LA PROPRIÉTÉ D'ADDITION DANS LA GENÈSE DU NOMBRE

Claude BRIAND[1]
Conseillère pédagogique Mérignac (33)

Marie-Lise ROUX[2]
Professeure des écoles, Directrice d'école maternelle Mérignac (33)

Résumé : Dans cet article, nous reprenons une situation connue sous le nom du "bon panier" et décrite dans le CD-ROM conçu et réalisé par Briand, Loubet et Salin (2004), situation dans laquelle les élèves de grande section de l'école maternelle avaient à s'émanciper de l'organisation spatiale de collections pouvant entrer en conflit avec une information numérique présentée sous la forme d'une liste constituée de deux ou trois nombres. Nous prolongeons cette situation afin que les élèves s'approprient peu à peu un invariant relatif à l'addition en travaillant uniquement sur les signes sans toutefois introduire déjà « + » et « = ». Pour cela, nous construisons un milieu dans lequel les élèves sont à même de reconnaître deux ou plusieurs messages (par exemple «6;2» et «5;3») comme correspondant au même cardinal, sans avoir à s'appuyer sur les collections mais en travaillant directement sur les signes. Le savoir principal visé est le schème de l'addition. La comparaison des messages permet aussi l'émergence de stratégies de décomposition, recomposition des nombres constitutifs du message. Au cours de cette progression, nous faisons évoluer le milieu proposé aux élèves. Le rôle de l'enseignant y est souvent déterminant.

Mots-clés : situation, milieu, collection, réunion, écriture numérique, addition, validation pragmatique, validation syntaxique.

INTRODUCTION

L'activité décrite dans cet article prend sa source dans les travaux en didactique des mathématiques effectués dans les années 1990 à Bordeaux[3].

Dans le cadre des programmes 2015 de l'école maternelle, il nous a semblé particulièrement opportun de revisiter, en la prolongeant, une situation (appelée à l'époque « le bon panier ») menée en grande section afin d'établir une charnière entre la construction des premiers nombres à l'aide de leurs représentations écrites (Briand, 1993 ; Briand, 2014) et les premières lectures de messages numériques mettant en jeu plusieurs signes. Nous souhaitons ainsi mieux prendre en compte les travaux sur la propriété d'addition comme constituante de la genèse du nombre sans empiéter sur la construction de la numération réservée au CP. Pour cela, nous nous appuyons sur

[1] briandclaude@free.fr

[2] mlroux1@hotmail.com

[3] Travaux effectués au laboratoire LADIST de l'université Bordeaux I sous la direction de Guy Brousseau, à l'école maternelle Jules Michelet de Talence, à l'école maternelle Flornoy de Bordeaux, à l'école maternelle Bourran de Mérignac.

les travaux de Vergnaud (Vergnaud, 1991, 1998, 2007).

• L'addition est une propriété essentielle du nombre :

sans l'addition, il n'y a pas de concept de nombre. Les invariants relatifs à l'addition complètent les invariants plus précoces qui sont l'invariance de la suite des premiers nombres formulés (un, deux, trois, quatre... et non pas un, deux, trois, six...), le lien avec l'itération (trois, c'est deux plus un ; quatre, c'est trois plus un...), l'invariance relative à l'ordre dans lequel on compte les objets (de gauche à droite, du haut vers le bas, telle région de l'espace avant telle autre) (Vergnaud, 1991, p. 211).

• La construction de la numération suppose un travail très élaboré sur le signe : comprendre par exemple que 15 s'écrit ainsi parce que c'est une dizaine et cinq unités, ne pas se contenter de réciter l'égalité « 15 = 1 *dizaine* + 5 *unités* », mais s'en servir dans une action, sont des savoirs et des comportements difficiles à acquérir. On sait que ce travail prend du temps au cours préparatoire. Vouloir engager les enfants dans un tel travail en grande section est hors programme. Pour autant, entre l'acquisition des premiers nombres et la construction de la numération, le schème de l'addition peut être travaillé à l'école maternelle.

La situation dite « du bon panier », à condition de la prolonger en modifiant le milieu d'apprentissage, permet une première rencontre avec le schème de l'addition.

I. L'ADDITION À CONSTRUIRE

1. Le schème de base de l'addition

Pour développer ce paragraphe, nous reproduisons un long extrait d'un texte de Vergnaud (1998).

