UN EXEMPLE D'USAGE DE LA GÉOMÉTRIE DYNAMIQUE

Francine ATHIAS[1]

ESPE de Franche-Comté, ELLIADD

Résumé : Cet article présente une recherche menée avec une professeure des écoles autour de la reproduction de figures dans l'environnement papier-crayon et dans un environnement dynamique. L'auteure cherche à décrire et à analyser les actions de la professeure et des élèves afin de comprendre le déroulement de l'action. Cette analyse met en évidence une orchestration de la professeure qui conduit les élèves à expliciter des relations géométriques.

Mots-clés : géométrie, géométrie dynamique, orchestration, figure matérielle.

INTRODUCTION

Notre travail porte sur l'enseignement de la géométrie au cycle 3, en particulier nous nous intéressons aux usages de la géométrie dynamique à l'école primaire. Cette dernière a d'abord été développée pour le secondaire (Laborde & Capponi, 1994). Des recherches ont été faites quant à des usages à l'école primaire (Assude & Gelis, 2002 ; Athias, 2014) ou au collège dans des conditions ordinaires (Lagrange & Deodoglu, 2009) : elles mettent en évidence des apports et des limites. Ainsi, par exemple, Athias (2014) présente un moment où un professeur oriente l'attention des élèves, rendant nécessaires des explicitations géométriques quant à l'usage du compas, en juxtaposant l'environnement papier-crayon et un environnement dynamique. Lagrange et Deodoglu (2009) expliquent que l'activité du professeur peut consister par moments à compenser *in situ* les points faibles de l'instrumentation des élèves, sachant que les professeurs voient la géométrie dynamique comme un ensemble de fonctionnalités disjointes, alors que l'analyse didactique conduit au contraire à considérer leurs effets conjoints. Par ailleurs, des analyses de l'intégration des outils informatiques dans l'apprentissage et l'enseignement des mathématiques ont été menées (Trouche, 2005). Ces recherches portent sur les descriptions des agencements didactiques des artefacts d'un environnement informatisé, en particulier les modes de gestion de ces artefacts au cours des différentes phases d'une situation. Dans cet article, nous explorons un usage de la géométrie dynamique, développé par une professeure dans le cadre d'une collaboration entre une professeure et une chercheure. La professeure propose aux élèves des séances de géométrie incluant la géométrie dynamique depuis 5 ans. La chercheure assiste à des séances de classe à des fins de recherche, sachant que c'est la professeure qui choisit à ce moment-là ce qu'elle propose aux élèves. Des entretiens sont menés à la fin de la séance, à des fins d'explicitation.

Cet article est structuré de la manière suivante : nous présentons les outils théoriques et

[1] francine.athias@univ-fcomte.fr

méthodologiques auxquels nous faisons référence dans notre étude et la question traitée, en mobilisant les notions de contrat et milieu didactiques (Sensevy, 2011) et celle d'orchestrations (Trouche, 2005). Puis nous décrivons et analysons une séance de classe. Nous discutons enfin les résultats obtenus et donnons quelques pistes de travail.

I. OUTILS THÉORIQUES ET MÉTHODOLOGIQUES

1. Le dessin, la figure, la figure matérielle

Laborde et Capponi (1994) définissent la figure comme l'ensemble de tous les dessins et du référent, celui-ci étant un objet défini dans une théorie géométrique. Ainsi, chaque dessin est associé à un concept. Ce que l'élève doit apprendre, c'est à voir la figure. À la suite de Celi et Perrin-Glorian (2014), nous privilégions le terme *« figure matérielle »*, signifiant ainsi que c'est aux caractéristiques géométriques que nous nous intéressons. Et c'est précisément sur ces figures matérielles que doit s'exercer ce regard spécifique (Duval & Godin, 2005). Par exemple, si dans les premiers apprentissages, les élèves voient le morceau de papier découpé comme un rectangle, il convient ensuite d'orienter le regard des élèves sur les propriétés géométriques du rectangle, que ce soit dans l'environnement papier-crayon ou dans un environnement dynamique. Dans un logiciel de géométrie dynamique, la figure matérielle est modifiée visuellement en une autre figure matérielle par le déplacement de points déplaçables, tout en représentant le même référent géométrique. Pour que la figure soit robuste (Restrepo, 2008), il est nécessaire de construire les objets en déclarant leurs propriétés géométriques et non pas en les plaçant visuellement. Par exemple, une droite perpendiculaire à une droite donnée devra être construite en utilisant le bouton « perpendiculaire » afin qu'elle conserve cette propriété au cours du déplacement de points déplaçables. Toutes les figures matérielles obtenues alors par ce déplacement seront des représentants du référent géométrique. Ainsi, la géométrie dynamique constitue un milieu (Brousseau, 1998) qui peut permettre de distinguer les propriétés spatiales (directions horizontale et verticale pour reprendre l'exemple) des propriétés géométriques (Berthelot & Salin, 1993), deux droites perpendiculaires pour cet exemple. Une figure matérielle sur papier peut être décrite ou reproduite dans un environnement dynamique. Ce qui est intéressant, c'est que la reproduction de figures matérielles dans un environnement dynamique peut être validée hors de la présence du professeur : le déplacement est accessible aux élèves, ils peuvent déplacer seuls les points déplaçables. Par ailleurs, Duval (1994) a souligné l'importance de l'articulation entre visualisation et discours dans la résolution d'un problème. Les figures matérielles obtenues à l'écran peuvent permettre cette articulation. Pour pouvoir décrire ou reproduire des figures matérielles, il est nécessaire d'accéder à une déconstruction dimensionnelle des figures (Duval, 2005). Cela signifie par exemple que construire un rectangle (de dimension 2) nécessite de voir des droites (de dimension 1), des intersections de droites. Dans un environnement dynamique, nous pouvons noter que construire les objets de dimension inférieure ainsi repérés nécessite également des connaissances instrumentales (Assude & Gelis, 2002). Lorsque l'élève est ainsi amené à reproduire une figure matérielle dans un environnement dynamique, il doit communiquer les propriétés qu'il a repérées par l'intermédiaire du logiciel. C'est précisément ce que nous étudierons ci-après. Cette situation de formulation (Brousseau, 1998) est certes un peu particulière : il ne s'agit pas de formuler des propriétés à un camarade, oralement ou à l'écrit. Il s'agit de le faire à une « machine » par l'intermédiaire de commandes. Cette situation de formulation est un moyen d'action sur un milieu qui lui apporte des informations et des rétroactions, par exemple la droite que le logiciel a tracée sur ordre de l'élève correspondra ou non à ses attentes. Les moments de description et de reproduction, organisés dans l'environnement papier-crayon sont préconisés dans les programmes de 2008 (MEN, 2008). Ceux de 2015 (MEN, 2015) envisagent également l'environnement dynamique comme un support à utiliser[2].

