux mathématiciens serait partagée par un certain nombre d'entre eux, mais ne ferait pas l'unanimité. Parmi les opposants, outre Quine, on trouve Frege, qui a pour avis que la logique est source de connaissances (Marion et Voizard 1998). En ce qui concerne les adhérents à l'hypothèse, certains grands mathématiciens comme Thurston et Thom considèrent que leurs notions de base en logique, autant théoriques qu'intuitives, leur suffisent (Durand-Guerrier et al. 2012). Par exemple pour Thom (1974, p. 14), la logique, et en particulier le calcul propositionnel, ne permet de mettre en évidence que les articulations relativement grossières du raisonnement, les articulations fines, dues au sens, se laissant difficilement expliciter, voire formaliser. Les mathématiciens utiliseraient donc, pour venir à bout d'une démonstration, des connaissances « logiques » qui n'ont pas toujours de statut théorique, du moins pas strictement. Thurston (1994, pp. 4-5) met en évidence des « manières intuitivement construites de raisonner » (notre traduction de *built-in ways of reasoning*) qui, pour les mathématiciens, ne font généralement pas intervenir explicitement les règles de la logique formelle.

1.2 Sur quels types de connaissance les mathématiciens s'appuient-ils pour faire des mathématiques ?

Il devient alors pertinent de réfléchir à la question suivante : de quelle nature est la compréhension de la logique de la part des mathématiciens pour qu'ils puissent travailler comme experts des mathématiques, sans nécessairement faire appel à une connaissance de la logique formelle qui apparaîtrait comme complète. Durand-Guerrier et al. (2012, p. 383) proposent une amorce de réponse : « it is possible that through innate ability or unconscious absorption during their school years, many mathematicians reached this level of competence without formal training »[1]. Cette idée accentue l'importance de l'expérience mathématique de l'individu dans son activité mathématique. Également, Selden et Selden (1999) soulignent qu'il existe chez les individus des capacités innées à utiliser certains éléments de logique, sans qu'ils soient nécessairement à l'aise vis-à-vis de tous les aspects de la logique formelle.

En somme, il paraît difficile de statuer sur l'utilité réelle et concrète des connaissances en logique formelle dans un travail mathématique. En particulier, il ressort que certains mathématiciens n'accordant pas une grande importance à leurs connaissances logiques théoriques s'appuieraient sur d'autres types de connaissances, comme une intuition forte ou

1 « Il est possible qu'à travers des habilités innées ou une assimilation inconsciente durant leur parcours scolaire, maints mathématiciens ont atteint ce niveau de compétence sans entraînement systématique. » (Notre traduction).

encore leur expérience, pour effectuer un travail mathématique adéquat et rigoureux. Cependant, il ne s'agit pas de connaissances dont disposent les étudiants qui font leur entrée dans l'univers des mathématiques avancées, par exemple les étudiants qui commencent leurs études universitaires. Cela nous incite à poser la question suivante : quelles connaissances ces étudiants utilisent-ils dans des contextes similaires à ceux où les mathématiciens utilisent des connaissances liées à leur expérience ou à leur intuition ? Cette question prend toute son importance lorsqu'on se fie à la recherche, qui souligne les importantes difficultés des étudiants à résoudre des tâches faisant appel à leurs connaissances logiques, à mettre en parallèle avec les importantes difficultés à réaliser des démonstrations (par ex. Epp 2003 ; Fabert et Grenier 2011; Selden et Selden 1995 ; Tanguay et Mathieu-Soucy 2015). Elle est aussi à mettre en lien avec la difficile articulation entre *logique naturelle* et *logique mathématique* (cf. par ex. Murphy et al. 2016).

Il semble également pertinent d'aborder cette question dans une optique comparative. En effet, il est intéressant de constater que des étudiants familiers avec certaines connaissances logiques théoriques et leurs applications puisent dans ces ressources ou s'appuient sur celles-ci lorsqu'ils sont confrontés à des tâches où leurs connaissances mathématiques strictement liées au sujet spécifique en jeu ne suffisent pas pour répondre adéquatement à une question (Epp 2003). Ainsi, nous présumons d'une possible différence entre le type de connaissances sollicitées par les étudiants selon le contexte mathématique dans lequel une démonstration donnée s'inscrit.

1.3 Retour et questionnement

En somme, l'évaluation de l'utilité de la logique dans la production de démonstrations et dans les mathématiques en général est assez variée. Nous nous proposons d'interroger les types de connaissances sur lesquels s'appuient les étudiants ou encore, les types d'arguments mis en œuvre pour réaliser une démonstration, selon qu'ils ont ou non des connaissances en logique formelle ; et ce, sachant que ces étudiants ne disposent pas du même bagage mathématique et des mêmes expériences que les mathématiciens, qui clament souvent l'utilité restreinte des concepts théoriques de la logique. Est-ce que les étudiants, selon qu'ils ont ou qu'ils n'ont pas de connaissances poussées en logique, mettent à profit des connaissances ou des arguments différents lors de la production de démonstration ? Finalement, la manière de faire ces démonstrations est-elle alors différente ?

2. Cadre conceptuel

Dans le but de caractériser les productions de démonstrations, en lien avec le type de connaissances, d'arguments et de raisonnements utilisés, nous nous munissons d'outils conceptuels et terminologiques, afin de bien identifier et nommer ce qui sera vite un enjeu dans cette recherche.

2.1 Forme prédicative et forme opératoire de la connaissance

Certains concepts qui interviennent dans la *Théorie des champs conceptuels* de Vergnaud se sont révélés importants pour ce travail. La Théorie des champs conceptuels est « une théorie cognitiviste, qui vise à fournir un cadre cohérent et quelques principes de base pour l'étude du développement et de l'apprentissage des connaissances complexes » (Vergnaud 1990, p. 197). Elle repose sur la notion de *schème*, qui est l'organisation invariante de la conduite en réponse à des situations apparentées, groupées à l'intérieur d'une même classe de situations. Les schèmes reposent sur des *concepts-en-actes* et *théorèmes-en-actes*, qui sont les connaissances implicitement impliquées quand le schème est mis en œuvre. Ces connaissances se manifestent alors sous *leur forme opératoire*, tandis que *leur forme prédicative* est celle sous laquelle elles sont explicitement identifiées, nommées, désignées, généralement en tant qu'énoncés, par exemple dans des textes, des manuels, des traités (Vergnaud 2001, p. 6).

Alors que Vergnaud distingue ces formes d'une même connaissance, Merri et Pichat (2007) prêtent sans doute au mot « connaissance » une acception plus pointue quand ils font de ces formes des classes de connaissances :

> les connaissances prédicatives sont explicites, verbalisantes et conscientes. Elles sont habituellement socialement reconnues, partagées et acceptées par un groupe culturel (plus ou moins vaste) donné. (Op. cit., p. 83).

Toujours pour Merri et Pichat, ce qu'ils appellent les « connaissances opératoires »…

> … que [Vergnaud] nomme également connaissances-en-acte […] sont, par nature, rattachées à des situations tangibles d'action effective. Ce sont elles qui « chargent de sens » les connaissances prédicatives auxquelles elles sont sous-jacentes. Ce sont également elles qui leur permettent d'être applicables, d'être mises en œuvre dans des situations données et d'être rattachées à des situations d'action. (Op. cit., p. 83).

Vergnaud (2001) insiste sur cet aspect opératoire de la connaissance, acquis au cours de l'expérience, parce que c'est celui qui permet de penser le réel, de faire, voire de réussir. Nous retenons qu'il peut y avoir des opérations de la pensée qui ne sont pas explicitement identifiées, formulées, réfléchies, qui peuvent même parfois rester inconscientes, et qui sont les pendants « en acte » des opérations analogues menées à partir de connaissances (prédicatives) en logique. Ces idées fournissent un appui important pour discuter des idées et résultats de cette recherche.

2.2 Caractérisation des démonstrations : l'intuition

Les mathématiciens s'accordent généralement à dire que pour faire des mathématiques, il faut allier l'intuition à la rigueur. L'idée d'« intuition » nécessite ici quelques précisions. Le sens commun suggère que l'intuition est un sentiment qui s'impose à un individu sans qu'il puisse expliquer pourquoi. Si un mathématicien dit avoir utilisé son intuition (mathématique) lors de la production d'une démonstration, alors on pourra penser qu'il a adopté ou rejeté une idée sans chercher à expliciter pourquoi de manière précise (Van Moer 2007). L'intuition intègre donc des connaissances qui s'imposent subjectivement à un individu comme étant absolues (Fischbein 1987). Elle guide les actions de celui qui fait des mathématiques et peut le mener à trouver la solution d'un problème avant même qu'il ait pu formuler précisément les étapes de résolution (Fischbein 1982).