Supposons qu'à un goûter d'anniversaire, une maman demande à sa fillette de 5 ans de compter les enfants qui se trouvent dans le salon. La fillette court dans le salon et en compte quatre. Elle rapporte l'information à sa maman, qui lui demande alors de compter les enfants qui se trouvent dans le jardin. La fillette court dans le jardin et en compte trois. Combien cela fait-il en tout ? demande la maman. La fillette se précipite à nouveau dans le salon (un, deux, trois, quatre) puis dans le jardin (cinq, six, sept) et vient annoncer sept à sa maman. Elle a certes pensé l'union des deux sous-ensembles puisqu'elle recompte le tout, mais elle n'a pas opéré sur les nombres. Après quelques mois elle sera probablement en mesure soit de déclarer que $4+3$ *ça fait 7, soit de ne pas recompter les enfants du salon, de retenir seulement le cardinal 4, et de compter à partir de là les enfants du jardin (cinq, six, sept... sept !). C'est une nouvelle compétence : elle opère alors sur les nombres et pas seulement sur les ensembles. La connaissance-en-acte qui lui permet de faire l'économie du recomptage du tout est un axiome de la théorie de la mesure :* $\mathit{cardinal}(\text{salon} \cup \text{jardin}) = \mathit{cardinal}(\text{salon}) + \mathit{cardinal}(\text{jardin})$.

Vergnaud conclut alors :

La nouvelle démarche de la fillette repose sur la connaissance implicite qu'il est équivalent de faire l'union des parties d'abord et de dénombrer ensuite le tout, ou de dénombrer les parties d'abord et de faire la somme des cardinaux ensuite. C'est là une propriété constitutive du nombre, qui en fait un concept considérablement plus riche que ceux de relation d'ordre ou d'équivalence. Mais elle est bien incapable de formuler, même sous une forme verbale peu sophistiquée, la connaissance qu'elle vient de mettre en œuvre dans l'action.

Dans ce qui suit, nous proposons de faire construire cette « propriété constitutive du nombre ».

2. L’enfant lecteur du message numérique

Le premier sens que les élèves donnent à un message numérique faisant intervenir deux ou trois nombres, c’est de l’associer à une représentation conservant les informations qu’ils lient à ce message. Par exemple, ils associent un message «5;3» à une collection constituée de 5 objets et de 3 objets (figure 1). Or, à terme, pour construire l’addition, les élèves auront à apprendre que le message «5;3» peut être aussi associé à une collection constituée de 6 objets et 2 objets (figure 2) ou de 4 objets et de 4 objets, *etc.*, afin de lier les messages «5;3», «6;2», «4;4», *etc*. entre eux. Or beaucoup d’enfants ne reconnaissent pas ces collections comme étant équipotentes. Nous pouvons alors faire l’hypothèse que cela rendra pour eux d’autant plus difficile l’identification de la paire «5;3», à la paire «6;2» lors de la genèse de l’addition.

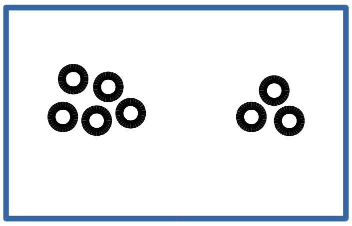


Figure 1

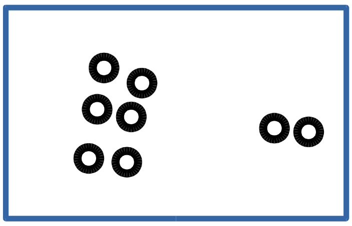


Figure 2

3. Notre hypothèse

Nous faisons comme hypothèse que le savoir écrit par Vergnaud (2007) : *« dénombrer les parties d’abord et faire la somme des cardinaux ensuite »* peut être la solution à un problème posé dans une situation modifiée à partir de celle du « bon panier » en prolongeant celle-ci par un travail sur des écrits. Lorsque les élèves seront à même d’identifier des messages signifiant le même nombre sans avoir à s’appuyer sur les collections mais directement en comparant ces messages, cela voudra dire qu’ils auront construit des théorèmes (en acte au sens de Vergnaud) qui s’appuient sur l’addition, la décomposition, la recomposition des nombres constituants du message.

4. Les Programmes 2015 de l’école maternelle

Les programmes de 2015 insistent sur deux points : la décomposition-recomposition des petites quantités et l’itération. La consolidation du nombre

> *demande des activités nombreuses et variées portant sur la décomposition et recomposition des petites quantités (trois, c’est deux et encore un ; un et encore deux ; quatre, c’est deux et encore deux ; trois et encore un ; un et encore trois), la reconnaissance et l’observation des constellations du dé, la reconnaissance et l’expression d’une quantité avec les doigts de la main, la correspondance terme à terme avec une collection de cardinal connu. L’itération de l’unité (trois, c’est deux et encore un) se construit progressivement, et pour chaque nombre. Après quatre ans, les activités de décomposition et recomposition s’exercent sur des quantités jusqu’à dix (BO spécial n° 2 du 26 mars 2015, p. 16).*

Dans cette partie des programmes, moins homogène que la précédente, une certaine confusion existe. On y propose de décomposer-recomposer des quantités, donc de travailler sur des objets tout en demandant de travailler sur l’itération de l’unité, donc de travailler sur des nombres sans que ce passage des quantités au nombre soit pris comme objet d’étude. De plus, il n’est pas précisé si le travail s’effectue sur une énonciation orale des nombres ou sur une production écrite de ces nombres.

