ENSEIGNEMENT DE LA GÉOMÉTRIE EN FIN DE CYCLE 3
Proposition d'un dispositif de travail en dyade

Édith PETITFOUR
Laboratoire de Didactique André Revuz & ESPE Université de Rouen

Résumé. Nous proposons un dispositif de travail en dyade pour enseigner la géométrie plane en fin d'école primaire et début de collège, en appui sur la construction instrumentée. Nous avons élaboré ce dispositif lors d'une expérimentation menée avec deux élèves de sixième, dont une dyspraxique, en cherchant à améliorer et exploiter les compétences langagières de cette dernière pour contourner ses difficultés dans l'exécution d'actions instrumentées. Nous faisons l'hypothèse que ce dispositif de travail en dyade peut avoir un intérêt pour tout élève dans l'apprentissage de la géométrie. Nous le présentons dans cet article, avec ses fondements théoriques, sa conception expérimentale et ses modalités de mise en œuvre.

Mots clés. Travail en dyade, langage technique géométrique, construction instrumentée, didactique des mathématiques.

Abstract. We propose a pair-working device to teach plane geometry in grades 4, 5 and 6. We have elaborated it during an experimentation with two students in grade 5, one of whom being dyspraxic, with the aim of improving and using the dyspraxic student's language skills, in order to overcome her difficulties in handling instruments. Our hypothesis is that this pair-working device might be relevant to all students in geometry learning. The aim of this article is to present this device with its theoretical basis, its experimental design and its implementing rules.

Key words. Pair work, geometric technical language, construction with instruments, didactics of mathematics.

Introduction

La recherche que nous avons menée (Petitfour, 2015) sur l'enseignement de la géométrie en CM2–6ème à des élèves dyspraxiques nous a conduite à élaborer un dispositif de travail en dyade destiné à permettre à ces élèves d'accéder à des apprentissages géométriques autrement que par la seule exécution d'actions avec des instruments tel que cela apparaissait dans les programmes scolaires de 2008 de l'école primaire (MEN, 2008a) et du collège (MEN, 2008b). Dans tout notre travail, nous utilisons ce terme de dyade pour parler de deux individus qui s'associent pour atteindre un but commun en interagissant, chacun ayant un rôle spécifique. Les deux membres de la dyade n'ont pas nécessairement le même statut : un élève peut être associé à un pair, mais aussi à l'enseignant de la classe ou encore à un Accompagnant d'Élèves en Situation de Handicap.

Les élèves dyspraxiques sont en effet maladroits dans leurs actions et donc dans l'incapacité d'agir avec précision avec des objets matériels, malgré la répétition et l'entraînement, tandis qu'ils sont aussi performants que les autres au niveau langagier et tout à fait en capacité d'entrer dans les tâches conceptuelles que requièrent les activités géométriques. Ainsi, nous avons cherché à concevoir et expérimenter une situation de communication dans laquelle les deux membres d'une dyade d'élèves (constituée d'un élève dyspraxique et d'un pair non

dyspraxique) pourraient avoir la même implication face aux connaissances géométriques à mettre en jeu, tout en ayant un rôle différent pendant la phase d'exécution des actions avec les instruments, un seul les manipulant en suivant les instructions de l'autre. Nous avons ensuite adapté cette situation de communication à une dyade constituée d'un élève dyspraxique et d'un Auxiliaire de Vie Scolaire ou d'un enseignant.
Dans les programmes scolaires en vigueur depuis la rentrée 2016 au cycle 3, à l'articulation de l'école primaire et du collège, il est spécifié que les activités géométriques doivent permettre aux élèves de passer d'une géométrie perceptive à une géométrie instrumentée, pour aller ensuite vers une géométrie théorique :

> Les activités permettent aux élèves de passer progressivement d'une géométrie où les objets (le carré, la droite, le cube, etc.) et leurs propriétés sont contrôlés par la perception à une géométrie où ils le sont par le recours à des instruments, par l'explicitation de propriétés pour aller ensuite vers une géométrie dont la validation ne s'appuie que sur le raisonnement et l'argumentation. (Bulletin Officiel spécial n°10 du 19 novembre 2015, p. 210).

Ces nouveaux programmes du cycle 3 privilégient alors des situations portant sur des objets géométriques avec des types de tâches qui nécessitent l'utilisation d'instruments (reconnaître, vérifier, décrire, reproduire, représenter, construire). L'objectif annoncé est de faire émerger des concepts géométriques (caractérisations et propriétés des objets, relations entre les objets) et de les enrichir. Ainsi, les activités géométriques qui mettent en jeu des actions instrumentées continuent à constituer un moyen d'amener les élèves à l'acquisition de connaissances géométriques. Elles leur permettent d'exercer leur raisonnement, à travers la mobilisation des connaissances requises. En outre, s'il est toujours attendu que les élèves sachent décrire les objets géométriques, leurs propriétés et les relations qu'ils entretiennent par l'utilisation d'un langage géométrique, il est maintenant aussi accordé une importance particulière à un langage sur l'action. Il est en effet explicitement mentionné que les élèves doivent être progressivement encouragés à utiliser un langage précis et adapté pour décrire leurs actions et gestes réalisés (pliages, tracés à main levée ou avec utilisation de gabarits et d'instruments usuels ou lors de l'utilisation de logiciels).

Le dispositif de travail que nous avons conçu pour enseigner la géométrie aux élèves dyspraxiques répond bien aux attentes institutionnelles d'enseignement des concepts géométriques à de jeunes élèves, avec toutefois la proposition d'une manière différente d'y accéder. Aussi, à la suite des résultats positifs obtenus à l'issue d'une expérimentation d'un travail en dyade contournant les difficultés conséquentes de la dyspraxie, nous faisons l'hypothèse que ce dispositif de travail peut avoir également un intérêt pour les élèves dans le contexte ordinaire, notamment dans la manipulation d'objets matériels, mais aussi pour ceux qui peinent dans l'acquisition du langage géométrique.

Les difficultés manipulatoires et langagières peuvent empêcher un accès aux concepts géométriques en lien avec la façon dont on les enseigne. En effet, certains élèves manquent d'habileté manuelle, sans que cela soit dû à un trouble, et un enseignement qui se focalise sur leurs difficultés manipulatoires à surmonter pour obtenir des tracés précis et soignés risque de faire obstacle à l'acquisition des concepts géométriques visés. Par ailleurs, certains élèves ne parviennent pas à s'approprier le langage géométrique : le passage d'une action instrumentée à sa formulation en langage géométrique peut constituer un saut trop important vers l'abstraction. Aussi, la prise en charge langagière de l'articulation entre les instruments et les traces graphiques que nous proposons dans notre dispositif de travail peut s'avérer nécessaire.

L'objet de cet article est la présentation de l'élaboration expérimentale de notre dispositif de travail en dyade avec ses fondements théoriques, ses modalités de mise en œuvre en classe et ses apports potentiels au niveau de l'enseignement de la géométrie élémentaire auprès des élèves de cycle 3, dyspraxiques ou non.

1. Appuis théoriques

Dans cette partie, nous exposons tout d'abord l'approche de la géométrie adoptée dans notre recherche, puis les limites des usages de la dimension sociale dans les situations d'apprentissage en mathématiques, ainsi que les modalités de travail en dyade choisies. Nous présentons ensuite l'approche sémiotique utilisée. Nous introduisons enfin brièvement un cadre d'analyse de l'action instrumentée.

1.1 Approche de la géométrie

Nous adoptons une approche de la géométrie qui vise à proposer une progression cohérente de son enseignement tout au long de la scolarité obligatoire (Perrin-Glorian, 2012 ; Perrin-Glorian, Mathé & Leclercq, 2013 ; Perrin-Glorian & Godin, 2014). Cette approche cherche, à la transition école-collège, à retrouver une continuité là où des ruptures ont été identifiées, à savoir dans le passage d'une géométrie où les propriétés sont vérifiées ou produites avec des instruments à une géométrie où la validation se fait par des démonstrations produites à partir d'hypothèses et d'inférences logiques (Houdement & Kuzniak, 2006 ; Houdement, 2007). Ainsi, dans la poursuite des travaux de Duval (2005) portant sur la déconstruction dimensionnelle et le rapport aux figures, Perrin-Glorian et Godin (2014) proposent des problèmes géométriques de reproduction destinés à faire évoluer et enrichir le regard porté par les élèves sur les figures : l'usage des instruments permettant de réussir la reproduction dans les conditions prévues doit les conduire à passer du regard ordinaire sur la figure (vision « surfaces ») à un regard géométrique sur cette figure (vision « lignes » et « points »). Un jeu sur les variables des problèmes permet de faire évoluer les procédures de traitement des élèves (contraintes sur les instruments autorisés, présence d'une figure-amorce à une échelle différente de la figure-modèle). Ces problèmes géométriques visent l'acquisition de connaissances rarement prises en charge par l'enseignement (Perrin-Glorian & Godin, 2017).

Nous présentons ci-après ces connaissances en lien avec les instruments qui les matérialisent et nous donnons des illustrations des techniques erronées qu'elles permettent de dépasser.

Construction de droites, à la règle non graduée :

– il faut deux points pour définir une droite,
– un segment est porté par une droite,
– la représentation d'une droite peut se prolonger autant qu'on veut de chaque côté : dès qu'on connaît une partie de la droite, on connaît la droite toute entière.

Exemple : Les segments symétriques [AB] et [A'B'] sont donnés (Fig.1). Dans la construction de l'axe de symétrie de la configuration formée par ces deux segments à la règle non graduée, pourront être mis en défaut un placement de règle ne s'appuyant sur aucun point ni segment (Fig. 2), ou un placement de règle ne s'appuyant que sur un point (Fig. 3).

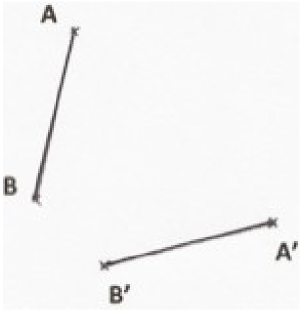


Figure 1

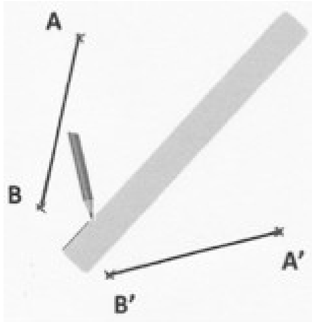


Figure 2

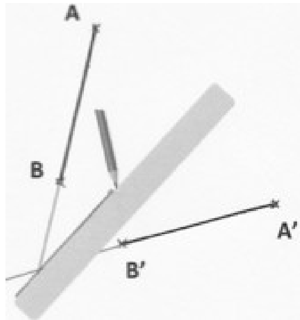


Figure 3

Construction de points :
– **à la règle et/ou au compas** : un point s'obtient par l'intersection de deux lignes (deux droites, une droite et un arc de cercle, deux arcs de cercle),
– **avec un « reporteur de longueur »** (par exemple une bande de papier sur laquelle on peut faire des marques) **ou avec des graduations** (règle graduée) : il faut un support rectiligne pour reporter une longueur à partir d'un point et obtenir un autre point.