Un point crucial est que des intuitions peuvent prendre racine lorsqu'un individu est convaincu de la vérité d'un énoncé donné. Certaines peuvent donc se révéler mathématiquement erronées, et le recours à l'intuition n'est par conséquent pas sans faille. Un autre aspect central de l'intuition, selon le sens qui sera utilisé dans ce texte, est qu'elle est propre à chacun. Elle évolue en effet avec les expériences et les connaissances de chacun :

> [the intuitive component and the knowledge component of the mathematical equipment] are difficult to separate, particularly since the intuitive component is dependent for its growth on the knowledge component.[2] (Wilder 1987, p. 609).

Fischbein (1982) affirme à ce sujet que les intuitions sont enracinées dans les expériences, autant mentales que pratiques. Elles proviennent d'expériences passées dans lesquelles l'individu s'est impliqué de manière à atteindre un niveau de compréhension du concept qui le convainc profondément, et qui permet de développer les intuitions associées. À ce moment-là, la connaissance deviendra « active » et pourra resurgir au besoin, sous forme d'intuition.

Pour ce qui est des intuitions des étudiants, elles sont souvent une aide importante, mais sont aussi parfois source d'erreurs (une connaissance opératoire utilisée au mauvais moment, à mauvais escient). Ainsi, les intuitions font partie intégrante du travail de l'étudiant comme de celui du mathématicien, mais peuvent aussi l'éloigner d'un travail mathématique valide (Weber et Alcock 2004). Une étude menée par Tanguay et Grenier (2010) conclut de manière similaire que certains étudiants font des inférences non valides en ayant recours à leurs intuitions. Malgré l'insistance de plusieurs mathématiciens sur l'importance de l'intuition, il reste donc que d'y avoir recours sans circonspection, lorsqu'elle a trait à des concepts et résultats encore peu solides dans l'entendement de celui qui les utilise, n'améliore pas nécessairement l'adéquation du travail mathématique.

2.3 Pratiques, savoir-faire et savoirs contextualisés

Un autre élément, qui nous est apparu crucial dans l'étude de l'activité de démonstration selon l'angle que nous adoptons, est issu du travail de Durand-Guerrier et Arsac (2003). Ceux-ci partent du constat que dans les démonstrations mathématiques proposées aux étudiants, les recours *explicites* aux règles de logique (propositionnelle et prédicative) sont pratiquement absents. En comparant ces recours dans les domaines de l'Analyse et de la Géométrie (et dans une moindre mesure de l'Algèbre), ces auteurs arrivent à la conclusion que les considérations logiques sont remplacées par des règles de raisonnement contextualisées, propres à chaque domaine. En effet, pour faire face aux obstacles engendrés par le travail sur un exemple générique ou par la nécessité de prendre en compte les relations de dépendance entre les objets en jeu, les enseignants et les manuels introduisent des règles (contextualisées) de manipulation des variables, des règles de « fonctionnement des démonstrations concrètement mises en œuvre » (p. 299), souvent exprimées dans le langage courant, et qui n'ont pas de statut théorique précis en logique. En fait, Durand-Guerrier et Arsac vont jusqu'à écrire que « la rigueur des raisonnements est assurée par des routines très contextualisées propres à chacun [des domaines mathématiques] » (p. 308), et que dans certains contextes — celui du choix d'un exemple générique dans un domaine où les objets sont très peu familiers, même aux experts, par exemple — les règles de raisonnement mis en œuvre ne relèvent « … pas uniquement d'une connaissance logique universelle, indépendante du contexte dans lequel on l'applique » (p. 308). Ainsi, la pratique usuelle de la classe consiste à remplacer une référence explicite à la logique par un recours, explicite ou non, à de tels savoirs pratiques.

Ces savoir-faire sont souvent transmis par imitation plutôt que par enseignement explicite, et n'ont donc pas de statut théorique (ou institutionnel). Leur utilisation serait modulée par les

[2] Notre traduction : [dans le bagage mathématique, la composante intuitive et la composante issue de la connaissance] …sont difficiles à séparer, en particulier parce que le développement de la composante intuitive dépend de la composante issue de la connaissance.

savoir-faire et expertises, tant mathématiques que pédagogiques ou didactiques, de chacun. Par exemple en Analyse, pour bien mettre en évidence la dépendance de δ envers ε , il n'est pas rare que manuels ou enseignants adoptent des notations comme δ_ε ou $\delta(\varepsilon)$, dans l'espoir que les étudiants perdront moins facilement cette dépendance de vue tout au long de la résolution. Une telle façon de faire repose bel et bien sur l'expertise mathématique de celui qui l'initie, mais n'a par ailleurs pas de statut théorique précis puisqu'elle peut tout aussi bien être omise sans que soit affectée la rigueur de la formalisation. Ainsi, nous faisons l'hypothèse qu'il existe des savoirs, savoir-faire et pratiques contextualisés[3] qui sont propres à des domaines mathématiques spécifiques, pas nécessairement liés à la logique, mais qui permettent tout de même de contourner des difficultés d'ordre logique. Ces réflexions nous poussent à vouloir prendre en compte les savoirs acquis lors de l'apprentissage de certains domaines mathématiques, et nous incluons la logique elle-même parmi ces domaines. Ainsi, plutôt que de considérer uniquement l'influence, sur le travail mathématique des étudiants, du niveau des connaissances en logique, il nous faut également considérer les savoirs, savoir-faire et pratiques contextualisés, entre autres ceux et celles qui peuvent s'acquérir quand un cours (universitaire) de logique est suivi et réussi. Ainsi, nous considérerons deux variables de recherche que nous distinguons : le niveau de connaissance en logique formelle et la réussite ou non d'un cours de logique.

À partir de maintenant, l'expression « connaissances contextualisées » sera utilisée pour faire référence à l'ensemble des savoirs, savoir-faire et pratiques contextualisés se rapportant à un domaine ou une situation spécifique. Cette expression nous apparaît adéquate non seulement par souci de concision, mais également parce que le mot « connaissance » rend l'idée retenue que les savoirs, pratiques et savoir-faire contextualisés sont issus de l'expérience. La distinction entre *savoirs* et *connaissances* est maintenant bien reconnue en didactique francophone : les savoirs sont les connaissances **institutionnalisées**, bien identifiées, explicitées et établies, « prédicatives » dirait Vergnaud, terme que nous retenons aussi pour la suite de l'article. Or, institutionnaliser des connaissances (pour en faire des savoirs), c'est en particulier les **dé**contextualiser. Ainsi, la locution « connaissances contextualisées » nous a semblé appropriée pour synthétiser le groupe « savoirs, savoir-faire et pratiques contextualisés ».

2.4 Questions revisitées

À la lumière de ces fondements conceptuels, deux questions de recherche émergent et se précisent :

- QR-1 : Y a-t-il des différences dans la façon dont les étudiants produisent ou valident des démonstrations, selon qu'ils aient ou non des connaissances prédicatives en logique formelle ou encore, selon qu'ils aient ou non réussi un cours de logique formelle ? Comment ces différences se déclinent-elles selon que sont considérés les aspects : syntaxique et sémantique, rigueur et intuition, mobilisation ou non de connaissances contextualisées ?
- QR-2 : Que se passe-t-il quand l'étudiant ne peut puiser dans des connaissances contextualisées liées aux objets mathématiques en jeu dans une démonstration ?

[3] De tels savoirs ou pratiques contextualisés sont typiquement ce que dans Sackur et al. (2005) ou dans Drouhard (2006), on décrit comme des *connaissances d'ordre II*. Nous y reviendrons.

3. Méthodologie

En ce sens, une méthodologie en deux temps a été développée. Huit étudiants en mathématiques d'une université québécoise ont accepté de participer. Ces étudiants étaient inscrits au baccalauréat en mathématiques[4], un programme de 90 crédits de premier cycle universitaire, et avaient complété entre 3 et 5 semestres du programme (environ 45 à 75 crédits). Ces étudiants étaient âgés de 20 à 21 ans. L'avancement dans le programme nous assure qu'ils sont assez familiers avec les mathématiques universitaires dites avancées, et qu'ils ont été en contact avec un nombre suffisant de preuves pour qu'ils soient relativement à l'aise avec celles qui leur seront demandées. Par ailleurs, le cours de logique offert dans cette institution est ouvert aux étudiants ayant complété au moins 2 semestres dans le programme.