Pour lever cette ambiguïté, nous rapprochons la décomposition-recomposition exercée sur les nombres de l'appropriation de la propriété d'addition au sens de Vergnaud : *« Cette propriété d'addition est la condition nécessaire à la conceptualisation du nombre »* (Vergnaud, 2007). Il s'agit de construire une situation d'apprentissage par adaptation (Brousseau, 1998), situation dont l'enjeu essentiel est un enjeu de savoir : la solution optimale au problème posé résulte de la capacité des élèves à décomposer-recomposer un nombre. À cet enjeu s'ajoutent (Bouysse, 2015) des enjeux langagiers : la production de signes permet de concevoir un monde, de décontextualiser, de dépersonnaliser, des enjeux sociaux : à un moment donné, l'élève aura à écouter, à lire l'autre, des enjeux éthiques : engagés dans une telle situation, les élèves cherchent à savoir, à comprendre et accepter l'action d'autres élèves.

II. LA SITUATION

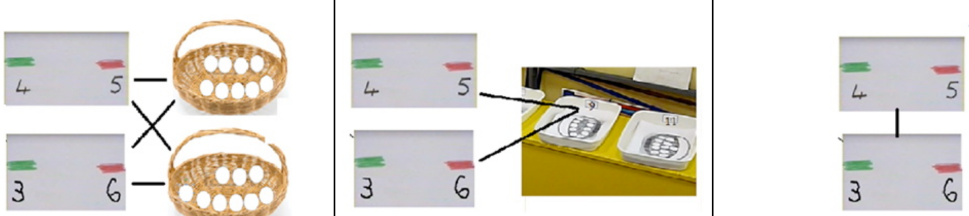
1. Description générale de l'activité proposée

Dans une première étape, l'activité des élèves consiste à aller chercher un dessin de panier contenant des œufs (une collection d'objets) à l'aide d'un message numérique. Ce message est constitué de deux ou trois nombres associés à des couleurs (voir figure 3). Les élèves doivent choisir un panier qui permet d'y colorier les œufs conformément au message. Le coloriage demandé permet une validation par l'élève lui-même. Comme nous le verrons, les élèves pourront abandonner cette validation par coloriage dès qu'ils sont « sûrs » de leur réussite.

Dans la deuxième étape les dessins des paniers d'œufs sont classés dans des barquettes selon le nombre total d'œufs qui y sont représentés. Ce nombre est inscrit sur la barquette. Le but est que ce nombre soit perçu par les élèves comme un moyen de retrouver plus rapidement un bon panier dès qu'ils reçoivent un message.

Dans la troisième étape, les élèves sont amenés à travailler directement sur les messages afin de découvrir ceux qui conduiraient à la même barquette de paniers. La validation de l'équivalence des messages s'effectuant d'abord par recours au matériel puis par un travail direct sur les signes. Cette situation fait l'objet de plusieurs séances. En cela nous pouvons parler d'un chantier « ouvert ».

Dans ces trois étapes, les élèves sont confrontés plusieurs fois à la même activité pour réussir.



Première étape	**Deuxième étape**	**Troisième étape**
Le message renvoie à une collection dont la disposition n'est pas à l'identique.	L'étiquette du nombre est un moyen de repérer un bon panier quelle que soit la disposition des œufs.	Les messages sont reconnus directement comme signifiant le même nombre.

Figure 3 : Schéma explicatif de la progression.

2. Variables de la situation

Cette situation se décline selon trois étapes dont les variables didactiques sont les suivantes :

• **Variable 1** : la configuration de la collection d'œufs.
Les éléments de la collection sont disposés comme le message le suggère (pour le message «5;3», 8 œufs en configuration « 5 et 3 », figure 4) ou non (configuration « 6 et 2 », figure 5).

Figure 4

Figure 5

• **Variable 2** : le nombre total d'œufs.
Le nombre total d'œufs à colorier varie entre 4 et 12.

• **Variable 3** : le message.
Le message est laissé sur la table ou emporté par l'élève pour aller à la recherche du bon panier.

• **Variable 4** : les paniers.
Les paniers sont classés ou non. Ils sont rassemblés sur une table indépendamment du nombre total d'œufs ou bien placés dans des barquettes étiquetées selon le nombre (photo 1). Par exemple les paniers sur lesquels figurent 8 œufs sont tous dans la barquette étiquetée 8.