2. Cadre d'analyse de l'action du professeur et des élèves

Pour comprendre ce qu'il se passe en cours de la séance, nous modélisons l'action du professeur et des élèves par la notion de jeu (Sensevy, 2001). Pour cela, nous allons définir les « règles du jeu », les « manières de jouer » et le « but du jeu ». Le jeu, auquel le professeur et les élèves jouent, consiste à agir ensemble pour que les élèves s'approprient les savoirs, ici exercer un regard spécifique sur la figure matérielle, regard qui sera porté par les échanges. Autrement dit, le but du jeu consiste à expliciter des propriétés géométriques de la figure matérielle, articulant ainsi visualisation et discours. Les « règles du jeu » et les « manières de jouer » reposent sur les concepts de contrat et milieu didactiques. Le contrat est défini par Brousseau comme *« l'ensemble des comportements (spécifiques) du maître qui sont attendus de l'élève, et ceux de l'élève qui sont attendus du maître »* (Brousseau, 2009, p. 33). Il s'agit donc d'un système d'attentes réciproques, concernant d'une part les habitudes de classe, et d'autre part, les connaissances antérieures. L'activité de l'élève se déroule dans un certain milieu, défini comme *« tout ce qui agit sur l'élève, et tout ce sur quoi l'élève agit »* (Brousseau, 2010). L'élève rencontre un problème, le « à connaître » qui est sous la forme d'une description et d'une reproduction de figure matérielle. Il doit le résoudre en prenant appui sur le contrat didactique, le « déjà-là » (Sensevy, 2011, p. 163), le déjà-vu. Ce sont ces connaissances déjà là qui permettent à l'élève de s'engager dans le jeu.

3. Cadre d'analyse dans un environnement technologique

Dans un environnement technologique, Trouche (2005) définit la notion d'*« orchestration instrumentale »* comme *« l'agencement systématique des artefacts disponibles dans un environnement donné, pour la mise en œuvre d'une activité (mathématique) donnée »* (2005, p. 126). Drijvers et *al.* (2010), observant des professeurs de mathématiques travaillant avec des logiciels, a identifié différents types d'orchestrations, repris et redéfinis comme une configuration didactique, un mode d'exploitation et une performance didactique. La configuration didactique consiste en cet arrangement d'artefacts et de l'espace, le mode d'exploitation est la façon dont le professeur décide d'exploiter cette configuration didactique. Cela comprend les décisions sur la façon dont la tâche de construction est introduite et travaillée, sur les rôles possibles des artefacts, et sur les techniques à développer et à établir par les élèves. La performance didactique implique les décisions prises par le professeur sur la façon de réellement organiser les questions dans cette configuration didactique et ce mode d'exploitation.

En appui sur ces éléments théoriques, nous cherchons à décrire et à comprendre la diffusion d'un savoir géométrique dans un environnement dynamique, en particulier la mise en évidence de relations géométriques entre les objets dans les tâches de reproduction de figures. Autrement dit : comment le professeur peut-il mettre en place en classe une orchestration instrumentale, mobilisant un logiciel de géométrie dynamique, pour soutenir l'apprentissage des relations géométriques par les élèves ?

[2] Tracenpoche : http://tracenpoche.sesamath.net/

4. Méthodologie

Nous avons filmé une professeure et sa classe de CM1-CM2 au cours d'une séance de géométrie. Nous avons également organisé un entretien avec la professeure après la séance. L'analyse *a priori* de la situation nous permet de mettre en évidence des connaissances mathématiques que la figure choisie permet de traiter et des limites dans la reproduction de cette figure dans un environnement dynamique.

Nous avons transcrit les échanges dans la classe et au cours de l'entretien avec la professeure. Nous proposons une réduction de données sous la forme d'un résumé de la séance ainsi qu'un tableau récapitulatif de la chronologie des différents moments.

5. Éléments de contexte

Il s'agit d'une classe de CM1-CM2 : la séance se déroule au mois de mai. Les élèves utilisent la géométrie dynamique au moins une fois par semaine depuis le début de l'année, pour construire des figures[3]. Ils ont l'habitude de décrire et de reproduire des figures, que ce soit dans l'environnement papier-crayon ou dans l'environnement Tracenpoche. La professeure sait que les élèves ont des connaissances géométriques et des connaissances instrumentales.

II. DESCRIPTION ET REPRODUCTION D'UNE FIGURE

1. Le problème

La professeure montre à tous les élèves une figure construite dans l'environnement Tracenpoche : il s'agit d'un rectangle *ABCD*, du cercle de centre *A* passant par *D* et du point *I*, milieu de [*AB*] (*cf.* figure 1). Il s'agit de décrire la figure dans le but de la reproduire.