Exemple. Pour construire un point B à une distance donnée d'un point A sur une droite (d) ne contenant pas A, repérer la distance entre deux graduations de la règle, puis placer la première graduation en A et faire tourner la règle jusqu'à ce que la deuxième graduation repérée atteigne la droite (d) ne convient pas (Fig. 4), car le point B n'est défini ni comme l'intersection de deux lignes, ni par un report de longueur sur une demi-droite d'origine A. Dans ce cas de figure, il faut tracer une ligne sur laquelle se situe le point B à partir des données : un arc de cercle de centre A et de rayon la distance donnée, coupant la droite (d) (Fig. 5).

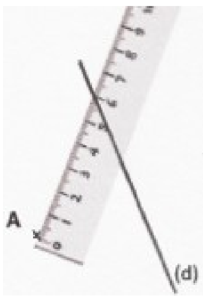


Figure 4

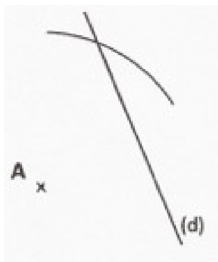


Figure 5

1.2 Modalités de travail en dyade

Nous nous situons dans une conception de l'apprentissage comme phénomène social (Vygotski, 1931-1978). Concernant les usages de la dimension sociale dans les situations d'apprentissage en mathématiques, Laborde (1991) identifie différentes limites de fonctionnement. Ainsi, dans le cas d'une situation d'émission-réception dans laquelle un émetteur doit décrire une figure dans un message pour qu'un récepteur, qui n'a pas accès à la figure, puisse la reconnaître dans un lot de figures ou puisse la reconstruire :
– l'émetteur peut considérer le récepteur comme un opposant, plutôt que comme un associé,

et donc être réticent à lui transmettre des informations adéquates et compréhensibles qui pourraient le conduire à la réussite du décodage ;
– le problème peut être résolu sans que l'émetteur ne se place sur un plan mathématique dans sa description ;
– un message ambigu ou contenant des implicites peut être compris par le récepteur, et inversement, un message correct du point de vue mathématique peut être mal décodé par le récepteur.
Et dans le cas où les élèves ont la tâche de se mettre d'accord pour résoudre ensemble le problème auquel ils sont confrontés :
– la recherche peut se faire sur des bases relationnelles (complaisance, arguments d'autorité) ;
– les élèves peuvent se mettre d'accord sur un argument erroné en faveur d'une solution correcte ou non.

Dans notre proposition de travail en dyade, la tâche consiste à produire des instructions pour réaliser une construction géométrique instrumentée à partir d'une figure, d'un schéma à main levée ou d'un texte. Le but commun poursuivi par les deux membres de la dyade est donc de parvenir à des instructions précises qui conduiront à une production graphique par une technique de construction correcte avec les instruments. L'activité se déroule en trois phases. Dans une première phase, les deux élèves échangent pour se mettre d'accord sur une technique de construction à mettre en œuvre pour obtenir la production graphique demandée. Dans leurs échanges, ils peuvent parler, faire des gestes, faire des schémas, manipuler les instruments (pour vérifier des propriétés ou tracer une sur-figure, par exemple lorsqu'une figure modèle est donnée) mais ils n'ont pas le droit de démarrer la construction. Dans une deuxième phase, les deux élèves mettent en œuvre la technique de construction qu'ils ont élaborée en se répartissant les rôles : l'un (l'« instructeur ») donne des instructions à l'autre (le « constructeur ») qui les suit avec les instruments. Durant les deux phases, l'enseignant est observateur et garant du respect des règles dans les échanges entre élèves. Il intervient ensuite dans une troisième phase pour mener des échanges sur la validité de ce qui a été produit, avec les élèves au sein de chacune des dyades ou alors avec la classe entière lors d'une mise en commun des travaux. La première phase de l'activité devrait conduire chacun des deux élèves à extérioriser ce qu'il envisage et à anticiper une démarche avant de la mettre à l'essai dans la réalisation d'actions instrumentées lors de la seconde phase. Elle impose aux élèves un essai d'explicitation de connaissances géométriques qui resteraient implicites dans l'action si celle-ci était première. La phase suivante devrait permettre de dépasser en partie les limites relevées pour ce type de collaboration entre pairs en amenant à une nouvelle réflexion lorsqu'une technique erronée n'aboutit pas. La deuxième phase de l'activité est une situation de communication qui diffère en partie d'une situation d'émission-réception puisque d'une part le récepteur connaît la figure à construire, d'autre part, les instructions sont données au fur et à mesure de la construction avec les instruments. Nous verrons par la suite quelles règles de fonctionnement instaurer pour dépasser les limites relevées au niveau du contenu des instructions à transmettre (informations inadéquates, instructions sur un plan non mathématique ou avec des implicites).

1.3 Approche sémiotique

Nous estimons que la formation des concepts mathématiques se réalise pour les élèves à travers des interactions sociales, dans un travail conjoint autour de la résolution d'un problème. Au cours de ce travail, nous considérons alors qu'une signification est donnée au contenu mathématique émergent grâce à une activation simultanée de signes. Ceux-ci sont ceux produits à travers différentes actions intentionnelles telles que parler, écrire, dessiner, faire des gestes ou manipuler un artefact (Radford, 2002, 2006).

Ainsi, parmi la variété de signes en jeu dans le cadre d'un travail en dyade sur une tâche où des objets géométriques sont à représenter de façon instrumentée, en plus des registres sémiotiques de productions verbales (en langue naturelle ou symbolique) et graphiques (figures, schémas) (Duval, 1995), nous prendrons aussi en compte les gestes produits et les actions réalisées avec des instruments. Nous accorderons en particulier de l'importance à la production simultanée de gestes et de discours en lien avec les traces graphiques, en appui sur des recherches qui ont mis en évidence le rôle des gestes en lien avec le langage verbal dans les processus d'apprentissage (McNeill, 1992 ; Alibali & Goldin-Meadow, 1993 ; Valenzeno, Alibali & Klatzy, 2003). Nous développerons par la suite les types de langages et de gestes que nous avons cherché à faire vivre dans le dispositif étudié.

1.4 Action instrumentée

En appui sur l'approche instrumentale de Rabardel (1995), nous définissons à présent plus précisément ce que nous entendons par action instrumentée. Il s'agit de l'action d'un sujet qui, dans son environnement de travail, utilise un objet technique[1] pour produire un objet[2] graphique représentant un objet géométrique. Les objets techniques peuvent être des instruments concrets dans l'environnement papier-crayon (règle, équerre, etc.) ou des outils numériques (comme par exemple ceux d'un logiciel de géométrie dynamique). L'exécution d'actions instrumentées est le résultat de l'activation de relations entre objets géométriques, objets graphiques, objets techniques, corps du sujet et environnement. Nous distinguons alors quatre composantes de l'action instrumentée, caractérisées par des relations qui peuvent s'exprimer par la réalisation de l'action instrumentée et par la production d'objets graphiques qui en découle, ainsi que par une production de langage et de gestes à propos de cette action :
– la *composante sémiotique*, ensemble des relations entre objets géométriques et objets graphiques,
– la *composante technico-figurale*, ensemble des relations entre objets techniques et objets graphiques,
– la *composante manipulatoire*, ensemble des relations entre le corps du sujet et les objets techniques : il s'agit des aspects corporels de la manipulation,
– la *composante organisationnelle*, ensemble des relations entre le sujet et des éléments de son environnement spatial.

Le but d'une action instrumentée – la représentation d'un objet géométrique par un objet graphique – se situe dans la composante sémiotique. L'action instrumentée peut alors être décomposée en actions élémentaires se réduisant à des tâches principales invariantes qui se situent dans la composante technico-figurale.

1 Nous pourrions parler plus précisément d'objet anthropotechnique, ainsi que le suggère Rabardel (1995), en tant qu'objet produit par la technologie mais également conçu en fonction d'un environnement humain pour fonctionner et être utilisé.

2 Nous utilisons le terme d'objet dans « objet graphique » et « objet géométrique » dans le sens donné par Rabardel et Vérillon (1985) dans le modèle des Situations d'Activités Instrumentées : il s'agit de l'objet vers lequel l'action instrumentée est dirigée. Nous entendons aussi par « objets graphiques » des traces du crayon sur une feuille de papier ou des tracés sur un écran et par « objets géométriques » des entités idéelles dont l'existence théorique est donnée par des définitions ou des axiomes (point, droite, segment, cercle, etc.).

Par exemple, dans l'environnement papier-crayon, avec un instrument de tracé tel que la règle ou l'équerre, il s'agira de :

(a) choisir l'instrument,
(b) positionner l'instrument par rapport à la trace graphique,
(c) tracer.

Ces actions élémentaires incorporent des schèmes d'usage. Les uns sont orientés vers des tâches secondes internes à l'action instrumentée et font partie de la composante manipulatoire, comme par exemple la préhension de l'instrument ou son maintien pendant le tracé ; les autres sont orientés vers des tâches secondes concernant des tâches périphériques à l'action instrumentée principale et font partie de la composante organisationnelle, tels par exemple tailler le crayon, apprêter le compas, etc.

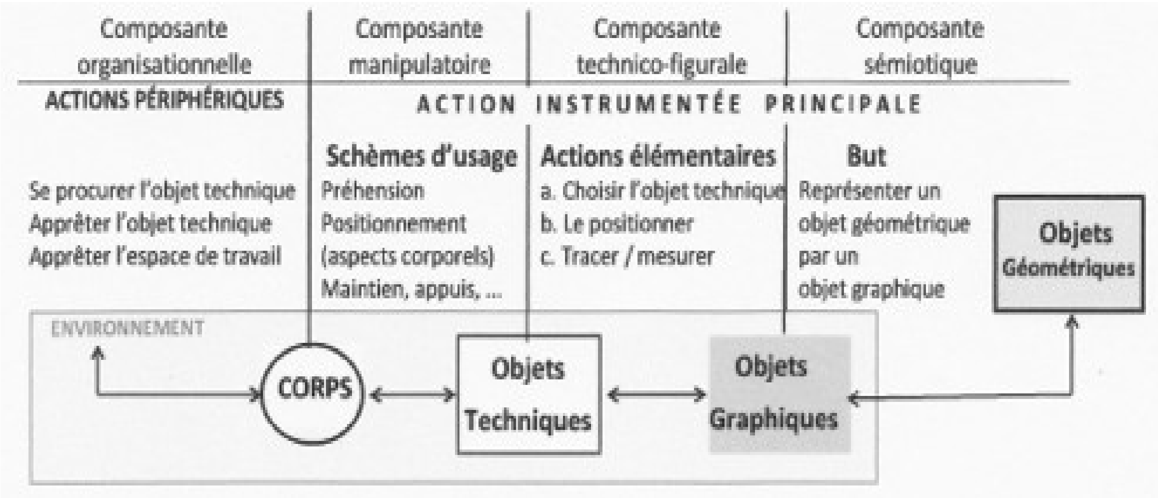


Figure 6. *Composantes de l'action instrumentée*

Ce découpage de l'action instrumentée en quatre composantes (Fig. 6) nous permet d'identifier celles qui conduisent à l'acquisition de connaissances géométriques – la composante technico-figurale et la composante sémiotique – et celles qui ne concernent que des aspects sans enjeu conceptuel de la construction – la composante manipulatoire et la composante organisationnelle (Petitfour, 2016).

