UN JEU SUR LES FRACTIONS POUR LE CYCLE 3

Claire GUILLE-BIEL WINDER
ESPE de Nice, Université de Nice Sophia Antipolis

Résumé. Ce travail trouve sa source dans des erreurs d'élèves fréquemment rencontrées qui relèvent « du traitement des écritures à virgule comme la juxtaposition de deux entiers » (MEN, 2016b, p.1). Deux points de difficultés constituent selon nous l'origine de la persistance de ces erreurs : la maîtrise insuffisante du concept de fraction, qui engendre des difficultés à concevoir la signification de la partie entière et des parties fractionnaires d'une fraction, ainsi qu'une mauvaise compréhension de l'écriture à virgule dans le système décimal, celle-ci n'étant pas mise en lien avec les fractions décimales. Pour tenter de remédier à cette situation, le groupe Premier Degré de l'IREM[1] de Nice a créé un jeu évolutif s'insérant dans une progression sur les fractions et décimaux tout au long du cycle 3. Ce jeu permet de « manipuler » des fractions « simples » puis décimales dans le cadre de la mesure des aires. Le dispositif a été testé dans plusieurs classes des trois niveaux du cycle.

Mots clés. fractions, fractions décimales, nombres décimaux, jeu, manipulation, cycle 3

Abstract. The origin of this work is due to pupils' frequent mistakes relied on "the treatment of decimal numbers as juxtapositions of two natural numbers" (MEN, 2016b, p.1). We identify two main reasons why they appear: deficiencies in the formal understanding of rational numbers, which cause difficulties conceiving the integer part and the fractional part of a fraction, and a misconception of the decimal form of a decimal number into the decimal number system, the decimal form being not related to its fractional form. An evolutive game for the purpose of remedying such a situation has been created by the "Primary School" group of the IREM[2] of Nice. This game is related to a progression throughout the cycle 3 (9 to 12 year old pupils), about fractions and decimal numbers. It allows pupils to "manipulate" some "simple" then decimal fractions in the sense of area measurement. It has been experimented in several classes and various levels of this cycle.

Key-words. fractions, decimal fractions, decimal numbers, game, manipulation, 9-12 year old pupils

Introduction

Le jeu des fractions présenté dans cet article est issu d'un travail réalisé entre 2003 et 2008 par le groupe Premier Degré[3] de l'IREM de Nice. Suite à la parution des programmes 2015 qui englobent dans le cycle 3 « les deux dernières années de l'école primaire et la première année du collège, dans un souci renforcé de continuité pédagogique et de cohérence des apprentissages » (MEN, 2015, p.90), nous avons jugé opportun de revisiter ce travail (Trémèje, Winder, Davio et Rosso, 2009 ; Trémèje, Winder, 2012), en mettant notamment en évidence l'optique de continuité et de progressivité sous-jacente.

Ce travail trouve sa source dans des erreurs d'élèves fréquemment rencontrées correspondant à des égalités du type de celles actuellement présentées dans les ressources d'accompagnement des programmes 2015, et qui relèvent « du traitement des écritures à virgule comme la juxtaposition de deux entiers » (MEN, 2016b, p.1) Deux points de difficultés sont plus précisément identifiés dans ces documents et constituent selon nous

[1] Institut de Recherche sur l'enseignement des Mathématiques.

[2] Institute of Research on Mathematical Education.

[3] Ce groupe était composé de Henri Davio (PEMF, Draguignan), Denise Rosso (PEMF, Draguignan), Joêle Trémèje (IUFM de Nice) et Claire Winder (IUFM de Nice).

l'origine de la persistance de ces erreurs. Tout d'abord la maîtrise insuffisante du concept de fraction engendre des difficultés à concevoir la signification de la partie entière et des parties fractionnaires d'une fraction. Dans ce cas, le trait fractionnaire est vu « comme un « séparateur » entre deux entiers, au même titre que la virgule » (MEN, 2016b*,* p.2), ce qui est illustré par des erreurs du type : $\frac{1}{4}=1{,}4$. D'autre part « l'écriture à virgule, dans le système décimal n'est pas comprise et pas mise en lien avec les fractions décimales » (*ibid*). Ce deuxième point, qui peut être corrélé avec le précédent, est renforcé par une utilisation insuffisante des équivalences entre les différentes écritures d'une fraction, même en amont du travail sur les nombres décimaux. Les documents officiels soulignent en effet que « l'introduction de l'écriture à virgule en CM1 ne remplace pas les écritures utilisant des fractions décimales, ces deux types d'écritures [coexistant] tout au long du cycle, pour renforcer la compréhension du codage que constitue l'écriture à virgule d'un nombre décimal » (MEN, 2016a, p.6). Autrement dit, nous pensons que c'est en travaillant, dans une activité qui leur donne du sens, les différentes écritures d'une fraction puis d'une fraction décimale, que l'on pourra accéder à l'écriture décimale comme codage d'une somme d'un entier et de fractions décimales inférieures à l'unité.

D'autre part, si « le travail mathématique est (…) un travail de l'esprit (…) celui-ci, en particulier à l'école élémentaire, s'exerce souvent à partir de questions posées sur des objets ou des expériences …» (MEN, 2002, p.10). Les ressources d'accompagnement des programmes 2015 en proposent d'ailleurs des exemples dans le cadre du travail sur les fractions et les nombres décimaux. Nous avons jugé pertinent de proposer une activité de manipulation avec des objets concrets.

Enfin depuis les programmes de 2002, la résolution de problèmes est au centre des activités mathématiques et les situations sur lesquelles portent les problèmes proposés peuvent être notamment issues de jeux. Selon Brougère (1995), le jeu est un lieu où l'enfant décide, le place dans une situation où il peut essayer quelque chose sans risque, et qui permet l'implication du joueur et favorise la communication.

Nous avons alors conçu un jeu, mettant en œuvre des manipulations, qui permette aux élèves de cycle 3 de fréquenter soit des fractions « simples » (sixièmes, huitièmes, mais aussi tiers, quarts, demis), soit des fractions décimales (dixièmes mais aussi demis, cinquièmes), qui cherche à développer l'utilisation des équivalences de fractions et incite à décomposer une fraction sous forme de la somme d'un entier et d'une fraction inférieure à un. Le jeu des fractions ainsi créé est évolutif pour s'insérer dans une progression sur les fractions et les décimaux tout au long du cycle 3. Le dispositif a fait l'objet d'expérimentations dans plusieurs classes des trois niveaux du cycle (CM1/CM2/sixième), et même dans une ULIS[4] collège.

Dans un premier temps, nous préciserons le cadre institutionnel dans lequel s'inscrit notre travail. Pour cela nous reviendrons sur le concept de fraction travaillé en cycle 3, ainsi que sur les grandes lignes de la progression suggérée par les Instructions Officielles. Nous nous intéresserons également aux choix retenus dans certaines ressources de CM1 et CM2. Cette première étape nous permettra de préciser certains de nos choix didactiques. La deuxième partie sera consacrée à la présentation du jeu, et son analyse fera l'objet de la troisième partie. Nous dégagerons ensuite des pistes d'exploitations (quatrième partie) illustrées par la présentation d'expérimentations (cinquième partie).

[4] Unité Localisée pour l'Inclusion Scolaire

1. Le point sur l'enseignement des fractions et des décimaux

Les travaux de recherche sur l'enseignement des fractions et des nombres décimaux sont nombreux et présentent ces notions sous des angles différents (citons notamment ceux Kieren (1980), Douady (1984), Brousseau (1987), Rouche (1992), ou Adjiage (2007)). Il existe en effet « différentes façons de considérer des nombres rationnels, selon le problème auquel ils répondent » et « le sens que les élèves construisent et attribuent à ces nouvelles écritures numériques dépend de la situation qui leur a permis de les découvrir » (Roditi, 2002, p.13). Avant d'expliciter nos choix didactiques, nous présentons donc dans cet article différents « aspects » d'une fraction : pour ce faire nous nous sommes appuyés sur la synthèse réalisée par Allard (2015). La lecture des Instructions Officielles sous cet éclairage nous permet ensuite de préciser les objets mathématiques sur lesquels porte le jeu des fractions.

1.1. Différents aspects du concept de fraction

Dans ses travaux récents, Allard (2015) se positionne sur cinq interprétations des fractions en lien étroit. Elle note par ailleurs que « l'utilisation des fractions dans ces « *aspects* » (…) dépend de leurs représentations (parts de tartes, aires à subdiviser, collection d'objets, droite graduée…) et des grandeurs [qui sont] en jeu » (Allard, 2015, p.95), selon qu'elles sont continues (comme des aires ou des longueurs) ou discrètes (comme un ensemble de billes).

Tout d'abord, l'interprétation d'une fraction comme « *partie d'un tout* » est associée à un partage d'un représentant de l'unité en parts égales et s'applique donc essentiellement aux fractions inférieures à un, par exemple un morceau de tarte qui représente $\frac{3}{4}$ de la tarte. Selon Alajmi (2012), il s'agit de l'interprétation la plus enseignée. Par ailleurs Perrin-Glorian (1986) note que la représentation sous forme de partage de tartes, disques ou galettes apparaît très majoritairement et de manière spontanée chez les élèves (de CM2 et sixième) qui ont suivi un enseignement « classique » sur les fractions (c'est-à-dire non basé sur un travail sur les fractions simples à partir des longueurs). Lorsqu'on isole une fraction « simple » (comme $\frac{1}{4}$) et qu'on exprime une nouvelle mesure en fonction de celle-ci (par exemple $3\times\frac{1}{4}u=\frac{3}{4}u$), c'est l'aspect « *fraction-mesure* » qui est en jeu. La fraction réfère à une situation de *mesurage par fractionnement de l'unité* : une unité est partagée en un nombre entier de parts égales, le dénominateur indiquant la nature du partage et le numérateur le nombre de parts considérées (éventuellement supérieur au nombre de parts contenues dans cette unité). Dans notre exemple, ceci signifie que l'on associe à $\frac{3}{4}$ le fait de prendre trois fois $\frac{1}{4}$. Cette signification est facilitée par la lecture orale en usage $\frac{3}{4}$ est habituellement lu « 3 quarts », $\frac{7}{10}$ lu « 7 dixièmes ».

L'aspect « *fraction-ratio* », en lien étroit avec la proportionnalité, « se retrouve dans des cas de comparaison de quantité » pour lesquels Vergnaud (1983) distingue deux possibilités :

- cas inclusif dans des problèmes tels que :« Trois bonbons sur quatre sont à la menthe » ; l'expression langagière « sur » est alors employée pour désigner la fraction (nécessairement plus petite que 1) ;
- cas exclusif dans des problèmes du type : « la collection des voitures de Pierre est trois quarts plus grande que celle de Jean » (Vergnaud, 1983, p.163).