Les participants ont d'abord répondu à un test diagnostique visant à déterminer leur niveau de connaissances prédicatives en logique formelle. Nous demandions, entre autres, de trouver la négation et la contraposée de certains énoncés symbolisés ou encore, d'expliciter les étapes d'une preuve par contradiction. Les étudiants devaient également préciser s'ils avaient ou non réussi un cours de logique. Il est à noter qu'un seul cours de logique est offert dans le programme de l'institution choisie, et que les cinq participants ayant suivi le cours l'ont suivi dans le même groupe, avec le même professeur. Selon le descripteur du cours, voici ce qui devait y être abordé : Rapport entre langage mathématique et structures mathématiques, Calcul des propositions et calcul des prédicats, Conséquence et déduction, Syntaxique et sémantique, Théories du premier ordre, Incomplétude, Fondements des mathématiques, Propriétés des langages de premier ordre, Théorèmes de complétude et de compacité.

En considérant conjointement les résultats des huit étudiants au test diagnostique et selon qu'ils avaient ou non suivi le cours de logique, quatre dyades ont été formées. Les trois premières dyades sont homogènes, joignant deux étudiants ayant le même profil. La première est formée d'Éléonore[5] et Paul, deux étudiants n'ayant pas suivi de cours de logique et ayant des connaissances prédicatives moyennes en logique. Les deux dyades suivantes sont formées chacune par deux étudiants ayant suivi un cours de logique. Jeanne et Lucie forment la deuxième dyade et ont démontré des connaissances prédicatives moyennes en logique. La troisième dyade regroupe deux étudiants ayant des connaissances prédicatives très solides : Julie-Ann et Robert. La quatrième dyade est hétérogène et regroupe une étudiante n'ayant pas suivi de cours de logique et ayant des connaissances prédicatives faibles, Anna, et un étudiant ayant suivi un cours de logique et ayant des connaissances prédicatives moyennes, Michel.

	Étudiant(e)s	A suivi le cours de logique ?	Connaissances prédicatives
Dyade 1	Éléonore	NON	Moyennes
	Paul	NON	Moyennes
Dyade 2	Jeanne	OUI	Moyennes
	Lucie	OUI	Moyennes
Dyade 3	Julie-Ann	OUI	Fortes
	Robert	OUI	Fortes
Dyade 4	Anna	NON	Faibles
	Michel	OUI	Moyennes

Tableau. *Synthèse des caractéristiques des étudiant(e)s*

[4] Le baccalauréat canadien correspond à la Licence en France

[5] Les noms des participants sont fictifs.

Ces quatre dyades ont participé à des entrevues semi-structurées selon le modèle de Goldin (1997), basées sur quatre tâches (voir Annexe A). Les questions 1 et 2 sont inspirées de tâches utilisées par Epp (1997, 2009), la question 3 est inspirée de l'axiomatisation de Hilbert, tel que proposé par Arsac (1996) et, finalement, la question 4 est inspirée du travail de Durand-Guerrier et al. (2012). Trois de ces tâches (questions 1, 2 et 4) font intervenir des objets mathématiques connus (QR-1, cf. §2.4) et une (question 3) fait intervenir des objets inconnus (QR-2, cf. §2.4). Ces entrevues ont été enregistrées de manière audio, puis transcrites et analysées.

Les entrevues se déroulaient comme suit, pour chacune des tâches : la chercheure propose aux dyades une tâche sur papier. Chaque étudiant prend d'abord individuellement connaissance de la question pendant un court moment. Ensuite, les membres de la dyade verbalisent et échangent leurs raisonnements à voix haute, tout en élaborant leur réponse écrite.

Chaque tâche a préalablement fait l'objet d'une analyse, ayant pour but d'en cerner les difficultés, autant en ce qui concerne les spécificités logiques que les concepts mathématiques en jeu, ou encore la formulation. Pour donner une meilleure idée de ce processus d'analyse, nous présentons ici l'analyse *a priori* de la question 3, au cœur du travail.

Question 3

Voici une question proposée à un étudiant universitaire :

À l'aide des axiomes suivants :

— *AX1* : Pour tout robot L et tout robot J distinct de L, il existe un seul chien W qui est ami avec L et avec J.

— *AX2* : Pour tout chien W, il existe au moins deux robots distincts qui sont amis avec W.

— *AX3* : Il existe trois robots distincts tel qu'aucun chien n'est ami avec ces trois robots simultanément.

Montrer que pour tout robot, il existe au moins un chien qui n'est pas son ami.

Voici ce qu'il a répondu :

Prenons un robot générique *R*.

Prenons *L1*, *L2* et *L3* les trois robots distincts tel qu'aucun chien n'est ami avec ces trois robots simultanément (*AX3*).

Si *R* est le même robot que *Li*, pour i=1 ou 2 ou 3, le chien est facile à trouver : on considère l'unique chien ami des deux autres robots et dont l'existence est assurée par *AX1*. Ce chien ne peut être ami avec *Li* sans quoi on contredit *AX3*.

On peut donc supposer que *R* est différent de *L1*, *L2* et *L3*.

Complétez la démonstration.

Figure 1. *Question 3, telle que proposée aux participants*

Tout d'abord, nous avons composé une solution possible, afin de nous guider dans l'analyse. Pour faciliter le décodage, le lecteur pourra garder en tête la correspondance *robot* ↔ *point*, *chien* ↔ *droite* et « être ami avec » ↔ « être incident à », la démonstration consistant alors à établir que pour tout point, il existe une droite qui ne lui est pas incidente.

> *AX1* nous assure de l'existence d'un chien *W1* ami avec *L2* et *L3*, d'un chien *W2* ami avec *L1* et *L3* et d'un chien *W3* ami avec *L1* et *L2*. Ces trois chiens sont distincts sans quoi on contredirait le choix de *L1*, *L2* et *L3* (guidé par *AX3*). On cherche à trouver un chien qui n'est pas ami avec *R*. Montrons que *R* ne peut être simultanément ami avec les trois chiens *W1*, *W2* et *W3* et donc, qu'il en existe au moins un qui n'est pas son ami. Si deux chiens parmi *W1*, *W2* et *W3* étaient

amis avec *R*, alors on aurait deux chiens distincts amis avec *R* et avec un autre des trois robots *L1*, *L2* et *L3* : par exemple si *W1* et *W2* sont amis avec *R*, *W1* et *W2* sont deux chiens distincts amis avec *R* et *L3*, ce qui contredit « l'unicité » dans *AX1* pour le couple *R* et *L3*. Il y a donc bien au moins deux chiens parmi *W1*, *W2* et *W3* qui ne sont pas amis avec *R* et comme *R* était générique, cela complète la démonstration.

La question est inspirée de l'axiomatisation de Hilbert, telle que proposée par Arsac (1996). Dans cette analyse *a priori*, nous étudions les spécificités logiques sous-jacentes à cette tâche et à sa résolution.

Tout d'abord, il faut bien comprendre l'amorce de la preuve, donnée dans l'énoncé de la tâche, et qui s'ouvre avec une *instanciation universelle* (le robot *R*) : pour montrer qu'une propriété est universellement vérifiée, il suffit de la montrer pour un élément instancié (auquel on a donné un nom) à condition que celui-ci soit générique (sans particularités autres que celles que fournissent les hypothèses). Les trois robots *L1*, *L2* et *L3*, eux, sont donnés de *AX3* par instanciation existentielle : quand on sait qu'un objet existe, on peut lui donner un nom à condition que ce nom n'ait pas déjà été attribué à un autre objet. L'amorce de la démonstration propose une *preuve par cas* et comme l'énoncé à prouver est universel, il faut s'assurer que tous les cas sont couverts (ici en vertu du tiers exclu) : ou bien *R* coïncide avec l'un des trois robots *L1*, *L2* et *L3*, ou bien *R* n'est aucun des trois.

La tâche consiste à traiter ce 2^{e} cas, la solution du 1er cas étant donnée dans l'énoncé même : nous voulions par cela faciliter l'entrée dans le problème, bien conscients que le contexte non usuel agirait comme obstacle. Ce 2^{e} cas nécessite forcément un raisonnement par l'absurde (un *modus tollens*) puisque la conclusion consiste à trouver une paire qui ne satisfait pas une relation donnée, et que les axiomes disponibles ne statuent que sur des paires qui satisfont cette relation. Quand *R* est distinct des trois robots dont l'existence est assurée par *AX3*, la seule façon d'accéder à un chien qui n'est pas en relation avec *R* est de contredire *AX1* dans son volet « unicité ».

