L'ARGUMENTATION DANS LA RÉSOLUTION DE PROBLÈMES MATHÉMATIQUES UNE ÉTUDE DE CAS LIÉE À UN RALLYE AU CYCLE 3

Lalina COULANGE[1]
Lab-E3D, Université de Bordeaux

Anne-Claire FOURCADE[2]
PEMF, École de Banos, Mont-de-Marsan Sud Chalosse

Résumé : La recherche présentée dans cet article a pris son origine dans le contexte d'un dispositif spécifique : celui d'un rallye mathématique proposé à des élèves de cycle 3. Nous nous sommes interrogées sur les pratiques argumentatives liées à la résolution de problèmes mathématiques posés à des élèves de CM et de 6e dans ce contexte. En quoi et comment la recherche de solutions à ces problèmes (classiquement proposés dans des rallyes mathématiques) peut-elle contribuer à développer des pratiques d'argumentation mathématique ? Lesquelles ? Quelles sont les spécificités langagières de telles pratiques d'élèves de CM ou de 6e, à l'écrit (dans les solutions produites collectivement) ou à l'oral (dans la recherche de solutions) ?

Mots-clés : résolution de problèmes, argumentation mathématique, pratiques langagières, modèle de Toulmin.

INTRODUCTION

La recherche présentée a trouvé son origine dans une pratique d'enseignement, liée à un rallye mathématique en CM-6e. Ce rallye, piloté par une équipe de circonscription (Mont-de-Marsan Sud Chalosse), est implanté depuis de nombreuses années. Chaque année, des classes de cycle 3, CM1-CM2, CM2 ou 6e y participent : pendant l'année 2015-2016, 14 classes de CM et 9 classes de 6e se sont investies dans le dispositif. Les épreuves de rallye, au nombre de trois sur l'année, comportent chacune six énoncés de problèmes. Les élèves, par groupes, cherchent à répondre aux problèmes posés pendant 50 minutes (pour les élèves de 6e) ou 1 heure (pour les élèves de CM1-CM2), de manière quasi-autonome. Une feuille comportant une réponse par problème doit être retournée pour toute la classe. L'enseignant(e) n'intervient ni dans la recherche d'une solution par les différents groupes d'élèves ni dans le choix d'une solution commune par l'ensemble des élèves de la classe. Elle(il) se contente de réguler les échanges entre les élèves (au sein d'un groupe, voire plus collectifs).

Cette étude a été motivée par un questionnement de l'une d'entre nous. En tant que professeure des écoles, nous faisions participer régulièrement nos classes de CM2 à ce rallye mathématique

[1] lalina.coulange@u-bordeaux.fr

[2] anne-claire.fourcade@ac-bordeaux.fr

depuis plusieurs années. Nous constations alors un investissement important de la part de l'ensemble des élèves, ce qui nous conduisait à projeter (de manière positive) des apprentissages mathématiques de leur part, dans le cadre de ce dispositif. Ceci nous a conduites à nous interroger sur la nature des apprentissages potentiels des élèves dans le cadre de ce rallye mathématique. Autrement dit, quelles mathématiques les élèves apprennent-ils lorsqu'ils sont engagés dans un tel dispositif ? Que peut-on dire de ces apprentissages en lien avec la résolution des problèmes rencontrés par les élèves au sein du rallye ?

Les problèmes proposés dans le cadre de ce dispositif sont considérés et désignés comme des problèmes *« de recherche »*, *« pour chercher »* ou *« ouverts »* par les enseignants volontaires pour participer à ce rallye ou par les anciennes ressources officielles (MEN, 2002). Hersant (2008, 2012) précise la nature d'enjeux spécifiques d'apprentissages, relatifs à l'argumentation ou la preuve en mathématiques, en lien avec la résolution de tels problèmes. Toutefois, tout comme dans le cadre de travaux plus anciens menés au sein l'équipe ERMEL (Douaire & Hubert, 1999, 2001), Hersant (2008) met en avant des conditions spécifiques relatives à ces apprentissages (liés à l'argumentation ou à la preuve, *via* la production de conjectures, de contre-exemples, *etc.*). Ces conditions renvoient à la fois à des choix de « bons » problèmes, mais aussi à des pratiques enseignantes spécifiques dans la conduite de classe qui semblent parfois éloignées de ce que recouvrent les pratiques enseignantes plus ordinaires. Par ailleurs, les travaux de Pineau-Choquet (2014) révèlent une variété importante d'énoncés de problèmes, pourtant tous qualifiés d'*« ouverts »*[3] par les professeurs des écoles et posés à des élèves de CM2 dans le cadre des pratiques enseignantes plus ordinaires. Ces énoncés de problèmes *« ouverts »* retenus par les enseignants sont d'ailleurs parfois tirés d'épreuves de rallyes mathématiques. À la suite de ces travaux didactiques centrés sur la résolution de problèmes, qualifiés de *« pour chercher »* ou d'*« ouverts »* soit par les chercheurs, soit par la profession enseignante, il nous est apparu intéressant d'approfondir un questionnement plus spécifique relatif à l'argumentation dans la résolution de ces problèmes, sujet déjà présent dans les travaux de l'équipe ERMEL (Douaire & Hubert, 1999) ou de Hersant (2012).

En quoi, comment et dans quelle mesure des problèmes proposés dans le cadre d'un rallye mathématique peuvent-ils contribuer à développer l'argumentation mathématique de la part d'élèves de CM2-6e ? Quelles formes d'argumentation mathématique potentiellement variées recouvrent les problèmes posés aux élèves, au sein d'un tel dispositif ? Comment analyser des productions d'élèves au regard de pratiques argumentatives dans la résolution de ces problèmes ? Comment ces argumentations émergent-elles au sein de petits groupes, lors des phases de recherche ?