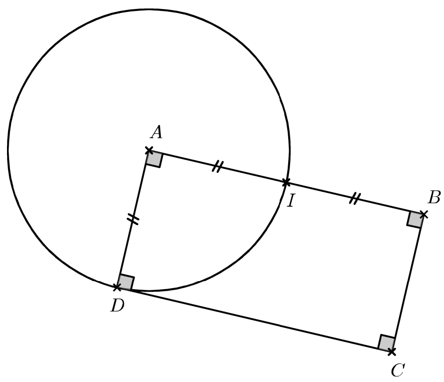

Figure 1 : Ce qui est vidéoprojeté au tableau.

2. Analyse *a priori*

Nous présentons une analyse *a priori* (Assude & Mercier, 2007). Elle se décline en trois temps :

- un 1[er] temps, une analyse descendante qui décrit les savoirs mathématiques en jeu,
- un 2[e] temps, une analyse ascendante qui envisage les techniques d'élèves,
- un 3[e] temps qui envisage les difficultés didactiques que le professeur pourrait rencontrer.

[3] Dans la suite de l'article, nous parlerons de « figure » au sens de « figure matérielle ».

Analyse des savoirs mathématiques en jeu

Pour la description de la figure dans un but de reproduction et pour la reproduction elle-même, nous pouvons repérer différentes parties :

- Reconnaître les sous-figures : ici le rectangle *ABCD*, les quatre angles droits sont codés, le cercle de centre *A* et passant par *D*.
- Reconnaître les liens entre les sous-figures : ici la largeur du rectangle *AD* est égale à la moitié de la longueur *AB*. Le codage montre les égalités de longueur des segments [*AD*], [*AI*] et [*IB*]. Le centre du cercle est *A*, un sommet du rectangle. Un point du cercle est un autre sommet du rectangle, *D*. Le milieu *I* de [*AB*] est un point du cercle.

Ce qu'il est important de noter ici, c'est que le rectangle et le cercle sont deux figures utilisées régulièrement à l'école primaire, dès le CE2, que ce soit pour la description ou la reproduction.

Analyse des techniques possibles des élèves

Concernant la description de la figure, les techniques envisageables sont d'une part des techniques perceptives, par exemple l'élève voit sur la figure un cercle, d'autre part des techniques qui prennent appui sur le codage de la figure proposée, par exemple l'élève voit un codage d'égalité de longueur[4] et en déduit que les segments concernés sont de même longueur, et enfin des techniques qui font appel à des connaissances géométriques, par exemple l'élève voit le codage de quatre angles droits et conclut que *ABCD* est un rectangle.

Pour reproduire la figure dans l'environnement Tracenpoche, nous envisageons différentes techniques[5] :

- Première technique : l'élève commence par tracer le segment [*AB*] (en sélectionnant le bouton segment), en vue de tracer le rectangle *ABCD*. Il place le point *I* milieu de [*AB*] (avec le bouton milieu). Il trace la perpendiculaire à (*AB*) passant par *A* (avec le bouton perpendiculaire). Il doit alors tracer le cercle de centre *A* et passant par le point *I* (avec le bouton cercle). Il place alors *D* à l'intersection de la droite et du cercle (avec le bouton point d'intersection), le logiciel plaçant alors deux points *D* et *D1* (le cercle et la droite ont deux points d'intersection). Il peut alors terminer le rectangle en traçant les perpendiculaires à (*AB*) passant par *B* et à (*AD*) passant par D (avec le bouton perpendiculaire). Elles sont sécantes en *C* (avec le bouton point d'intersection).
- Deuxième technique : l'élève commence par tracer le cercle de centre *A* et passant par le point *D* (avec le bouton cercle), les points *A* et *D* étant placés par un simple clic. Il trace le segment [*AD*] (avec le bouton segment), la perpendiculaire à (*AD*) passant par *A* (avec le bouton perpendiculaire). Il place *I*, un point d'intersection de cette droite et du cercle (avec le bouton point d'intersection), le logiciel plaçant alors deux points *I* et *I1*. Il doit placer le point *B* sur la droite (*AI*) de sorte que *I* soit le milieu de [*AB*] : avec le logiciel, l'élève peut tracer le cercle de centre *I* et passant par le point *A*. Il place alors le point d'intersection de la droite (*AI*) et de ce cercle. Le logiciel crée alors deux points *B* et *B1*, *B1* étant confondu avec le point *A*. L'élève pourrait également tracer *B*, le symétrique de *A* par rapport à *I*, avec le bouton symétrique par rapport à un point (technique 2 bis), si cette technique instrumentale a été travaillée (c'est le cas dans cette

[4] Les élèves ont l'habitude du codage du logiciel. L'orientation des traits de codage n'est pas mise en cause dans la séance observée, ni dans d'autres que nous n'étudions pas dans le cadre de cet article.

[5] Nous n'envisageons pas de technique utilisant des parallèles, car la professeure n'a pas encore montré le bouton « parallèle ».

classe). Il peut alors terminer le rectangle en traçant les perpendiculaires à (*AB*) passant par *B* et à (*AD*) passant par *D* (avec le bouton perpendiculaire). Elles sont sécantes en *C* (avec le bouton point d'intersection).

- Troisième technique : l'élève trace un rectangle *ABCD* quelconque (nous ne détaillons pas la technique ici), puis le cercle de centre *A* et qui passe par le point *D* (remarque : le cercle ne passe pas par le milieu du segment [*AB*])[6].

Concernant la deuxième technique (deuxième technique et technique 2 bis), le tracé du point *B* est problématique : la construction du cercle (deuxième technique) ou le symétrique d'un point par rapport à un autre point (technique 2 bis) sont des techniques inhabituelles ou hors-programme en classe de CM1-CM2, en particulier la symétrie centrale n'est généralement pas étudiée à l'école primaire.