Pour contredire ce volet unicité, il faut donc introduire des chiens, ce qui ne peut se faire que par le seul énoncé quantifié existentiellement sur les chiens, à savoir *AX1*. Il est donc relativement naturel à ce stade d'appliquer *AX1* à chacune des six paires de robots dont on dispose : (*L1*, *L2*), (*L1*, *L3*), (*L2*, *L3*), (*R*, *L1*), (*R*, *L2*), (*R*, *L3*). On sait déjà par *AX3* que les chiens *W1*, *W2*, *W3* correspondant aux 3 premières de ces paires sont deux à deux distincts. On ne sait pas grand chose des chiens correspondant aux 3 dernières paires, sinon que chacun ne peut coïncider qu'avec au plus un des chiens *W1*, *W2*, *W3*, toujours parce que ceux-ci sont distincts. Mais cette remarque met sur la piste d'une solution : si 2 d'entre les 3 premières paires correspondent à deux chiens en relation avec *R*, alors *R* et le robot commun à ces 2 paires sont en relation avec deux chiens distincts, contredisant l'unicité du chien dans *AX1*. Il ne peut donc y avoir qu'un seul chien parmi *W1*, *W2*, *W3* en relation avec *R*, et les deux autres permettent de conclure.

On constate que le contrôle sur les quantifications est central dans la tâche ; d'abord les quantifications universelles : celle sur *R* (implicitement) liée à ce qu'il faut montrer ; puis celle sur les paires de robots donnée dans *AX1*. Cette quantification sur des paires, et donc sur des sous-ensembles, nous fait basculer dans la logique du 2^{e} ordre. Puis les quantifications existentielles : celle qui fournit *L1*, *L2* et *L3*, appliquée dans l'énoncé de la tâche ; celle qui permet d'exhiber un chien pour une quelconque paire de robots en vertu d'*AX1*, une quantification existentielle emboîtée dans (dépendante de) la dernière quantification universelle précitée. Le contrôle sur ces quantifications est d'autant plus difficile et important que l'appui sur le sens est à peu près impraticable, vu le contexte.

Mais la difficulté principale est sans doute la bonne prise en compte de l'unicité dans cette quantification existentielle emboîtée (issue de *AX1*), et elle est certainement cruciale puisque la contradiction est obtenue via sa négation. Or, l'unicité cache une troisième quantification universelle (implicite), elle-même emboîtée dans les deux premières : quel que soit le chien considéré, s'il est distinct de W ami du couple (J, L) et donné par la quantification existentielle, il ne peut être en relation à la fois avec J et avec L. Obtenir la contradiction, c'est donc exhiber deux chiens pour un même couple de robots, et ce couple de robots est difficile à repérer parce qu'il faut pour cela confronter l'une à l'autre deux combinaisons qui ne sont pas de prime abord connectées, et qui sont cachées dans une combinatoire embrouillée par le contexte incongru : celle du robot nécessairement commun au choix de deux parmi les couples (*L1*, *L2*), (*L1*, *L3*) et (*L2*, *L3*), et celle de R avec ce robot commun.

Pour conclure cette analyse, il est important de souligner que la démonstration proposée ne fait pas intervenir le deuxième axiome *AX2*. On peut aisément se convaincre que cet axiome ne peut pas faire partie de la solution autrement qu'en des détours inutiles, puisqu'on peut exhiber un modèle qui satisfait *AX1* et *AX3* (et par conséquent l'énoncé à démontrer), mais pas *AX2*. Il suffit en effet d'ajouter un chien isolé, ou ami d'un seul robot, à n'importe quel modèle satisfaisant *AX1* et *AX3*. On peut penser que laisser un axiome de côté déstabilisera plusieurs étudiants, qui s'attendent généralement à devoir utiliser toutes les informations fournies, selon les contrats usuels vis-à-vis des problèmes de démonstration proposés en classe.

4. Résultats et discussion

À l'aide des outils conceptuels discutés précédemment, une analyse du travail mathématique des quatre dyades a été conduite. Trois thèmes ont émergé de cette analyse et sont présentés ici tour à tour, sous forme de questions.

4.1 Thème 1 : La réussite d'un cours de logique rend-elle les étudiants plus attentifs aux considérations logiques, et plus vigilants vis-à-vis des complications qu'elles peuvent receler ?

À la suite de l'analyse des données, nous avons pu constater que la réussite d'un cours de logique semble avoir un impact important sur le travail mathématique des étudiants, plus important qu'une différence du niveau des connaissances prédicatives en logique. Tout d'abord, les étudiants ayant complété un cours de logique montrent une attention et une vigilance accrues vis-à-vis des considérations logiques lors du travail de production et de validation des démonstrations. Les idées d'« attention » ou de « vigilance » telles que nous les utilisons ici sont liées à l'idée de « déballer la logique »[6], de Selden et Selden (1995), lorsqu'il s'agit de valider une démonstration. L'expression « déballer la logique » fait référence à la mise en évidence d'un énoncé équivalent à un autre, mais dans lequel les caractéristiques logiques conventionnelles sont plus explicites. Selden et Selden avancent l'idée qu'un étudiant qui ne peut pas « déballer la logique » correctement aura des difficultés à produire et à valider des démonstrations. À titre d'exemple, considérons la tâche 3, qui présente des axiomes rédigés en mots qu'il est nécessaire de « déballer » pour bien comprendre les

[6] 'Unpacking the logic' dans le texte original.

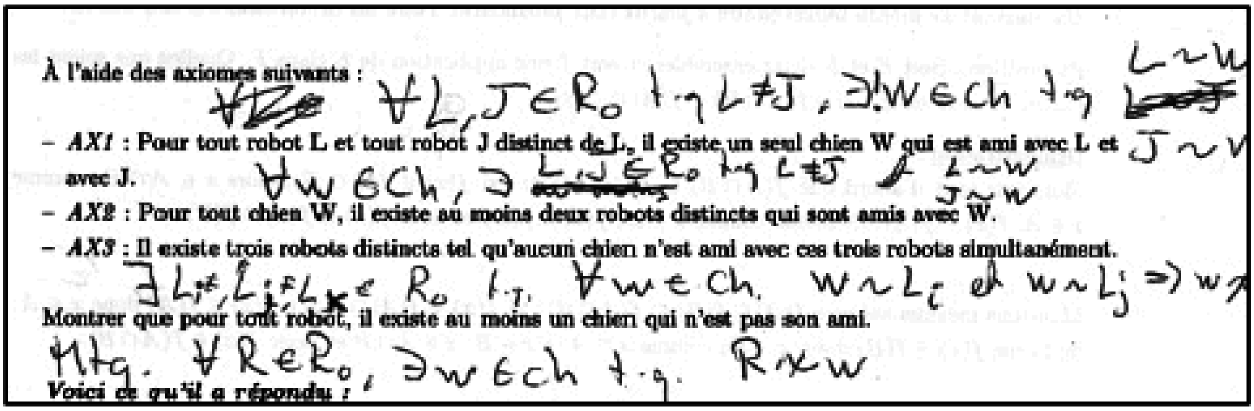
considérations logiques sous-jacentes. Dans ce contexte, un individu qui serait vigilant ou attentif remarquerait les spécificités logiques rapidement à la lecture des axiomes, comme par exemple l'unicité prescrite par l'axiome 1, et cela sans même s'être donné le but explicite d'investiguer les caractéristiques logiques de l'énoncé ; et dans le cas précis de la tâche 3, malgré le peu d'appui possible sur le sens dans cette tâche.

Ces étudiants ayant complété un cours de logique, donc, semblent avoir la capacité à repérer et assimiler, ou même déballer, presque spontanément, les caractéristiques logiques des mathématiques sur lesquelles ils travaillent, que leur forme soit symbolique ou discursive. Ceux de l'expérimentation intégraient en effet très rapidement les considérations logiques comme l'existence, l'universalité ou l'unicité, souvent dès la première lecture ; tandis que les autres, même après quelques lectures, n'avaient pas encore remarqué ou assimilé toutes les caractéristiques logiques et pouvaient omettre un élément, avec parfois une erreur pour conséquence. Les étudiants moins vigilants à l'égard de ces aspects logiques sont ceux qui ont en commun de ne pas avoir suivi de cours de logique. Il est difficile de donner un exemple précis de cette vigilance puisqu'elle se présente comme une absence d'oubli, une attention accrue de la part de ceux qui la possèdent. On peut certainement mentionner Paul, à la fin de sa résolution de la troisième tâche, qui justifie en quelques mots pourquoi il a mis du temps à trouver la solution : « *'il existe un unique'. Je l'ai lu, je l'ai écrit* [∃!]*, mais je l'ai pas pris en compte. C'est pour ça que ça nous a pris du temps à conclure* ».