Dans un premier temps, nous exposerons notre problématique, spécifique de l'argumentation en lien avec la résolution de problèmes mathématiques. Celle-ci comprend deux principaux axes de questionnement :

- L'un est orienté sur l'argumentation mathématique ; il prend appui sur différents travaux de recherche centrés à l'origine sur les relations entre argumentation, preuve ou démonstration en mathématique (en s'éloignant parfois des attendus du niveau scolaire

[3] Ce qui caractérise un problème ouvert a été défini dans le cadre de travaux de recherche en didactique anciens (Arsac & Mante 1983, Arsac et *al.* 1985, Arsac & Mante, 2007). Toutefois, nous reprenons ici ces termes de problèmes *« pour chercher »* ou *« ouverts »*, en faisant davantage référence aux discours des enseignants (d'où l'usage des guillemets) qui qualifient notamment les problèmes de rallye de cette façon. Pineau-Choquet (2014) a précisément montré que l'appellation *« problème ouvert »* telle qu'employée par les enseignants (du primaire) recouvrait une diversité d'énoncés, parfois tout à fait éloignées de la définition originale des chercheurs cités ci-avant.

qui nous intéresse). Nous retenons de ces travaux antérieurs aux nôtres la schématisation de Toulmin (1958), utilisée par Pedemonte (2002). Ce schéma permet d'analyser différentes structures argumentatives. Nous reprenons également la distinction entre des argumentations rhétorique et heuristique faite par Duval (1993).

- L'autre est lié au rôle du langage dans l'enseignement et l'apprentissage de différentes disciplines (Bernié, 2002 ; Jaubert & Rebière, 2012). Ceci nous permettra d'appréhender des aspects langagiers spécifiques des pratiques argumentatives d'élèves dans la résolution de problèmes mathématiques, que l'on peut étudier à la fois à partir de leurs productions écrites et à partir de leurs interactions orales lors des phases de recherche.

Nous présenterons par la suite les résultats obtenus dans le cadre de notre étude. Nous montrerons comment celle-ci a permis d'identifier des structures argumentatives possibles, liées à la recherche de solutions de problèmes classiquement proposés dans des rallyes mathématiques. L'étude de productions écrites d'élèves (correspondant à des solutions retenues par des classes de CM et de 6^{e}) et d'échanges transcrits au sein d'un petit groupe d'élèves (de CM2) engagés dans la résolution d'un problème donné (de type problème de logique) nous permettra ensuite de dégager des spécificités des pratiques langagières liées à l'argumentation dans la classe de mathématiques.

I. ARGUMENTATION ET RÉSOLUTION DE PROBLÈMES À L'ÉCOLE

1. Argumentation en mathématiques

Les travaux qui problématisent la question de l'argumentation dans le champ de la didactique des mathématiques ne se situent majoritairement pas au niveau de l'école primaire. Ils questionnent les relations entre argumentation et démonstration, enjeu d'enseignement au niveau du secondaire (Balacheff, 1999 ; Duval, 1993 ; Hitt, 2005 ; Pedemonte, 2002). L'article sans doute le plus connu et repris à ce sujet, est celui de Duval (1993). À l'instar de Grize et Piérault (1983) (cité par Hitt, 2005) on peut considérer que :

> *Si l'on connaît depuis longtemps ce qui fait une démonstration correcte, on ne sait pas encore ce qui fait une « bonne » argumentation (op. cité, p. 7).*

Même s'il est éloigné du niveau scolaire que nous considérons, le travail de Pedemonte (2002) a particulièrement retenu notre attention. Cette auteure a en effet, peut-être plus que d'autres, fait de l'argumentation un objet d'étude en soi, en cherchant à caractériser des raisonnements spécifiques de l'argumentation en mathématiques.

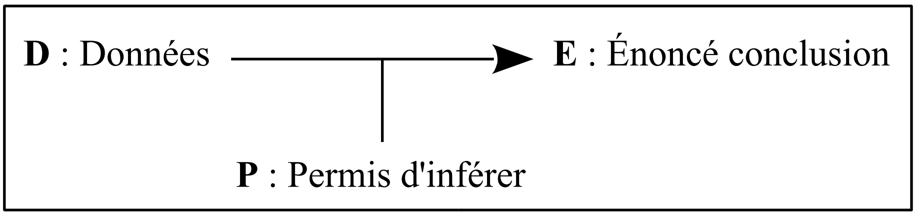
> *Le besoin de parler d'argumentation en mathématique dérive du besoin de caractériser les processus déployés dans la résolution d'un problème, c'est-à-dire les processus de découverte, les processus qui construisent une conjecture et ceux qui l'explorent [...]. Il y a des raisonnements mathématiques, spécifiques à l'argumentation, qui veulent simplement donner les « raisons » de l'acceptation ou de la réfutation de certaines propositions (op. cité, pp. 23-24).*

Pedemonte (2002) reprend l'idée de deux fonctions possibles de l'argumentation, mises en avant par Duval (1993) qui parle d'*« argumentation rhétorique »* et d'*« argumentation heuristique »*.

Une *« argumentation rhétorique »*, telle que définie par Perelman (1958) est *« conduite pour convaincre un interlocuteur ou soi-même »* (*op.* cité, p. 51). Duval (1993) considère toutefois que ce n'est pas nécessairement ce type d'argumentation qui est le plus souvent mise en œuvre en mathématiques.

Duval (1993) définit l'*« argumentation heuristique »* comme conduite, quant à elle, *« pour progresser dans un problème »* (ibid., p. 51). Il précise que ces deux argumentations ne sont pas nécessairement incompatibles et qu'elles peuvent même se dérouler simultanément. Le travail de Pedemonte (2002) donne précisément à voir que lors de phases de recherche au sein de groupes d'élèves qui cherchent à produire une démonstration, ces deux fonctions de l'argumentation peuvent revêtir une égale importance.

Pedemonte (2002) prend également appui sur le *modèle de Toulmin* (1958) pour caractériser des structures argumentatives liées à la résolution de problèmes mathématiques. Le schéma ternaire d'un argument (*Données - Permis d'inférer - Conclusion*), dans ce modèle, vise à appréhender la *« forme logique »* d'un discours rationnel (Pedemonte, 2002, p. 37).