La validation de la technique de construction de la figure passe par le déplacement de points de la figure, qui permet de voir si la construction conserve les mêmes propriétés. Autrement dit, les deux premières techniques permettent d'obtenir une figure matérielle sur laquelle les propriétés géométriques attendues ont été mises en œuvre par l'intermédiaire du logiciel. La troisième technique ne permet pas d'obtenir une représentation graphique qui résiste au déplacement. Dans ce cas, le regard de l'élève ne s'est porté que vers certaines propriétés géométriques. Le but de la situation, à savoir obtenir une figure matérielle avec toutes les propriétés géométriques attendues n'est pas atteint.

Difficultés didactiques possibles pour le professeur

L'analyse mathématique du problème effectuée en deux temps nous permet d'envisager les problèmes didactiques auxquels le professeur doit faire face pour organiser le jeu de l'élève. La figure est constituée de deux sous-figures connues des élèves. Ce qui leur permet de s'engager dans la description ou la reproduction. Les élèves peuvent s'appuyer sur des connaissances *« déjà-là »*, ce que nous avons modélisé par le concept de contrat didactique. Les élèves ont un problème de description et de reproduction à résoudre, ce que nous avons modélisé par le concept de milieu. La reproduction de la figure sous-entend pour les élèves, la prise en compte des propriétés géométriques. La validation de la reproduction dans l'environnement Tracenpoche nécessite que l'élève déplace tous les points déplaçables de la figure[7]. L'élève peut se rendre compte que la figure ressemble au modèle proposé, elle ne conserve pas les propriétés attendues, par exemple en obtenant un rectangle dont la longueur n'est pas égale au double de la largeur.

Cette analyse *a priori* en trois temps nous permet d'anticiper des difficultés dans la mise en œuvre d'une séance autour de la description et de la reproduction de cette figure. Nous avons mis en évidence les problèmes de construction et de validation dans l'environnement Tracenpoche. Ces difficultés relèvent de ce que nous avons nommé le regard spécifique sur la figure matérielle, à savoir repérer des éléments du référent géométrique. Elles dépendent également de la déconstruction dimensionnelle des figures : dans la phase de description, repérer un rectangle est suffisant. En revanche, dans la reproduction de la figure, il est nécessaire de décomposer le rectangle avec des droites. Nous nous intéressons également à l'articulation entre visualisation et discours dans la résolution de ce problème à travers la description de ce qui se passe au cours de la séance. C'est l'objet de la partie suivante.

---

[6] Nous ne détaillons pas des techniques utilisant les droites parallèles ici. Dans l'entretien avec la professeure, elle a expliqué qu'elle n'a pas encore construit un rectangle en utilisant cette notion dans l'environnement Tracenpoche.

[7] Par exemple, en prenant la deuxième technique, le point *A* est déplaçable. Le point *B* n'est pas déplaçable, même s'il se déplace au cours du déplacement du point *A*.

3. La séance de classe

Nous résumons maintenant le déroulement de la séance.

Temps (*min*)	**Phases de la séance**	**Modalités**
0 à 10	Phase 1 : **Description de la figure** (décrite et analysée ci-dessous).	Collectif La figure, construite dans l'environnement dynamique, est vidéoprojetée.
10 à 22	Phase 2 : Reproduction de la figure dans l'environnement papier-crayon.	Individuel La figure modèle, construite dans l'environnement dynamique, reste vidéoprojetée.
22 à 47	Phase 3 : Reproduction de la figure dans l'environnement dynamique.	En binôme
47 à 56	Phase 4 : **Reproduction de la figure dans l'environnement dynamique** (décrite et analysée ci-dessous).	Collectif, sur l'ordinateur de la classe dont l'écran est vidéoprojeté.
56 à 81	Phase 5 : Reproduction de la figure dans l'environnement dynamique.	En binôme
81 à 96	Phase 6 : Reproduction de la figure dans l'environnement papier-crayon.	Individuel

Tableau 1 : Les phases de la séance.

Les élèves décrivent la figure vidéoprojetée (phase 1, que nous décrirons plus précisément ultérieurement). Puis chacun la reproduit sur une feuille blanche dans l'environnement papier-crayon en utilisant la règle non graduée, l'équerre et le compas (phase 2). Les dimensions de la figure ne sont pas données. L'élève Léa (que nous avons filmée) propose une construction juste. Cependant elle ne respecte pas les contraintes données, puisqu'elle utilise la règle graduée (de nombreux élèves ont fait de même, mais les données recueillies ne nous permettent pas de développer). Puis la reproduction de la figure est à faire dans l'environnement dynamique (phase 3). Bien que les élèves aient l'habitude de travailler dans l'environnement Tracenpoche, ils rencontrent tous des difficultés[8]. En effet, le rectangle et le cercle sont tracés sans difficulté. Mais au moment où les élèves déplacent des points, la figure ne conserve pas ses propriétés. Ils savent alors dire que la figure proposée ne convient pas, mais ils ne savent pas pourquoi leur construction ne résiste pas au déplacement. La professeure décide d'interrompre la construction dans l'environnement Tracenpoche. Les élèves quittent leur poste informatique et reviennent en classe. La professeure organise la reprise collective de la manière suivante : elle invite un élève (Saturnin, élève de CM1) à construire la figure dans l'environnement Tracenpoche sous la dictée d'un autre élève (Néo, élève de CM2) (phase 4, que nous étudierons plus précisément ultérieurement). Pour valider la construction, Saturnin déplace les points. Les difficultés étant surmontées, les élèves peuvent retourner en salle informatique pour terminer la reproduction de la figure dans l'environnement dynamique (phase 5). Pour clore la séance, la professeure

[8] Les élèves utilisent régulièrement l'environnement Tracenpoche dans des tâches de construction depuis le mois de septembre (soit depuis 9 mois environ).

demande alors aux élèves de reproduire une nouvelle fois la figure dans l'environnement papier-crayon (phase 6), en tenant compte des consignes (sans la mesure).