Photo 1

3. Analyse *a priori*

a. PREMIÈRE ÉTAPE

L'identification d'un nombre à une disposition particulière d'une collection, comme celle des dés, des dominos, des doigts est une étape utile mais peut constituer un obstacle à la construction ultérieure de l'addition si elle constitue la seule liaison entre nombre et quantité. Afin d'éviter le risque de « fossilisation » des images mentales, nous reprenons cette étape déjà existante dans les travaux antérieurs.

L'élève dispose d'un message et doit aller choisir un « bon panier » au fond de la classe avec son message (photo 2).

Photo 2

Le bon panier est soit un panier dont la disposition des œufs est à l'identique de ce que le message décrit (contexte de type 1), soit un panier dont la disposition des œufs ne correspond pas à ce que le message décrit mais correspond au total des œufs (contexte de type 2). Nous proposons pour cette étape de mêler les deux contextes. Les élèves ayant à rejouer plusieurs fois dans la même séance, ils seront amenés à rencontrer les 2 types de contextes. Dans les deux cas, le coloriage permet de valider le choix.

Procédures attendues

- l'élève cherche à retrouver dans un panier la configuration suggérée par le message ;
- l'élève prend en compte un seul nombre du message ou une seule couleur pour trouver le bon panier ;
- l'élève prend le « bon panier » en se servant de ses doigts, et procède à un comptage-numérotage, ou/et à un surcomptage-numérotage ;
- l'élève prend le « bon panier » en mettant en œuvre une procédure de comptage-numérotage, ou/et de surcomptage-numérotage et essaie d'anticiper le coloriage des œufs (1 bleu, 4 verts : « un ; un, deux, trois, quatre »). Il voit s'il reste ou s'il ne reste pas des œufs non coloriés ;
- l'élève prend le « bon panier » parce qu'il maîtrise déjà l'addition : il sait déjà que « 7 et 2 », c'est 9 ou « 4 et 4 » c'est 8.

b. DEUXIÈME ÉTAPE

L'élève dispose d'un message et doit choisir un panier qui permettra un coloriage conforme. Cette fois, les paniers dessinés sont classés dans des barquettes sur lesquelles le nombre d'objets, présents sur ces paniers, est inscrit (photo 3). Ils lisent leurs messages et ne les apportent pas pour choisir le bon panier.

Photo 3

On s'attend à ce que les élèves se servent petit à petit de l'étiquette collée sur la barquette afin de choisir leur bon panier sans avoir à passer en revue tous les paniers de toutes les barquettes. Toutefois, ils peuvent quand même procéder exactement comme à l'étape précédente et ignorer l'information apportée sur la barquette.

Procédures attendues

- l'élève mémorise le message, ou tout au moins la partie numérique du message «5;4», et se ramène à l'étape 1 ;
- l'élève fait le lien entre l'étiquette et son message en effectuant la somme des nombres du message.

Remarque : Selon les élèves, il est possible de proposer des messages composés de trois termes, comme par exemple «1;5;4».

c. TROISIÈME ÉTAPE

De la validation pragmatique à la validation syntaxique

Il s'agit de classer les messages proposés selon qu'ils conduisent aux mêmes barquettes. L'enjeu est de faire découvrir que plusieurs messages correspondent à une même quantité. Par exemple, la paire «1;5» renvoie à un panier comme celui de la photo 4 mais la paire «2;4» renvoie aussi à ce panier. Ce panier est dans la barquette 6. Tous les paniers de la barquette 6 conviendraient.

Photo 4

Cette étape nouvelle suppose plusieurs confrontations avec le milieu des signes et le milieu matériel. En effet, lors des premiers classements des messages, les élèves valident leurs prévisions en revenant sur les paniers avec les œufs dessinés (validation pragmatique avec appui sur les quantités). Mais l'enseignant va demander de prévoir par comparaison directe de messages ceux qui conduiront aux mêmes barquettes (validation syntaxique avec appui sur les nombres).

Procédures attendues

- l'élève a besoin d'aller chercher, pour chaque message, le panier dans la bonne barquette ;
- l'élève lit les messages, effectue à chaque fois l'addition mentalement puis il les classe ;
- l'élève lit les messages, utilise ses doigts pour faire un recomptage, et classe les messages.

Dans ce cadre, la décomposition, recomposition des nombres doit constituer un observable. Par exemple sur des messages étant affichés : «6;2», «5;3», «2;5;1», *etc.*, les élèves peuvent se référer à la somme (8) et faire des remarques comme : « 6, c'est 1 de plus que 5 et 2, c'est 1 de moins que 3».

C'est à ce stade que nous faisons l'hypothèse que les élèves concevront une première approche de l'addition, donc du nombre.

III. COMPTE-RENDU DE L'OBSERVATION

Cette observation a été effectuée en parallèle dans deux classes de grande section, entre avril et juin 2016[4]. Nous publions les résultats détaillés d'une seule des deux classes, ceux de l'autre classe étant très proches.