E (*claim*), est l'énoncé ou la conclusion qu'apporte l'interlocuteur,
D (*data*), correspond à un certain nombre des données justifiant l'énoncé **E**,
P (*warrant*), est le permis d'inférer, c'est-à-dire il fournit une règle, un principe général capable de servir de fondement à cette inférence, de jeter un pont entre **D** et **E**.

Figure 1 : Modèle d'un argument (Toulmin, 1958).

Précisons les différents éléments de ce schéma que nous reprenons par la suite. Le premier pas d'un argument est l'expression d'un point de vue correspondant à la conclusion **E** (*claim*). Cette conclusion se base sur un certain nombre de données **D** (*data*) qui constituent le point de départ de l'argument : ces dernières peuvent être des évidences, des faits, des informations, des exemples, la conclusion d'un argument précédent. Pour passer des données à la conclusion, il faut *« une autorisation »* qui légitime le passage du point de vue de l'interlocuteur. C'est ce que Toulmin appelle le permis d'inférer **P** (*warrant*) qui peut être une règle, un principe général. Ce permis d'inférer établit la connexion logique entre les données et la conclusion. Il correspond ainsi à la raison de l'acception ou de la réfutation de la conclusion, qui peut potentiellement se retrouver soit sous la critique d'un interlocuteur, soit s'avérer valide ou non du point de vue mathématique.

> *Un tel modèle de l'argumentation nous permet un découpage de l'argumentation en ses arguments et en même temps nous permet de visualiser leur concaténation. Cela, est très utile pour déterminer le type de raisonnement sous-jacent l'argumentation (Pedemonte, 2002, p. 40).*

Ce modèle est utilisé par Pedemonte (2002) pour analyser des argumentations produites oralement par des lycéens (élèves de 15 à 17 ans, français ou italiens) dans la recherche de la production d'une preuve ou d'une démonstration en réponse à différents énoncés. Il lui permet de mettre en avant différentes structures argumentatives et de mesurer la distance de ces structures avec la démonstration à produire dans le contexte des situations expérimentées en classe.

Dans le cadre de notre propre étude, le modèle de Toulmin nous permettra de caractériser des structures d'argumentations mathématiques (à l'oral dans des phases de recherche ou à l'écrit dans les solutions produites), relatives à la résolution de problèmes proposés à des élèves de cycle 3 (CM2 - 6^{e}, élèves de 10 à 12 ans). Nous ferons des analyses *a priori* et *a posteriori* d'énoncés de différents problèmes de rallyes en utilisant ce modèle. Nous chercherons par exemple à modéliser des structures argumentatives mathématiques qui peuvent s'avérer valides, tout en étant variées, et permettre aux élèves de résoudre différents types de problèmes. Le modèle de Toulmin nous permettra ainsi d'appréhender la variabilité des différentes argumentations mathématiques, que celles-ci soient associées à différents problèmes ou à un même problème. Cette variabilité peut d'ailleurs reposer sur la structure des différents arguments, sur leur enchaînement, mais aussi sur la nature des données utilisées, des permis d'inférer mis en avant ou des justifications employées. Le modèle de Toulmin peut également nous être utile pour identifier dans l'*a posteriori* des implicites ou des erreurs de raisonnement, en mesurant des « écarts » par rapport à une argumentation mathématique valide.

Toutefois, il nous a semblé qu'un tel modèle ne suffirait pas à lui seul à caractériser des tensions possibles entre les argumentations heuristiques et rhétoriques que l'on peut envisager dans la résolution de ces problèmes, notamment lors de phases de recherche au sein de groupes d'élèves. En effet, nous faisons l'hypothèse que, lors de ces phases, les élèves peuvent aussi bien formuler des arguments de type heuristique (qui font avancer la résolution du problème) que des arguments de type rhétorique (visant à convaincre leur camarade). Il importe de distinguer ces deux types d'arguments dans l'étude des interactions entre les élèves, notamment en vue de mieux appréhender la question de leurs apprentissages mathématiques liés à la résolution de problème.

2. Argumentation et communauté discursive mathématique scolaire

Les travaux de Bernié (2002), Jaubert et Rebière (2011, 2012) nous ont paru à même de fonder un empan complémentaire de notre réflexion théorique à cet effet. Le point de vue théorique développé par ces chercheurs peut notamment éclairer plus avant la question des pratiques argumentatives d'élève et de leur évolution lors des phases de recherche.

Ces auteurs introduisent la notion de communauté discursive disciplinaire scolaire inspirée des travaux de Maingueneau (1984) pour penser la classe de mathématiques comme un groupe social constitué sur la base de pratiques, pouvant être observées sous l'angle de discours. Il s'agit d'appréhender des *« modes d'agir-parler-penser »* au sein de cette communauté discursive mathématique scolaire. On peut mesurer la pertinence de ces *« modes d'agir-parler-penser »* au regard des savoirs mathématiques visés : par exemple en ce qui concerne l'argumentation, quand le type d'arguments avancé s'avère valide d'un point de vue mathématique ou que l'argumentation produite s'ancre effectivement dans la rationalité de la discipline.

Il s'agit dès lors de considérer la dynamique propre à la production d'une argumentation mathématique, *via* la notion de *secondarisation* (*cf.* figure 2) des pratiques langagières. Empruntant aux travaux de Bakhtine[4], Bernié (2002), Jaubert et Rebière (2012) considèrent en effet que la communauté discursive disciplinaire scolaire est le lieu de transformations progressives de genres de discours premiers, peu élaborés, liés à l'action, vers des genres de discours seconds, plus complexes ou élaborés, conventionnels et spécifiques d'un champ de savoirs disciplinaires.

Bernié (2002) envisage la classe comme une communauté discursive disciplinaire (dans le cas présent, mathématicienne) en voie de constitution :

> *Celle-ci, envisagée comme une communauté discursive en voie de constitution, est caractérisée par*

[4] Bakhtine, M. (1984). *Esthétique de la création verbale*. Paris, Gallimard.

toutes sortes de phénomènes d'hétéroglossie[5] […]. Leur orchestration progressive, indissociable de la réitération et de la longueur des situations de débat oral et sensible à la progression de la cohérence des écrits signifie la construction d'un positionnement énonciatif particulier, amenant l'élève à se constituer en sujet « scientifique scolaire » tout en « secondarisant » ses pratiques langagières (Bernié, 2002, p. 82).