« L'aspect « *fraction-opérateur* » est celui qui décrit la fraction comme opérant sur une quantité » (Allard, 2015, p.98). L'écriture $\frac{a}{b}$ correspond alors à l'abréviation de la fonction « multiplier par a sur b », également lue « multiplier par a diviser par b » (ou « diviser par b multiplier par a »), qui est la fonction composée des deux fonctions mult_a et div_b. Cette signification est liée, selon Vergnaud (1983) au raisonnement proportionnel : par exemple « le coefficient de proportionnalité dans les cas de réduction et d'agrandissement de figures peut être considéré comme un opérateur » (Allard, 2015, p.98).

Lorsque la fraction $\frac{a}{b}$ est vue comme « a divisé par b » on parle de « *fraction-quotient* ». Cette signification du rationnel privilégie les écritures : $3\div 4=\frac{3}{4}$ et $4\times\frac{3}{4}=3$ mais la lecture orale de $\frac{3}{4}$ comme « 3 divisé par 4 » est très peu utilisée.

1.2. Les fractions et décimaux dans les programmes de cycle 3

Dans les programmes actuels de cycle 3, les fractions apparaissent comme des *supports pour l'introduction des nombres décimaux*. Ces derniers sont présentés comme des nombres qui peuvent s'écrire sous forme d'une fraction décimale, puis sous la forme de la somme d'un entier et d'une ou plusieurs fractions décimales strictement inférieures à un, puis enfin en utilisant l'écriture à virgule en lien avec le principe de la numération décimale : par exemple $\frac{258}{100}$ (lu deux-cent-cinquante-huit centièmes), est décomposé en deux unités et cinquante-huit centièmes ($2+\frac{58}{100}$), puis en deux unités, cinq dixièmes et huit centièmes ($2+\frac{5}{10}+\frac{8}{100}$) ; il est enfin écrit 2,58. Pour cette raison, seules « les fractions simples (comme $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{5}{2}$) et les fractions décimales » (MEN, 2015, p.205) sont étudiées dès le CM1, et les activités proposées avec les nombres décimaux se limitent essentiellement « aux centièmes en début de cycle pour s'étendre aux dix-millièmes en classe de sixième » (*ibid*). Dans notre dispositif, nous avons donc fait le choix de travailler avec des fractions simples de dénominateur 2, 3, 4, 5, 6, 8 ou enfin 10.

Du CM1 à la sixième différentes conceptions de la fraction sont abordées. Celle qui réfère, dans des cas simples, à l'aspect « *fraction-mesure* » est privilégiée dès le CM1 depuis les programmes de 2002 : « les fractions puis les nombres décimaux apparaissent comme de nouveaux nombres introduits pour pallier l'insuffisance des entiers, notamment pour mesurer des longueurs, des aires et repérer des points sur une demi-droite graduée » (MEN, 2015, p.201).

Les programmes 2015 ne placent l'étude de la fraction comme *quotient* de deux nombres entiers qu'en sixième : « la fraction $\frac{a}{b}$ (…) est définie comme le nombre qui multiplié par b donne a » (MEN, 2016a, p.7). Ils soulignent également la nécessité de proposer des situations permettant de relier les formulations « la moitié », « le quart » avec « $\frac{1}{2}$ de », « $\frac{1}{4}$ de » qui réfèrent à la conception de fraction vue comme un *opérateur*. En revanche, ils incitent seulement à proposer des situations qui nécessitent « d'utiliser des nombres décimaux pour rendre compte de partages de grandeurs ou de mesures de grandeurs dans les cas simples ». **Dans notre travail, nous avons alors choisi de nous référer à la conception « *fraction-mesure* ».**

1.3. L'enseignement des fractions et des décimaux dans des ressources de CM1 et CM2

Pour mieux cerner les insuffisances potentielles des progressions proposées par les enseignants dans le domaine des fractions et des décimaux, nous avons étudié celles de quelques ouvrages qui suivent les lignes directrices impulsées par les programmes 2002. Ceux-ci, plus ou moins récents, proviennent de différents éditeurs[5]. Dans les premières activités proposées dans tous ces manuels en CM1, les fractions permettent de pallier l'insuffisance des entiers pour résoudre des problèmes de mesure de longueurs. En revanche, le travail dans le cadre de la mesure des aires n'y est pas systématiquement approfondi. Nous avons alors décidé de créer une activité dans le cadre de la mesure des aires.

2. Présentation du jeu des fractions

Avant de présenter le matériel ainsi que la règle du jeu des fractions, nous revenons sur les trois hypothèses de travail qui ont guidé sa conception.

Hypothèse 1 : Aborder une notion à travers différents cadres facilite l'apprentissage.

Il s'agit notamment de « varier les supports utilisés pour travailler les fractions [ce qui] contribue (…) à asseoir la compréhension abstraite de la notion d'unité » (MEN, 2016a, p.8). Suite à l'analyse des programmes et à celle de manuels (voir partie précédente), le jeu des fractions réfère à la conception « fraction-mesure ». Il se situe dans le cadre de la mesure des aires et met en scène des « huitièmes », fractions du type $\frac{a}{2^n}$, $1 \leq n \leq 3$, des « sixièmes », fractions du type $\frac{a}{3n}$, $1 \leq n \leq 2$, des « dixièmes », fractions décimales de dénominateur 10.

Hypothèse 2 : Proposer des manipulations favorise la création de représentations.

En effet, « lors de l'introduction de la fraction, le concept d'unité n'est pas encore stabilisé » et « il est important de continuer à matérialiser une unité que l'élève puisse manipuler, se représenter » (MEN, 2016a, p.8). Bien que les travaux existants (par exemple la séquence « Bande unité » dans ERMEL CM1) accordent une place importante à la manipulation, nous avons donc jugé pertinent de proposer une activité manipulatoire.

Hypothèse 3 : Proposer des situations avec des « entrées » différentes stimule les élèves.

Nous avons décidé de créer un jeu qui vérifie les critères définis par Brougère (1995). Nous avons notamment veillé à respecter le « critère de frivolité », en essayant d'éviter de tomber dans le piège de l'activité mathématique déguisée.
Ce critère de frivolité est le Cinquième critère de Brougère (1995) :

> Dans le jeu, la gravité des conséquences que comportent les erreurs ou les échecs se trouve atténuée. Au fond, le jeu est une activité très sérieuse, mais qui n'a pas de conséquences frustrantes pour l'enfant. Il s'agit en un mot d'une activité entreprise pour elle-même et non pas pour autrui […] Si le jeu permet d'expérimenter, et peut-être d'apprendre, c'est parce qu'il s'oppose au sérieux, parce qu'il est du côté du frivole, du futile. Et en conséquence, on peut lui

[5] *Euromaths* CM1-CM2, Hatier (2006/2007) ; *Diagonale* CM1-CM2, Nathan (2003/2004) ; *CapMaths* CM1-CM2, Hatier (2003/2004) ; *Pour comprendre les maths* CM1-CM2, Hachette (2004/2005) ; *Apprentissages numériques et résolution de problèmes* CM1-CM2, ERMEL, Hatier (1997/1999).

trouver un sérieux dérivé, au second degré, mais qui doit rester caché à l'enfant au risque de détruire la valeur de son jeu. Mais là se trouve le paradoxe : le sérieux risque de chasser la frivolité du jeu et en conséquence son intérêt spécifique. (Roye et Maurin, 2002, p.216).

2.1. Présentation du matériel

Ce jeu est composé :

- d'un plan de jeu sur lequel sont représentées des figures géométriques identiques partagées en six, huit ou dix parts égales ;
- de pièces réversibles bicolores (une couleur par équipe) constituées de différents nombres de parts ; la plus grande de ces pièces bicolores correspond à la figure géométrique de base du plateau ; le découpage en parts égales de chaque pièce apparaît sur une des deux faces (la face blanche) ;
- de cartes à tirer, sur chacune desquelles est inscrite une fraction ; les cartes sont réparties en deux tas de couleurs différentes fournies face cachée au début de chaque partie par l'enseignant (dans certaines versions, trois tas de cartes peuvent être mis à disposition des élèves) ; quelques cartes sont laissées vierges ;
- d'une feuille de score par équipe (voir figure 1 ci-dessous).

EQUIPE : ....

	Points	Bonus	
1ère manche			
2ème manche			
3ème manche			SCORE FINAL
TOTAL			

Figure 1. *La feuille de score*

A titre d'exemple, la figure 2 présente un plateau de jeu avec des décagones partagés en dix parts égales, les différentes pièces bicolores correspondantes, ainsi que les cartes de deux tas de couleurs possibles.

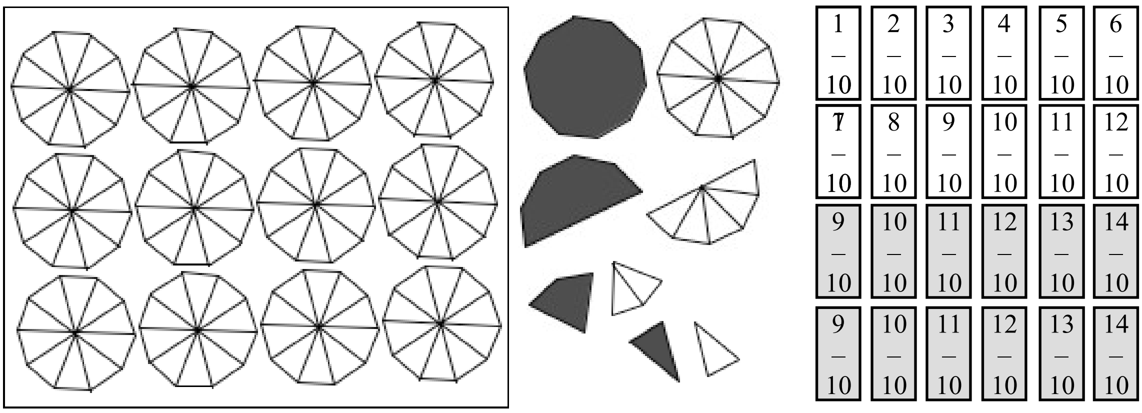


Figure 2. *le plateau du jeu avec les décagones, les pièces correspondantes (recto/verso) et les différentes cartes de deux tas de couleurs possibles*

2.2. Règle du jeu

Ce jeu oppose deux équipes de deux joueurs. À chaque équipe correspond une couleur.

Principe du jeu

Chaque partie de jeu se déroule en trois manches. A chaque manche, il s'agit de recouvrir le plan de jeu avec des pièces de sa couleur en fonction des tirages des cartes.