Nous venons de nous donner les moyens théoriques pour penser l'élaboration et l'analyse d'un dispositif d'enseignement de la géométrie plane au cycle 3. Nous souhaitons exploiter le potentiel de situations de communication dans un travail en dyade dans lequel deux élèves sont associés pour atteindre un but commun – la résolution d'un problème géométrique de construction ou de reproduction de figures – en interagissant, chacun ayant un rôle spécifique (« constructeur » ou « instructeur »). Dans la partie suivante, nous allons déterminer les moyens appropriés de communiquer sur l'action instrumentée au sein d'une dyade d'élèves pour que leurs interactions les conduisent chacun à des apprentissages géométriques.

2. Communication sur l'action instrumentée

Dans le cadre d'un échange à propos d'une action instrumentée, que ce soit à l'initiative du sujet qui l'exécute ou de celui qui l'observe, les commentaires, instructions ou conseils formulés oralement peuvent répondre à l'une ou l'autre des visées de l'action instrumentée associée chacune à une de ses quatre composantes. Par exemple, « Trace le cercle de centre A passant par B » est à visée sémiotique, « Pique la pointe du compas sur le point A et mets la mine sur le point B » est à visée technico-figurale, « Appuie plus fort sur la pointe que sur la mine lorsque tu tournes le compas » est à visée manipulatoire et « Mets un cahier en dessous de ta feuille pour ne pas que la pointe du compas glisse » est à visée organisationnelle. Ainsi, une analyse du discours à propos d'une action instrumentée nous permet de déterminer les visées poursuivies par le sujet. Inversement, il nous est possible de déterminer quel langage pourrait être utilisé dans un travail en dyade pour conduire ses deux membres à des apprentissages géométriques, lorsque l'un donne des instructions à l'autre qui les exécute avec des instruments. Ce langage doit être soit à visée sémiotique, soit à visée technico-figurale.

Nous présentons maintenant ces différents langages de façon théorique et nous nous appuyons sur des observations réalisées en classe de CM2 et de sixième, ainsi que sur des analyses d'échanges en dyade, lors de séance de géométrie dans des tâches de construction instrumentée, pour déterminer le langage approprié pour communiquer sur l'action instrumentée.

2.1 Langage à visée sémiotique

Langage géométrique, langage courant

Les instructions verbales à visée sémiotique sont entièrement détachées du choix des instruments utilisés pour réaliser la construction. Elles portent sur le but final, sur les conséquences que doit avoir chaque action instrumentée, c'est-à-dire sur chaque objet graphique, représentant d'objet géométrique, à produire. Ainsi, les instructions peuvent être formulées dans un langage géométrique ou dans un langage courant.

Le *langage géométrique*, relatif aux objets, relations ou propriétés géométriques, utilise la langue mathématique constituée d'éléments d'écriture symbolique, de termes lexicaux ayant un sens spécifique en mathématiques ou de tournures syntaxiques privilégiées (Laborde, 1982). Ainsi, la langue géométrique contient des termes permettant de nommer de façon univoque les concepts géométriques :

– des termes dénommant les objets géométriques, par exemple « point », « droite », « triangle » ;

– des termes permettant d'exprimer des relations géométriques, par exemple « alignement », « appartenance », « perpendicularité », « intersection ». Ces relations portent sur les points et les droites.

Elle contient aussi des tournures syntaxiques particulières, fondées sur un nombre limité de verbes (comme « être », « avoir », « former », « passer »), et des tournures comme « soit », « étant donné », « considérons » pour introduire les objets ; elle possède des expressions caractéristiques, des tournures conventionnelles, par exemple « la droite perpendiculaire à la droite d passant par le point A », « le cercle de centre A et de rayon r ». Enfin, à l'écrit, elle contient des éléments de l'écriture symbolique comme des désignations d'objets géométriques (par exemple droite (AB), segment $[AB]$) ou comme des symbolisations de relations (par exemple le symbole // pour exprimer le parallélisme).

Le *langage courant*, relatif aux objets graphiques, utilise la langue courante constituée de termes lexicaux sur les objets graphiques (par exemple « trait », « croix ») et de termes spatiaux (par exemple « au-dessus », « en diagonale »).

Dans l'enseignement, c'est l'usage du langage géométrique qui est visé. L'emploi de ce langage relève d'un apprentissage. Et même si des termes de la langue courante évoquent

parfois les objets, relations ou propriétés considérés, ils ont un sens moins précis que celui des termes spécifiques.
En début d'apprentissage, les élèves utilisent souvent spontanément des termes de la langue courante qui se réfèrent aux objets graphiques et à leurs relations spatiales, à la place des termes géométriques, pour exprimer ce qu'ils perçoivent des concepts géométriques. Une des raisons est qu'ils ne considèrent les objets que comme des objets matériels : ils assimilent les objets graphiques aux objets géométriques. Une autre raison est que les élèves sont familiers du langage courant tandis qu'ils ne le sont pas encore du langage géométrique. L'insertion de termes de la langue courante dans le langage géométrique peut aussi être générée par la polysémie de certains termes appartenant aux deux registres de langue. Ces termes peuvent être source de malentendu pour les élèves qui, utilisant un terme géométrique avec son sens courant, pensent à tort pratiquer un langage géométrique. Par exemple, « milieu » pourrait être utilisé à la place de « centre » pour un cercle, comme lorsqu'on parle du « milieu d'une table » alors que le terme « milieu » en géométrie désigne le point d'un segment équidistant de ses extrémités. Des erreurs d'interprétation peuvent aussi découler de cette polysémie. Par exemple, une « diagonale » d'un polygone peut être interprétée dans son sens courant d'orientation oblique et non dans son sens géométrique de segment dont les extrémités sont deux sommets non consécutifs d'un polygone, ou encore, seul le point « le plus haut » est considéré comme « sommet » dans un triangle, en référence au sommet d'une montagne. Enfin, l'emploi inopportun du langage courant peut toucher l'expression de propriétés physiques (couleur, style de trait, etc.) ou spatiales (orientation par rapport au support : « vertical », « en bas », etc.) des objets graphiques, ou encore celle de ressemblances figuratives. Cette sortie du domaine de la géométrie est susceptible d'être atténuée par le codage des figures. L'utilisation d'un codage par des lettres permet en effet une économie syntaxique et lexicale par l'intermédiaire d'une désignation symbolique des objets.

Confrontation aux observations en classe

Pour analyser le langage employé par les élèves lorsqu'ils doivent s'exprimer sur le but à atteindre dans un problème géométrique qu'ils ont à résoudre, nous avons mené une première série d'observations de travaux en dyade dans trois classes de sixième. Nous avions proposé aux professeurs de mathématiques de ces classes le même déroulement d'une séance avec le logiciel de géométrie dynamique GeoGebra. L'objectif d'enseignement était à la fois de réactiver le concept de cercle comme ensemble de points équidistants de son centre et d'initier les élèves à l'utilisation du logiciel. L'activité consistait, deux points A et B étant donnés, à placer le plus possible de points à la même distance du point A que le point B, en utilisant des outils de GeoGebra. Les élèves avaient à disposition les outils suivants : « Nouveau point », « Milieu d'un segment », « Droite passant par deux points », « Segment entre deux points », « Segment créé par un point et une longueur », « Perpendiculaire », « Parallèle », « Cercle (centre-point) », « Distance ou longueur ». La consigne avait été formulée oralement par les enseignants, avec le fichier sur lequel se trouvaient les points A et B comme support, de la façon suivante :

> On veut placer des points qui sont tous à la même distance du point A, en bleu // *Pointage du point A avec l'index sur la figure vidéo projetée* On a déjà placé le premier point, B, en rouge // *Parcours de A à B avec l'index.* Continuez. Vous devez en placer le plus possible.

Les élèves devaient travailler par deux, avec la contrainte de reformuler la consigne en répondant par écrit à la question « Que faut-il faire ? » avant d'entrer dans une phase d'action. Ils devaient ensuite décrire leur procédure une fois le problème résolu en répondant à la question : « Comment avez-vous obtenu les points ? ». Par rapport au dispositif de travail en dyade qui fait l'objet de ce présent article, il y avait une répartition différente des rôles entre les élèves (secrétaire – manipulateur des outils du logiciel) et pas de règles de communication précises à respecter, si ce n'est celle d'échanger pour réaliser un travail commun.

Nous avons collecté les travaux (feuilles réponses et productions sur le logiciel) de trente-quatre dyades d'élèves. Nous avons également filmé des échanges d'élèves en dyade et en classe entière. Nous présentons ici un extrait de nos analyses concernant les vingt-quatre dyades dont la production obtenue répondait bien au problème posé et pour lesquelles nous en inférons une bonne compréhension.

De nombreuses difficultés langagières sont apparues pour les élèves dans cette activité de reformulation de la consigne (réponse à la question « Que faut-il faire ? »). Certains avaient conscience de ces difficultés, ainsi que l'expriment leurs interventions orales suite à des tentatives de formulation : je sais ce qu'on doit [faire] mais je sais pas comment formuler [...] non, c'est moche / j'ai l'impression que le début est bien mais c'est le reste qui est moins bien / y'a un truc qu'est faux là-dedans.