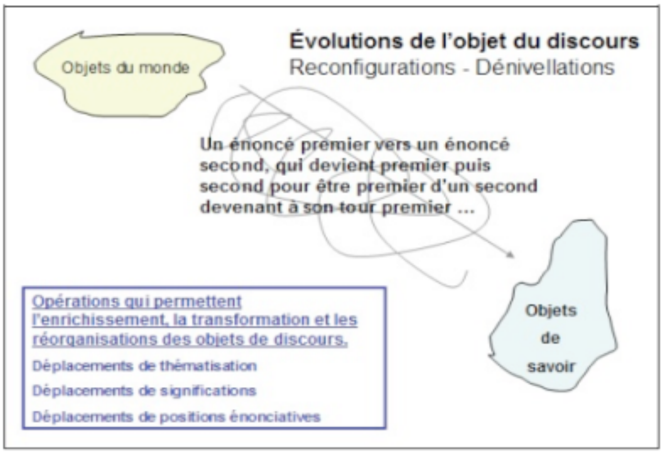


Figure 2 : Schéma de la secondarisation par Gobert (2014).

Autrement dit, les élèves peuvent avoir des pratiques langagières différenciées ou hétéroglossiques, quand ils interagissent en vue de répondre collectivement à un problème mathématique, qui traduisent autant de positions énonciatives variées au sein de la communauté discursive scolaire. Il s'agit d'une part d'appréhender la distance entre ces pratiques langagières d'élèves et les pratiques argumentatives qui relèvent du champ disciplinaire des mathématiques et, d'autre part, de voir comment ces pratiques langagières s'orchestrent ou non, en l'absence d'interventions de l'enseignant(e), dans la production collective d'une argumentation visant à produire une solution au problème posé. Les pratiques argumentatives mathématiciennes qui relèveraient d'un genre second de discours sont précisément celles que nous cherchons à caractériser en parlant d'argumentation mathématique dans la partie précédente. C'est la perspective dynamique de la secondarisation des pratiques langagières argumentatives d'élèves à la fois collective et individuelle que nous chercherons à appréhender. Plus concrètement, nous étudierons notamment comment, au fil des interactions au sein d'un groupe d'élèves qui cherchent à résoudre un problème donné, des positions énonciatives différentes vis-à-vis de l'argumentation sont identifiables (ou non) et si des déplacements de ces positions énonciatives sont observables (ou non). La secondarisation des genres de discours n'est pas étrangère aux argumentations de types rhétorique ou heuristique, éventuellement produites par les élèves, ou aux structures argumentatives correspondantes, appréhendées par le modèle de Toulmin au fil de leurs interactions langagières. Toutefois, la secondarisation de pratiques langagières argumentatives peut recouvrir d'autres aspects liés à ces interactions et à leur dynamique, comme des enrichissements (des ajouts), des déplacements d'objets de discours, des dénivellations (permettant d'englober ou de restreindre le propos), des changements d'éclairage (permettant d'adopter un nouveau point de vue sur le problème ou sa solution en construction), *etc*. En cela, cette notion de secondarisation des pratiques langagières constitue bien un apport complémentaire au point de vue déjà développé sur l'argumentation mathématique.

[5] Terme défini par Bakhtine pour faire apparaître la pluralité des « voix », c'est-à-dire des différents points de vue dans un discours, liés à différents contextes (d'origine et d'interprétation des énoncés) mis en tension, que ce discours soit construit par un seul ou plusieurs locuteurs.

II. DES ARGUMENTATIONS MATHÉMATIQUES ET DES PROBLÈMES

Partant du constat de Pineau-Choquet (2014) d'une grande variété de problèmes qualifiés d'*« ouverts »* par les enseignants du primaire[6], nous avons tout d'abord cherché en quoi des problèmes du rallye proposés aux élèves de CM2 et de 6^{e} pouvaient être résolus *via* des argumentations mathématiques de structures différentes. Nous avons sélectionné deux types d'énoncés typiques des problèmes fréquemment représentés dans des rallyes mathématiques voire dans les pratiques ordinaires d'enseignants autour de la résolution de problèmes *« ouverts »* ou *« pour chercher »* : les problèmes « poules lapins »[7] et les problèmes de logique. Nous analysons des argumentations possibles, valides du point de vue mathématiques en réponse à ces deux énoncés, élaborées *a priori* à l'aide du modèle de Toulmin.

1. Un problème de logique

Le problème étudié ci-dessous a été proposé dans l'épreuve de rallye du mois de janvier 2015. Il s'agit d'un problème où il s'agit de retrouver un code à partir d'indices correspondant à plusieurs tentatives faites pour ouvrir un coffre. La stratégie de résolution consiste à associer des indices de l'énoncé pour en déduire une partie du code. De proche en proche, le code peut ainsi être reconstitué. Nous avons réorganisé le texte original de l'énoncé (qui sera cité tel quel plus loin) — en segmentant et en numérotant le texte de l'énoncé de manière à faciliter la lecture de nos analyses *a priori* de structures argumentatives qui permettent de le résoudre.

Pour ouvrir un coffre, vous devez trouver les trois chiffres du code
Voici les tentatives de quelqu'un qui n'a pas réussi :

(1)	123	il n'avait aucun chiffre correct,
(2)	456	il avait un seul chiffre correct, bien placé,
(3)	612	il avait un seul chiffre correct, mal placé,
(4)	547	il avait un seul chiffre correct, mal placé,
(5)	849	il avait un seul chiffre correct, bien placé.

Figure 3 : Enoncé du problème d'ouverture du coffre
(rallye mathématique CM2-6^{e}, janvier 2016).