1. Première étape

a. PHASE COLLECTIVE : PRÉSENTATION DU MATÉRIEL ET ÉNONCÉ DE LA CONSIGNE

Matériel

- des messages avec une consigne de coloriage (voir photo 5) ;
- des dessins de paniers contenant des œufs (cardinal variant de 5 à 12... ou plus) étalés sur

[4] Observations effectuées en particulier dans les classes de Lolita Simond à l'école maternelle Bourran à Mérignac (33700), et de Marie-Lise Roux, école maternelle du parc à Mérignac (33700).

les bancs ou le tapis ou une table ;

• des stylos feutre de couleur pour colorier les œufs.

L'enseignant présente le matériel et la situation à toute la classe et énonce la consigne.

Consigne

Aujourd'hui, je vais vous présenter le jeu du "bon panier". Chaque élève va recevoir un message.

L'enseignant montre deux ou trois messages différents et poursuit :

*Il devra aller chercher sur les bancs le **bon panier**, c'est-à-dire celui qui a **juste ce qu'il faut d'œufs** pour pouvoir les colorier en suivant exactement le message donné. Dès que vous trouvez le bon panier, vous revenez à votre place et vous coloriez les œufs comme l'indique le message.*

L'enseignant montre différents dessins de paniers et la table où les élèves pourront aller colorier les œufs.

Photo 5 : Exemple de résultat attendu.

Il conclut :

Vous aurez gagné s'il ne reste pas d'œufs non coloriés et s'il n'en manque pas. Vous pourrez jouer plusieurs fois si vous le souhaitez.

b. PHASE INDIVIDUELLE EN ATELIER DIRIGÉ DE 5, 6 ou 7 ÉLÈVES DE NIVEAUX HÉTÉROGÈNES

NB : La consigne sera répétée ensuite au sein de chaque groupe à chaque reprise du jeu.

Rôle de l'enseignant : il s'assure que la consigne a bien été comprise. Il ne donne aucun renseignement sur « comment faire pour gagner ». La différenciation se fait en fonction de la connaissance qu'il a des compétences de ses élèves. Les règles du jeu restent les mêmes pour tous, ainsi que les consignes. L'accompagnement des élèves dans leur tâche ne réside pas en une explicitation précoce des procédures efficaces pour gagner. Ce sont les messages et le cardinal des collections d'œufs proposés qui varient en fonction des élèves. L'enseignant observe attentivement les procédures des élèves et les encourage. Il constate avec les élèves la réussite ou l'échec à l'issue du coloriage. Le cas échéant, il prend des photos gagné et/ou perdu pour un affichage ultérieur.

Remarque : Lorsqu'ils valident en coloriant, certains élèves anticipent et voient, avant d'avoir terminé, qu'ils n'ont pas trouvé le bon panier. L'enseignant accepte que le coloriage soit interrompu et peut les inviter à chercher un autre panier avec le même message.

Observation des procédures et analyse

Nous avons pu observer non seulement toutes les procédures attendues mais aussi de nouvelles procédures :

- Certains élèves ne trouvent le « bon panier » que lorsque celui-ci présente une disposition des œufs qui correspond exactement à la partition évoquée par le message (contexte 1) ; ces élèves sont déstabilisés lorsque le cardinal du message correspond à un « bon panier » dont la disposition est différente de celle du message (contexte 2) (exemple pour un cardinal 5, avec le message «3;2» : si les œufs du panier sont alignés et non pas disposés en 3 et 2). Cette difficulté attendue constitue dans un premier temps un obstacle parce que les élèves associent l'organisation spatiale des œufs dessinés aux signes du message. C'est justement le dépassement de cet obstacle créé par un milieu voulu antagoniste qui permettra aux élèves de dissocier (et d'associer) diverses écritures du nombre et des quantités désignées.
- Certains élèves ne prennent en compte qu'un seul nombre du message ou qu'une seule couleur pour trouver le bon panier.
- Quelques élèves (qui savent associer un mot-nombre à chaque écriture chiffrée de la suite numérique jusqu'à 30) lisent le message comme un nombre à deux chiffres «2;7» lu « 27 » et ne trouvent pas le bon panier.

Ces deux dernières procédures relèvent essentiellement d'une incompréhension de la consigne et conduisent à une validation (coloriage) qui échoue. Une nouvelle confrontation au jeu est alors nécessaire.