La vigilance et l'attention à l'égard des aspects logiques ne semblent par contre pas influencées par le fait de posséder des connaissances prédicatives en logique formelle. En effet, au test diagnostique, la différence entre les résultats de Paul et Éléonore, qui n'ont pas suivi de cours de logique, et ceux de Michel, Jeanne et Lucie, qui ont suivi le cours, était minime. Des connaissances prédicatives en logique formelle ne remplaceraient pas l'effet présumé du cours de logique sur cette vigilance. En effet, certains étudiants n'ayant pas suivi le cours ont utilisé des énoncés de manière inadéquate, non pas parce qu'ils n'avaient pas les connaissances prédicatives nécessaires, mais parce qu'ils ne semblaient pas repérer facilement et adéquatement les caractéristiques logiques en jeu, une habileté qu'on peut analyser comme relevant de connaissances *opératoires* en logique. Outre l'exemple mentionné ci-dessus, où Paul omet de prendre en compte l'unicité dans l'axiome 1 de la tâche 3, Éléonore n'a pas bien vu que l'axiome 3 ne garantit l'existence que d'un trio de robots, et non que la caractéristique s'applique à tous les trios de robots.

Cependant, être vigilant ou attentif aux considérations logiques n'assure pas la réussite dans toutes les tâches. En d'autres termes, la capacité à remarquer les spécificités logiques n'équivaut pas à leur maîtrise complète. À titre d'exemple, Jeanne et Lucie, lors de la résolution de la troisième tâche, ont commis une erreur de nature logique. Elles ont d'abord réécrit les axiomes en langage symbolique (voir figure 2). Notons au passage que cette réécriture n'est pas entièrement satisfaisante. En effet, la notation $\exists L_i \neq L_j \neq L_k \in R_0$ manque de clarté et ne satisfait pas aux standards de rigueur usuels. Elle serait mieux exprimée sous la forme
$\exists L_i \in R_0,\ \exists L_j \in R_0,\ \exists L_k \in R_0 \ \ tels\ que\ \ L_i \neq L_j, L_i \neq L_k,\ L_j \neq L_k.$

La bande audio de l'entrevue confirme cependant que les étudiantes ont bien compris l'axiome, et tentent de l'exprimer dans une écriture compacte. Malgré cette bonne compréhension, leurs raisonnements et échanges les amènent à conclure que la relation « être ami de » garantit une bijection entre l'ensemble des robots et l'ensemble des chiens, ce qui n'est pas le cas, l'axiome *A2* assurant l'existence d'*au moins deux robots* amis de tout chien. Cette erreur signifie aussi que la réussite d'un cours de logique n'a pas comme conséquence d'éliminer les erreurs de raisonnement dans la production ou la validation de démonstrations. Ce fait peut également se déceler dans les résultats au test diagnostique, où des connaissances prédicatives étaient sollicitées. Par exemple, parmi les huit participants, seule Julie-Ann a réussi à faire la négation de l'implication $\forall x(\; D(x) \Rightarrow \neg H(x))$.


À l'aide des axiomes suivants :

$\forall L, J \in R_0$ t.q. $L \neq J$, $\exists! W \in Ch$ t.q. $L \sim W$ $J \sim W$

– *AX1* : Pour tout robot L et tout robot J distinct de L, il existe un seul chien W qui est ami avec L et avec J.

$\forall W \in Ch$, $\exists$ $L, J \in R_0$ t.q. $L \neq J$ $\wedge$ $L \sim W$ $J \sim W$

– *AX2* : Pour tout chien W, il existe au moins deux robots distincts qui sont amis avec W.

– *AX3* : Il existe trois robots distincts tel qu'aucun chien n'est ami avec ces trois robots simultanément.

$\exists L_i \neq L_j \neq L_k \in R_0$ t.q. $\forall W \in Ch$. $W \sim L_i$ et $W \sim L_j \Rightarrow W \nsim$

Montrer que pour tout robot, il existe au moins un chien qui n'est pas son ami.

Mtq. $\forall R \in R_0$, $\exists W \in Ch$ t.q. $R \nsim W$

Voici ce qu'il a répondu :

Figure 2. *Mise en symboles de la question 3 par Jeanne et Lucie*

Finalement, la vigilance et l'attention ne semblent pas être influencées par la maîtrise de connaissances prédicatives en logique formelle. Somme toute, avoir suivi un cours de logique augmente la vigilance, mais cela ne serait pas lié au fait d'avoir plus de connaissances prédicatives. Ainsi, la vigilance serait de l'ordre des ***connaissances contextualisées à la logique,*** connaissances plus opératoires que prédicatives.

Ce serait donc des connaissances liées à la pratique de la logique en tant que domaine particulier des mathématiques, connaissances contextualisées (à la logique) analogues à celles qu'évoquent Durand-Guerrier et Arsac (2003) pour l'Analyse et la Géométrie. Une question s'impose alors naturellement : dans quelle mesure ces connaissances se transposent-elles spontanément ou aisément quand des étudiants qui ont réussi un cours de logique travaillent dans d'autres domaines ? Nous n'avons pas suffisamment de détails sur le cours de logique ici en cause pour savoir dans quelle mesure les étudiants y étaient amenés à mobiliser les connaissances logiques issues du cours dans des problèmes et contextes mathématiques « hors logique ». Cette question est liée à celle, centrale, de l'organisation et des contenus des cours de logique, questions qui méritent à elles seules à notre avis que les avenues de recherche dont nous rendons compte ici soient poussées plus avant. Nous y reviendrons.

Ainsi, nous avançons comme hypothèse que la réussite d'un cours de logique, en lien probable avec les intuitions et connaissances contextualisées qui sont développées par le travail dans un tel cours, aide les étudiants à aiguiser leur attention vis-à-vis des considérations logiques et à exercer une vigilance accrue en ce qui a trait aux difficultés et complications qu'elles peuvent receler. La vigilance s'avère profitable pour diminuer le risque d'omission de certaines caractéristiques ou éléments logiques, mais n'équivaut pas à une compréhension ou une maîtrise parfaite de ces éléments.

4.2 Thème 2 : La réussite d'un cours de logique rend-elle les étudiants plus hésitants ou encore, prudents à s'engager dans la résolution d'une tâche où les considérations logiques prennent une place importante ?

Cette question a émergé avec la troisième tâche, exigeante du point de vue logique et faible en possibilité d'appui sur le sens. Les étudiants qui ont avancé dans la résolution de la tâche 3 avec le plus d'aisance, en montrant le plus de confiance et de célérité, sont Anna (qui a pris la résolution en charge sous le regard de son coéquipier Michel), Paul et Éléonore, précisément les trois étudiants qui n'ont pas suivi de cours de logique. L'absence d'objets ou de relations mathématiques connus n'a pas semblé poser problème à ces étudiants. Ils ont mené la résolution visiblement comme s'il s'agissait de n'importe quels autres objets mathématiques issus d'un contexte familier.

Les autres étudiants, ceux ayant suivi un cours de logique, ont avancé avec plus de précautions, parfois ne sachant pas du tout comment s'y prendre. Ils ont mis en moyenne deux fois plus de temps pour accomplir la tâche : 19 minutes pour Anna (et Michel), 22 minutes pour Éléonore et Paul, en comparaison de 48 minutes pour Jeanne et Lucie et 38 minutes pour Julie-Ann et Robert. Il est difficile d'expliquer ces différences assez marquées. Cependant, certaines hypothèses peuvent être avancées. En analysant de plus près à quoi était utilisé le temps, une tendance se dessine, à savoir que les étudiants ayant suivi un cours de logique cherchent plus à comprendre les axiomes et passent donc un temps considérable à travailler avec et sur les axiomes, plutôt que d'avancer dans la résolution. Nous conjecturons que cela vise : (1) soit à s'approprier le contexte, (2) soit à s'approprier les spécificités logiques des axiomes en cause. Également, il nous apparaît que ces étudiants sont plus réticents à avancer dans la tâche parce qu'ils ne peuvent s'y appuyer sur des intuitions ou connaissances contextualisées à un domaine spécifique des mathématiques (3). Reprenons chacune de ces hypothèses en détail.