L'argumentation se base de manière directe sur les données textuelles (segmentées comme ci-avant) de l'énoncé de problème. Dans les différents pas de l'argumentation mathématique à conduire, les données et le permis d'inférer proviennent directement du texte de l'énoncé et/ou de ce qui vient d'être déduit. Une telle argumentation nécessite toutefois une réorganisation des arguments dans un raisonnement déductif. Nous proposons ci-dessous un extrait de la mise en fonctionnement du modèle de Toulmin ainsi produite dans notre analyse *a priori*.

---

6 Dont certains inspirés d'épreuves de « rallyes mathématiques ».

7 Pour lesquels il s'agit de trouver un nombre de « lapins » et de « poules » connaissant les nombres de pattes et de têtes de la population animale considérée. La thèse de Pineau-Choquet (2014) donne à voir la fréquence de ce type d'énoncés (dont la solution experte correspond généralement à la résolution de système d'équations) dans les manuels et dans les pratiques ordinaires d'enseignants de fin de primaire, autour de la résolution de problèmes « ouverts ».

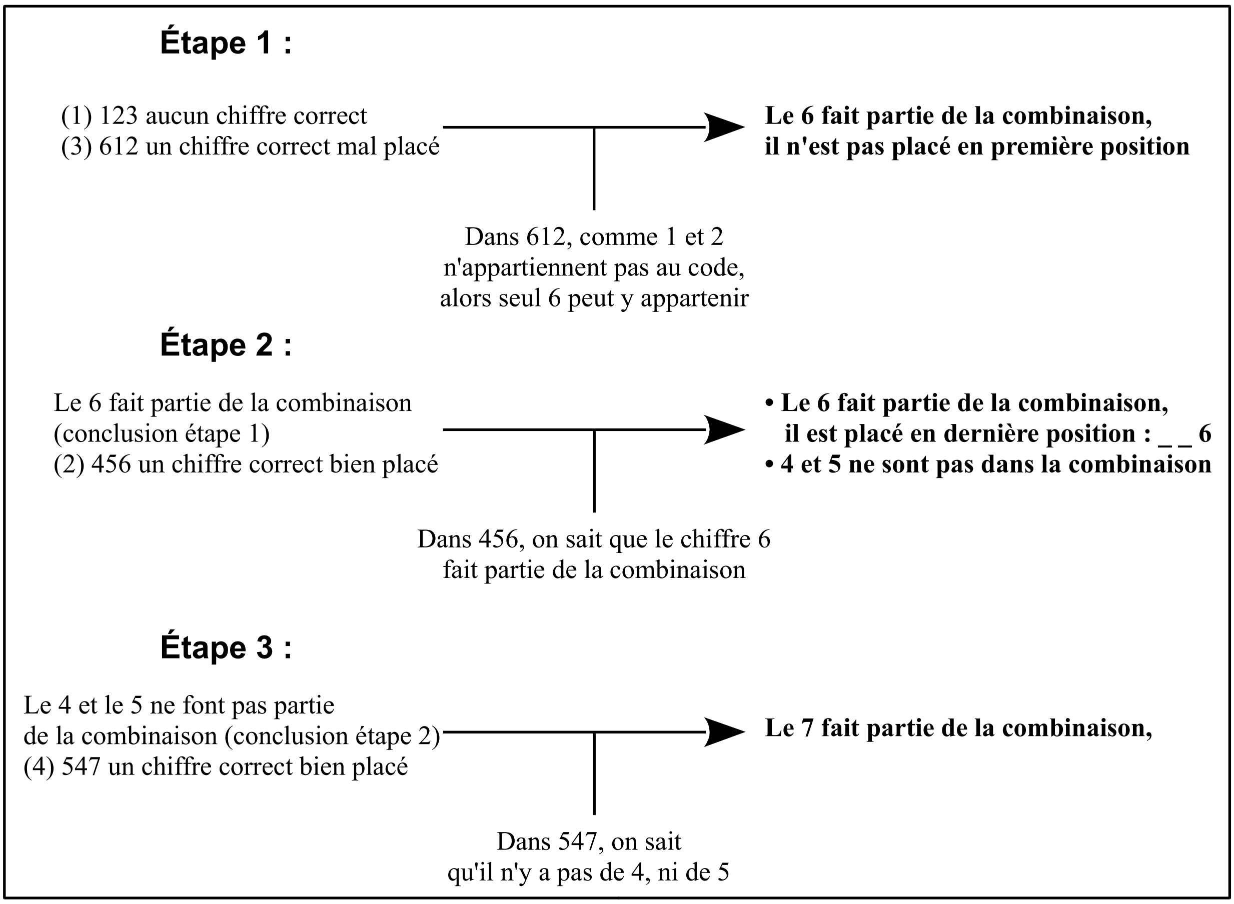


Figure 4 : Extrait d'analyse du problème d'ouverture du coffre.

Nous constatons, à l'issue de cette analyse, que les données proviennent systématiquement soit de l'énoncé du problème avec prise d'information directe dans cet énoncé (mais rapprochant parfois des éléments textuels éloignés comme (1) et (3)), soit de la conclusion d'un argument développé précédemment (qui change de statut en devenant une nouvelle donnée). La conclusion est une déduction réalisée à partir des deux arguments ainsi reliés. Le permis d'inférer n'est qu'une explicitation détaillée des données de l'énoncé. Voilà pourquoi nous pouvons considérer que tous les arguments sont, en quelque sorte, déjà présents dans l'énoncé, il suffit de les réorganiser pour produire les déductions directes nécessaires. Il s'agit d'une argumentation déductive (Pedemonte, 2002), chaque pas de l'argumentation entraînant le suivant. L'enchaînement des déductions permet progressivement de retrouver le résultat. En ce sens, l'argumentation mathématique à développer peut paraître unique mais nous verrons plus loin qu'une diversité de structures argumentatives, même déductives, reste possible dans la résolution d'un tel problème.