Nous pouvons noter que la validation par les élèves, si elle est oralisée avec l'enseignant et/ou les pairs (le jeu proposé permet aux élèves de vérifier par eux mêmes s'ils ont « gagné », ou « perdu »), permet une meilleure appropriation de la situation.

c. BILAN COLLECTIF

Lorsque la majorité des élèves sont en réussite, l'enseignant organise un bilan collectif, afin de faire émerger et verbaliser par les élèves eux mêmes les difficultés ou les réussites. Il utilise les messages et dessins de paniers coloriés produits comme supports des questionnements, par exemple : *« Est-ce que ce panier choisi était un* ***bon panier*** *? Pourquoi ? Êtes-vous d'accord ? Pourquoi ? ».*

L'enseignant propose à des élèves qui ont été en difficulté de reprendre le jeu, afin de voir si les échanges avec les autres élèves leur permettent de changer de stratégie, leur procédure initiale n'ayant pas réussi à tous les coups.

Photo 6

Remarque : pour des raisons de rapidité, afin de ne pas avoir à colorier les œufs lors de la validation, les élèves se contentent de « marquer » les œufs en traçant un simple trait (photo 6).

d. AJUSTEMENTS

À la suite du bilan, l'enseignant propose à nouveau la situation aux élèves pour lesquels il a repéré des difficultés. Pour cela, il adapte les quantités proposées (cardinal du message plus petit, mise en contexte de type 1 puis de type 2), en accompagnant, mais toujours sans donner la démarche de résolution.

Au cours de cette étape, nous avons pu noter que, dans un groupe hétérogène de 27 élèves :

- 11 élèves réussissent dès la première séance, quelle que soit l'organisation spatiale des œufs dans les paniers ;
- 2 élèves lisent dans un premier temps le message comme un nombre à deux chiffres, puis s'approprient la consigne et réussissent ;
- 1 élève se bloque, regarde les autres faire dans le groupe et gagne deux fois avant la fin de l'atelier ;
- 3 élèves lisent le plus grand nombre sans tenir compte du plus petit ;
- 4 élèves surcomptent à partir du plus grand des deux nombres et colorient les œufs avec une seule couleur ;
- 4 élèves font des erreurs de dénombrement en comptant les œufs représentés dans les paniers ;
- 3 élèves réussissent lorsque l'organisation des œufs dans le panier correspond à la disposition du message (avec un petit nombre d'œufs) mais perdent dès que l'organisation des œufs est différente.

Ces 7 élèves (des deux derniers groupes) ainsi que 2 autres élèves ayant réussi précédemment mais semblant peu sûrs d'eux, réussissent lors de la séance de reprise qui suit le bilan collectif.

2. Deuxième étape

a. PHASE COLLECTIVE : PRÉSENTATION DU MATÉRIEL ET ÉNONCÉ DE LA CONSIGNE

Matériel

- des messages comme pour l'étape 1 ;
- des dessins de paniers avec œufs, classés dans des barquettes selon le nombre d'œufs ; une étiquette à l'intérieur de chaque barquette sur laquelle est mentionné le nombre d'œufs dessinés, sans que cela soit annoncé aux élèves (photo 7).

Photo 7

Consigne

Aujourd'hui, vous allez rejouer au jeu du bon panier. Je vais vous donner un message, mais cette fois vous allez le laisser sur la table. Les paniers sont rangés dans des barquettes ; vous irez chercher le bon panier dans une de ces barquettes au fond de la classe. Vous pourrez ensuite venir *à votre place et colorier les œufs pour vérifier.*

b. PHASE INDIVIDUELLE EN ATELIER DIRIGÉ DE 5, 6 ou 7 ÉLÈVES DE NIVEAUX HÉTÉROGÈNES

Observation des procédures et analyse

Les dessins de paniers avec œufs étant cette fois rangés dans des barquettes sur lesquelles figure l'étiquette visible du nombre correspondant, les élèves vont faire petit à petit le lien entre les nombres du message donné et l'étiquette.

- Certains élèves mémorisent le message sans toutefois effectuer la somme et prennent bien en compte la collection d'œufs dans sa totalité et pas les sous collections isolément.
- D'autres calculent la somme des nombres inscrits sur le message comme le font certains élèves dans l'étape 1 et trouvent le « bon panier ». Cette première addition constitue la procédure optimale au problème posé dans ce milieu aménagé.

Remarques :

- Le choix des nombres proposés dans le message joue un rôle dans l'action des élèves : trouver un panier pour le message «1;2;1» n'appelle pas nécessairement la même procédure que pour le message «5;4».
- Les élèves ont parfois l'impression que le message avec trois nombres est plus compliqué que celui constitué de deux nombres.

c. BILAN COLLECTIF

Lorsque la majorité des élèves est en réussite, l'enseignant organise à nouveau un bilan collectif, l'idée étant de faire émerger, par les élèves eux-mêmes, les difficultés ou les réussites.