Déroulement d'une manche

Au début de la manche, chaque équipe tire une carte. Celle qui obtient la plus grande fraction choisit sa couleur de pièces et commence.
A tour de rôle, chaque équipe tire une carte de chaque couleur et place les cartes devant elle (elle les conserve jusqu'à la fin de la partie). Les membres de l'équipe ajoutent alors les nombres figurant sur les cartes : le résultat correspond au nombre de parts qui sont posées sur le plateau de jeu. Le choix des pièces est laissé au libre arbitre de chaque joueur. Par exemple, si le tirage donne $\boxed{\frac{8}{10}}$ et $\boxed{\frac{11}{10}}$, le joueur peut choisir neuf pièces « deux dixièmes » et une pièce « un dixième », ou une pièce « un » avec une pièce « cinq dixièmes » et deux pièces « deux dixièmes », ou encore d'autres combinaisons … En fonction du tirage, les joueurs doivent poser sur le plan de jeu le plus possible de pièces entières (voir un exemple figure 3). Toute pièce posée ne peut être déplacée.

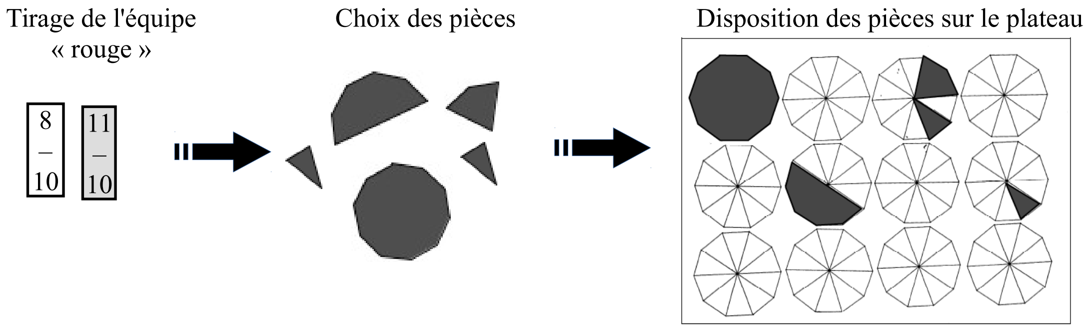


Figure 3. *Le premier tour de l'équipe « rouge »*

Une manche s'achève dès qu'une équipe tire deux cartes dont la somme est égale ou supérieure à la fraction manquante pour finir de remplir le plan de jeu. Si le tirage est supérieur à la fraction attendue, les joueurs rendent les deux cartes qui viennent d'être tirées. Ils inscrivent alors la fraction manquante sur une carte vierge prévue à cet effet (voir figure 4).

Calcul du score

A l'issue de chaque manche, chaque équipe complète sa feuille de score. Dans la première colonne, l'équipe inscrit le nombre de points correspondant au plateau de jeu. Par exemple pour le plateau des décagones :

- une figure entièrement recouverte vaut 1 point ;
- un dixième de figure recouverte vaut $\frac{1}{10}$ point ;
- une demi-figure recouverte vaut $\frac{5}{10}$ point (soit $\frac{1}{2}$ point).

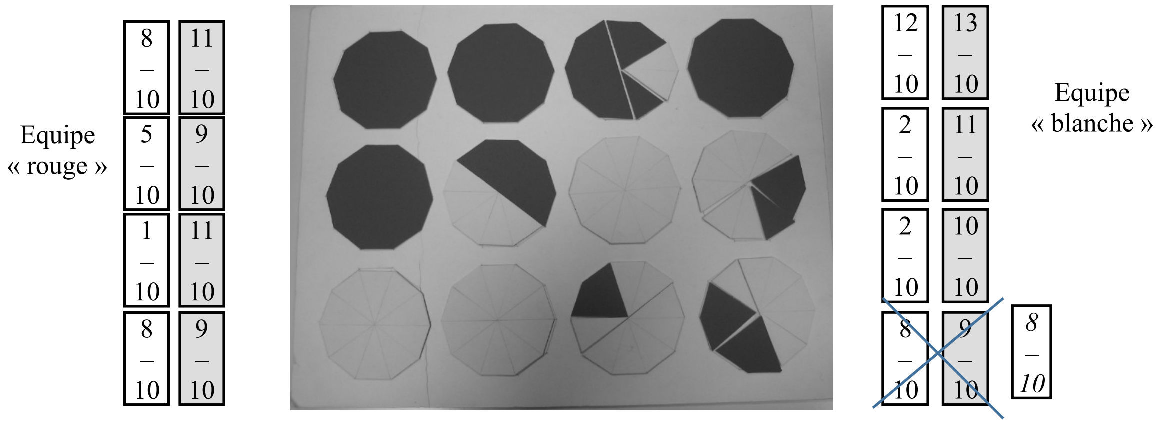


***Figure 4.** Exemple de plan de jeu à la fin d'une manche*

Dans la deuxième colonne, l'équipe inscrit le nombre de points de bonus : 2 points de bonus sont accordés pour chaque figure recouverte d'une *seule* pièce.
A l'issue des trois manches, les élèves ajoutent tous les points obtenus dans chacune des deux colonnes, puis calculent le score final (un exemple est présenté figure 5).
L'équipe vainqueur de la partie est celle qui a totalisé le plus de points à la fin des trois manches.

	Points	Bonus	
$1^{\text{ère}}$ manche	$4+\frac{22}{10}=6+\frac{2}{10}$	8	
$2^{\text{ème}}$ manche	$3+\frac{18}{10}=4+\frac{8}{10}$	6	
$3^{\text{ème}}$ manche	$5+\frac{2}{10}$	10	
TOTAL	$15+\frac{12}{10}$	24	SCORE FINAL $40+\frac{2}{10}$

***Figure 5.** Feuille de score pour l'équipe « rouge » à l'issue de la partie*

Une règle qui doit évoluer

La règle exposée ci-dessus propose 2 points de bonus pour chaque figure du plan de jeu recouverte d'une seule pièce, incitant ainsi l'élève à décomposer une fraction sous forme de la somme d'un entier et d'une fraction inférieure à 1. Toutefois il apparaît que cette règle occulte toute stratégie chez les joueurs, risquant ainsi d'entraîner un manque de motivation des élèves. Nous avons alors cherché à améliorer le dispositif en proposant la modification suivante : il s'agit de bonifier les formes recouvertes de pièces d'une même couleur. Chacun peut en effet contrer l'adversaire en l'empêchant de remplir une forme avec seulement des pièces de sa couleur. Cette modification n'intervient pas sur le niveau de difficulté mathématique du jeu, mais uniquement sur le plan stratégique (et nous avons constaté que l'utilisation de cette stratégie est spontanée chez les élèves dès lors que la règle du jeu est comprise). Pour éviter de complexifier inutilement la situation et permettre une meilleure appropriation du jeu, cette nouvelle règle pourra être proposée dans un deuxième temps seulement.

3. Explicitation et analyse du dispositif

L'objectif principal de ce jeu est de décomposer une fraction sous forme de la somme d'un entier et d'une fraction inférieure à 1 (pour donner du sens à l'écriture décimale). L'utilisation des fractions inférieures et supérieures à 1, ainsi que l'utilisation de fractions équivalentes en sont des objectifs secondaires. En lien avec ces objectifs, nous explicitons le dispositif et réalisons une analyse pédagogique et didactique.

3.1. Un dispositif en trois versions

Comme souligné précédemment, nous avons envisagé trois « familles » de fractions sur lesquelles nous voulons faire travailler les élèves : les « huitièmes », les « dixièmes », les « sixièmes ». Chacune de ces « familles » correspond à un partage particulier des formes géométriques, ce qui nous a amenés à proposer trois versions du jeu des fractions :

- le « jeu des huitièmes » : les formes géométriques sont partagées en 8 parties égales ; les plateaux de jeu sont composés de 15 formes géométriques ;
- le « jeu des dixièmes » : les formes géométriques sont partagées en 10 parties égales ; les plateaux de jeu sont composés de 12 formes géométriques ;
- le « jeu des sixièmes » : les formes géométriques sont partagées en 6 parties égales ; les plateaux de jeu sont composés de 15 formes géométriques .

La règle du jeu reste la même pour toutes les versions (voir Annexe).

3.2. Les plateaux de jeu

Pour éviter une représentation prototypique de la fraction qui pourrait faire obstacle à sa conceptualisation, les formes géométriques représentées sont différentes selon les plateaux, (le nombre de parts est en revanche identique et dépend de la version du jeu), et ne sont jamais des disques (des « galettes »). Pour le « jeu des dixièmes », deux plateaux sont proposés comportant soit 12 rectangles soit 12 décagones, partagés en dix parts égales (Figure 6). Pour le « jeu des huitièmes », trois plateaux sont proposés comportant soit 15 octogones, soit 15 carrés, soit 15 rectangles, partagés en huit parts égales (Figure 7).

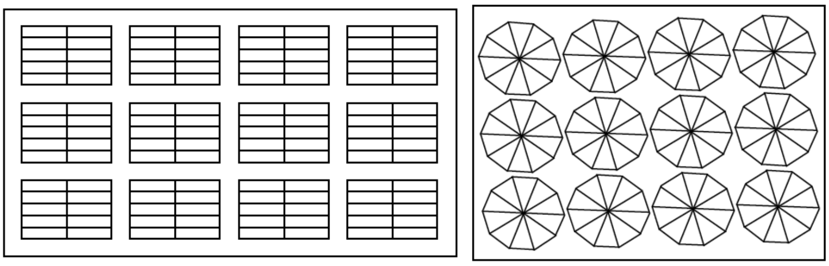


Figure 6. *Les deux plateaux du « jeu des dixièmes »*

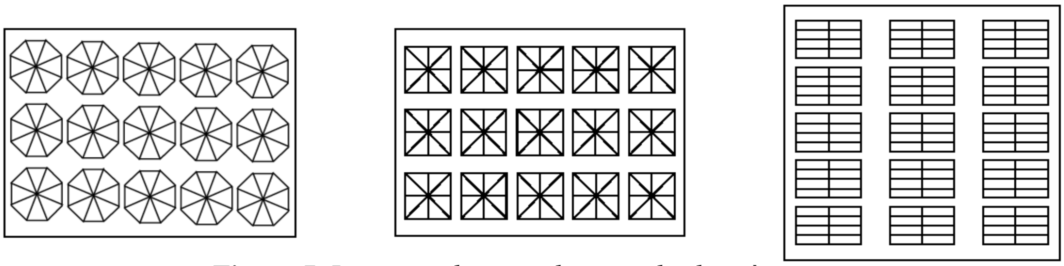


Figure 7. *Les trois plateaux du « jeu des huitièmes »*

Enfin pour le « jeu des sixièmes », trois plateaux sont proposés comportant soit 15 hexagones, soit 15 rectangles, soit 15 triangles (équilatéraux), partagés en six parts égales (Figure 8).