2. Un problème « poules-lapins »

Plusieurs stratégies sont possibles pour résoudre les problèmes de ce type. Nous avons choisi, à titre d'exemple, l'énoncé ci-dessous *« des chameaux et des dromadaires »* proposé dans un rallye transalpin et dont une analyse a été réalisée par Grugnetti et Jacquet (1997)[8]. Le lecteur

[8] Nous aurions pu prendre un énoncé proche, tiré d'une épreuve du rallye. Toutefois nous avons pensé que prendre appui sur un problème dont des analyses *a priori* avaient été faites par d'autres auteurs et exposées dans un article déjà paru dans la revue était judicieux en vue de cibler notre propos sur l'argumentation mathématique, plus que

pourra, s'il le souhaite, se référer à l'article concerné, qui met en évidence la diversité des stratégies mises en place par les élèves. Ces auteurs mettent notamment en évidence des stratégies relativement élémentaires rendues possibles à partir de schémas, en répartissant par exemple successivement des bosses (une puis à nouveau une) sur un nombre d'animaux identifiés préalablement. Nous ne nous attardons pas sur ce type de stratégies ici.

Nous nous intéressons à une stratégie fréquente dans la résolution de ce type de problèmes, dite « par essais-erreurs », qui consiste à produire des essais jusqu'à ce que l'essai produit corresponde à toutes les données de l'énoncé. Les élèves mettent *a priori* en œuvre plusieurs essais. Ils peuvent disposer ou non de moyens de contrôle sur leurs essais et sur leurs erreurs : faire des essais systématiques, au hasard avec un contrôle sur l'ordre de grandeur du résultat, ou un contrôle plus fin avec une réflexion sur l'écart entre le résultat et leur essai ou, sur les relations entre les nombres. L'argumentation ne se basera pas seulement sur les données de l'énoncé mais devra intégrer les premiers calculs ou résultats pour, au fur et à mesure, faire que les essais s'approchent des données du problème. La réponse du calcul précédent devient une donnée pour l'étape suivante d'argumentation mathématique. Nous choisissons ici une stratégie de type « essais-erreurs » avec une procédure de contrôle sur le résultat pour analyser les spécificités de l'argumentation mathématique correspondante. Nous avons conscience que ce n'est pas nécessairement la stratégie la plus fréquemment utilisée par les élèves (Grugnetti & Jacquet, 1997), mais l'argumentation associée à une stratégie d'essais-erreurs plus élémentaire (sans ou avec peu de contrôle sur le résultat) correspond pour partie aux étapes de cette argumentation mathématique déjà relativement experte. Dans la schématisation de Toulmin d'une telle argumentation mathématique, associée à un problème dit de type « poules-lapins », les données peuvent tout aussi bien être les données de l'énoncé que des conclusions d'un pas précédent. La spécificité de la structure argumentative correspondante réside dans le fait que dans une stratégie par essais erreurs, parmi les données, certaines prennent le statut d'hypothèses. Le permis d'inférer consiste le plus souvent en un calcul qui permet ou non de valider l'hypothèse ainsi réalisée. La conclusion détermine s'il s'agit du résultat ou propose un cadre pour le pas d'argumentation suivant, elles fixent de nouvelles données.

Voyons ce qu'il en est avec l'énoncé *« des chameaux et des dromadaires »*. Comme pour le problème précédent, nous avons segmenté le texte de l'énoncé numéroté entre parenthèses chaque donnée textuelle :

Cléopâtre a dessiné des chameaux et des dromadaires.

(1) On voit 19 bosses
(2) et 52 pattes.
(3) Elle sait que les chameaux ont deux bosses
(4) et que les dromadaires n'en ont qu'une.
(5) Puis elle a dessiné un homme sur le dos de chaque chameau.
(6) Combien a-t-elle dessiné d'hommes en tout ?

Figure 5 : Enoncé du problème de Cléopâtre (F. Jacquet, 5e Rallye mathématique transalpin, *Math-École, 176*, 1996, pp. 20-28).

Nous décrivons ci-après (figure 6) l'analyse d'une stratégie « par essais-erreurs » associée à cet énoncé spécifique, à l'aide du modèle de Toulmin. Nous notons que la première étape de

sur la diversité des stratégies possibles dans la résolution de tels problèmes.

l'argumentation permet de déterminer le nombre d'animaux à partir du nombre de pattes. Ensuite il s'agit de répartir ces 13 animaux entre chameaux et dromadaires. Nous proposons un premier essai, correspondant à 10 chameaux et 3 dromadaires[9].

Étape 1B : Calcul du nombre d'animaux

Cléopâtre a dessiné des chameaux et des dromadaires → **Il y a 13 animaux**

Les chameaux et les dromadaires ayant 4 pattes
et sachant que $4 \times 13 = 52$

Étape 2B : Premier essai : 10 chameaux et 3 dromadaires

(1) On voit 19 bosses
(3) Elle sait que les chameaux ont deux bosses
(4) et que les dromadaires n'en ont qu'une
Hypothèse 10 chameaux et 3 dromadaires

→ **Il ne peut pas y avoir 10 chameaux et 3 dromadaires, il y aurait trop de bosses Essayons avec moins de chameaux**

Calculons le nombre de bosses :
$(10 \times 2) + (3 \times 1) = 23$ bosses

Étape 3B : Deuxième essai : 5 chameaux et 8 dromadaires

(1) On voit 19 bosses
(3) Elle sait que les chameaux ont deux bosses
(4) et que les dromadaires n'en ont qu'une
Il y a moins de 10 chameaux et plus de 3 dromadaires (conclusion étape 2)
Hypothèse 5 chameaux et 8 dromadaires

→ **Il ne peut pas y avoir 5 chameaux et 8 dromadaires, il y n'aurait ps assez de bosses Il y a entre 3 et 8 dromadaires**

Calculons le nombre de bosses :
$(5 \times 2) + (8 \times 1) = 18$ bosses

Étape 4B : Troisième essai : 6 chameaux et 7 dromadaires

(1) On voit 19 bosses
(3) Elle sait que les chameaux ont deux bosses
(4) et que les dromadaires n'en ont qu'une
Il y a entre 5 et 10 chameaux et entre 3 et 8 dromadaires (conclusion étape 3)
Hypothèse 6 chameaux et 7 dromadaires

→ **Il y a 6 chameaux et 7 dromadaires**

Calculons le nombre de bosses :
$(6 \times 2) + (7 \times 1) = 19$ bosses

Figure 6 : Analyse du problème de Cléopâtre.