Dans leurs propositions, à l'écrit comme à l'oral lors de la mise en commun, certaines dyades omettent des informations : la distance *AB* à considérer est implicite (« il faut que tous les points ont la même distance du point *A* ») ou alors le rôle du point *A* l'est (« faut placer des points à la même distance que *B* »). L'expression de la langue n'est pas non plus maîtrisée. La tournure spécifique « un point est à une distance d'un autre » devient « un point fait une distance avec un autre » ou « un point a une distance d'un autre ». La structure de comparaison « même…que » est mal employée : comparant et comparé ne sont pas de même nature (« les points sont à la même distance que *AB* ») ou alors le comparant n'est pas donné (« les points ont la même distance »). L'emploi de la conjonction « que » n'est pas acquis : « que » est considérée comme synonyme de la préposition « de » dans « les points sont à la même distance que *A* », ou alors est remplacée par « comme » dans « il faut que les points soient à la même distance de *A* comme de *B* », ce qui transforme alors le type de tâches. Et enfin, au niveau de l'usage du vocabulaire spécifique, les termes « longueur » et « distance » sont considérés par des élèves comme synonymes (« points de la même longueur »). Cette conception erronée est probablement renforcée par le fait que la longueur d'un segment ou la distance entre deux points est obtenue avec le même outil de GeoGebra, désigné par « Distance ou longueur ». D'autres types de formulation apparaissent dans les échanges oraux privés que nous avons filmés au sein des dyades, lorsqu'un élève est amené à expliquer à l'autre ce qui est attendu par l'enseignant. Certains s'appuient sur des gestes pour montrer les objets géométriques qu'ils considèrent (les points) ou pour exprimer des relations entre ces objets (distance entre ces points) :

> En fait, le prof, il veut que tous les points // *Il parcourt de A à B*
> *et revient à A* à côté de *A* // *Il pointe le point A*
> doivent être // *Il pointe le point B*
> à la même distance // *Il parcourt avec l'index du point B au point A.*

Les gestes portent ici des informations non données dans la verbalisation : la distance *AB* à considérer et le rôle du point *A*. Un autre élève s'appuie sur un exemple, doublé de gestes de pointage : « si le point *A* il fait 5, euh 4 virgule 5, par exemple s'il fait avec le *B*, eh ben le point *C* il doit faire 4,5 avec le *A* ». La spécificité du point *A* est implicite dans cette explication, cela a d'ailleurs conduit à un malentendu au sein de la dyade, l'autre élève déduisant que chacun des points à placer devaient être à la distance *AB* du point précédemment placé ($AB = CD = DE = EF = FG = ...$).

L'étude du recueil des reformulations du but à atteindre dans cette activité met en évidence un décalage entre ce que les élèves comprennent et ce qu'ils parviennent à formuler lorsqu'ils doivent utiliser un langage géométrique. Nous interprétons leur compréhension à travers leurs actions, leurs productions graphiques et les gestes qui accompagnent leurs formulations. Des discordances sont apparues entre les productions graphiques obtenues et les formulations verbales à propos de ces productions. Ainsi dans cette activité, même si la plupart des dyades ont su trouver des points répondant au problème posé, très peu d'élèves ont été capables de formuler de façon correcte le but de leurs actions réalisées avec les outils du logiciel. L'appropriation du langage géométrique nécessite du temps. Ce langage suppose un niveau d'abstraction important et n'est pas directement accessible aux élèves. Aussi nous a-t-il semblé que ce langage ne pourrait être employé lorsque les élèves sont en phase d'apprentissage dans la situation de communication que nous souhaitions mettre en place. Nous nous sommes donc tournée vers un langage à visée technico-figurale. Par ailleurs, nous avons considéré l'apport que pourrait procurer une production de gestes dans la communication et dans l'appropriation des concepts géométriques, suite à nos observations et à la lecture des travaux (mentionnés dans la partie 1.3) sur le rôle des gestes dans les processus d'apprentissage.

2.2 Langage à visée technico-figurale

Langage technique géométrique

Les formulations spontanées des élèves sont souvent l'expression des manipulations instrumentées qu'ils mettent en œuvre. Certaines expriment des liens plus ou moins précis entre objet technique et objets graphiques ou géométriques, comme par exemple : « pique la pointe de ton compas sur le point *A* et mets la mine sur le point *B* », « place ton équerre sur la droite (*d*) ». En classe, les enseignants font évoluer ces formulations en introduisant les termes conventionnels et expressions spécifiques qui seront réinvestis par les élèves après un temps nécessaire de familiarisation. Ce langage descriptif de l'action instrumentée est parfois utilisé, notamment dans les phases d'apprentissage de la manipulation des instruments, mais il est le plus souvent rapidement invalidé et surtout dans les écrits que l'élève peut être amené à faire pour résoudre un problème de géométrie.

Nous faisons l'hypothèse que ce langage peut avoir un intérêt, lorsque le langage géométrique adéquat n'est pas encore maîtrisé, pour des élèves pour qui le saut cognitif entre action et formulation en langage géométrique est trop important. Nous proposons ainsi d'enseigner aux élèves la pratique d'un langage à visée technico-figurale : le *langage technique géométrique*. Ce langage est relatif à la manipulation des instruments en lien avec des propriétés géométriques, sans mention de ces propriétés. Il utilise la langue géométrique et la langue technique, cette dernière étant constituée :

– de termes dénommant les objets techniques et de termes qui en dénomment les parties à mettre en relation avec les objets graphiques, par exemple « un côté de l'angle droit de l'équerre », « la pointe du compas » ;

– de termes permettant d'exprimer des actions relatives à leurs fonctions dans l'action sur les

figures – objets graphiques ou objets géométriques – par exemple, « vérifier » un angle droit, « prolonger » un segment ;
– de termes permettant d'exprimer des actions élémentaires associées aux fonctions de l'objet technique, à réaliser sur cet objet en lien avec les figures, par exemple, « placer » un côté de l'angle droit de l'équerre « sur » le point *M*, « piquer » la pointe du compas sur le point *A*.

Dans une visée technico-figurale de l'action instrumentée, les instructions décrivent, de manière séquencée, les actions à effectuer avec les objets techniques pour obtenir les tracés représentant les objets géométriques envisagés. Elles informent des relations entre les objets graphiques et les objets techniques, dans l'environnement papier-crayon ou dans un environnement technologique. Seules les instructions relatives à la manière théorique de réaliser l'objet graphique avec les objets techniques, porteuses d'un contenu géométrique font partie du langage technique géométrique. Elles constituent un programme de tracé avec, pour chaque action instrumentée :

(a) la mention de l'objet technique choisi,
(b) l'expression des liens entre certaines de ses parties et des objets graphiques présents, le cas échéant, et celui à obtenir par le tracé, ces liens permettant le positionnement de l'objet technique,
(c) la description de l'objet graphique à obtenir, dans son apparition dynamique.

Une certaine proximité existe entre le langage technique géométrique et le langage géométrique du fait d'une part de la langue géométrique commune et d'autre part d'une structure logique semblable entre l'expression des relations parties d'instruments – objets graphiques et expression des relations entre objets géométriques.

Confrontation aux observations en classe
Ces instructions, relatives à des manipulations d'instruments, ne doivent pas être confondues avec des instructions à visée manipulatoire. Nous en donnons une illustration avec la présentation de deux extraits d'échanges dans une dyade d'élèves de sixième. Dans le premier extrait, l'élève M doit donner des instructions à l'élève B_M pour qu'elle construise le triangle 2 et le quadrilatère 3 à partir du triangle 1 (Fig. 7a). Les instruments autorisés sont la règle non graduée, l'équerre et le compas. Seule l'élève M a accès à la figure modèle. L'extrait des échanges concerne la construction du segment [*AE*], une fois le quadrilatère *ACDF* tracé (Voir Fig. 7b pour le nom des points).

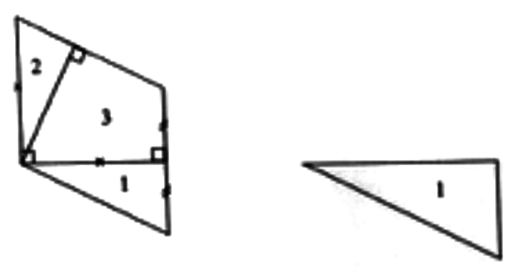


*Figure 7**a***

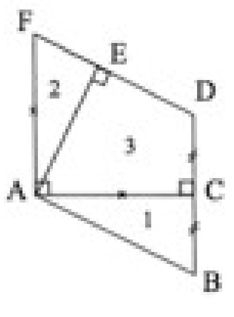
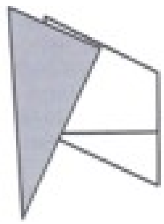
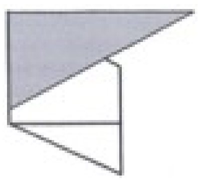
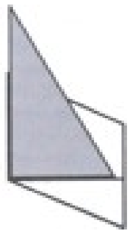
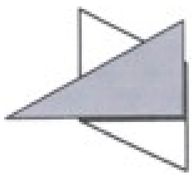
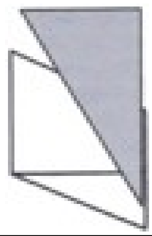


Figure 7b

<table>
<tr>
<td>37. M : Prends ton équerre, pose la contre le trait du haut.</td>
<td>39. M : Pas comme ça, tu vas la tourner.</td>
<td>41. M : Tourne-la encore</td>
<td>43. M : Encore</td>
<td rowspan="2">45. M : Non, pas comme ça.

Elle place l'équerre approximativement.
</td>
</tr>
<tr>
<td>38. B_M
</td>
<td>40. B_M
</td>
<td>42. B_M
</td>
<td>44. B_M : Comme ça ?
</td>
</tr>
</table>

La première instruction de l'élève M contient une information spatiale qui ne permet pas à l'élève B_M d'identifier le segment considéré (« le trait du haut »). Cela met en évidence l'intérêt de nommer les points particuliers de la figure pour pouvoir désigner sans ambiguïté le segment [FD]. L'élève M donne ensuite des instructions relatives au mouvement à réaliser avec l'équerre : la « tourner ». Il s'agit d'une instruction à visée manipulatoire, mise en défaut ici puisqu'elle n'aboutit pas à ce que l'élève B_M positionne l'équerre comme attendu. Nous retrouvons ce même type d'instruction dans l'échange suivant entre les deux élèves alors que l'élève M donne des indications à l'élève B_M dans le but de prolonger une demi-droite perpendiculaire à une droite donnée, à l'aide de l'équerre :

> M : Après tu vas redescendre ton équerre. Tu vas la faire glisser sur la droite. B_M : Comment sur la droite ?
>
> M : Coulisse-la.
>
> B_M : Comme ça ? Elle déplace l'équerre vers la droite.
>
> M : Euh, pas trop loin non plus. Coulisse, je te dirai stop. Coulisse. Arrête, arrête, t'as été trop loin. Avance. Ah ! Recule un tout petit peu. Encore.
>
> Non ! Avance. Recule. Stop ! Voilà.

Les verbes « glisser » et « coulisser » expriment le mouvement que doit faire l'équerre le long de la droite, mais le positionnement final de l'équerre par rapport à la trace graphique n'est pas formulé par l'élève M, ni le but de l'action (prolonger la demi-droite). L'élève M procède à un guidage manipulatoire de l'instrument avec les termes « avance », « recule », « arrête », « encore », « stop », « trop loin » : le positionnement précis de l'instrument n'est pas formulé. Dans ces deux extraits, l'activité géométrique est entièrement prise en charge par l'élève qui donne les instructions, l'autre n'étant plus qu'une exécutante, alors que le but visé est que les deux élèves apprennent. En outre, le discours produit n'est pas porteur de connaissances géométriques. Ce type d'instructions à visée manipulatoire, utilisé spontanément par l'élève M alors qu'aucune contrainte langagière ne lui avait été donnée, ne convient donc pas. Ainsi, le langage technique géométrique dont nous préconisons l'usage pour passer progressivement de l'action instrumentée à son expression en langage géométrique nécessite un apprentissage spécifique. Une étape préliminaire à cet apprentissage consiste d'une part à identifier les objets graphiques et à les mettre en lien avec les objets géométriques qu'ils représentent, d'autre part à repérer et à nommer les différentes parties des instruments qui sont à mettre en lien avec les objets graphiques dans l'action. Nous proposons d'associer gestes et langage à ces repérages et mises en lien.