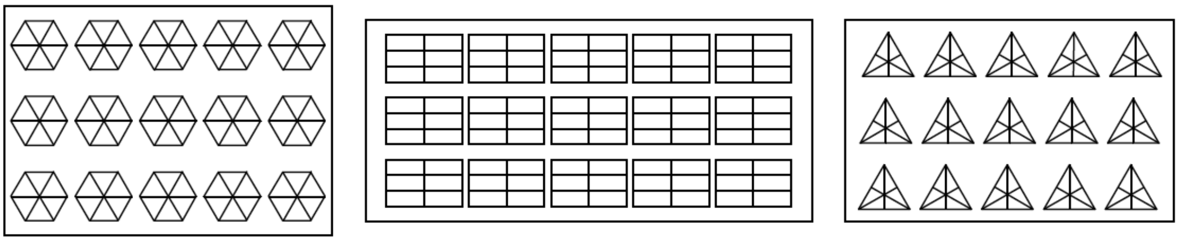


Figure 8. *Les trois plateaux du « jeu des sixièmes »*

3.3. Les pièces réversibles bicolores

Nous avons fait le choix de pièces réversibles bicolores, plutôt que de pièces distinctes dévolues à chaque équipe, pour limiter le matériel. Le découpage en parts égales de chaque pièce n'apparaît que sur une seule des deux faces : il s'agit d'illustrer certaines égalités entre fractions (« on voit que 1 demi et 5 dixièmes, c'est pareil »). Les pièces correspondent à des parties de l'unité ou à l'unité, ce qui favorise différentes décompositions des fractions ainsi que la mise en évidence de certaines égalités.

Pour le « jeu des dixièmes », les pièces correspondent à l'unité, $\frac{5}{10}$ (ou $\frac{1}{2}$), $\frac{2}{10}$ et $\frac{1}{10}$ (figure 9).

Les pièces du « jeu des huitièmes » correspondent à 1, $\frac{4}{8}$ (ou $\frac{1}{2}$), $\frac{2}{8}$ (ou $\frac{1}{4}$) et $\frac{1}{8}$ (figure 10).

Les pièces du « jeu des sixièmes » correspondent à 1, $\frac{3}{6}$ (ou $\frac{1}{2}$), $\frac{2}{6}$ (ou $\frac{1}{3}$) et $\frac{1}{6}$ (figure 11).

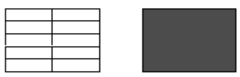
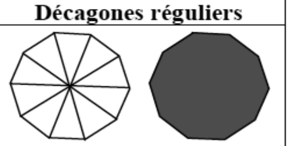
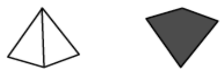
Nombres de pièces	**Pièces (recto-verso) suivant le support**	
	Rectangles	**Décagones réguliers**
8 pièces « 1 »		
16 pièces « $\frac{5}{10}$ »		
16 pièces « $\frac{2}{10}$ »		
24 pièces « $\frac{1}{10}$ »		

Figure 9. *Les pièces bicolores (recto et verso) du « jeu des dixièmes » suivant le plateau*

Nombres de pièces	Pièces (recto-verso) suivant le support		
	Carrés	Rectangles	Octogones réguliers
10 pièces « 1 »			
20 pièces « $\frac{1}{2}$ »			
25 pièces « $\frac{1}{4}$ »			
30 pièces « $\frac{1}{8}$ »			

Figure 10. *Les pièces bicolores (recto et verso) du « jeu des huitièmes » suivant le plateau*

Nombres de pièces	Pièces (recto-verso) suivant le support		
	Triangles équilatéraux	Rectangles	Hexagones réguliers
10 pièces « 1 »			
24 pièces « $\frac{1}{2}$ »	12 pièces 12 pièces		

Figure 11. *Les pièces bicolores (recto et verso) du « jeu des sixièmes » suivant le plateau*

3.4. Le rôle des cartes

Le tirage de deux cartes (ou de trois selon les variantes du jeu) conduit le plus souvent à une fraction supérieure à 1. Les situations proposées conduisent alors les élèves à décomposer la fraction sous forme de la somme d'un entier et d'une fraction inférieure à 1.

Les cartes tirées sont conservées par les joueurs jusqu'à la fin de la manche : elles constituent la *mémoire du jeu,* expression utilisée par Rodriguez (1993) analysant les conditions pour mettre un jeu au service des apprentissages mathématiques. Cette trace écrite est fondamentale car elle rend compte de tous les instants du jeu, permet la validation en fin de manche et garantit un réel travail mathématique. En effet, en fin de manche, l'élève est amené à calculer avec les écritures fractionnaires figurant sur les cartes pour valider le résultat obtenu en comptant les points sur le plateau (même si dans un premier temps, l'extraction de la partie entière à chaque tour de jeu relève avant tout du comptage directement sur le plateau). Il doit alors établir un lien entre les deux écritures.

Pour que la validation soit possible il est donc indispensable de respecter la contrainte relative

à la fin de chaque manche : lorsque le dernier tirage conduit à une somme supérieure à la fraction manquante pour remplir le jeu, celui-ci doit être remplacé par une seule carte vierge sur laquelle le joueur inscrit la fraction nécessaire et suffisante pour finir de remplir le plan de jeu. Ainsi, le total des points lus sur le plateau sera le même que le total des points calculé à l'aide des cartes.
Le dispositif tel qu'il est envisagé évite le recours au papier-crayon trop chronophage qui ralentirait le déroulement du jeu et en limiterait l'intérêt pour les élèves.

3.5. Les familles de cartes

Les cartes sont réparties en deux (ou trois tas) de couleurs différentes choisies parmi trois « familles » (le tableau 1 en présente le détail) :

- les cartes rouges et vertes comportent des fractions de même dénominateur (8, 10 ou 6 selon la version du jeu) ;
- les cartes jaunes comportent uniquement les fractions $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{2}$, et $\frac{3}{2}$;
- les cartes bleues comportent des fractions de dénominateur respectifs 4 (pour le « jeu des huitièmes »), 5 (pour le « jeu des dixièmes ») et 3 (« pour le jeu des sixièmes ») qui sont diviseurs de 8, 10 ou 6.

Le choix des cartes rouges et vertes conduit les joueurs à effectuer la somme de fractions de même dénominateur, le résultat étant le plus souvent une fraction supérieure à 1.
Le choix des cartes jaunes ou bleues, qui proposent des fractions de dénominateurs différents de 8, 10 ou 6, conduit les joueurs à utiliser des équivalences de fractions.

Cartes	Jeu des dixièmes	Jeu des huitièmes	Jeu des sixièmes
Rouge	12 cartes : fractions de $\frac{1}{10}$ à $\frac{12}{10}$ en un exemplaire.	16 cartes : fractions de $\frac{1}{8}$ à $\frac{4}{8}$ en un exemplaire ; fractions de $\frac{5}{8}$ à $\frac{10}{8}$ en deux exemplaires.	16 cartes : fractions de $\frac{1}{6}$ à $\frac{8}{6}$ en deux exemplaires.
Vert	12 cartes : fractions de $\frac{9}{10}$ à $\frac{14}{10}$ en deux exemplaires.	16 cartes : fractions de $\frac{7}{8}$ à $\frac{14}{8}$ en deux exemplaires.	15 cartes : fractions de $\frac{7}{6}$ à $\frac{11}{6}$ en trois exemplaires.
Jaune	12 cartes : fractions $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{2}$, $\frac{3}{2}$ en quatre exemplaires.	18 cartes : fractions $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{2}$, $\frac{3}{2}$ en six exemplaires.	15 cartes : fractions $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{2}$, $\frac{3}{2}$ en cinq exemplaires.
Bleu	12 cartes : fractions de $\frac{1}{5}$ à $\frac{6}{5}$ en deux exemplaires.	18 cartes : fractions $\frac{1}{4}$ à $\frac{6}{4}$ en trois exemplaires.	16 cartes : fractions $\frac{1}{3}$ à $\frac{4}{3}$ en quatre exemplaires.

Tableau 1. *Les jeux de cartes de couleur envisageables pour chaque version du jeu*

3.5. La feuille de score et le comptage des points

Ce n'est pas la manipulation qui constitue l'activité mathématique mais les questions qu'elle suggère (MEN, 2002, p.10).
La feuille de score représente alors une deuxième mémoire de jeu et implique un travail sur les écritures numériques qui permet le passage à une première forme de décontextualisation. En effet, lors du comptage des points, on passe des fractions de surfaces manipulées pendant le jeu, à des nombres sans « représentation matérielle ».
La bonification de 2 points accordée aux joueurs en fin de manche pour chaque pièce entière posée est un des éléments clés de notre dispositif :

- au cours du jeu, elle incite l'élève à extraire la partie entière de la fraction ;
- si au cours du jeu l'élève n'a pas exprimé sa réponse sous la forme attendue sur sa feuille de score (par exemple en écrivant $\frac{87}{10}$ au lieu de $8+\frac{7}{10}$), on peut penser qu'au moment du comptage des points, il transformera l'écriture fractionnaire pour pouvoir ajouter ce bonus ;
- les points de bonus ne correspondent pas à des mesures d'aire : nous pensons que leur prise en compte favorise le passage au cadre numérique.

4. Exploitation envisageable

Les trois versions du jeu ainsi que le choix des cartes mises à la disposition des élèves pour chacune de ces variantes, permettent de travailler différentes compétences. Après les avoir mises en évidence dans les différents niveaux de jeu, nous proposons des pistes d'exploitation du cycle 3 à la sixième.

4.1. Différents niveaux de jeu

En fonction du nombre de tas de cartes et de leur couleur, nous avons identifiés six niveaux de jeu (numérotés de 1 à 6, du plus simple mathématiquement au plus difficile) pour chaque version (« huitièmes », « dixièmes », « sixièmes »). Le niveau 1 permet de travailler sur des sommes de fractions de même dénominateur. Dès le niveau 2, de nouvelles fractions de dénominateurs différents apparaissent. En effet, s'il n'apparaît pas explicitement dans les programmes du cycle 3 de compétence relative aux écritures fractionnaires équivalentes, les ressources d'accompagnement en soulignent la nécessité dès le début de l'apprentissage : par exemple « le lien entre $\frac{5}{2}$ unités et $2+\frac{1}{2}$ unités (…) doit (…) être établi et travaillé régulièrement » (MEN, 2016a, p.8). Ainsi certaines égalités comme $\frac{1}{2}=\frac{2}{4}$ ou $\frac{3}{4}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$ sont rapidement perçues par les élèves dès les situations d'introduction des fractions dans le cadre des mesures de longueurs (comme celle proposée dans la ressource ERMEL) et d'autres comme $\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$ ou $\frac{6}{10}=\frac{1}{2}+\frac{1}{10}$ sont mises en évidence grâce au matériel utilisé dans le jeu (on « voit » les $\frac{4}{8}$ dans le $\frac{1}{2}$). C'est pourquoi, une fois le jeu connu des élèves, il peut être intéressant de fréquenter des égalités de fractions, en proposant aux élèves des calculs avec des fractions de dénominateurs différents, en s'appuyant sur le support matériel. Il ne s'agit pas, bien sûr, à ce niveau de l'apprentissage d'établir l'égalité : $\frac{a}{b}=\frac{ka}{kb}$!