[9] Une multitude d'autres choix aurait bien sûr été possible !

Une partie des données provient de l’énoncé et reste présente dans tous les pas de l’argumentation. En effet, l’objectif de la résolution est de réussir à faire rejoindre ces contraintes avec le résultat, la conclusion, autrement dit que l’essai réalisé respecte ces contraintes. L’autre partie des données réside dans la conclusion des étapes précédentes et une nouvelle hypothèse (qui correspond aux données chiffrées du nouvel essai). Nous voyons d’ailleurs ici comment la donnée de l’étape 4B s’est affinée par rapport à celle de l’étape 3B. Le permis d’inférer réside dans le calcul et la vérification de l’adéquation entre les données et l’hypothèse, considérée temporairement comme une donnée ayant un caractère particulier car incertaine. La conclusion de chaque pas valide ou invalide l’essai. Lorsque l’hypothèse n’est pas vérifiée, la conclusion apporte une précision sur le résultat recherché ce qui permet à la fois d’affiner les données de l’étape suivante et de proposer une nouvelle hypothèse dont on augmente la vraisemblance.

3. Des argumentations différentes pour des énoncés différents

De cette comparaison de l’analyse *a priori* d’argumentations possibles en réponse à ces deux problèmes et d’autres énoncés proches (de logique ou de « poules lapins ») (Fourcade, 2016), nous découvrons des modes de raisonnement différents selon les problèmes, aussi bien au niveau de la nature des arguments, de leur fonctionnement, que du type d’enchaînement considéré dans des pas argumentatifs. Nous synthétisons ces différences dans le tableau 1ci-dessous.

Type de problème	**Dans chaque argument de l’argumentation**			**Enchaînement des pas de l’argumentation**
	Données	**Permis d’inférer**	**Conclusion**	
Problèmes de type « poules-lapins ».	Données de l’énoncé éventuellement prises en compte de manière simultanée. Premiers calculs ou résultats. Présence d’une hypothèse (correspondant à un « essai »).	Calcul qui permet de valider ou non l’hypothèse.	Validation ou non de l’hypothèse. Délimitation du domaine de recherche des résultats.	Enchaînement *spiralaire* qui permet de faire rejoindre les données de l’énoncé, dont une partie reste hypothétique, avec les conclusions. Les données (hypothèse et les contraintes sur cette hypothèse) s’affinent au fur et à mesure de l’avancée dans l’argumentation.
Problèmes de type logique.	Données textuelles de l’énoncé ré-agencées (sélection de l’une comme donnée — de l’autre comme permis d’inférer). Conclusion(s) de l’étape précédente.	Explication détaillée des données de l’énoncé.	Une partie du résultat.	Enchaînement déductif de manière continue, chaque conclusion intermédiaire pouvant devenir une donnée du pas suivant (dont on verra qu’elle peut être encapsulée ou non dans un permis d’inférer).

Tableau 1 : Structures argumentatives mathématiques dans la résolution de deux problèmes.

III. ARGUMENTATIONS MATHÉMATIQUES D’ÉLÈVES EN RÉPONSE À UN PROBLÈME DE LOGIQUE

Nous faisons ainsi le constat que de problèmes différents découlent *a priori* des modes de raisonnements différents et, de surcroît, des modes d’argumentations mathématiques variés. Nous cherchons également à comprendre si, pour un même problème, les élèves peuvent mettre en œuvre des argumentations mathématiques différentes. Notre étude débute par l’étude du problème de logique déjà cité et extrait des épreuves de rallye expérimentées dans les classes en 2015. Les stratégies mises en place par les élèves, du point de vue des connaissances mathématiques en jeu sont *a priori* potentiellement moins diversifiées que celles investies dans la résolution d’autres types de problèmes, comme ceux de type « poules-lapins ». Nous analysons pourtant des argumentations valides, et néanmoins variées, dans les productions effectives d’élèves de CM et de 6e. La première observation est évidente : les argumentations les plus « expertes » d’un point de vue mathématique ont été produites majoritairement par des élèves de 6e (4 classes de 6e sur 9 - 1 classe de CM sur 14). Une analyse sur la structure et la formulation de ces argumentations éclaire cette différence.

1. Des différences dans la construction de l’argumentation

Redonnons l’énoncé du problème sous sa forme textuelle donnée aux élèves de CM et de 6e, dans le cadre des épreuves de rallye (que nous avions réorganisée dans la figure 3, p. 11)

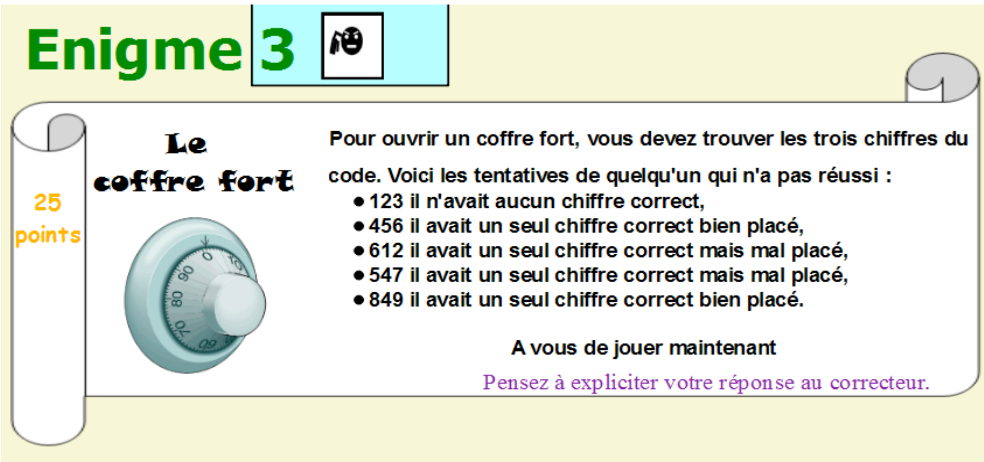


Figure 7 : Enoncé du problème d’ouverture du coffre
(rallye mathématique CM2-6e, janvier 2016).