2.3 Gestes

Dans les échanges entre élèves, une production de gestes associée aux tracés des figures se substitue souvent de façon spontanée au langage verbal pour parler des objets (graphiques ou géométriques). Nous proposons d'exploiter cette production de gestes dans l'accompagnement d'une appropriation des termes géométriques associés aux concepts, en lien avec leurs représentations graphiques. Ainsi, des gestes déictiques – gestes de pointage ou de parcours réalisés avec l'index, la main ou encore un crayon utilisé pour montrer – permettent la mise en relation de termes désignant les objets géométriques avec les objets graphiques les représentant.

On peut par exemple pointer un point en désignant la croix qui le représente avec l'index (Fig. 8a), cela peut lever une confusion éventuelle entre le point et le nom du point. On peut parcourir une droite en déplaçant l'index le long et de part et d'autre du trait droit qui la représente (Fig. 8b). Ce geste est porteur du fait que la droite est infinie et que sa représentation graphique peut être prolongée de part et d'autre.

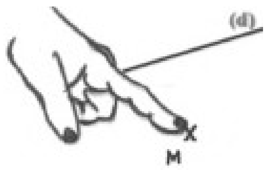


Figure 8a. *Pointage du point M*

Figure 8b. *Parcours de la droite (d)*

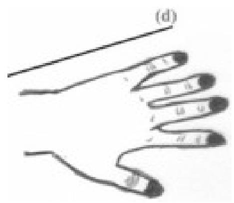


Figure 9a. *Désignation d'un demi-plan*

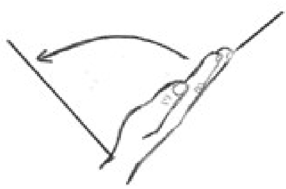


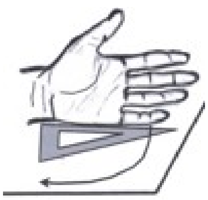
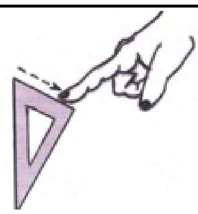
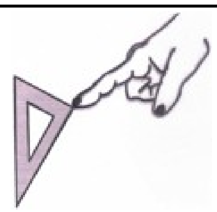
Figure 9b. *Parcours de l'angle*

Nous proposons également d'associer gestes et verbalisation pour repérer et nommer les parties d'instruments qui seront à mettre en lien avec les objets graphiques, représentant les objets géométriques, dans l'environnement papier-crayon. Si cette étape paraît inutile pour la règle, avec le repérage d'un bord droit, et pour le compas, avec le repérage des extrémités de ses branches – la pointe et la mine – (Fig. 10a), elle peut ne pas l'être pour son écartement. Les élèves peuvent en effet avoir du mal à mettre en relation l'écart mine-pointe du compas avec la longueur d'un segment lorsque celui-ci n'est pas tracé (Offre, Perrin-Glorian & Verbaere, 2006). Cet écartement pourra alors être repéré par un geste de parcours avec l'index allant d'une extrémité d'une branche du compas à l'autre (Fig. 10b). Par ailleurs, nous conservons cette idée d'écart entre deux points sur le plan du langage, pour tracer un cercle au compas, en privilégiant l'expression « prendre un écartement de compas » plutôt que « prendre une ouverture de compas ». L'ouverture du compas correspondant à l'angle formé par ses deux branches n'est en effet pas en lien avec un angle du cercle que l'on tracera, comme l'écartement l'est avec le rayon.

Figure 10a. *Pointage de la pointe du compas*

Figure 10b. *Parcours de l'écart pointe-mine*

Concernant l'équerre, la première étape de repérage de ses constituants s'est révélée indispensable dans les observations que nous avons faites en classe de sixième. D'une part, certains élèves ne décodent pas bien une instruction du type « Place ton équerre sur la droite (d) ». Nous pensons que l'emploi métonymique du terme « équerre » à la place de l'expression « un côté de l'angle droit de l'équerre » est source de difficulté. D'autre part, certains élèves identifient l'angle droit de l'équerre à son sommet, ou alors à une portion de surface très proche de ce sommet, le terme « angle » étant interprété dans son sens courant comme synonyme de « coin ». Un repérage de l'angle droit de l'équerre, de chacun de ses côtés et de son sommet peut donc s'avérer nécessaire. Il peut être réalisé en nommant ces différentes parties de l'instrument et en accompagnant les termes de gestes déictiques de pointage ou de parcours (Fig. 11a, 11b et 11c).

		
Parcours de l'**angle droit de l'équerre** : 1. On place le bord de la main sur un côté de l'angle droit (voir dessin). 2. On fléchit le poignet jusqu'à ce que le bord de la main soit sur l'autre côté de l'angle droit de l'équerre.	Parcours d'**un côté de l'angle droit de l'équerre :** On déplace l'index le long d'un côté de l'angle droit de l'équerre.	Pointage du **sommet de l'angle droit de l'équerre** : On pointe avec l'index le sommet de l'angle droit de l'équerre.
Figure 11a	***Figure 11b***	***Figure 11c***

Enfin des *gestes mimétiques* – dans l'environnement papier-crayon, mimes d'actions réalisées avec les instruments, en présence ou non de ces instruments – permettront d'exprimer les relations entre instruments et objets graphiques. Avec l'équerre ou la règle, le tracé peut être mimé par un geste de parcours avec l'index (Fig. 12a) le long de l'instrument, lorsqu'il est positionné. Le compas peut être mimé avec la main, le pouce et l'index représentant les branches du compas (Fig. 12b).

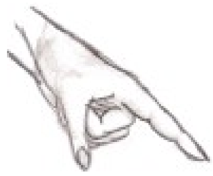


Figure 12a. *Mime du crayon*

Figure 12b. *Mime du compas*

Nous venons de présenter des moyens de communication langagiers et gestuels sur l'action instrumentée, appropriés pour être utilisés dans un travail en dyade dans la résolution de problèmes géométriques de reproduction ou de construction de figures, parce qu'ils conduisent à des apprentissages géométriques. Dans la partie suivante, nous allons présenter de façon plus approfondie le dispositif de travail en dyade, nous détaillerons les modalités de fonctionnement et donnerons des pistes de mise en œuvre en classe.

3. Travail en dyade : modalités de fonctionnement et intérêts

3.1 Présentation du dispositif de travail

Rappelons le canevas général du dispositif de travail. Chaque dyade d'élèves reçoit un problème de construction géométrique (à partir d'un texte ou d'un schéma) ou de reproduction de figures. L'activité se déroule alors en un ou plusieurs cycles constitués chacun des trois phases suivantes :

Phase 1. Se mettre d'accord sur la technique de construction à mettre en œuvre
Phase 2. Formuler un programme de tracé et réaliser la construction
Phase 3. Échanger sur la validité de ce qui a été produit

Phase 1
Dans cette première phase de travail, aucune contrainte n'est donnée sur le langage à employer dans les échanges entre élèves à propos de la technique de construction que chacun envisage et de celle qui en découlera d'un commun accord pour être mise à l'essai dans la phase suivante. La seule règle de communication à respecter est l'écoute mutuelle : chacun doit pouvoir exposer ses idées à l'autre, entendre celles de l'autre et argumenter. La discussion au sein de la dyade doit alors déboucher sur un choix d'une technique à tester avec les instruments autorisés. Dans cette phase, les deux élèves ont le même rôle. L'enseignant quant à lui est observateur des échanges entre élèves. Il veille également à ce que les élèves ne passent pas directement à la phase suivante sans concertation préalable, ce qu'ils ont naturellement tendance à faire.

Phase 2
L'enseignant est garant du respect des règles de communication au sein des dyades dans cette deuxième phase de travail. Il intervient si besoin pour aider les élèves à les respecter. Le rôle des deux élèves devient différent. Un élève E a le rôle d'instructeur : il a la tâche de donner des instructions en exprimant par le langage (verbal et gestuel) son intention d'agir avec les instruments. L'élève B_E, le constructeur, a la tâche de suivre ces instructions avec les instruments. Lui seul peut manipuler les instruments.
Dans l'environnement papier-crayon, à la charge de l'élève E de demander à l'élève B_E le codage des propriétés obtenues directement de façon instrumentée (par exemple, le codage

d'un angle droit produit par l'équerre, le codage d'une égalité de longueurs produite au compas). Les propriétés que l'on obtient par des déductions théoriques ne doivent pas être codées. Par exemple (Fig. 13a), si la médiatrice d'un segment [*AB*] est construite au compas à l'aide de deux points *C* et *D* équidistants des extrémités *A* et *B* du segment, on codera seulement les égalités de longueur obtenues directement grâce au compas (*AC*=*BC* et *AD*=*BD*) et pas les angles droits formés par la médiatrice (*CD*) avec le segment [*AB*] que l'on déduit, ni l'égalité des longueurs *AI* et *IB* que l'on déduit également, le point *I* étant le point d'intersection de la droite (*CD*) et du segment [*AB*].

Phase 3

Dans cette dernière phase, les deux élèves n'ont plus chacun un rôle spécifique. Ils échangent sur la validité de la production obtenue. S'ils repèrent des erreurs, ils se concertent de nouveau sur les modifications à apporter à leur technique de construction, démarrant ainsi un nouveau cycle de travail. Une reproduction de figure à partir d'une figure-amorce ou une construction sera valide si la figure obtenue est une figure juste, c'est-à-dire « visuellement conforme à la théorie » : les propriétés géométriques doivent être soit produites par des instruments appropriés (dans l'environnement papier-crayon, cela reste apparent après la construction grâce au codage), soit issues de déductions théoriques. Les propriétés ne peuvent être obtenues au jugé, de façon perceptive : pour le tracé de la médiatrice du segment [*AB*], on placerait la règle en s'appuyant sur la perception visuelle pour réaliser le tracé (Fig. 13b). Elles ne peuvent être non plus obtenue en tâtonnant : pour le tracé de la perpendiculaire à (*AB*) passant par le point *I*, on tracerait une droite passant par *I* au jugé avec la règle, on contrôlerait avec l'équerre l'angle formé par cette droite avec la droite (*AB*), et on ajusterait le tracé (c'est-à-dire que l'on gommerait et que l'on retracerait) jusqu'à obtenir un angle droit.