La première hypothèse veut que les étudiants ayant suivi un cours de logique donnent une grande importance à l'étape d'appropriation du contexte (1). Par là, nous faisons référence à la construction d'un semblant de sens autour des objets (chiens et robots) et de la relation (être ami). En d'autres termes, les étudiants cherchent à s'approprier la nature du problème, pour mieux réfléchir à la situation et soutenir les inférences avec l'appui du sens commun. Rappelons que les trois axiomes énoncés dans la tâche (voir Figure 1) correspondent aux axiomes d'incidence de Hilbert, tels que repris par Arsac (1996), où un point incident à une droite devient un robot ami avec un chien. Si la tâche avait été proposée dans sa forme « géométrique » initiale, les étudiants auraient pu réfléchir sur ces objets « tangibles » au lieu de le faire sur les axiomes, en tant que « règles à suivre », purement de l'ordre de la syntaxe. Par exemple, Anna commence la discussion liée à la résolution de la question 3 en expliquant ce à quoi elle a réfléchi durant les minutes allouées à la lecture : « au début, je m'étais trompée, je pensais que [l'axiome 3] c'était [pour tout] trois robots distincts qui ne peuvent juste pas avoir un ami commun, donc quand *R* est différent [de *L1*, *L2* et *L3*], tu fais le même principe : tu en prends deux, tu prends *L2* ou *L3*. Mais là c'est « il existe », donc c'est vraiment juste [*L1*, *L2* et *L3*] simultanément ». Autrement dit, Anna a d'abord été confuse sur la signification de *AX3* — à savoir si la propriété « avoir un ami commun » s'appliquait à tous les triplets ou à *au moins* un triplet de robots —, mais cela ne l'a pas empêchée d'y aller avec des essais de combinaisons, en s'aventurant sans hésitation en contexte inconnu. Bien sûr, la propriété correspondante énoncée pour les triplets de points n'aurait provoqué aucune hésitation. En contexte mathématiquement familier, les étudiants peuvent réfléchir aux objets qu'ils connaissent et maîtrisent, plutôt que sur les exigences logico-syntaxiques d'existence et d'unicité véhiculées par les axiomes. Ici, nous ne voulons pas dire que les étudiants n'ayant pas suivi un cours de logique ne s'approprient pas le contexte, mais bien qu'ils sont moins réticents à « plonger » sans se l'être préalablement approprié contrairement aux autres, peut-être parce que ces derniers sont plus conscients de la difficulté qu'il y a à travailler uniquement sur un plan syntaxique.

Ceux-ci ont cherché à retrouver la même aisance à l'égard du contexte que celle qu'ils ont en contexte (mathématique) connu. Par exemple, Julie-Ann et Robert ont pris un temps considérable pour discuter des axiomes, se les approprier, les reformuler et se donner des exemples, pour les maîtriser et bien les comprendre avant de commencer la résolution. Robert s'exclame d'ailleurs après plusieurs minutes : « *Oh ! Je me demandais à quoi servait l'axiome 2 : il n'y a pas de chien inutile* », constatation qui l'a aidé à valider rapidement certaines étapes tout au long de la résolution.

Au sujet de l'appropriation du contexte, nous proposons un lien avec la notion de vigilance, explicitée ci-haut. En effet, dû à cette vigilance, les étudiants ayant suivi un cours de logique garderaient constamment en tête diverses considérations logiques. Ainsi, nous avançons que ces caractéristiques logiques prennent toute la place dans leur esprit et rendent l'appropriation de la situation plus difficile, comme s'ils avaient de la difficulté à laisser momentanément de côté certaines considérations logiques pour construire un semblant de sens et réfléchir à la résolution. Nous pensons ici à Thurston (1994, pp. 4-5), qui dit que les mathématiciens « cassent » les démarches des preuves sur lesquelles ils travaillent en plusieurs morceaux le long des résultats intermédiaires, pour ne pas « avoir à garder en tête trop d'éléments de logique en même temps »[7] (notre traduction de « *don't have to hold too much logic at once* »).

En outre, ces étudiants ayant suivi un cours de logique apparaissent mal à l'aise quand il s'agit de mener une démonstration sans appui sur le contexte, c'est-à-dire une démonstration strictement syntaxique. Comme Weber et Alcock (2004) le soulignent, il est souvent insuffisant d'avoir un contrôle strictement syntaxique et ces étudiants seraient davantage sensibles à cette insuffisance. Une courte remarque de la part de Jeanne et Lucie souligne l'importance qu'elles accordent au contrôle sémantique, et identifient l'absence de ce contrôle comme un obstacle :

> Jeanne : comment ça [se fait que] je ne vois pas [la solution] !
> Lucie : c'est juste parce que c'est des robots et des chiens.

En ce qui concerne l'appropriation des spécificités logiques décontextualisées (2), en examinant la tâche sur les chiens et les robots, on se rend compte que les étudiants ne peuvent s'appuyer que sur leurs connaissances logiques **dé**contextualisées. Ces connaissances sont rarement utilisées puisque les mathématiques travaillées dans le cadre scolaire sont toujours contextualisées à un certain domaine, sauf dans le cours de logique où les exemples sont souvent puisés dans différents domaines. Ainsi, pour la tâche 3, on serait porté à penser que les étudiants ayant réussi un cours de logique auront plus de facilité à travailler avec ces connaissances logiques hors contexte. Cependant, comme mentionné précédemment, la réussite d'un cours de logique ne garantit pas des connaissances prédicatives en logique sans

[7] « Mathematicians apparently don't generally rely on the formal rules of deduction as they are thinking. Rather, they hold a fair bit of logical structure of a proof in their heads, breaking proofs into intermediate results so that they don't have to hold too much logic at once. » (Thurston 1994, pp. 4-5).

faille, de sorte que ces étudiants peuvent tout de même être hésitants à les utiliser sans avoir l'appui sur le sens : sans appui sémantique, le risque d'erreur logique est plus grand. La logique, conjointement au formalisme, est souvent mentionnée pour ses rôle et fonctions de contrôle de la validité, mais l'inverse est également vrai : dans un raisonnement formel touffu, l'appui sémantique permet souvent de débrouiller les enchevêtrements complexes. Les étudiants qui ont suivi un cours de logique seraient donc plus conscients des risques d'erreurs, et cherchent donc d'une manière plus soutenue les appuis sémantiques possibles. L'importance de la dualité sémantique-syntaxique dans les réflexions didactiques sur les mathématiques avancées prend ici tout son sens et ce, même dans le contexte de la logique, un domaine où l'on s'attendrait à voir la syntaxe prendre toute la place.

Ces résultats sont plutôt étonnants de prime abord. En effet, il est facile de penser qu'avoir de bonnes connaissances prédicatives en logique permettrait aux étudiants de mener une résolution exclusivement logique et formelle, sans ressentir le besoin de s'appuyer sur le sens ou l'intuition. En effet, selon Epp (2003), des étudiants familiers avec certains concepts logiques assez poussés et leurs applications puisent dans leurs connaissances logiques lorsqu'ils sont confrontés à des tâches où leurs connaissances mathématiques spécifiques ne suffisent pas pour répondre adéquatement. Cependant, dans le cadre de cette recherche, le contraire s'est produit. Pensons à Julie-Ann et Robert, qui ont eu les meilleurs résultats au test diagnostique, mais ont pris un temps considérable à résoudre la tâche, à s'approprier les axiomes et leur contexte.

Finalement sur l'hypothèse (3), en ce qui concerne la réticence avec laquelle les étudiants ayant suivi un cours de logique avancent dans la résolution de la tâche 3, on peut croire que le contexte non mathématique est en cause. Cependant, justifier pourquoi ces étudiants étaient significativement plus hésitants que les autres ne va pas de soi. Encore une fois, nous faisons le lien avec l'idée de la vigilance. Avec toute cette attention portée sur les considérations logiques, les étudiants sont en quelque sorte submergés, ce qui les empêche d'avancer dans la résolution avec aise. Ils sont plus attentifs aux enjeux, peut-être d'une manière plus significative que les étudiants moins vigilants, ce qui les rend plus prudents. On peut donc voir cette réticence à avancer sans repère sémantique dans la résolution comme la conséquence d'une crainte accrue vis-à-vis des potentielles erreurs de nature logique. Nous mettons d'ailleurs cela en relation avec une citation de Thom :

> Pour apprendre à marcher, il serait plus nuisible qu'utile de connaître l'anatomie de la jambe; et avoir étudié la physiologie du système digestif n'est d'aucun secours pour digérer un repas trop lourd. [...] La connaissance explicite de la définition formelle de l'activité peut perturber cette activité, qui fonctionnait fort efficacement jusque-là sans théorie : à la manière de ces individus scrupuleux qui hésitent à parler une langue parce qu'ils en connaissent trop bien la grammaire et ont peur de commettre des fautes. (Thom 1974, p. 45).

Dans le cadre de cette recherche, les étudiants semblaient scrupuleux à faire avancer le travail mathématique, comme ces individus scrupuleux dont parle Thom. Dans la tâche 3, les considérations logiques ressortaient avec plus d'évidence à cause des objets en jeu, pour lesquels l'intuition et les connaissances contextualisées sont inopérantes. Cependant, les étudiants n'ayant pas suivi de cours de logique étaient moins accaparés par ces éléments logiques, de sorte qu'ils ont pu conduire un travail similaire à ce qu'ils ont fait pour les autres tâches. Peut-être voit-on apparaître ici un aspect négatif de la vigilance accrue, lorsqu'elle prend trop de place dans la résolution.