Les élèves ne parviennent pas à construire la figure dans l'environnement Tracenpoche. Nous nous interrogeons sur cet échec à travers les actions de la professeure et des élèves. La réduction des données ainsi que l'analyse *a priori* nous permettent d'envisager deux moments significatifs en termes d'actions de la professeure et des élèves autour du changement de regard, en lien avec la mise en évidence des propriétés géométriques sur la figure matérielle. Ces deux moments correspondent aux phases 1 et 4.

4. Moment 1 : description de la figure et utilisation de Tracenpoche

a. Présentation

La professeure projette la figure construite dans l'environnement Tracenpoche (*cf.* figure 1, p. 60). Elle demande aux élèves d'expliquer ce qu'ils voient *: « Qui peut décrire la figure ? Est-ce que tu vois autre chose ? »*. Les élèves répondent aux sollicitations de la professeure (Léa : *« Je vois un cercle de centre A et de rayon AD »*, Lise : *« Je vois deux segments aux propriétés égales »*, Joris : *« Il y a des angles droits »*). La professeure demande à Lise des précisions et l'engage à aller montrer au tableau. Lise explique ce qu'elle montre : *« Ça veut dire, euh, c'est le milieu, là »*. Les deux sous-figures sont reconnues par les élèves : *« Je vois un cercle de centre A et de rayon AD »* ou *« C'est un rectangle »*.

b. Analyse des échanges

Le jeu de la description est clair pour les élèves. Ils ont l'habitude de décrire les figures. L'enjeu de la reproduction n'a pas été annoncé par la professeure. Lorsqu'elle leur demande de le faire, ils lèvent la main : c'est le signe qu'ils savent ce que la professeure attend d'eux. Les réponses proposées reposent sur différentes connaissances des élèves. Les élèves savent comment jouer et gagner. Une reconnaissance perceptive permet à Léa de décrire précisément le cercle (Léa : *« Je vois un cercle de centre A et de rayon AD »*). Une lecture des codages conduit les élèves à en déduire des propriétés géométriques (Lise : *« Je vois deux segments aux propriétés égales »*, Joris : *« Il y a des angles droits »*). Ces différents codages sont régulièrement utilisés par la professeure et les élèves. Le problème que les élèves ont à résoudre est d'extraire les deux sous-figures (« déjà-connu ») et d'établir des relations entre elles, en prenant appui sur les codages et les connaissances mathématiques adéquates (« à connaître »).

Regardons comment les échanges s'organisent : l'égalité des longueurs *AI* et *IB* est repérée par les élèves, elle est exprimée d'abord de manière maladroite (*« Je vois deux segments aux propriétés égales »*). La professeure ne peut pas comprendre ce propos : de quels segments s'agit-il ? Elle ne demande pas des précisions orales, elle choisit d'inviter l'élève à venir montrer sur la figure au tableau. Lise va pointer les deux segments de longueurs égales (les segments [*AI*] et [*IB*]) qu'elle a repérés sans verbaliser la notion de milieu. Autrement dit, la professeure choisit d'utiliser le pointage des segments, sans attendre l'énoncé d'une propriété. Ainsi, dans cette phase de description, c'est le codage qui permet de conclure que le point *I* est le milieu de [*AB*]. En classe de CM1-CM2, le milieu d'un segment est souvent repéré par la vue, puis contrôlé avec la règle graduée. Ici cette technique n'est pas accessible puisque la figure est vidéoprojetée.

Par ailleurs, l'égalité entre *AI*, *IB* et *AD* n'est pas du tout exprimée au cours des échanges. Les élèves ne la proposent pas, la professeure ne cherche pas à la faire émerger.

La figure, construite dans l'environnement dynamique, est proposée à l'écran. Nous notons que les aspects dynamiques de cette configuration ne sont pas exploités. Le déplacement des points permettant de voir différentes représentations de la même figure n'est pas proposé.

Le but du jeu, pour la professeure, est de faire repérer ce que les élèves connaissent déjà. Pour les élèves, il s'agit de reconnaître des figures déjà connues.

c. Conclusion partielle

Cette phase de définition du jeu s'appuie sur des habitudes de classe en géométrie. Les élèves répondent aux questions de la professeure, qui valide ou non, qui demande des précisions (ou non). Cette phase de définition doit permettre aux élèves de reconnaître les deux sous-figures, ce que la professeure et les élèves parviennent à faire. Les élèves peuvent s'appuyer sur leurs connaissances antérieures : le milieu didactique n'offre pas de résistance. La professeure accepte ce qu'ils proposent, même si elle demande des *« ajustements »*. La professeure ne cherche pas à leur faire établir des liens entre le cercle et le rectangle. Par exemple, le cercle passe par le point D (sommet du rectangle) ou le point I est sur le cercle. L'orientation du regard des élèves par la professeure est dirigée sur des relations géométriques proposées par les élèves (I est le milieu de [AB]) ou sur des propriétés géométriques (le quadrilatère $ABCD$ a quatre angles droits, donc c'est un rectangle). La justification de ces relations et propriétés énoncées s'appuie sur le codage de la figure. Autrement dit, la description de la figure complexe relève d'une visualisation iconique (Duval, 2005), c'est-à-dire que l'élève établit un lien entre une forme type et les éléments constitutifs de la figure.

Cependant, cette phase de description ne nous permet pas de rendre compte de la manière dont les élèves appréhendent cette figure matérielle. De nombreux implicites sont laissés à la charge de l'élève. C'est dans le moment de la reproduction de la figure que ces implicites pourraient être explicités. Les techniques pour tracer un rectangle avec quatre angles droits, les techniques pour établir un lien entre les deux sous-figures ne sont pas évoquées. En effet, elles ne sont pas nécessaires dans une phase de description.