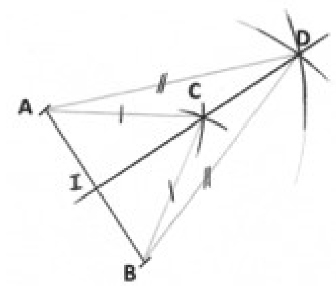


Figure 13a

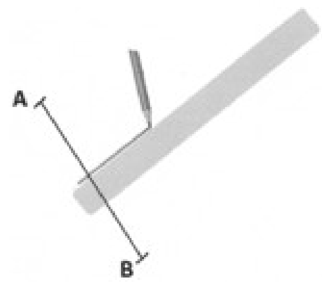


Figure 13b

Avec un logiciel de géométrie dynamique, les déplacements permettent de contrôler la validité de la figure produite. Une figure est *juste* si les propriétés géométriques sont conservées suite au déplacement d'un point libre (point non dépendant d'autres objets). Par exemple si l'on utilise l'outil « droite passant par deux points » pour tracer visuellement une droite perpendiculaire à la droite (*AB*), la propriété de perpendicularité ne résistera pas au déplacement d'un de ces points alors qu'elle aurait été conservée si l'on avait utilisé l'outil « droite perpendiculaire ».
Pour terminer l'activité, la validité des productions est discutée en classe entière lors d'une mise en commun menée par l'enseignant. Pour la validité de la construction obtenue, en plus sa *justesse*, on peut exiger sa *précision* tout en sachant que ce n'est pas cela qui est premier dans les apprentissages géométriques visés : la figure sera considérée comme *précise* si elle est superposable à la figure attendue, réalisée sur un calque par l'enseignant.

3.2 Règles de communication dans le travail en dyade

Précisons maintenant les règles de communication au sein de la dyade lors de la phase 2. Plusieurs règles sont à respecter dans le but que les deux élèves soient en position égale face aux connaissances géométriques à mobiliser, malgré leur rôle différent. L'élève E doit donner des instructions en employant un langage technique géométrique. Nous verrons dans la partie 3.3 comment introduire ce langage. Ce langage peut être renforcé par une production de gestes, comme les gestes déictiques de parcours et de pointage introduits précédemment (partie 2.3), cependant, ces gestes ne doivent pas se substituer aux mots si l'on souhaite dépasser la situation d'action. Par exemple, si le discours de l'élève E se restreint à des « ça », « là », « ici », accompagnant des gestes déictiques, l'élève B_E renverra à l'élève E ses termes sous forme interrogative (« Ça ? ») pour l'inciter à formuler ce dont il parle. Des indications données à l'aide de termes spatiaux du type « horizontal », « en haut », « à gauche », sont également exclues. En outre, l'élève B_E doit être attentif à ce que les instructions de l'élève E ne se transforment pas en un guidage manipulatoire du type « avance encore », « tourne un peu », « stop ». Si tel est le cas, il enlèvera l'instrument du support de tracé et demandera à l'élève E des instructions précises pour savoir où placer l'instrument. Une liste de mots interdits pourrait par exemple être donnée pour aider les élèves à identifier les termes à ne pas utiliser dans leurs instructions. Elle serait constituée de termes déictiques, de termes spatiaux et de termes indiquant le déplacement des instruments.
Nos analyses de travaux en dyade ont conduit à l'instauration d'une dernière règle, celle qui consiste pour l'élève B_E à « faire le moins probable » (Petitfour, 2015). Nous présentons cette règle en appui sur un exemple de dysfonctionnement qu'elle permet d'éviter, à partir d'un extrait d'une construction géométrique réalisée par la dyade « élève M - élève B_M » en fin de CM2, alors que cette règle n'était pas encore actée. L'extrait concerne le début de la reproduction d'une figure complexe à partir d'un segment-amorce (Fig. 14), avec comme instruments autorisés l'équerre, la règle non graduée et le compas.

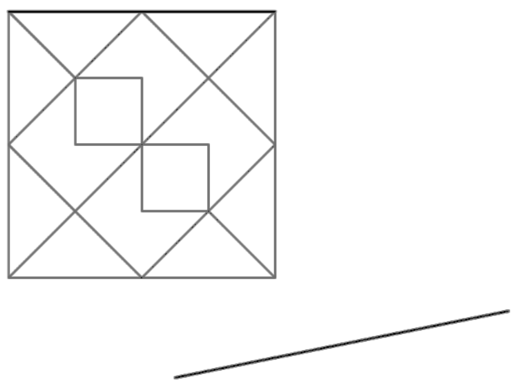
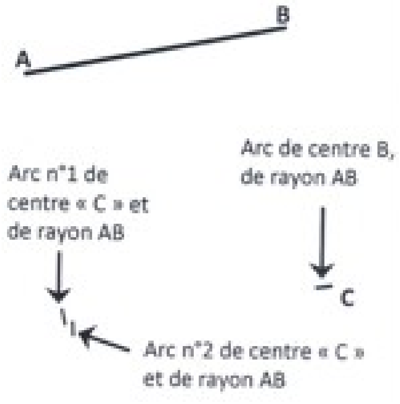


Figure 14

Dans cet extrait, l'élève M donne des instructions à l'élève B_M pour qu'elle construise le grand carré, que nous nommons *ABCD*, à partir du côté que nous nommons [*AB*]. Les deux élèves ont accès à la figure modèle. Elles sont passées directement à la phase 2 sans s'être concertées et mises d'accord sur la technique de construction qu'elles allaient mettre en œuvre, alors qu'il leur avait été demandé de le faire.

L'élève M demande à l'élève B_M, une fois l'écartement *AB* pris au compas, de « piquer là » (elle pointe le point *B*) et de « faire un repère », puis de « repiquer à son repère et de faire un autre petit repère », et enfin de « relier ».

En réponse à ces instructions, l'élève B_M trace un petit arc de cercle de centre *B* et de rayon *AB*, puis un premier arc de même rayon et de centre « *C* » (elle pique quelque part sur l'arc précédent), elle recommence cet arc pour que la longueur *DA* du quatrième côté du carré corresponde à l'écartement *AB* du compas. Ensuite elle « relie les repères » en traçant à la règle les côtés [*AD*], [*DC*] puis [*BC*].



La perpendicularité des côtés du carré n'est pas prise en charge de façon instrumentée dans les instructions de l'élève M, elle l'est seulement de façon perceptive et en acte par l'élève B_M qui trace des arcs de cercle au compas là où elle anticipe spatialement les sommets du carré à construire. La technique de construction pourrait être mise en défaut si l'élève B_M cherchait à tracer les arcs de cercle ailleurs que là où ils sont attendus. De même, la conception erronée des arcs tracés au compas, appelés « repères » et assimilés à des points, pourrait être remise en question si l'élève B_M piquait le compas sur le « repère » afin de ne pas obtenir les propriétés voulues (quatre côtés de même longueur par exemple). Ainsi, il s'agirait pour l'élève B_M d'exécuter les actions de la façon la plus éloignée des attentes de l'élève M, tout en respectant ses instructions, ce que nous avons appelé « faire le moins probable ». Dans cet extrait, cela contribuerait à une prise de conscience d'une propriété non prise en compte de façon instrumentée (la perpendicularité des côtés du carré) et d'une conception erronée (point assimilé à un petit arc de cercle et donc non obtenu par l'intersection de deux lignes).

Dans cet extrait, l'élève qui manipule les instruments anticipe sur les actions à réaliser parce qu'elle en connaît le but. D'autres situations observées ont montré que, même si seule l'élève M avait accès à la figure, l'élève B_M pouvait parfois deviner ce qui était attendu et le réaliser malgré des instructions incorrectes ou avec des implicites. Ces dernières deviennent alors peu utiles. L'essentiel de l'activité géométrique est finalement prise en charge par l'élève qui construit avec les instruments. Pour aider l'élève qui donne les instructions à énoncer des formulations précises, il faut donc que celui qui construit soit particulièrement attentif et exigeant quant à la clarté et à la précision de ces formulations : il doit demander des compléments d'information si nécessaire et faire attention à ne pas devancer ce qui va être demandé en proposant déjà des positionnements d'instruments, que l'autre n'aurait plus qu'à valider ou à modifier par guidage verbal, avec des formulations du type « avance », « tourne à droite », « continue », « stop ». S'il reste des implicites, si plusieurs interprétations sont possibles, il faut que celui qui construit fasse ce qui lui semble le moins probable, le plus éloigné des attentes supposées de l'autre, tout en suivant de façon conforme les instructions données. Cela permet de faire progresser le langage de l'élève qui donne les instructions, cela permet aussi à l'élève qui trace de ne pas être un simple exécutant : il peut prendre ainsi une part dans l'activité géométrique, en repérant les contraintes restées implicites dans le langage mais qu'il est nécessaire de prendre en compte dans l'action.

Dans notre expérimentation (Petitfour, 2015), la prise en compte de cette règle par les élèves M et B_M a bien produit les effets voulus. Nous l'illustrons avec une construction à réaliser à partir d'un schéma codé, le segment [*LI*] étant donné d'une longueur plus grande que celle du schéma (Fig. 15).

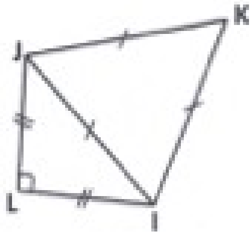
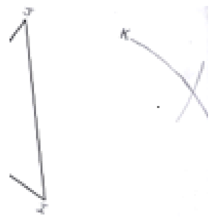


Figure 15

Pour la construction du triangle *ILJ* isocèle rectangle en *L*, des implicites ont été levés : l'instruction « Mets un côté de l'équerre sur le segment [*LI*] » traduite par le placement de l'hypoténuse de l'équerre sur ce segment a été rectifiée en « Mets un côté de l'angle droit de l'équerre sur [*LI*] » ; le placement d'un côté de l'angle droit de l'équerre sur [*LI*] sans que le sommet ne soit placé sur *L* a alors amené le complément d'instruction « et place le sommet de l'angle droit de l'équerre sur *L* ».
Pour la construction du triangle équilatéral *IJK*, une recherche de précision dans le langage a été réalisée, ainsi qu'en témoignent les échanges suivants, une fois [*JI*] tracé ainsi que deux arcs de cercle :

> M : Relie, euh nomme l'extrémité des deux arcs de cercle *K*.
> B_M écrit *K* à une extrémité d'un arc (voir figure ci-contre).
> M : J'ai dit l'extré
> B_M : L'extrémité tu m'as dit !
> M : Mais je sais plus, oh, l'intersection !



Notons que dans cette construction, les arcs de cercle ont été réalisés dans le demi-plan de frontière (*IJ*) voulu sans qu'il y ait eu d'instructions à ce propos. Si l'élève B_M avait choisi l'autre demi-plan, l'élève M aurait pu compléter ses instructions en indiquant la zone de tracé souhaitée par un geste déictique.
Les différentes règles de communication au sein de la dyade durant la deuxième phase de travail étant maintenant posées, nous présentons dans la partie suivante des activités conduisant à l'appropriation du langage qui sera utilisé lors de cette phase.