Ainsi, on peut émettre l'hypothèse que la réussite d'un cours de logique accroît l'attention des étudiants à l'égard des considérations logiques, que le contexte fasse intervenir des objets mathématiques connus ou non ; mais que par ailleurs elle accroît la réticence à s'engager dans une tâche quand les objets mathématiques en jeu ne déclenchent pas d'intuition ou de connaissances contextualisées. Toutefois, il nous paraît nécessaire d'être circonspect et d'interroger l'effet de la recherche elle-même sur ce résultat. En effet, après avoir passé le test diagnostique, les étudiants savaient qu'il s'agissait d'une recherche sur la logique et que donc, leur « performance en logique » allait être examinée, en un sens. Pour les étudiants ayant suivi le cours de logique, il est possible que la conscience de ce qui serait l'objet de l'attention de la chercheuse ait eu un effet paralysant, ou à tout le moins entravant. Ces étudiants, conscients d'être considérés *a priori* comme « bons en logique et en démonstration », se sont trouvés coincés par la tâche des chiens et des robots, et se savaient « observés » à cet égard. Les étudiants n'ayant pas suivi de cours de logique, eux, n'avaient en quelque sorte « rien à prouver » et n'ont donc probablement pas ressenti la pression de la même façon. Dans le même ordre d'idées, nous pourrions conjecturer que des étudiants qui se considèrent plus faibles en mathématiques voient se dissiper, dans cette tâche, la pression de performer en mathématiques, compte tenu du contexte. Ainsi s'engageraient-ils dans la tâche plus rapidement et sans retenue. Mais comme les participants n'ont effectué qu'un test diagnostique sur la logique, il est difficile pour nous de statuer s'ils se considèrent forts ou faibles en mathématiques de manière générale.

4.3 Thème 3 : Existe-t-il chez les étudiants des connaissances contextualisées non seulement aux différents domaines des mathématiques, mais aussi aux mathématiques dans leur globalité ?

Le cadre conceptuel de ce travail nous amenait à réfléchir aux connaissances contextualisées liées à certaines branches des mathématiques, telles l'analyse, la géométrie ou l'algèbre. Ainsi avons-nous élaboré une tâche, la tâche 3, pour contourner ces liens avec des objets mathématiques connus et mettre le plus possible en évidence le recours à des connaissances **dé**contextualisées. L'analyse des données fait apparaître qu'il existerait non seulement des connaissances contextualisées à certaines branches des mathématiques, mais aussi à la logique formelle et aux mathématiques dans leur globalité.

En effet, contrairement à ce que nous avions anticipé, le recours à des connaissances contextualisées s'est manifesté dans la résolution de la tâche 3. Ne sachant pas comment résoudre cette tâche, les équipes se sont engagées dans plusieurs chemins, certains avec des buts précis (utiliser l'axiome 2 par exemple) et d'autres sans but précis (Anna : « *j'explore un cas et j'essaie de faire des déductions* »). En fait, l'axiome 2 a été un obstacle dans cette résolution, car il n'est pas utilisé dans le début de démonstration donné avec l'énoncé de la tâche, et n'intervient pas non plus dans les démonstrations que les étudiants ont composées. Michel, Jeanne, Paul, Julie-Ann et Robert ont affirmé explicitement vouloir utiliser cette information laissée de côté et après quelques essais infructueux, un malaise s'est installé devant l'idée de laisser l'axiome 2 inutilisé. Ces réactions sont probablement issues de l'expérience des étudiants, d'un savoir-faire contextualisé aux mathématiques travaillées en classe, typiquement une *connaissance d'ordre II* (Sackur et al. 2005) − la règle (implicite) selon laquelle toutes les hypothèses doivent être utilisées dans une démonstration : l'énoncé d'un théorème, d'un lemme ou d'une proposition ne doit comporter que les hypothèses nécessaires. Dans le cas contraire, pour l'étudiant, soit le problème est mal posé, soit sa propre solution est erronée. Il était donc naturel pour les participants de considérer les trois axiomes de la tâche 3 comme des hypothèses minimales, et l'axiome 2 comme devant intervenir dans la preuve attendue. Ainsi, même pour cette tâche, les étudiants ont-ils tout de même eu recours à une connaissance contextualisée, contextualisée aux mathématiques dans leur globalité, plus précisément à la résolution de problèmes et la recherche de démonstration.

Ainsi y aurait-il des savoirs, savoir-faire et pratiques contextualisés transversaux aux mathématiques dans leur globalité, aux manières générales de faire les mathématiques ; nous pensons à des règles, tantôt implicites, tantôt explicites, relevant de la culture mise en place (selon l'enseignant, la classe, les niveaux, les institutions…), qui seraient communes à plusieurs branches des mathématiques, sinon à toutes, et qui correspondent à ces connaissances d'ordre II que décrivent Sackur et al. (2005). De telles connaissances contextualisées à certains types de tâches se sont manifestées en contexte non usuel, mais on peut émettre l'hypothèse que ces connaissances « transversales » sont également mises à profit en contexte mathématique familier, sauf qu'il est alors moins facile de les cerner, de les mettre en évidence parce qu'elles sont alors fortement entremêlées au contexte. Évidemment, notre étude est basée sur un échantillon restreint, constitué d'étudiants dont les connaissances propres aux divers contextes sont à des niveaux différents. Départager « connaissances contextualisées liées à telle ou telle tâche » et « connaissances contextualisées à la logique » (ou connaissances opératoires en logique) est par conséquent difficile à faire dans le cadre de la présente recherche, avec les données recueillies, et ceci suggère des pistes pour les recherches à venir.

Conclusion

Cette recherche visait au départ à identifier les différences et les similitudes entre les démarches d'étudiants en démonstration, selon leur degré de familiarité avec les concepts et savoirs de la logique formelle, et selon qu'ils ont ou non suivi un cours de logique (universitaire). Nous avons en effet relevé, à travers une brève revue de la littérature sur la question, la difficulté à déterminer l'importance qu'allouent les mathématiciens eux-mêmes à la logique en mathématiques et les rôle et place qu'elle doit prendre dans le travail sur la démonstration. À l'aide des notions de connaissances opératoires et prédicatives dues à Vergnaud, de connaissances contextualisées dues à Durand-Guerrier et Arsac, des idées de rigueur et d'intuition, les thèmes de la vigilance (à l'égard des considérations logiques), de la réticence (à entrer dans une tâche en contexte non usuel), de l'appui sur le sens, des connaissances contextualisées à la logique et aux mathématiques dans leur globalité, ont émergé.

Cette recherche n'avait pas pour but de statuer sur l'importance des connaissances en logique formelle, et n'a d'ailleurs pas permis de le faire. Par contre, elle a su soulever certaines idées qui, une fois approfondies par le biais d'autres études, permettront peut-être d'arriver à des conclusions plus décisives. Ce projet de recherche soulève entre autres la question de l'effet, bénéfique ou non, pour les étudiants, de suivre un cours de logique. Les réflexions issues de la problématique suggèrent tout d'abord qu'un cours de logique n'est pas indispensable à la réussite scolaire ou universitaire en mathématiques. Mais nos observations empiriques alimentent cette réflexion pour suggérer que le cours de logique augmente la vigilance face aux considérations logiques, et il s'agit là certainement d'un atout intéressant. Par contre, la vigilance est de peu d'utilité si elle n'est pas soutenue par une maîtrise minimale de ce qui est porté à notre attention par cette vigilance. Ainsi, comme le suggérait Cheng et al. (1986), le cours de logique n'élimine pas les erreurs de nature logique dans le travail mathématique. Un autre aspect souligné par notre étude est la réticence des étudiants qui ont suivi un cours de logique à s'engager dans un travail où ils ne peuvent s'appuyer sur des intuitions ou sur des connaissances contextualisées. Il serait donc intéressant de mieux comprendre cette réticence, de façon à bien identifier ce qui permet aux étudiants de profiter pleinement de la vigilance accrue, plutôt qu'elle n'agisse comme entrave. On peut alors étendre les questions, que nous avons initialement énoncées, au contenu et à l'enseignement des cours de logique, à savoir : quels contenus peuvent être étudiés, comment amener les étudiants à mobiliser ces contenus en contextes mathématiques « hors logique », quel type d'enseignement doit être visé dans les cours de logique offerts en début d'université pour favoriser la compréhension des étudiants et diminuer la fréquence des erreurs de nature logique, de façon à rendre ces cours aussi bénéfiques que possible à tous les domaines des mathématiques ?

Références

ARSAC G. (1996) *Interprétation, modèle et catégoricité : Commentaires sur les axiomes d'incidence*. http://www-cabri.imag.fr/abracadabri/GeoNonE/GNEIntro/HilArsac.htm: Consulté le 19/09/2013.

CHENG P. W., HOLYOAK K. J., NISBETT R. E. et OLIVER L. M. (1986) Pragmatic versus Syntactic Approaches to Training Deductive Reasoning. *Cognitive Psychology*, **18** (3), 293-328.