Cet apprentissage se fait progressivement, d'abord avec les fractions $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{2}$, $\frac{3}{2}$ (niveau 2), ce qui permet de travailler, selon la version choisie, les équivalences $\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$, $\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$ ou $\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$ et les écritures qui peuvent en découler comme par exemple : $\frac{1}{2}+\frac{2}{8}=\frac{6}{8}$, $\frac{6}{10}=\frac{1}{2}+\frac{1}{10}$, ou $\frac{4}{6}=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}$. Le niveau 3 prolonge le niveau 2 en proposant des calculs de sommes avec trois fractions. Dans le niveau 4 de nouvelles fractions apparaissent, permettant de travailler de nouvelles équivalences et notamment : $\frac{1}{4}=\frac{2}{8}$, $\frac{1}{5}=\frac{2}{10}$ ou $\frac{1}{3}=\frac{2}{6}$ selon la version du jeu. Le niveau 5 prolonge le niveau 4. Enfin le niveau 6 reprend toutes les fractions rencontrées dans les niveaux précédents.

4.2. Pistes d'exploitation

Les différents supports (plateaux, pièces, cartes) prévus permettent d'envisager plusieurs variantes pour ce jeu qui pourra alors être utilisé dans plusieurs types de situations : apprentissage, réinvestissement, entraînement/consolidation ou remédiation.

Les fractions de type $\frac{a}{2^n}$ correspondent à des partages en deux successifs. Ce sont donc celles que les enfants s'approprient le plus facilement. Ce fait, corroboré par nos différentes expérimentations, nous conduit à envisager la mise en œuvre du « jeu des huitièmes » – niveau 1 comme situation d'apprentissage en début de progression en CM1 ou comme situation de réinvestissement en CM2. Les niveaux 2 à 6 travaillent en outre sur les fractions équivalentes : il peuvent être utilisés comme situations d'apprentissage en fin CM2 et de consolidation début sixième.

Le « jeu des dixièmes » travaille spécifiquement sur les fractions décimales et permet de renforcer le passage de l'écriture fractionnaire à l'écriture décimale. Le niveau 1 peut donc être proposé comme situation d'apprentissage au CM1 (après le « jeu des huitièmes » - niveau 1), comme situation de réinvestissement en début CM2 ou de consolidation un peu plus tard, comme situation de remédiation en début sixième. Les niveaux 2 à 6 qui travaillent en outre sur les fractions équivalentes, peuvent être proposés en entraînement en fin CM2 ou en sixième.

Enfin la fréquentation des fractions de type $\frac{a}{3n}$ est moins pertinente en début de progression (le partage en 6 apparaissant plus difficile d'accès à ce moment-là) et se justifie donc plutôt dans des situations de réinvestissement. C'est pourquoi nous proposons « jeu des sixièmes » - niveau 1 en réinvestissement en CM2, et les niveaux 2 à 6 en consolidation en fin de CM2 et surtout en sixième.

Les tableaux 2 et 3 résument ces différentes propositions.

Objectifs spécifiques	Dispositif	Niveau de classe
- Utiliser des fractions inférieures et supérieures à 1. - Effectuer des calculs avec des fractions simples de même dénominateur. - Écrire une fraction sous forme de somme d'un entier et d'une fraction inférieure à 1.	Le « jeu des huitièmes ». *Niveau 1*	CM1
- Écrire une fraction décimale sous forme de somme d'un entier et d'une fraction inférieure à 1. - Effectuer des calculs avec des fractions décimales de même dénominateur. - Utiliser l'écriture décimale. - Calculer la somme de nombres décimaux.	Le « jeu des dixièmes ». *Niveau 1*	CM
- Utiliser des fractions équivalentes. - Effectuer des calculs avec des fractions simples. - Écrire une fraction sous forme de somme d'un entier et d'une fraction inférieure à 1.	Le « jeu des huitièmes ». *Niveaux 2 à 6*	CM2

Tableau 2. *Le jeu des fractions comme situation d'apprentissage*

<table>
<tr><th>Objectifs spécifiques</th><th>Dispositif</th><th>Niveau de classe</th></tr>
<tr><td rowspan="2">- Utiliser des fractions inférieures et supérieures à 1.
- Effectuer des calculs avec des fractions de même dénominateur.
- Écrire une fraction sous forme de somme d'un entier et d'une fraction inférieure à 1.</td><td>Le « jeu des dixièmes ».
Niveau 1</td><td>CM1
CM2</td></tr>
<tr><td>Le « jeu des huitièmes », « le jeu des dixièmes » et le « jeu des sixièmes », en parallèle.
Niveau 1</td><td>CM2</td></tr>
<tr><td>- Écrire une fraction décimale sous forme de somme d'un entier et d'une fraction inférieure à 1.
- Effectuer des calculs avec des fractions décimales de même dénominateur.
- Utiliser l'écriture décimale.
- Calculer la somme de nombres décimaux.</td><td>Le « jeu des dixièmes ».
Niveau 1</td><td>CM2
Remédiation en 6ème</td></tr>
<tr><td>- Utiliser des fractions équivalentes.
- Effectuer des calculs avec des fractions simples.
- Écrire une fraction sous forme de somme d'un entier et d'une fraction inférieure à 1.</td><td>Le « jeu des huitièmes », « le jeu des dixièmes » et le « jeu des sixièmes » en parallèle.
Niveaux 2 à 6</td><td>CM2
6ème</td></tr>
</table>

Tableau 3. *Le jeu des fractions comme activité de réinvestissement/consolidation/entraînement/remédiation*

5. Des expérimentations

Au cours de trois années d'expérimentations (2003/04 ; 2004/05 ; 2005/06) dans différentes classes de CM1, CM2[6], sixième et en section UPI au collège (Unité pédagogique

[6] Le « jeu des sixièmes » avait été proposé aux élèves selon une règle moins élaborée. Il n'a pas été expérimenté avec la dernière règle du jeu. Il en est de même pour l'utilisation du jeu dans les niveaux 2 à 6.

d'intégration), nous avons veillé à noter les réactions de chacun pour mieux en mesurer l'impact sur les élèves en termes d'acquisition de compétences contextualisées. Trois modes d'observation ont pu être utilisés : présence d'un adulte témoin, enregistrement vidéo et « feuille de score ». Nous avons ainsi abouti à la version du jeu présentée dans cet article. Cette dernière version a pu être expérimentée à plusieurs reprises en 2006/07 dans des classes de CM1 et de CM2 avec les fractions du type $\frac{a}{2^n}$ et $\frac{a}{10}$ au niveau 1.

A l'école élémentaire le jeu a toujours été proposé à des groupes d'élèves en présence d'un adulte observateur. En sixième en revanche, l'enseignante a choisi de l'introduire en demi-groupes, et a laissé les enfants jouer en autonomie.

Nous présentons d'abord de manière détaillée l'expérimentation qui s'est déroulée dans l'une des classes de CM1 au cours des périodes 4 et 5 de l'année 2006/07, puis nous évoquerons des expérimentations qui ont eu lieu en collège (classe de sixième et UPI).

5.1. Expérimentation 2006/07 en CM1

L'enseignante de cette classe utilise habituellement le manuel Euromaths CM1 (Hatier, 2006) ainsi que la ressource ERMEL CM1 (Hatier, 1997). Dans le manuel, le travail sur les différentes écritures d'une fraction, ainsi que le passage de la fraction décimale à l'écriture décimale s'appuie essentiellement sur le repérage de points sur la droite graduée. L'introduction des fractions par la mesure de longueurs de segments à l'aide d'une bande unité (ressource ERMEL) est donc totalement justifiée. En revanche, nous pensons que le cadre des mesures d'aires est insuffisamment exploité notamment pour comprendre la décomposition d'une fraction en somme d'un entier et d'une fraction inférieure à un. C'est pourquoi nous avons construit ensemble la progression suivante dans laquelle le jeu des fractions intervient à plusieurs reprises :

- *Introduction de l'écriture fractionnaire pour mesurer des longueurs* (2 séances)
  S'approprier le codage fractionnaire lors du partage d'une unité de longueur par pliage. Utiliser ce codage pour résoudre un problème de mesurage. Utiliser en actes des équivalences de fractions ($\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$ mais aussi $\frac{3}{2}=1+\frac{1}{2}$).
- *Les fractions pour mesurer des aires*
  Transposer les connaissances acquises dans le cadre de la mesure des longueurs. S'assurer des prérequis nécessaires au bon déroulement du jeu des fractions.
- **D*écomposer une fraction en somme d'un entier et d'une fraction inférieure à un***
  Le « jeu des huitièmes » - niveau 1 (apprentissage)
- *Fractions décimales et partage d'aires*
  Mesurer l'aire de différentes surfaces à l'aide de fractions, par report ou partage d'une surface dont l'aire est choisie pour unité.
- ***Décomposer une fraction en somme d'un entier et d'une fraction inférieure à un***
  Le « jeu des huitièmes » - niveau 1 (entraînement)
- F*ractions décimales et mesures de longueur*
  Se familiariser avec les dixièmes. Découvrir et utiliser un moyen simple permettant le partage équitable d'un segment.
- *Repérages sur la droite graduée* (2 séances)
  Placer des fractions sur la droite numérique. Encadrer des fractions par deux nombres entiers consécutifs. Intercaler une fraction entre deux nombres entiers consécutifs.

Écrire une fraction puis une fraction décimale sous forme de la somme d'un entier et d'une fraction inférieure à 1. Comprendre que l'unité peut être partagée successivement en 10, 100, 1000.

- *Écriture à virgule des fractions décimales*
  Se familiariser avec la convention d'écriture des nombres décimaux.
- ***Décomposer une fraction décimale sous forme de somme d'un entier et d'une fraction inférieure à 1***
  Le « jeu des dixièmes » - niveau 1(réinvestissement)
- Évaluation

Nous présentons ci-dessous les séances dans lesquelles le jeu des fractions a été mis en œuvre.

Les deux séances avec le « jeu des huitièmes »

L'organisation adoptée dans les deux séances est la même : des groupes de 4 élèves, composés de deux équipes de deux qui s'affrontent.
La première séance correspond à l'appropriation du jeu. Dans un premier temps, les élèves se sont familiarisés avec les différents composants du jeu (plateau, pièces, cartes). Puis une règle pour deux élèves a été distribuée. La lecture ayant représenté un exercice difficile pour les enfants, le temps prévu pour la séance ne leur a permis de réaliser qu'une manche. *Il est donc nécessaire de prévoir un aménagement de la partie pour la phase d'appropriation du jeu.* Le comptage des points a été effectué seulement à partir des pièces disposées sur le plateau. Même si l'activité des élèves relève à ce moment-là du comptage plutôt que du calcul, cette étape semble indispensable pour permettre l'appropriation du jeu par tous les enfants.
L'analyse des feuilles de score fait apparaître différentes écritures, le nombre de points est :

- d'abord exprimé sous forme fractionnaire puis la partie entière est extraite : $\frac{92}{8}$ devient $11+\frac{4}{8}$;
- exprimé sous forme de la somme d'un entier et d'une fraction supérieure à 1, puis d'une fraction inférieure à 1 : $9+\frac{17}{8}$ puis $11+\frac{1}{8}$;
- exprimé directement sous forme de la somme d'un entier et d'une fraction inférieure à 1 : $9+\frac{3}{8}$.