3.3 Appropriation du langage technique géométrique

Enseignement préalable aux problèmes de construction

La construction d'une figure complexe s'obtient grâce à une suite d'actions instrumentées. Nous proposons que l'appropriation du langage technique géométrique se fasse à partir d'actions instrumentées isolées, correspondant chacune à une étape donnée d'une construction. Dans l'idéal, l'introduction du langage technique géométrique se réalise dans la durée, au fur et à mesure des apprentissages géométriques, en lien avec la découverte des instruments (c'est-à-dire de leur fonction et de leur mode d'utilisation) et des objets et relations géométriques qu'ils permettent de représenter.

Dans l'environnement papier-crayon, distinguer ce que permettent une règle, une équerre, un compas et des graduations pour produire un objet graphique représentant un objet géométrique nous conduit à retenir les quatre types suivants d'actions instrumentées relatifs à un tracé :

– tracer un trait droit (représentant un segment, une droite ou une demi-droite) avec la règle
– tracer la demi-perpendiculaire à une droite passant par un point (ou une partie de cette demi-perpendiculaire) avec l'équerre
– tracer un cercle (ou un arc de cercle) avec le compas
– reporter une longueur de x cm avec les graduations

Dans l'environnement technologique d'un logiciel de géométrie dynamique, un choix d'outil comme « perpendiculaire », « cercle (centre-point) », « droite passant par deux points », « segment », « intersection entre deux objets » permet différentes actions instrumentées dont nous parlerons par la suite.

Nous faisons correspondre à chaque action instrumentée deux schémas, en utilisant pour les réaliser le même code couleur que celui des icônes des outils du logiciel de géométrie dynamique – en bleu les objets présents au départ et en rouge l'objet à construire – et nous ajoutons la représentation d'une propriété géométrique par un codage en noir. Pour chaque action instrumentée, un premier schéma est constitué des objets graphiques présents au départ, le deuxième schéma est constitué des mêmes objets, il est complété par l'objet à construire et éventuellement par un codage. Par exemple, sur chacun des trois schémas (Fig. 16), la droite (d) et le point *M* – représentés en bleu – sont les objets donnés au départ ; le segment dont une extrémité est *M* pour le schéma n°1 et la droite qui passe par *M* pour le schéma n°2 sont en rouge : ces objets sont à construire en tenant compte du codage de l'angle droit, en noir sur ces deux derniers schémas. Les schémas n°0 et n°1 sont associés à une action instrumentée à réaliser avec l'équerre (ou un gabarit d'angle droit) dans l'environnement papier-crayon et les schémas n°0 et n°2 à une action instrumentée à réaliser avec l'outil « perpendiculaire » d'un logiciel de géométrie dynamique.

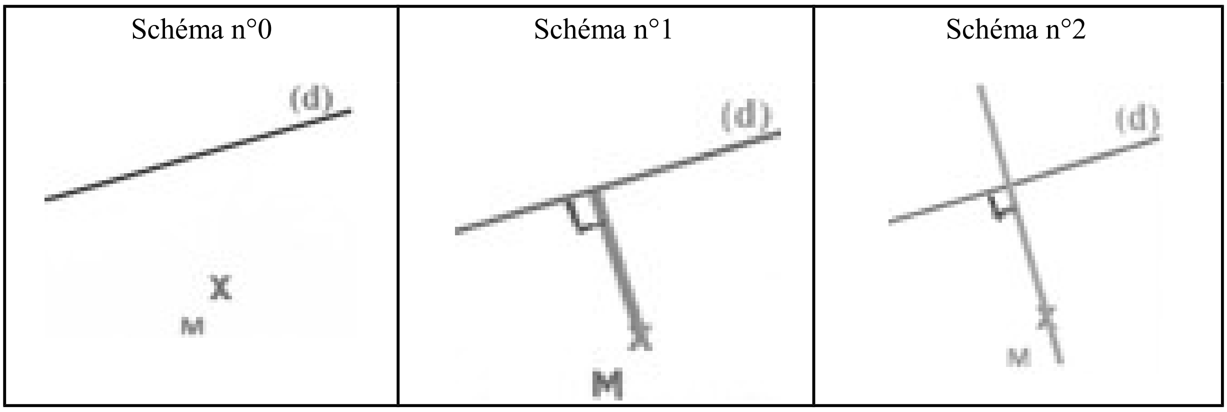


Figure 16

Un travail sur les instructions à donner pour que quelqu'un construise ce qui est représenté en rouge à partir des objets représentés en bleu peut être réalisé en classe de façon collective. L'enseignant demande aux élèves de lui donner des instructions pour qu'il réalise le tracé. Il suit les instructions que les élèves proposent tout en veillant à « faire le moins probable » pour aboutir à des formulations qui conviennent, l'une en langage géométrique et l'autre en langage technique géométrique. Il est en effet important que les élèves différencient ces deux langages, de plus, nous n'excluons évidemment pas l'apprentissage du langage géométrique qui sera uniquement utilisé à terme dans la résolution de problèmes géométriques.

Comme instructions pour le schéma n°1, on peut par exemple demander en langage géométrique le tracé du « segment de direction perpendiculaire à la droite (*d*) dont une extrémité est le point *M* et l'autre un point de la droite (*d*) » ou bien encore le tracé d'un « segment [*PM*] avec *P* projeté orthogonal du point *M* sur la droite (*d*) ». En langage technique géométrique, on demandera, dans l'environnement papier-crayon, de « prendre l'équerre, de placer un côté de son angle droit sur la droite (*d*) et l'autre sur le point *M*, puis de tracer le long de ce côté du point *M* jusqu'à la droite (*d*) ». Pour le schéma n°2, on demandera en langage géométrique le tracé de « la droite perpendiculaire à la droite (d) passant par le point *M* » et en langage technique géométrique avec un logiciel de géométrie dynamique de « cliquer sur l'outil « perpendiculaire », puis sur la droite (*d*) et enfin sur le point *M* ». Après ce temps de travail collectif, les élèves pourront s'entraîner en dyade avec une répartition des rôles – l'instructeur et le constructeur – en adoptant les différentes règles de communication (présentées en 3.2) illustrées par l'enseignant en prenant appui sur les interactions qui ont eu lieu collectivement.

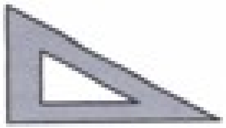
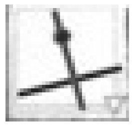
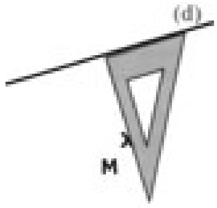
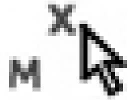
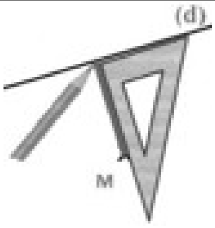
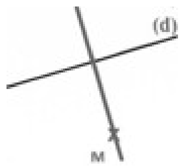
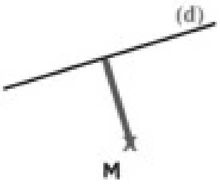
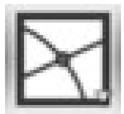
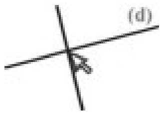
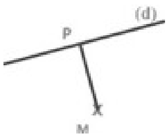
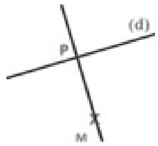
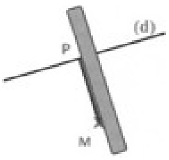
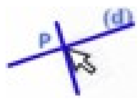
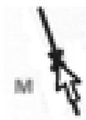
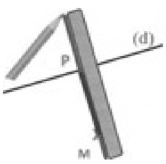
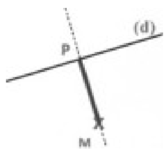
Lors de cette activité dans l'environnement papier-crayon, si l'on souhaite se focaliser sur le développement du langage des élèves plus que sur le développement de leurs habiletés manipulatoires, il est possible de remplacer les tracés par des gestes mimétiques (cf 2.3).

Exemple

Nous donnons maintenant un exemple d'une activité d'entraînement à la pratique du langage technique géométrique et à celle d'un travail en dyade avec rôles différenciés pour les élèves (comme celui de la phase 2 du dispositif) dans un environnement papier-crayon et dans un environnement technologique. Cette activité nécessite un enchaînement de deux actions instrumentées. Dans l'environnement papier-crayon, l'élève constructeur reçoit le schéma n°0 (Fig. 16) tandis que l'élève instructeur reçoit le schéma n°1. Ce dernier doit donner des instructions à l'élève constructeur pour qu'il produise ce qui est représenté en rouge avec ses instruments. Une fois cette tâche réalisée, l'élève constructeur reçoit le schéma n°1 et l'élève instructeur lui donne des instructions à partir du schéma n°2. Avec un logiciel de géométrie dynamique, l'ordre des schémas n°1 et n°2 est inversé.

Pour les deux actions instrumentées conduisant aux schémas n°1 et n°2, nous présentons un exemple d'instructions relatives aux différentes actions élémentaires et une schématisation du but visé dans ces actions (dessin de l'instrument positionné et/ou du tracé), dans l'environnement papier-crayon et avec un logiciel de géométrie dynamique, en mettant en vis-à-vis les actions élémentaires qui se correspondent dans un tableau. Cela nous permettra par la suite de dégager des éléments de comparaison de la réalisation d'un même type de tâches dans deux environnements différents.

La construction dans l'environnement papier-crayon, à l'équerre et à la règle non graduée, suit l'ordre schéma n°1 – schéma n°2, tandis que la construction avec les outils « perpendiculaire », « point d'intersection » et « segment » du logiciel de géométrie dynamique suit l'ordre inverse.