5. Moment 2 : reprise collective suite aux tentatives de construction dans l'environnement Dynamique

Au cours de la phase 4, les élèves construisent la figure dans l'environnement papier-crayon. Nous avons filmé une élève : elle utilise les mesures. Cette production est représentative de ce que font généralement les élèves, dans la classe. Le contrat de la mesure est prégnant. Puis tous les élèves sont répartis en binôme dans l'environnement dynamique pour reproduire la figure-modèle. Aucun élève ne parvient à construire une figure qui résiste au déplacement. La professeure organise une reprise collective pour faire construire la figure. Dans l'analyse *a priori*, nous avions repéré des connaissances instrumentales qui pouvaient interroger les élèves (techniques 2 et 2bis). Dans la phase de description, nous avons noté que la chronologie de la construction est à la charge de l'élève. Nous allons ici nous intéresser à ce qu'il se passe, dans la reprise collective, suite à l'échec de la reproduction des élèves, au cours de la phase 4.

a. Présentation

La professeure choisit deux élèves. Un élève de CM2, Néo, doit donner les instructions à un élève pour reproduire la figure. Saturnin, élève de CM1, doit donc exécuter le programme de construction de l'élève Néo. La professeure explique ce qu'elle attend d'eux : *« Dis-lui ce que tu penses devoir lui donner comme construction »*. Saturnin explique ce qu'il y a à faire. Voici la figure obtenue par les élèves (*cf.* figure 2) en suivant les huit étapes suivantes :

• Tracer un cercle de centre *A* passant par le point *B*. Tracer le segment [*AB*].

• Tracer la perpendiculaire à (*AB*) passant par *A*. Tracer la perpendiculaire à (*AB*) passant par *B*.

• Placer *I* le point d'intersection entre le cercle et la *« droite passant par A*[9] *»*.

• Tracer la parallèle à (*AB*) passant par *I*[10].

• Tracer *D* le symétrique de *A* passant par le point *I*.

• Tracer la perpendiculaire à (*ID*) passant par *D*.

• Tracer le point d'intersection C de la *« droite passant par D »* et de la *« droite passant par B »*.

• Déplacer le point *B*.

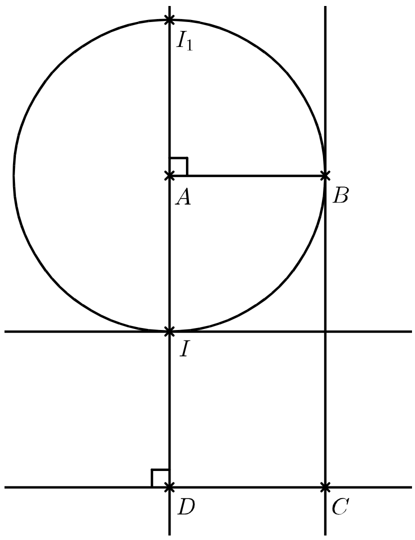

Figure 2 : Ce que les élèves ont construit
(les élèves ont modifié la figure donnée par la professeure :
le point *I* est le milieu de [*AD*] et non le milieu de [*AB*] ;
la professeure accepte ce changement).

Regardons maintenant le déroulement du début de l'action. Pour commencer, Saturnin veut faire tracer le cercle. Il explique à Néo le bouton à choisir *« Va dans le cercle »*. La professeure l'arrête tout de suite : *« Il fait quoi ? Il construit quoi ? »*. Lorsque Néo répond *« cercle »*, la professeure n'accepte pas cette réponse simple *« Il a le choix. Il faut que tu sois précis »*. Elle empêche Saturnin de construire le cercle : *« Tu vas trop vite, Saturnin. Il ne t'a pas dit encore. Efface tout »*. Elle revient auprès de Néo : *« Il construit quoi ? »*. Néo reprend : *« Un cercle »*. Elle propose à Saturnin de sélectionner le bouton cercle : *« Vas-y, clique »*. Un élève conseille Néo à voix basse et Néo déclare : *« de centre A »*. La professeure valide. Puis Néo continue *« de rayon AB »*. La professeure corrige : *« Ah, non, passant par B »*. Néo s'adresse à Saturnin en reprenant les propos de la professeure : *« passant par B »*. La professeure valide alors la construction du cercle : *« Ça, c'est bien »*.

Puis un élève, Mathias, veut lui faire tracer les deux perpendiculaires : *« On fait une droite perpendiculaire à (AB) passant par A »*. La professeure valide : *« Fais ce qu'il te dit de faire »*.

[9] Les élèves ont nommé ainsi cette droite. Nous avons repris cette expression, même si elle n'est pas exacte.

[10] Les élèves n'ont pas appris le bouton « parallèle » avec la professeure. Mais ils savent l'utiliser.

Lorsque Joris propose de continuer *« en faisant pareil »* ou en traçant *« une perpendiculaire »*, la professeure refuse et demande des précisions. Un autre élève explique ce qu'il y a à faire *« On fait une droite perpendiculaire à (AB) passant par A »*. Cette fois, la professeure accepte la proposition et permet à Saturnin de tracer : *« Je crois qu'il va pouvoir faire »*. Puis elle se tourne vers Joris pour expliquer ce qu'elle attend : *« C'est assez précis, ça. D'accord, Joris ? »*. La professeure et les élèves continuent de la même manière : un élève propose un nouvel objet géométrique, il énonce une phrase correcte du point de vue géométrique et Saturnin peut alors construire ce nouvel objet.