Lors de cette phase d'écriture, les élèves ont été amenés à utiliser les écritures fractionnaires mais pour beaucoup d'entre eux, à ce stade de l'apprentissage, c'est une réorganisation des pièces du jeu éparpillées sur le plateau (et non un calcul) qui a permis d'aboutir à l'extraction de la partie entière de la fraction.
La deuxième séance a permis à chaque groupe de réaliser une partie en trois manches (après que les élèves aient rapidement rappelé la règle du jeu).
Les différents essais de stratégie imaginés par les élèves font apparaître des modifications d'objectifs (« avancer » dans le jeu ou bloquer l'adversaire) en cours de partie. On a alors pu constater une forme d'entraide entre deux équipes adverses, le plaisir de « bien jouer » occultant l'intérêt personnel. À la fin de chaque manche, lors du comptage des points, pour faire évoluer les procédures des élèves du comptage au calcul, l'enseignante a précisé la

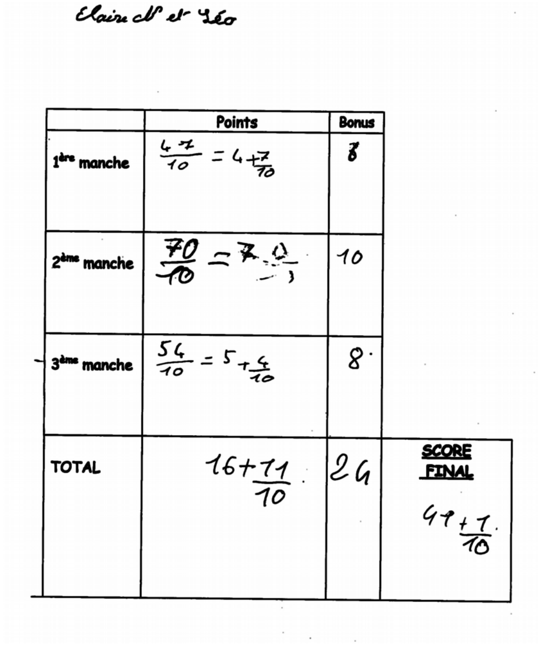
double tâche de chaque équipe. Il s'agit d'une part de compter ses points sur le plateau, et d'autre part de vérifier le total obtenu par l'équipe adverse à l'aide des cartes conservées tout au long de la manche. Ainsi chaque élève effectue à un moment donné un réel travail sur les écritures fractionnaires. Lorsque le calcul avec les cartes ne correspondait pas aux points sur le plateau, la manche a été annulée. Cette clause permet en effet de mettre l'accent sur la nécessité pour chacun d'être vigilant à chaque tour de jeu, qu'il s'agisse de lui ou de l'adversaire. On voit ici tout l'intérêt du travail de groupe en tant qu'organisation destinée à provoquer des échanges entre les enfants dans le but d'aider chacun à acquérir les compétences visées. L'analyse des feuilles de score des six groupes a permis de constater que la plupart des élèves avaient produit deux écritures (par exemple : $\frac{63}{8}=7+\frac{7}{8}$), avec toutefois quelques erreurs de calcul dues à une mauvaise maîtrise des tables de multiplication.
Lors du comptage des points en fin de partie, certaines écritures que l'on pourrait qualifier de « non minimales », comme $5+\frac{13}{8}$ par exemple, sont apparues mais ont été transformées avec l'étayage de l'enseignant.

La séance avec le « jeu des dixièmes »

Dans un premier temps, l'activité proposée avec cette nouvelle version du jeu peut être considérée comme un réinvestissement des deux séances précédentes. La mise en activité des élèves a donc été rapide, la règle ayant été mémorisée, du moins dans les grandes lignes. C'est seulement en fin de manche que l'étayage du maître a été nécessaire, pour que soit respectée la contrainte liée à la carte vierge échangée contre les dernières cartes tirées. *Il sera donc utile de prévoir, lorsque les parties seront suffisamment avancées dans chaque groupe, un temps de rappel des contraintes à respecter à la fin d'une manche.* Le total des points à la fin de la manche a été directement lu sur le plateau. Sur 12 équipes :

- quatre équipes ont écrit la réponse en utilisant les deux écritures : $\frac{47}{10}=4+\frac{7}{10}$;
- sept équipes ont utilisé seulement la décomposition sous forme d'un entier et d'une fraction inférieure à 1 ;
- une équipe a procédé en deux étapes, guidée par l'enseignante : $4+\frac{11}{10}=5+\frac{1}{10}$.

Au cours de la partie, trois groupes ont vu une de leurs manches annulée en raison de la non correspondance entre le total des points sur le plateau et le total des cartes. Il semble que ce problème soit dû à une erreur dans la manipulation des cartes en fin de manche (cartes non rendues en échange de la carte vierge). Il faut noter par contre que l'extraction de la partie entière a toujours été correctement réalisée.
En fin de partie, le calcul du total a entraîné de nouveaux échanges effectués assez naturellement par la plupart des élèves, qui se sont d'ailleurs référés au matériel pour justifier leur calcul. La figure 12 présente un exemple de feuille de score.



	Points	Bonus	
1ère manche	$\frac{47}{10} = 4 + \frac{7}{10}$	8	
2ème manche	$\frac{70}{10} = 7,0$	10	
3ème manche	$\frac{54}{10} = 5 + \frac{4}{10}$	8	
TOTAL	$16 + \frac{11}{10}$	26	SCORE FINAL $41 + \frac{1}{10}$

Figure 12. *Feuille de score réalisée à l'occasion du « jeu des dixièmes » par C. et L.*

Pour la phase de synthèse, l'enseignante a proposé un travail individuel. Après avoir représenté au tableau une feuille de score fictive avec les résultats de trois manches sous la forme $\frac{a}{10}$, elle a demandé aux élèves de la reproduire sur leur cahier de brouillon et de la compléter en extrayant la partie entière de chaque fraction. Une mise en commun a permis de valider les réponses en faisant référence au matériel lorsque le besoin s'en faisait sentir. Certains élèves ont exprimé leur score à l'aide de nombres décimaux. L'enseignante a mis à profit le dispositif pour gérer les erreurs dues à un traitement séparé de la partie entière et de la partie décimale (comme par exemple : 6,7 + 5,8 + 6,3 = 17,18 !).

Évaluation

A la fin de la progression, l'enseignante a proposé aux élèves une évaluation papier (figure 13), sous forme *d'exercice de jeu* (Rodriguez, 1993) simulant une partie interrompue. La consigne est la suivante : « Fais le compte des points de la troisième manche pour les noirs et pour les blancs afin de compléter les deux feuilles de score et détermine l'équipe qui a gagné. »

L'expression des points pour chaque manche (les trois premières lignes de chaque tableau) permet d'évaluer la capacité des élèves à extraire la partie entière d'une fraction. Le calcul du score final permet de savoir si les élèves ont perçu la partie entière de la fraction comme un nombre entier. Concernant l'expression des points correspondant à chaque manche, une analyse des résultats fournis permet de constater que sur les 23 élèves présents, 19 savent extraire la partie entière d'une fraction :

- 15 élèves expriment la fraction décimale sous forme d'un entier et d'une fraction décimale inférieure à 1 ;
- 4 élèves utilisent directement l'écriture décimale ;
- 1 élève propose les deux écritures (décimale et somme d'un entier et d'une fraction).

Feuille de score des blancs

	Points	Bonus	
1ère manche	$\frac{53}{10}$ =	8	
2ème manche	$\frac{69}{10}$ =	10	
3ème manche		4	
Total			Score final

Feuille de score des noirs

	Points	Bonus	
1ère manche	$\frac{67}{10}$ =	8	
2ème manche	$\frac{51}{10}$ =	6	
3ème manche		8	
Total			Score final

Plateau de jeu
à la fin de la
troisième manche

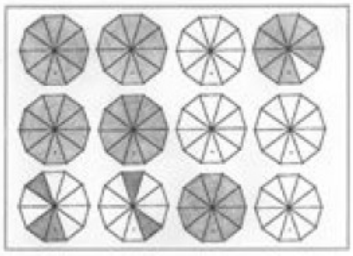


Figure 13. *Feuille d'évaluation*

Le support matériel (plateau, formes géométriques variées et manipulables) semble avoir joué son rôle. Un élève, F., procède même probablement à une réorganisation mentale des pièces de façon à reconstituer une forme entière (voir figure 14) : lorsqu'il comptabilise les points de l'équipe noire à la troisième manche, il écrit en effet $5+1+\frac{4}{10}$ puis transforme cette écriture en $\frac{64}{10}$.

Feuille de score des noirs

	Points	Bonus	
1ère manche	$\frac{67}{10}=6+\frac{7}{10}$	8	
2ème manche	$\frac{51}{10}=5+\frac{1}{10}$	6	
3ème manche	$5+1+\frac{4}{10}=\frac{64}{10}$	8	
Total	$\frac{67}{10}+\frac{51}{10}+\frac{64}{10}=\frac{182}{10}$	22	Score final $\frac{188}{10}$ + 22 [illegible]

Figure 14. *Extrait de l'évaluation de F.*

Si le matériel joue ici un rôle prégnant, en revanche on peut supposer que la transformation de cette écriture en une fraction décimale (inutile dans le cadre du jeu), est nécessairement le fruit d'un véritable travail « mathématique »!

Concernant le calcul du score final :

- 3 élèves ajoutent séparément les parties entières et les dixièmes (voir comme exemple l'évaluation de J. figure 15) ; aucun des trois n'effectue l'échange 10 contre 1 pour exprimer le résultat sous forme d'un entier et d'une fraction inférieure à l'unité, mais les nombres proposés ($38+\frac{18}{10}$ et $39+\frac{12}{10}$) rendent inutile cette étape pour conclure à la victoire des noirs !