Quels sont ceux qui ont facilement trouvé le bon panier ? Comment avez-vous fait ? Est-ce que vous pensez pouvoir gagner à chaque essai grâce à votre méthode ?

d. SENSIBILISATION À LA DÉCOMPOSITION-RECOMPOSITION

L'enseignant propose de prendre un message et de faire trouver aux élèves tous les « bons paniers » lui correspondant (c'est-à-dire dont le nombre d'œufs est le même), ce qui conduit à identifier le message, la barquette et les paniers y figurant, d'établir un lien entre le message et plusieurs configurations matérielles et donc de se préparer à la troisième étape qui permettra d'établir un tableau de décomposition des petits nombres (jusqu'à 10, 11 ou 12) en affichant tous les messages et en cherchant éventuellement d'autres décompositions pour un cardinal donné.

À la fin de la séance, l'enseignant précise donc que les élèves joueront à un troisième jeu, mais uniquement avec les messages et les étiquettes « nombres » qui ont désigné les barquettes : *« Il faudra trouver à quelle étiquette correspondent les messages ».*

Au cours de cette étape, dans un groupe hétérogène de 27 élèves :

- 19 élèves réussissent dès les premiers essais ;
- 5 élèves ne trouvent pas "le bon panier" initialement, mais réussissent au cours des essais suivants ;
- 2 élèves réussissent uniquement lorsque le message comporte des petits nombres ;
- 1 élève continue à avoir besoin d'un accompagnement.

NB : Tous les élèves veulent continuer à jouer.

3. Troisième étape

a. PHASE COLLECTIVE : PRÉSENTATION DU MATÉRIEL ET ÉNONCÉ DE LA CONSIGNE

Matériel

- des messages avec nombres et couleurs ;
- des dessins de paniers avec œufs, classés dans des barquettes ;
- des étiquettes indépendantes avec des nombres ;

L'enseignant présente le matériel et énonce la consigne.

Consigne

Aujourd'hui, vous allez jouer avec les messages. Vous allez prévoir quels messages correspondent à la même barquette. Nous vérifierons ensuite vos prévisions en allant voir dans une barquette.

b. PHASE PAR PETITS GROUPES DE 6 ou 7 ÉLÈVES

Les élèves sont assis sur le tapis dans le coin regroupement devant le tableau blanc. L'enseignant présente le matériel bien connu des élèves. Il étale sur le tapis (photo 8) des messages (avec 2 intrus) correspondant à un nombre écrit sur les étiquettes dans les barquettes (disposées sur les bancs à côté). Chaque élève doit pouvoir prendre au moins un message.

Photo 8

L'enseignant a choisi les messages «4;4», «5;3», «6;2», «1;7», deux intrus «2;5» et «1;3» et des messages signifiant 10 : «7;3 », «5;5» et «4;6».

Est-ce que vous pouvez trouver tous les messages qui correspondent à la même barquette ?

Il ajoute :

Par exemple, ces deux messages («3;2» et «4;1») amènent à la même barquette ; Qu'en pensez-vous ?

Il demande à chaque élève de prendre un message (sans préciser qu'il y a des intrus) et demande au groupe de mettre ensemble les messages qui correspondent à la même barquette.

Photo 8

Une fois les messages regroupés (photo 9), si certains élèves hésitent, l'enseignant permet de recourir aux paniers. C'est en effet au cours de cette étape que les élèves apprennent à regrouper les messages par une lecture directe (validation syntaxique).

Certains élèves ont encore besoin de s'assurer du bon classement des messages en ayant recours aux paniers (validation pragmatique).

Observation des procédures et analyse

- L'élève a besoin d'aller chercher le panier dans la bonne barquette.

• L’élève lit les messages, effectue à chaque fois l’addition mentalement et classe les messages.

• L’élève lit les messages, utilise ses doigts pour faire un recomptage, et classe les messages.

La vérification se fait avec tout le groupe. L’enseignant organise ensuite les messages sur le tableau.

c. PHASE COLLECTIVE

L’enseignant affiche, cette fois, des messages correspondant à trois nombres différents, par exemple 7, 8 et 10. Il demande aux élèves de classer des messages selon qu’ils amènent à l’étiquette 7, à l’étiquette 8 ou à l’étiquette 10. Chaque élève a en charge un message.

d. CONCLUSION

Les messages correspondant au cardinal de chacune des trois collections sont affichés sur le tableau en colonne :

7	**8**	**10**
«3;4» «6;1» ...	«4;4» «6;2» ...	«7;3» «5;5» ...

e. PHASE COLLECTIVE : INSTITUTIONNALISATION

L’enseignant a écrit tous les nombres de 5 à 12 sur le tableau dans des colonnes. Il donne une étiquette-message à chaque élève et demande d’aller placer l’étiquette sous le nombre correspondant.