Environnement papier-crayon	**Avec un logiciel de géométrie dynamique**
Prendre l'équerre. 	Cliquer sur l'icône « Perpendiculaire ». 
Mettre un côté de l'angle droit de l'équerre le long de la droite (*d*) et l'autre côté de l'angle droit sur le point *M*. 	Cliquer sur la droite (*d*).  Cliquer sur le point *M*. 
Tracer le long de ce côté de l'équerre, du point *M* jusque la droite (*d*). 	*La perpendiculaire à la droite (d) passant par M s'affiche à l'écran.* 
Le point d'intersection est repéré grâce au tracé précédent. 	Cliquer sur l'icône « intersection entre deux objets »  Cliquer sur le point d'intersection de la perpendiculaire avec la droite (*d*). 
Nommer *P* le point d'intersection de la droite (*d*) avec la perpendiculaire à (*d*) passant par *M*. 	Nommer *P* le point d'intersection de la droite (*d*) avec la perpendiculaire à (*d*) passant par *M*. 
Prendre la règle. 	Cliquer sur l'icône « segment ». 
Placer la règle sur le segment [*PM*]. 	Cliquer sur le point *P*.  Cliquer sur le point *M*. 
Prolonger le segment [*PM*], de part et d'autre de ses extrémités. 	Cacher la droite perpendiculaire à la droite (*d*) passant par *M* 

Une comparaison des constructions du segment [*MP*] et de la droite (*MP*), avec *P* projeté orthogonal de *M* sur (*d*) dans les deux environnements – papier-crayon et technologique – amène aux constats suivants :

- des actions élémentaires qui se correspondent avec l'équerre et avec l'outil « perpendiculaire » ne conduisent pas au même tracé : dans un cas on obtient le segment [*MP*], dans l'autre on obtient la droite (*MP*) ;
- avec le logiciel, un point d'intersection n'existe que s'il a été créé, la trace graphique de deux lignes qui se coupent ne suffit pas, contrairement aux tracés dans l'environnement papier-crayon ;
- le segment [*MP*] s'obtient en quatre actions élémentaires avec l'équerre contre dix avec le logiciel, tandis que la droite (*MP*) s'obtient en huit actions élémentaires avec l'équerre et la règle contre trois avec le logiciel.

Nous soulignons par ces quelques constats le fait que des différences existent entre les deux environnements, papier-crayon et technologique, dans les actions élémentaires à mettre en œuvre, et la production graphique qui en découle. Le langage technique géométrique n'est donc pas transposable d'un environnement à l'autre pour un objet géométrique donné à représenter. Par ailleurs, remarquons que le coût en actions élémentaires n'est pas nécessairement allégé avec le logiciel.

Conclusion

Nous avons présenté un dispositif de travail en dyade pour des situations d'apprentissage en géométrie basées sur la construction instrumentée. L'élaboration théorique et expérimentale de ce dispositif a été initiée par la nécessité de surmonter les problèmes que posaient la manipulation d'instruments pour les élèves dyspraxiques. Nous avons donc cherché à développer les compétences langagières des élèves pour communiquer sur les actions instrumentées, en exploitant aussi une production de gestes, dans un travail de collaboration à deux.

Plusieurs limites dans le fonctionnement du dispositif de travail proposé sont à envisager. Tout d'abord le fait que les deux élèves aient connaissance de la figure à construire rend artificielle la situation de communication dans la deuxième phase de travail au regard du problème géométrique qui est à résoudre par la dyade. Il est en effet plus rapide et moins coûteux d'un point de vue cognitif d'agir directement plutôt que retarder la réalisation de l'action par une production langagière. Ensuite, la composition des dyades peut avoir son importance : un élève qui manque de connaissances géométriques ne sera pas en mesure de repérer les implicites dans les instructions qui lui seront données, un élève qui manque de connaissances langagières aura des difficultés à communiquer de façon précise : les opportunités d'apprendre dans le travail en dyade seront alors réduites si on laisse les élèves travailler ensemble en autonomie.

Notre proposition de travail en dyade diffère en plusieurs points de la pratique des « figures téléphonées »[3] dans laquelle un élève doit décrire à un camarade, qui ne la voit pas, une figure donnée dans le but qu'il la reproduise. Nous pensons dépasser les limites de fonctionnement relevées par Laborde (1991) pour ce type de situations d'apprentissage en géométrie avec le dispositif de travail présenté dans cet article.

3 eduscol.education.fr/ressources-2016. *Communiquer à l'écrit et à l'oral.* - Ministère de l'Éducation nationale, de l'Enseignement supérieur et de la Recherche - Mars 2016.

Tout d'abord, le fait que la construction soit réalisée au fur et à mesure des instructions données permet à l'élève émetteur (l'instructeur) de bénéficier de façon immédiate des rétroactions de l'élève récepteur (le constructeur). L'émetteur a ainsi l'opportunité d'améliorer ses instructions en levant les implicites non décodés ou en clarifiant les ambiguïtés. L'émetteur peut aussi expliciter de façon immédiate un message correct du point de vue mathématique lorsque le récepteur ne le décode pas.

Ensuite, les règles de communication établies – ni guidage manipulatoire, ni termes spatiaux, ni termes déictiques pour l'émetteur, ainsi qu'agir en « faisant le moins probable » pour le récepteur – conduisent à une recherche de précision dans le langage employé tant au niveau de l'élève qui donne des instructions que de celui qui les reçoit, ce qui les implique tous deux dans l'activité géométrique. Les « mots interdits » devraient permettre d'éviter que l'émetteur ne se place sur un plan non mathématique dans ses instructions. La « règle du moins probable » devrait encourager les élèves à traquer les implicites dans les formulations orales, pour donner des positionnements d'instruments sans équivoque, en considérant ainsi les caractéristiques des objets géométriques à prendre en compte. Cette règle devrait également favoriser une prise de conscience de l'invalidité de techniques de construction où des propriétés sont prises en compte de façon perceptive plutôt que de façon instrumentée.

Enfin, le langage pour communiquer les instructions est le langage technique géométrique. L'émetteur devra donc formuler un programme de tracé. Nous faisons l'hypothèse que l'utilisation de ce langage de description précise des actions instrumentées, habituellement banni de l'enseignement au profit du langage géométrique, peut être une étape intermédiaire entre l'exécution d'une action instrumentée et sa représentation en langage géométrique, et que cette étape peut être bénéfique pour tout élève. En effet, chercher à verbaliser les relations entre instruments et objets géométriques fait parvenir à un niveau de connaissances plus avancé que de rester uniquement dans l'action, sans pour autant avoir déjà atteint un niveau d'abstraction trop important et non accessible en début d'apprentissage des concepts géométriques. Les résultats d'une évaluation que nous avons fait passer à des élèves en fin de leur année scolaire de sixième montrent que le langage géométrique est loin d'être acquis pour décrire des constructions pourtant réussies.

La pratique du langage technique géométrique dans un travail en dyade pourrait être un moyen d'aller vers une prise de conscience des implicites de l'action et constituer un premier pas vers une formulation des propriétés géométriques en langage géométrique. Nous faisons l'hypothèse qu'une pratique d'un travail en dyade, avec les règles que nous avons définies, peut entraîner les élèves à prendre du recul sur leurs actions avec les instruments s'ils continuent, une fois qu'ils sont en situation de les réaliser en autonomie, à s'appuyer sur une mise en mots et à en envisager les rétroactions correspondantes. Nous faisons également l'hypothèse que le langage technique géométrique pourra être un appui pour une appropriation du langage géométrique.

Nous n'avons pas encore expérimenté notre proposition de dispositif de travail en dyade en classe ordinaire, des recherches restent encore nécessaires pour en vérifier le fonctionnement effectif et les effets sur les apprentissages géométriques des élèves.

Références

ALIBALI M., GOLDIN-MEAWDOW S. (1993) Gesture-Speech Mismatch and Mechanisms of Learning: What the Hands Reveal about a Child's State of Mind, *Cognitive psychology*, 25, 468-523.

DUVAL R. (1995) Sémiosis et pensée humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels, Bern : Peter Lang.

DUVAL R. (2005) Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie : développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 10, 5-53.

HOUDEMENT C. (2007) A la recherche d'une cohérence entre géométrie de l'école et géométrie du collège, *Repères IREM*, 67, 69-84.

HOUDEMENT C., KUZNIAK A. (2006) Paradigmes géométriques et enseignement de la géométrie, Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 11, 175-195.

LABORDE C. (1982) Langue naturelle et écriture symbolique : deux codes en interaction dans l'enseignement mathématique. Thèse de doctorat, Université scientifique et médicale, Institut National Polytechnique de Grenoble.

LABORDE C. (1991) Deux usages complémentaires de la dimension sociale dans les situatios d'apprentissage en mathématiques. In C. Garnier, N. Bednarz et I. Ulanovskaya (Eds), *Après Vygotski et Piaget. Perspectives sociale et constructiviste, Ecoles russe et occidentale,* 29-49, Bruxelles : De Boeck.

MCNEILL D. (1992) Hand and Mind: What gestures reveal about thought, Chicago: Chicago University Press.

MEN (2008a) Programmes d'enseignement de l'école primaire, B.O. Hors Série n°3 du 19 juin 2008. MEN (2008b) Programmes d'enseignement du collège, B.O. Spécial n°6 du 28 août 2008.

OFFRE B., PERRIN-GLORIAN M-J., VERBAERE O. (2006) Usage des instruments et des propriétés géométriques en fin de CM2, P*etit x*, 72, 6-39. (ou *Grand N*, 77, 7-34).

PERRIN-GLORIAN M-J. (2012) Vers une progression cohérente de l'enseignement de la géométrie plane du CP à la fin du collège ? L'exemple de la symétrie axiale, *Bulletin de l'APMEP*, 499, 325-332.

PERRIN-GLORIAN M-J., MATHE A-C., LECLERCQ R. (2013) Comment peut-on penser la continuité de l'enseignement de la géométrie de 6 a 15 ans ? Le jeu sur les supports et les instruments. *Repères IREM*, 90, 5-41.

PERRIN-GLORIAN M-J., GODIN M. (2014) De la reproduction de figures géométriques avec des instruments vers leur caractérisation par des énoncés. *Math-école*, 222, 26-36.

PERRIN-GLORIAN M-J., GODIN M. (2017) Géométrie plane : pour une approche cohérente du début de l'école à la fin du collège. In *Concertum* de la CORFEM.

PETITFOUR E. (2015) Enseignement de la géométrie à des élèves en difficulté d'apprentissage : étude du processus d'accès à la géométrie d'élèves dyspraxiques visuo-spatiaux lors de la transition CM2-6ème. Thèse de doctorat. Université Paris Diderot [Hal].

PETITFOUR E. (2016) Enseignement de la géométrie à des élèves dyspraxiques : étude du processus d'accès à la géométrie par la construction instrumentée. *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques*.

RABARDEL P., VERILLON P. (1985) Relations aux objets et développement cognitif, in *Actes des septièmes journées internationales sur l'éducation scientifique*, Chamonix.

RABARDEL P. (1995) Les hommes et les technologies. Approche cognitive des instruments contemporains, Paris : Armand Colin.

RADFORD L. (2002) The seen, the spoken and the written. A semiotic approach to the problem of objectivation of mathematical knowledge, *For the Learning of Mathematics*, 22(2), 14-23.

RADFORD L. (2006) Elements of a Cultural Theory of Objectification, Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, Special *Issue on Semiotics, Culture and Mathematical Thinking*, 103-129.

VALENZENO L., ALIBALI M.W., KLATZY R. (2003) Teachers gestures facilitate students learning: A lesson in symmetry, *Contemporary Educational Psychology*, 28, 187-204.

VYGOTSKI L.S. (1931/1978) The Development of Higher Psychological Processes. Mind in Society. Cambridge, Massachusetts: Harvard University Press.