DIEUDONNÉ J. (1987) *Pour l'honneur de l'esprit humain.* Paris : Hachette éditions.

DROUHARD J.-P. (2006) Prolégomènes « épistémographiques » à l'étude des transitions dans l'enseignement des mathématiques. Dans N. Bednarz et C. Mary (éd.), *Actes du colloque EMF 2006 : L'enseignement des mathématiques face aux défis de l'école et des communautés*. Sur CD-ROM. Université de Sherbrooke, Canada.

DURAND-GUERRIER V. (2008) What can we learn from logical analysis of mathematical tasks from a semantic perspective ? *Proposition de contribution à ICME-11, TSG 34*.

DURAND-GUERRIER V. et ARSAC G. (2003) Méthodes de raisonnement et leurs modélisations logiques. Spécificité de l'analyse. Quelles implications didactiques ? *Recherches en Didactique des Mathématiques*, **23** (3), 295-342.

DURAND-GUERRIER V., BARRIER T., CHELLOUGUI F. et KOUKI R. (2012) An insight on university mathematics teaching practices about proofs involving multiple quantifiers. Corée : Affiche présentée à ICME-12.

DURAND-GUERRIER V., BOERO P., DOUEK N., EPP S. S. et TANGUAY D. (2012) Examining the Role of Logic in Teaching Proof. Dans F. L. Lin, F. J. Hsieh, G. Hanna et M. de Villiers (dir.), *Proof and Proving in Mathematics Education: The 19th ICMI Study*, 369-389. Dordrecht (Pays-Bas), New-York : Springer.

EPP S. S. (1997) Logic and Discrete Mathematics in the Schools. Dans D. Franzblau et J. Rosenstein (dir.), *American Discrete Mathematics in the Schools*, 75-84. Providence: American Mathematical Society.

EPP S. S. (2003) The Role of Logic in Teaching Proof. *The American Mathematical Monthly*, **110** (10), 886-899.

EPP S. S. (2009) Proof issues with existential quantification. Dans F. L. Lin, F. J. Hsieh, G. Hanna et M. de Villiers (dir.), *Proof and Proving in Mathematics Education: The 19th ICMI Study*, 154-159. Dordrecht (Pays-Bas), New-York : Springer.

FABERT C. et GRENIER D. (2011) Une étude didactique de quelques éléments de raisonnement mathématique et de logique. *Petit x*, **87**, 31-52.

FISCHBEIN E. (1982) Intuition and Proof. *For the Learning of Mathematics*, **3** (2), 9-19.

FISCHBEIN E. (1987) *Intuition in Science and Mathematics. An educational Approach*. Dordrecht : D. Reidel Publishing Cie.

GOLDIN G. (1997) Observing Mathematical Problem Solving through Task-Based Interviews. *Journal for Research in Mathematics Education. Monograph*, **9**, 45-62.

KUIPER J. (2004) *Ideas and Explorations: Brouwer's Road to Intuitionism*. Université d'Utrecht.

MARION M. et VOIZARD A. (1998) *FREGE - Logique et Philosophie.* Paris : L'Harmattan.

MERRI M. et PICHAT M. (2007) *Psychologie de l'éducation: L'école, Volume 1*. Paris : Éditions Bréal.

MURPHY C., WEIMA S. et DURAND-GUERRIER V. (2016) Des activités pour favoriser l'apprentissage de la logique en classe de seconde. *Petit x*, **100**, 7-34.

POINCARÉ H. (1905) *La valeur de la science*. Paris : Éditions Flammarion.

QUINE V.W. (1987) *Quiddities. An Intermittently Philosophical Dictionary*, Cambridge, Mass: Belknap Press of Harvard University Press.

SACKUR C., ASSUDE T., MAUREL M., DROUHARD J.-P. et PAQUELIER Y. (2005) L'expérience de la nécessité épistémique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, **25** (1), 57-90.

SELDEN A. et SELDEN J. (1995) Unpacking the logic of mathematical statements. *Educational Studies in Mathematics*, **29** (2), 123-151.

SELDEN A. et SELDEN J. (1999) The role of logic in the validation of mathematical proofs. *Technical Report*. Department of mathematics, Tennessee Technological University.

TANGUAY D. et MATHIEU-SOUCY S. (2015) Logique et enseignement des mathématiques. *Bulletin AMQ*, **55** (1), 15-38.

TANGUAY D. (2010) *La géométrie : au carrefours du sensible et de l'intelligible*. Montréal : Édition Bande Didactique, collection (parenthèse).

TANGUAY D. et GRENIER D. (2010) Experimentation and proof in a solid geometry teaching situation. *For the Learning of Mathematics*, **30** (3), 36-42.

THOM R. (1974) Mathématiques modernes et mathématiques de toujours, suivi de Les mathématiques « modernes », une erreur pédagogique et philosophique ? Dans R. Jaulin (dir.), *Pourquoi la mathématique ?*, 39-88. Paris : Éditions 10-18.

THURSTON W. P. (1994) On proof and progress in mathematics. *Bulletin of the American Mahematical Society*, **30** (2), 161-177.

VAN MOER A. (2007) Logic and Intuition in Mathematics and Mathematical Education. Dans K. François et J. P. Van Bendegen (dir.), *Philosophical Dimensions in Mathematics Education*, 159-179. Mathematics Education Library, Springer.

VERGNAUD G. (1990) La théorie de champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, **10** (2.3), 197-242.

VERGNAUD G. (2001) Forme opératoire et forme prédicative de la connaissance. Dans J. Portugais (dir.), Actes du Colloque GDM 2001, *La notion de compétence en enseignement des mathématiques, analyse didactique des effets de son introduction sur les pratiques et sur la formation*, 6-27. Université de Montréal.

WEBER K. et ALCOCK L. (2004) Semantic and syntactic proof productions. *Educational Studies in Mathematics*, **56** (2-3), 209-234.

WILDER R. L. (1967) The Role of Intuition. *Science*, **156** (3775), 605-610.

Annexe A. Questionnaire tel que proposé aux participants lors des entrevues

Entrevue **Participants :** ______________

Question 1

Un étudiant de niveau universitaire a fourni cette production. Faire un commentaire à son intention.

Théorème : Le double de tout nombre irrationnel est irrationnel

Démonstration : Supposons que ce n'est pas le cas. Ainsi, supposons que le double de tout nombre irrationnel est rationnel. Par contre, nous avons préalablement démontré que $\sqrt{2}$ est irrationnel et aussi que $2\sqrt{2}$ est irrationnel. Ces résultats contredisent notre supposition. Par conséquent, le théorème est vrai.

Question 2

Étudier la conjecture suivante : *La composition de deux fonctions surjectives est surjective.*

Question 3

Voici une question proposée à un étudiant universitaire :

À l'aide des axiomes suivants :

— *AX1* : Pour tout robot L et tout robot J distinct de L, il existe un seul chien W qui est ami avec L et avec J.

— *AX2* : Pour tout chien W, il existe au moins deux robots distincts qui sont amis avec W.

— *AX3* : Il existe trois robots distincts tel qu'aucun chien n'est ami avec ces trois robots simultanément.

Montrer que pour tout robot, il existe au moins un chien qui n'est pas son ami.

Voici ce qu'il a répondu :

Prenons un robot générique R.

Prenons $L1$, $L2$ et $L3$ les trois robots distincts tel qu'aucun chien n'est ami avec ces trois robots simultanément ($AX3$).

Si R est le même robot que Li, pour i=1 ou 2 ou 3, le chien est facile à trouver : on considère l'unique chien ami des deux autres robots et dont l'existence est assurée par $AX1$. Ce chien ne peut être ami avec Li sans quoi on contredit $AX3$.

On peut donc supposer que R est différent de $L1$, $L2$ et $L3$.

Complétez la démonstration.

Question 4

Un étudiant de niveau universitaire a fourni cette production. Faire un commentaire à son intention.

Proposition : Soit E et F deux ensembles et soit f une application de E dans F. Quelles que soient les parties A et B de E, on a $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.

Démonstration : Montrons tout d'abord que $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$: si $f(x) \in f(A \cap B)$, alors $x \in A \cap B$; comme $x \in A$, $f(x) \in f(A)$; de même comme $x \in B$, $f(x) \in f(B)$ et donc $f(x) \in f(A) \cap f(B)$. Montrons maintenant que $f(A) \cap f(B) \subset f(A \cap B)$: si $f(x) \in f(A) \cap f(B)$, $f(x) \in f(A)$ donc $x \in A$; de même $f(x) \in f(B)$ donc $x \in B$; comme $x \in A$ et $x \in B$, $x \in A \cap B$ et donc $f(x) \in f(A \cap B)$.