L’affichage final validé par le groupe formalise le savoir visé. Des affichages pour chaque étape sous formes diverses servent de référence au groupe. Les traces individuelles des progrès peuvent être consignées dans le carnet de l’élève.

IV. CONCLUSION

Il s’agissait de partir d’une expérimentation ancienne, connue, et de la prolonger afin que les élèves s’approprient peu à peu un invariant relatif à l’addition par un travail exclusif sur les signes sans pour cela empiéter sur la construction de l’addition au CP.

Pour cela, nous avons pris en compte deux points essentiels :

- La construction des premiers nombres suppose l’élaboration d’un langage écrit donc de règles de lecture, de « grammaire », qui permettent de s’émanciper progressivement du milieu matériel.
- La reconnaissance de la propriété d’addition est une condition nécessaire à la conceptualisation du nombre.

Nous avons donc étudié cette situation, en ce qu’elle permet aux élèves d’élaborer des règles liées à l’addition, par exemple «3;4» c’est aussi «2;5», sans avoir à se référer à des collections et donc de s’approprier de façon sûre les premiers nombres. À l’issue de ce travail, les élèves ont commencé à savoir lire une liste de deux ou trois nombres comme signifiant une somme et à comparer deux listes de nombres. Ce savoir, repris en cours préparatoire permettra une construction de l'addition.

La décomposition-recomposition d'un nombre ainsi que l'itération de l'unité y sont des observables, parmi d'autres. Lors de la dernière étape, les élèves travaillent sur l'écriture des nombres. Ils savent que les messages «6;3», «5;4», «8;1» donnent la même information numérique sans avoir, à ce stade, besoin des objets, même si ceux-ci peuvent être tenus à disposition pour une éventuelle validation.

Pour faire construire ce savoir, différentes étapes ont du être franchies peu à peu. Les déclinaisons de cette situation en trois moments décisifs ont permis à chaque fois aux élèves de jouer, d'agir, de valider et à l'enseignant de les accompagner et d'institutionnaliser des savoirs en cours. Un tel dispositif suppose un travail dans la durée et une conception de l'apprentissage comme une adaptation de l'élève à un milieu organisé. Dans ce cadre, même si l'enseignant donne des consignes de jeu précises et accompagne les élèves, l'explicitation des procédures n'a pas lieu d'être avant ou pendant l'action, mais seulement lorsque les élèves ont tous fait des essais, validé eux-mêmes leurs échecs et réussites, et confronté leurs démarches.

Si la conceptualisation consiste en premier lieu en l'identification d'invariants opératoires explicites ou implicites, alors il est décisif d'imaginer des situations permettant aux élèves de dégager progressivement des invariants et de favoriser ainsi les progrès de la conceptualisation.

Ce travail nous a confirmé que l'on apprend d'abord en situation. Au delà des enjeux d'apprentissage, ce sont les enjeux sociaux (les élèves communiquent, apprennent ensemble), les enjeux éthiques (ils s'écoutent, tiennent compte des déclarations des autres élèves, ils sont tous mobilisés) que nous avons pu observer.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

Bouysse, V. (2015). *Les nouveaux programmes pour l'école maternelle, quels enjeux, quelles évolutions ?* http://www.circ-ien-illfurth.ac-strasbourg.fr/wp-content/uploads/2012/01/2015.10.13-Conf%C3%A9rence-V.-Bouysse-diaporama-enseignants.pdf

Bouysse, V. (2015). *La refondation de l'école maternelle, enjeux, outils, points de vigilance* http://www.esen.education.fr/fileadmin/user_upload/Modules/Ressources/Conferences/html/15-16/bouysse_v/docs/1595_bouysse_v_refondation_ecole_maternelle_A.pdf

Briand, J., Loubet, M. & Salin M.-H. (2004). *Apprentissages mathématiques en maternelle*. Paris éditions Hatier. CD-ROM.

Briand, J. (2014). Les mathématiques du début de la scolarité sont elles simples à enseigner ? Construire le goût d'apprendre. GFEN. *Chronique sociale*, 103-125.

Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. Grenoble. La pensée sauvage.

Vergnaud, G. (1991). L'appropriation du concept de nombre : un processus de longue haleine. In J. Bideaud, C. Meljac & J.-P. Fischer (Eds) *Les chemins du nombre* (pp. 271-284). PUL.

Vergnaud, G. (1998). *Les compétences, Bravo ! Mais encore ? Réflexions critiques pour avancer*. http://pedagopsy.eu/competences_vergnaud.html

Vergnaud, G. (2007). Calcul : les billevesées de l'Académie. http://www.cafepedagogique.net/lemensuel/lenseignant/sciences/maths/Pages/8016CalculBilleveseesAcademie.aspx

MEN (2015). BO du 18 février 2015. http://www.education.gouv.fr/pid285/bulletin_officiel.html?cid_bo=86940