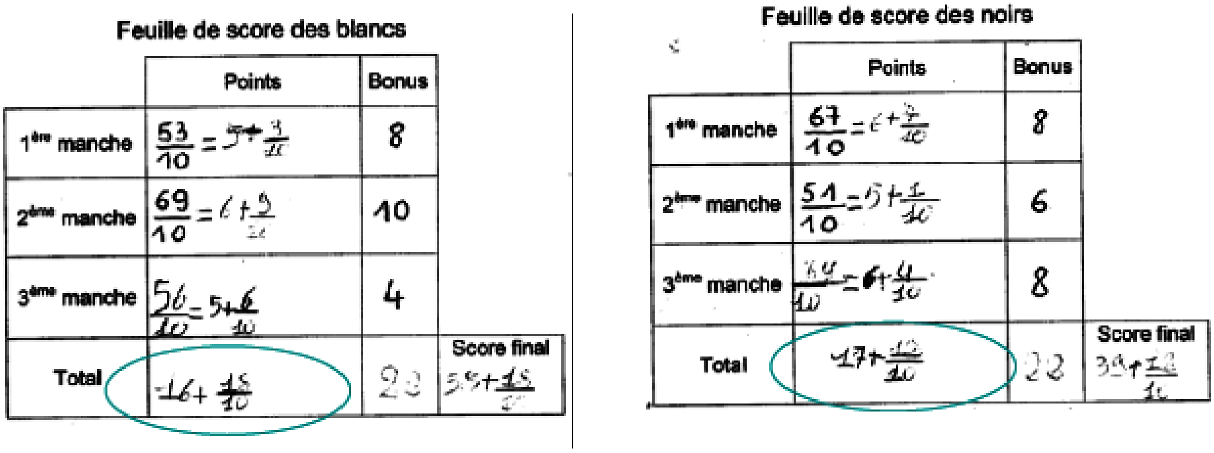


Figure 15. *L'évaluation de J.*

- 2 élèves transforment le bonus de 22 points en fraction décimale pour l'ajouter au total des points exprimé sous forme de fraction décimale $\frac{182}{10}$, malgré la décomposition de scores de chaque manche (voir exemple l'évaluation de E. figure 16) : dans leur cas, le bonus ne joue pas le rôle attendu d'incitateur à la décomposition $\frac{182}{10}$ de en $18+\frac{2}{10}$;

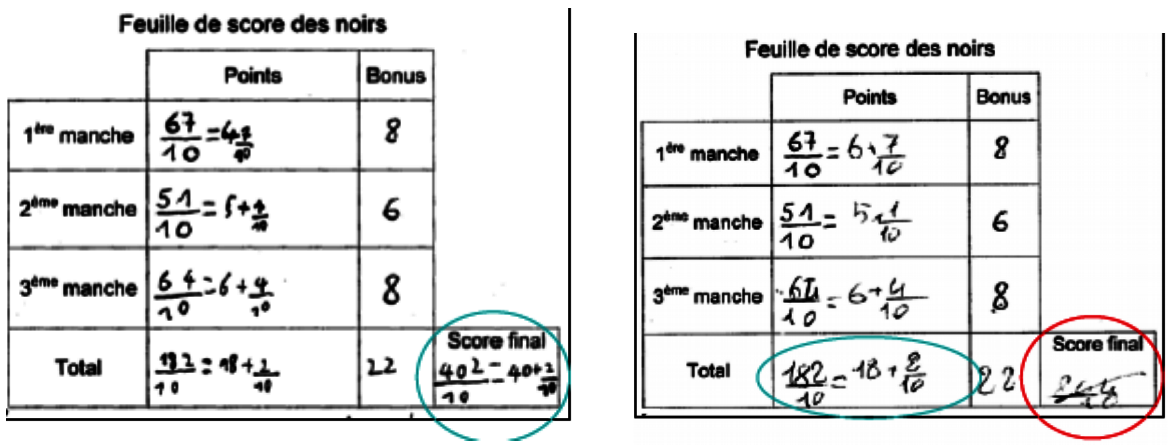


Figure 16. *Extrait de l'évaluation de E.(à gauche) et de celle de C.(à droite)*

- 9 élèves ont su additionner $\frac{67}{10}$, $\frac{51}{10}$ et $\frac{64}{10}$, puis exprimer le total sous la forme attendue ($\frac{182}{10}=18+\frac{2}{10}$), mais n'ont pas distingué partie entière et partie fractionnaire décimale lors du calcul du score final : ils obtiennent alors $\frac{204}{10}$ en ajoutant les 22 points de bonus à 182 (dixièmes) ; (voir l'évaluation de C. figure 16) ;

- 3 élèves gèrent correctement l'addition d'un entier et d'un nombre décimal ; en revanche la somme de nombres décimaux n'est pas maîtrisée à ce stade de l'apprentissage (voir comme exemple l'évaluation de K. figure 17).

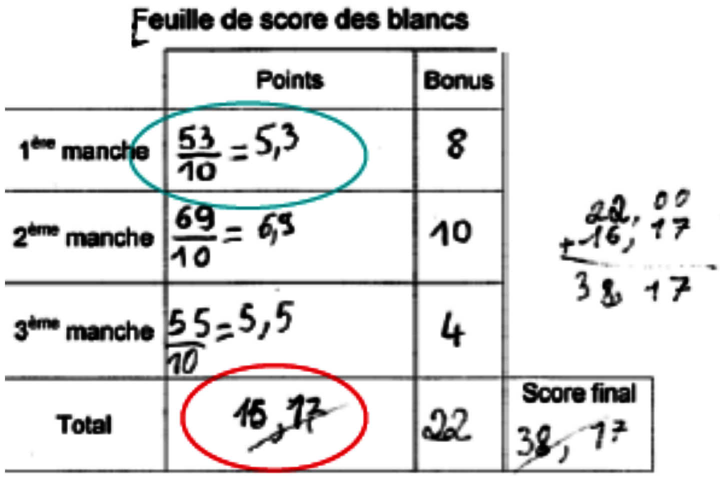
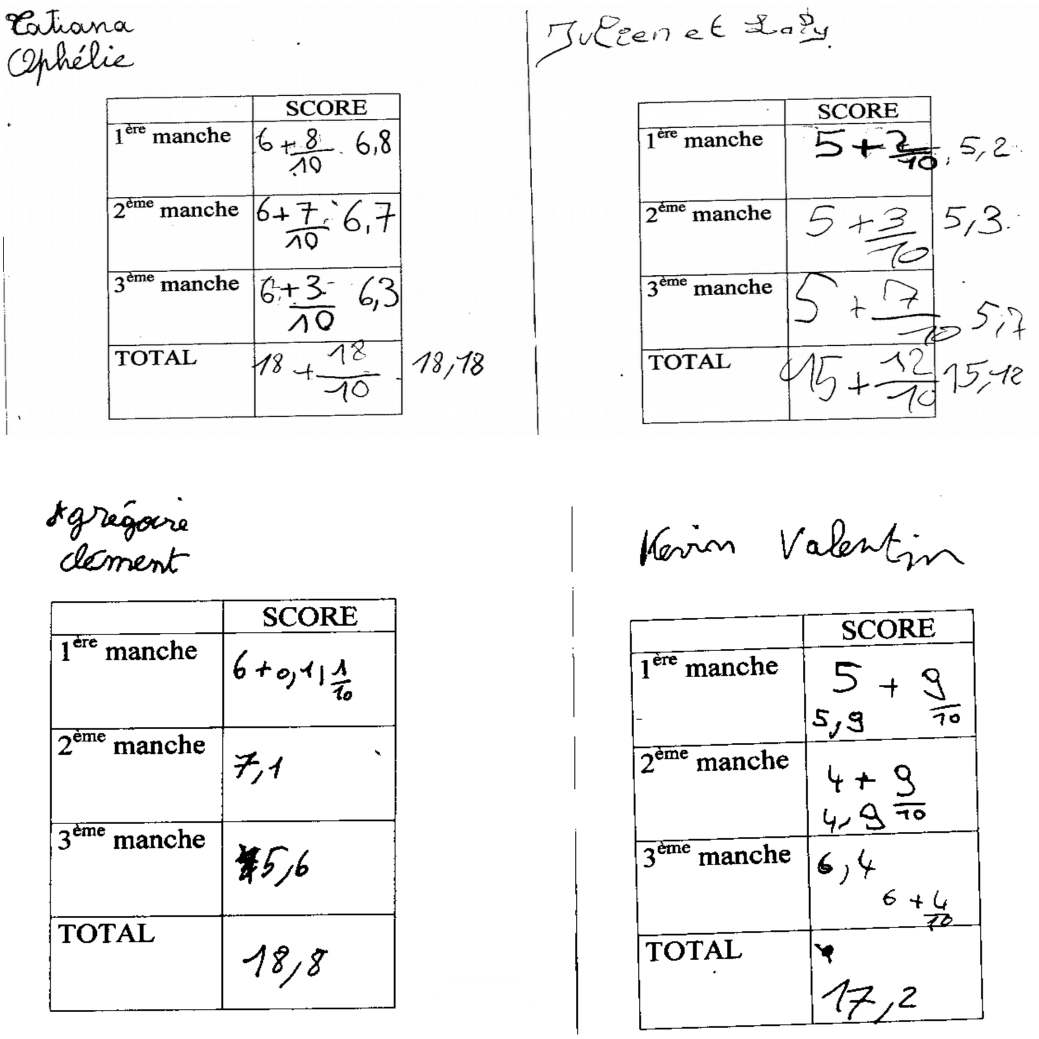


Figure 17. *Extrait de l'évaluation de K.*

5.2. Expérimentations en collège

Dans une première expérimentation, le jeu des fractions a été proposé aux élèves en début d'année, en introduction des séances sur les nombres décimaux. Après avoir donné puis explicité la règle du « jeu des dixièmes » - niveau 1 en demi-groupe, les élèves se sont mis à jouer. Le travail a été réalisé en autonomie. La découverte du jeu est assez rapide : la première manche s'est donc déroulée sans difficulté, ce qui a permis de réaliser une partie entière. Certains élèves, qui pensaient n'avoir aucune connaissance des fractions, semblaient ravis de les redécouvrir dans ces conditions. Nous avons constaté que l'activité avait permis de donner du sens à cette notion. D'autre part, lorsque dans la suite du jeu, l'utilisation des équivalences de fractions s'est avérée nécessaire, le recours au matériel s'est avéré très utile.
Plus tard dans le trimestre, dans le cadre d'un projet liant cette classe de sixième à la section d'UPI présente dans le collège, le jeu des fractions a de nouveau été utilisé avec des objectifs qui différaient selon les élèves. Les élèves de sixième qui continuaient à considérer les nombres décimaux comme deux entiers juxtaposés ont été tutorés par des élèves ayant acquis les compétences souhaitées. Par groupes de deux ils ont été chargés de présenter le « jeu des dixièmes » - niveau 1 aux élèves de l'UPI. Pour les élèves de l'UPI, il s'agissait d'utiliser pour la première fois l'écriture décimale. Nous avons constaté que le jeu suscitait toujours une forte motivation. Tous les élèves ont effectué correctement les calculs utilisant les fractions décimales, et un seul groupe d'élèves a mal utilisé les écritures décimales (voir figure 18 les deux premières feuilles de score).