b. Analyse des échanges

La professeure laisse Néo définir la chronologie de la construction, elle permet également à d'autres élèves d'intervenir. La professeure explique la règle du jeu : l'élève Saturnin ne peut tracer dans l'environnement Tracenpoche que si on lui donne des instructions. Pour jouer, il est nécessaire que Saturnin ait tous les éléments. Pour donner les éléments nécessaires, les élèves s'appuient sur ce que l'on a modélisé par le *« déjà-là »*. Ces éléments nécessaires permettent de résoudre le problème modélisé par le *« à connaître »*. Pour atteindre le but du jeu, à savoir reproduire la figure en explicitant des propriétés géométriques, la professeure ajoute une contrainte qu'elle ne formule pas vraiment. Par exemple, à propos du cercle, la professeure refuse que Saturnin trace le cercle tant que Néo ne l'a pas défini correctement, à savoir nommer un centre et un point. Cependant, cette définition correcte ne dépend que de la professeure. Autrement dit, il faut que les élèves modifient leur proposition jusqu'à parvenir à établir des relations géométriques acceptées par la professeure. C'est à cette seule condition que la professeure autorise Saturnin à tracer. La professeure aménage ainsi les échanges à travers un jeu de questions-réponses, justifiées par des connaissances instrumentales. La professeure fait dire ce qu'il y a à faire avant de le faire faire. La figure matérielle ainsi obtenue fait l'objet d'une explicitation des propriétés géométriques, au fur et à mesure de son élaboration.

Il est à noter que cette explicitation trouve une limite : lorsque l'élève cherche à nommer la droite à tracer, la professeure l'aide. Par exemple, quand Saturnin doit placer le point C à l'intersection de la droite perpendiculaire à (AB) passant par B et de la droite perpendiculaire à (AD) passant par D, un élève, Axel, ne parvient pas à nommer les deux droites. La professeure formule alors *« la droite passant par le point passant par D et la droite passant par B »* (voir les étapes de construction dans le paragraphe de présentation ci-dessus).

Par ailleurs, dans l'analyse *a priori*, nous avions envisagé une difficulté concernant la construction du point D (comme le symétrique de A par rapport à I). Dans l'environnement Tracenpoche, les points A et I étant placés, comment placer le point D de sorte que I soit le milieu de *[AD]* ? Pour la professeure et les élèves, la proposition de Mathieu est retenue : placer le point D, symétrique de A par rapport à I. Cette connaissance mathématique n'est pas travaillée habituellement en CM1-CM2. La professeure précise qu'ils avaient rencontré cette notion un peu plus tôt dans l'année (propos tenu par la professeure au cours de l'entretien).

Le déplacement des points pour valider la figure est demandé par la professeure.

c. Conclusion partielle

Dans la reproduction de la figure, nous avions repéré un possible manque concernant une connaissance mathématique et instrumentale à propos du point B. Or la professeure et les élèves avaient travaillé en amont la question de la symétrie centrale (nous l'avons découvert au cours de la séance). Or cette notion n'est pas au programme de CM1-CM2. Nous pouvons penser que ces connaissances mathématiques et instrumentales n'étaient pas disponibles chez la plupart des élèves dans la mesure où ils ne parvenaient pas à construire la figure seuls. La professeure a choisi de faire reproduire la figure collectivement dans l'environnement Tracenpoche. Elle s'appuie donc sur l'échec de la reproduction (pour un certain nombre d'élèves) pour la proposer en classe entière et pour faire expliciter les relations géométriques. Pour pouvoir construire dans l'environnement Tracenpoche, il est nécessaire de dire ce que Saturnin doit faire. Ce sont d'abord des connaissances instrumentales qui sont en jeu. Mais dans le même temps, expliciter ce qu'il y a à faire rend visibles certaines propriétés géométriques. Nous pouvons modéliser cet aménagement du milieu par la notion d'orchestration (Trouche, 2005 ; Drijvers et *al.*, 2010), ce qui permet de rendre compte de la performance didactique. La professeure met l'accent sur le discours mathématique dans l'action : orienter le regard des élèves vers l'explicitation des propriétés mathématiques. La figure matérielle ainsi construite prend en compte le référent géométrique : les élèves travaillent avec la figure matérielle qu'ils ont à disposition, le discours accompagne la figure matérielle.

III. CONCLUSION ET PERSPECTIVES

Dans cet article, le point de vue retenu était de se centrer sur un usage de la géométrie dynamique par une professeure dans une perspective de mise en évidence des relations géométriques. Nous avons montré comment la description et la reproduction de figures dans un environnement dynamique pouvaient contribuer à mettre en évidence des propriétés géométriques, grâce à l'analyse *a priori*. Nous avons décrit et analysé la mise en œuvre dans une classe, les actions de la professeure et des élèves étant modélisées par la notion de jeu. La professeure engage des « faire faire aux élèves », ces derniers s'appuyant sur des connaissances antérieures et des habitudes (contrat didactique). Les élèves voient un cercle, ils se rendent capables de dire que sur la figure, ils voient un cercle de centre *A* et de rayon *AD*. Lorsqu'il est question de tracer ce cercle collectivement dans l'environnement dynamique, la professeure demande à ce que les élèves expliquent *« le cercle de centre A et passant par le point D »*. La professeure organise ainsi de nouveaux questionnements, ce que nous avons modélisé par la notion de milieu. Cela permet à la professeure d'attirer le regard des élèves sur une explicitation des relations géométriques et de voir la figure matérielle.

Par ailleurs, utiliser la géométrie dynamique donne des raisons à la professeure pour demander des ordres respectant certaines normes de programme de construction. Il est important de souligner que c'est la professeure qui oriente l'action des élèves et qui leur demande d'expliciter. Une plus-value de l'environnement dynamique est apportée ici par l'usage de la professeure, modélisé par la notion d'orchestration (Trouche, 2005 ; Drijvers et *al.*, 2010) : une configuration didactique (un ordinateur dont l'écran est vidéoprojeté dans la salle de classe), un mode d'exploitation (un élève qui pilote l'ordinateur, un autre qui lui dicte le programme de construction) et une performance didactique (la professeure qui demande des explicitations géométriques en appui sur des connaissances instrumentales). Ces usages de la géométrie dynamique auraient pu être complétés par un usage du déplacement des points déplaçables, donnant à voir différentes représentations d'une figure géométrique.