Tatiana Ophélie

	SCORE
1ère manche	6 + 8/10 6,8
2ème manche	6 + 7/10 6,7
3ème manche	6 + 3/10 6,3
TOTAL	18 + 18/10 18,18

Julien et Lady

	SCORE
1ère manche	5 + 2/10 5,2
2ème manche	5 + 3/10 5,3
3ème manche	5 + 7/10 5,7
TOTAL	15 + 12/10 15,12

Grégoire Clément

	SCORE
1ère manche	6 + 0,1 1/10
2ème manche	7,1
3ème manche	5,6
TOTAL	18,8

Kevin Valentin

	SCORE
1ère manche	5 + 9/10 5,9
2ème manche	4 + 9/10 4,9
3ème manche	6,4 6 + 4/10
TOTAL	17,2

Figure 18. *Les feuilles de score de deux groupes*

Conclusion

Si « les concepts se construisent à l'occasion d'actions » (Douady & Perrin-Glorian, 1986, p.3), ces auteurs soulignent qu'« une seule situation ne suffit pas pour construire un concept » (*ibid*, p.4) et mettent en avant la nécessité de proposer des situations de renforcement pour permettre aux élèves d'acquérir la familiarité souhaitée avec ce concept. Ainsi, même si les situations introductrices donnent du sens à la notion et fournissent en général des images mentales des fractions, elles ne suffisent pas à elles seules à apprendre et des exercices d'entraînement sont nécessaires. Le jeu des fractions fournit un lot assez varié d'images mentales ainsi que de nombreuses occasions de calculer avec des fractions. S'insérant dans la progression, il fournit de nouvelles opportunités pour travailler sur les fractions et les nombres décimaux. Le jeu des fractions dans toutes ses versions et variantes a ainsi toute sa place au cycle 3 : en introduction et en consolidation en CM1, en consolidation, entraînement et remédiation en CM2, en consolidation et remédiation en sixième. En classe de sixième, le jeu des fractions peut aussi être utilement employé dans le cadre d'un

accompagnement personnalisé. En collège, il peut également être utilisé en section UPI (Unité pédagogique d'intégration) en introduction au travail sur les fractions.
Lors des différentes expérimentations en CM1/CM2, les enseignants ont constaté une acquisition plus rapide de la compétence « savoir extraire la partie entière d'une fraction ». Par ailleurs, l'impact sur la compréhension des nombres décimaux a été constatée par exemple lors d'activités de remédiation proposées en classe de sixième. À ce niveau, le dispositif permet de revenir efficacement sur les erreurs récurrentes liées à une conception erronée des nombres décimaux.
L'objectif poursuivi consistait également à consolider les prérequis nécessaires à une bonne compréhension et une bonne utilisation des nombres décimaux. Nous avons constaté que ce dispositif a permis d'améliorer chez les élèves la compréhension du concept de fraction par le biais d'images mentales. Il a ainsi aidé les élèves à comprendre le codage utilisé dans l'écriture décimale d'un nombre.
Le jeu a permis aux élèves de réellement s'approprier le problème, donnant ainsi plus de sens à l'apprentissage. Il a favorisé les interactions entre élèves (organisation par équipes de deux) et a permis aux élèves de s'entraîner et de consolider leurs connaissances d'une manière agréable. D'autre part, le jeu a rapidement donné à l'enseignant des indications sur les connaissances des élèves (connaissances acquises, ou en cours d'acquisition) et a servi de support aux médiations de l'enseignant. Cependant si on veut que le jeu des fractions soit un outil au service des apprentissages des élèves,

> il est nécessaire de surmonter la contradiction apparente entre le jeu dont la vocation première est le loisir, la distraction, … et l'école centrée sur les apprentissages. (Eysseric, Simard et Winder, 2012, p.331).

L'efficacité du jeu pour les apprentissages réside donc également « dans la capacité de l'enseignant à faire alterner les moments de jeu « pur » qui vont avoir un impact important dans l'enrôlement des élèves et dans leur motivation pour les apprentissages liés au jeu, et les « exercices de jeu » qui vont permettre à l'élève de prendre de la distance par rapport au jeu, de réfléchir sur le jeu et de s'approprier les savoirs mathématiques qui y sont reliés. » (ibid, p.332). Ces « exercices de jeu » peuvent s'appuyer sur les feuilles de score, écrits réalisés au cours du jeu.
Ainsi nous pensons que le jeu des fractions s'avère être un outil pertinent pour les enseignants dans le domaine de l'apprentissage des fractions et des nombres décimaux.

Références

ADJIAGE R. (2007) Rationnels et proportionnalité:complexité et enseignement au début du collège. *Petit x*, **74**, 5-33.

ALAJMI A-H. (2012) How do elementary Textbooks adress fractions? A review of mathematics textbooks in the USA, Japan and Kuwait. *Educational Studies in Mathematics*, **79**, 239-261.

ALLARD C. (2015) *Etude du processus d'institutionnalisation dans les pratiques de fin d'école primaire : le cas de l'enseignement des fractions*. Thèse de doctorat, Université Paris VII.

BROUGERE G. (1995) *Jeu et éducation.* L'Harmattan.

BROUSSEAU G., BROUSSEAU N. (1987) *Rationnels et décimaux dans la scolarité obligatoire*. IREM de Bordeaux.

DOUADY (1984) *Jeux de cadres et dialectique outil-objet dans l'enseignement des mathématiques, une réalisation de tout le cursus primaire*. Doctorat d'état, Université de Paris VII, Paris.

DOUADY R., PERRIN-GLORIAN M-J (1986) *Liaison école-collège : nombres décimaux*, IREM de Paris 7.

ERMEL/INRP (1997) *Apprentissages numériques et résolution de problèmes* CM1. Hatier Pédagogie.

EYSSERIC P., SIMARD A., WINDER C. (2012) Exemple de dispositif de formation à l'utilisation des jeux à l'école pour les apprentissages mathématiques. In Dorier J.-L., Coutat S. (Eds.) *Enseignement des mathématiques et contrat social: enjeux et défis pour le 21e siècle - Actes du colloque EMF2012,* 324–336.

KIEREN T.E. (1980),The rational number construct -its elements and mechanism, T.E. Kieren (ed), *Recent Research on Number Learning*, *ERIC/SMEAC*, 125-150.

MEN (2002) *Documents d'application des programmes, Mathématiques, cycle 3*. Scéren CNDP.

MEN (2015) *Bulletin Officiel de l'Education Nationale*, Numéro Spécial 11 du 26/11/2015.

MEN (2016a) *Ressources d'accompagnement du programme de mathématiques (cycle 3), Fractions et nombres décimaux au cycle 3.*

MEN (2016b) *Ressources d'accompagnement du programme de mathématiques (cycle 3), Fractions et nombres décimaux au cycle 3 – Exemples.*

PELTIER M.L., BRIAND J., NGONO B., VERGNES D. (2006) *Euromaths CM1.* Paris : Éditions Hatier.

PERRIN-GLORIAN M-J. (1986) Représentation des fractions et des nombres décimaux chez des élèves de CM2 et du collège. *Petit x,* **10**, 5-29.

ROUCHE N. (1992) *Le sens de la mesure*. Didier Hatier.

RODITI E. (2002) La multiplication des nombres décimaux :, enjeux, transpositions didactiques et contraintes d'enseignement. *Cahiers de DIDIREM,* **39**. IREM Paris 7.

RODRIGUEZ A. (1993) Mathématiques : jouez le jeu ! *Journal des Instituteurs*, 49-63.

ROYE L., MAURIN C. (2002) Le jeu au service des apprentissages. *Actes du 29e colloque COPIRELEM, La Roche-sur-Yon*, IREM des Pays de Loire, 214-224.

TRÉMÈJE J., WINDER C. (2012) *Le jeu des fractions.* ARPEME.

TRÉMÈJE J., WINDER C., DAVIO H., ROSSO D. (2009) Jouons avec des fractions. *Grand N*, **84**, 47-75.

VERGNAUD G. (1983) Multiplicative Structures. In Lesh R., Landau M. (Ed.). *Acquisition of mathematics concepts and processes*, New York : Academic Press, 127-174.

Annexe – Règle du « jeu des dixièmes » avec les formes rectangulaires

◊ ***Nombre de joueurs*** : 2 (ou 2 équipes)

◊ ***Matériel***:
- un plan de jeu
- des pièces réversibles bicolores
- des cartes de couleur
- une feuille de score

◊ ***Principe du jeu :***
Recouvrir le plan de jeu avec des pièces de sa couleur en fonction des tirages des cartes.

◊ ***Déroulement du jeu***

• Une partie se joue en trois manches.

• Début de la partie : Chaque équipe tire une carte rouge. Celle qui obtient la plus grande fraction choisit sa couleur de pièces et commence.

• À tour de rôle, chaque équipe tire une carte dans chaque sabot et place les cartes devant elle pour les conserver jusqu'à la fin de la partie.
En fonction du tirage, les joueurs doivent poser sur le plan de jeu le plus possible de pièces entières.
Toute pièce posée ne peut être déplacée.

• Une manche s'achève dès qu'une équipe obtient un tirage permettant de finir de remplir le plan de jeu. Si le tirage est supérieur à la fraction attendue, les joueurs échangent les deux cartes tirées contre une carte vierge sur laquelle ils inscrivent cette fraction.

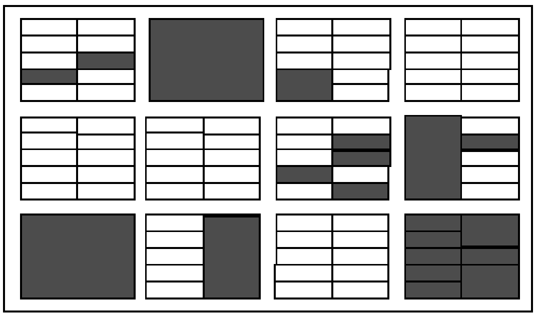
• Chaque équipe complète alors sa feuille de score (voir ci-dessous)

• L'équipe vainqueur de la partie est celle qui a totalisé le plus de points à la fin des trois manches

◊ ***Comptage des points :***
** Une figure entièrement recouverte vaut 1 point.*
** Bonification :* Chaque figure recouverte d'une seule pièce rapporte 2 points de bonus.

Exemple :
Nombre de points de l'équipe « rouge» :

- Sur le plateau : $3+\frac{19}{10}=4+\frac{9}{10}$ points
- Bonus : $2\times 2=4$ points
- Total des points : $8+\frac{9}{10}$ points



** Bonification supplémentaire (à rajouter si on utilise la règle modifiée) :* Chaque figure recouverte par plusieurs pièces, *toutes de la même couleur* rapporte 1 point de bonus.

Exemple :
Nombre de points de l'équipe « rouge» avec la bonification supplémentaire :

- Sur le plateau : $3+\frac{19}{10}=4+\frac{9}{10}$ points
- Bonus : $2\times 2=4$ points
- Bonus supplémentaire : 1 point
- Total des points : $9+\frac{9}{10}$ points