Dans l'enseignement de la géométrie se pose l'établissement du rapport entre les figures théoriques définies par des relations entre des objets géométriques et les figures matérielles qui les représentent contrôlées par la vue ou par les instruments. En cycle 3, en particulier, il s'agit de préparer les élèves à orienter leur regard de manière à établir ce rapport entre les objets géométriques et les figures matérielles. À travers nos analyses empiriques, nous avons cherché à montrer comment, au cours d'une séance de géométrie, la professeure pouvait accompagner cet apprentissage, en utilisant la géométrie dynamique. Nous avons ainsi mis en évidence différents moments au cours d'une séance : dans la phase de description, les élèves formulent des assertions explicitant des propriétés géométriques pour rendre compte de ce qu'ils voient. Dans la phase de reproduction dans l'environnement dynamique, les actions dans le logiciel sont accompagnées d'un discours géométrique grâce à l'intervention de la professeure. Ces deux moments concourent à expliciter des propriétés géométriques. Nous avons également montré les limites de cet exercice : la chronologie proposée par les élèves comporte des connaissances mathématiques qui ne sont pas nécessairement explicitées, par exemple la symétrie centrale est une connaissance mathématique hors-programme qui aurait pu ne pas être utilisée. La professeure fait des choix, par exemple elle n'intervient pas sur des expressions du type *« tracer une perpendiculaire à (AB) passant par le point A, la droite passant par A »*. Une réflexion pourrait être menée sur la façon de travailler la géométrie dynamique dans les séances de géométrie, sur les choix que les professeurs pourraient faire au cours de la séance (accepter ou non le recours à la symétrie centrale ou l'usage du bouton « parallèle », utiliser des notations pour les droites) ainsi que sur les figures complexes à décrire et à reproduire (codages présents ou non, tracés complémentaires à effectuer ou non). Cela pourrait constituer un axe de travail avec des chercheurs et des professeurs pour construire des ressources et envisager leurs exploitations en classe.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

Assude, T. & Gelis, J.-M. (2002). La dialectique ancien-nouveau dans l'intégration de Cabri-géomètre à l'école primaire. *Educational Studies in Mathematic, 50*, 259-287.

Assude, T. & Mercier, A. (2007). L'action conjointe professeur-élèves dans un système didactique orienté vers les mathématiques, In G. Sensevy & A. Mercier (eds). *Agir ensemble. L'action didactique conjointe du professeur et des élèves* (pp. 153-185). Rennes : Presses Universitaires.

Athias, F. (2014). La géométrie dynamique pour éclairer l'usage du compas. *Éducation et didactique, 9 (3)*, 109-125.

Berthelot, R. & Salin, M.-H. (1993). L'enseignement de la géométrie à l'école primaire. *Grand N, 53*, 39-56.

Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. Grenoble : La pensée sauvage.

Brousseau, G. (2009). *Le cas Gaël revisité* (1999-2009). <hal-00582620>
https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00582620/ (consulté le 27/01/2018).

Brousseau, G. (2010). *Glossaire de quelques concepts de la théorie des situations didactiques en mathématiques*.
http://guy-brousseau.com/wp-content/uploads/2010/09/Glossaire_V5.pdf
(consulté le 15/08/2017).

Celi, V. & Perrin-Glorian, M.-J. (2014). Articulation entre langage et traitement des figures dans la résolution d'un problème de construction géométrique. *Spirale, 52*, 151-174.

Lagrange, J.-B. & Caliskan-Dedeoglu, N. (2009). Usages de la technologie dans des conditions ordinaires. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 29/2*, 189-226.

Drijvers, P., Doorman, M., Boon, P., Reed, H. & Gravenmeijer, K. (2010). The teacher and the tool: instrumental orchestrations in the technology-rich mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematic, 75*, 213-234.

Duval, R., (1994). Les différents fonctionnements d'une figure dans une démarche géométrique. *Repères IREM, 17*, 121-137.

Duval, R. (2005). Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie : développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements. *Annales de Didactique et des sciences cognitives, vol. 10*, 5-53. IREM de Strasbourg.

Duval, R. & Godin, M. (2005). Les changements de regards nécessaires sur les figures. *Grand N, 76*, 7-27.

Laborde, C. & Capponi, B., (1994). Cabri géomètre constituant d'un milieu pour l'apprentissage de la notion de figure géométrique. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 14-1/2*, 165-210.

Restrepo, A.-M. (2008). Genèse instrumentale du déplacement en géométrie dynamique chez des élèves de 6ème. Thèse de l'Université Joseph Fourier, Grenoble.

Sensevy, G. (2001). Théories de l'action et action du professeur. In J.-M. Baudouin & J. Friedrich (dir.) *Théories de l'action et éducation* (pp. 203-224). Bruxelles : De Boeck.

Sensevy, G. (2011). *Le sens du savoir. Éléments pour une théorie de l'action conjointe en didactique*. De Boeck.

Trouche, L. (2005). Construction et conduite des instruments dans les apprentissages mathématiques : nécessité des orchestrations. *Recherches en Didactique des mathématiques, 25-1*, 91-138.

Ministère de l'Éducation nationale (MEN) (2008). Programmes du cycle 3. Bulletin Officiel hors-série n° 3 du 19 juin 2008. http://www.education.gouv.fr/bo/2008/hs3/programme_CE2_CM1_CM2.htm

Ministère de l'Éducation nationale (MEN) (2015). Programmes du cycle 3. Bulletin Officiel spécial n° 11 du 26 novembre 2015. http://www.education.gouv.fr/pid285/bulletin_officiel.html?cid_bo=94708