Nous proposons des exemples d’argumentations produites à l’écrit par deux groupes d’élèves de CM2 et de 6e, associées à des solutions exactes.

Voici tout d’abord un écrit produit par des élèves de 6e :

Nous pouvons éliminer les 1, 2 et 3 dans toutes les combinaisons où il y en a car on sait que dans 123 il n’y a aucun chiffre de bon. Dans 456 nous ne savons pas lequel est bon et lequel est bien placé donc nous sommes passés à 612. Nous savons que le 6 est correct car ils nous disent que un est bon et que nous avons déjà rayé le 1 et le 2. Du coup dans 456 le bon chiffre est le 6 et comme il est bien placé le 6 est le dernier chiffre de la combinaison et on peut rayer les 4 et les 5 dans toutes les combinaisons où on les voit. Le prochain nombre est 547 comme on rayait le 4 et le 5 dans toutes

~~123~~
4~~5~~6
61~~2~~
5~~4~~7

les combinaisons, le sept est bon mais on nous a dit qu'il est mal placé alors il faut le replacer. Dans 849 on avait déjà rayé le 4 donc c'est soit le 8 ou le 9 de bon. Le chiffre bon est le 8 car il y en a un de bien placé et il y a déjà le 6 à la position du 9. Donc le code final est 876 car le 7 ne pouvait être que à la 2e position. 849

→ **876**

Figure 8 : Version « tapuscrite » de l'argumentation mathématique rédigée par des élèves de 6e.

Voici maintenant un écrit produit par des élèves de CM2 :

Phrase réponse : la combinaison du coffre est 876

Explication : On sait que 123 n'est pas bon, puis 456 il y a un chiffre bien placé et grâce au 612

On découvre que c'est le six car 1, 2 sont faux grâce à la première combinaison.

Dans la quatrième c'est le 7 car le 5 et le 4 sont faux car dans la combinaison 2, le six était bon pas le reste.

Dans la combinaison 5, le 8 est bon car le 4 n'est pas bon et le 9 aurait la place du six. Le 6 est en dernier le 7 au milieu et le 8 en premier.

Figure 9 : Version « tapuscrite » de l'argumentation mathématique rédigée par des élèves de CM2.

Nous avons dans un premier temps utilisé le modèle de Toulmin pour analyser les structures argumentatives différentes des explications données par ces deux groupes d'élèves en vue de les comparer. Voici pour chacune d'elle, les premières étapes de ces argumentations[10] :

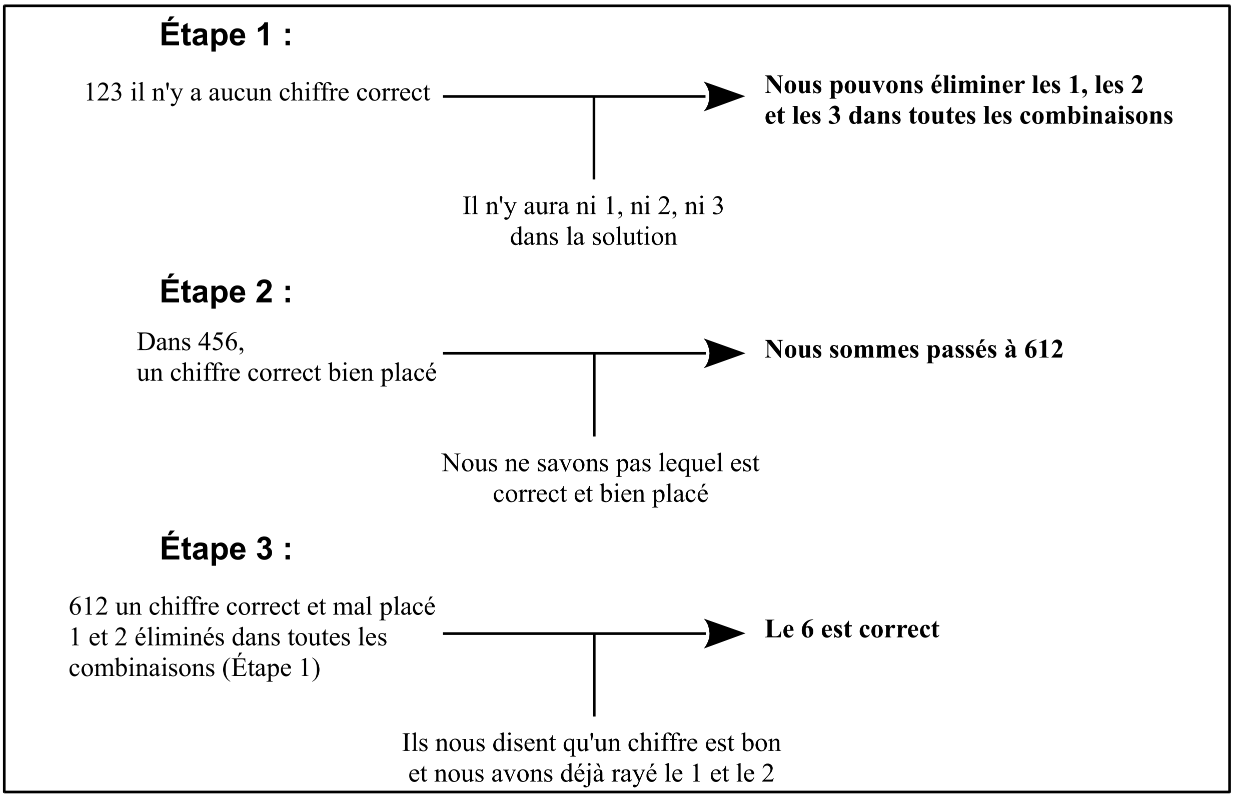


Figure 10 : Schématisation de Toulmin d'un extrait de l'argumentation mathématique produite à l'écrit par les élèves de 6e.

[10] Les structures argumentatives complètes correspondant aux solutions de ces élèves de CM2 et de 6e sont proposées en annexes 1 et 2.

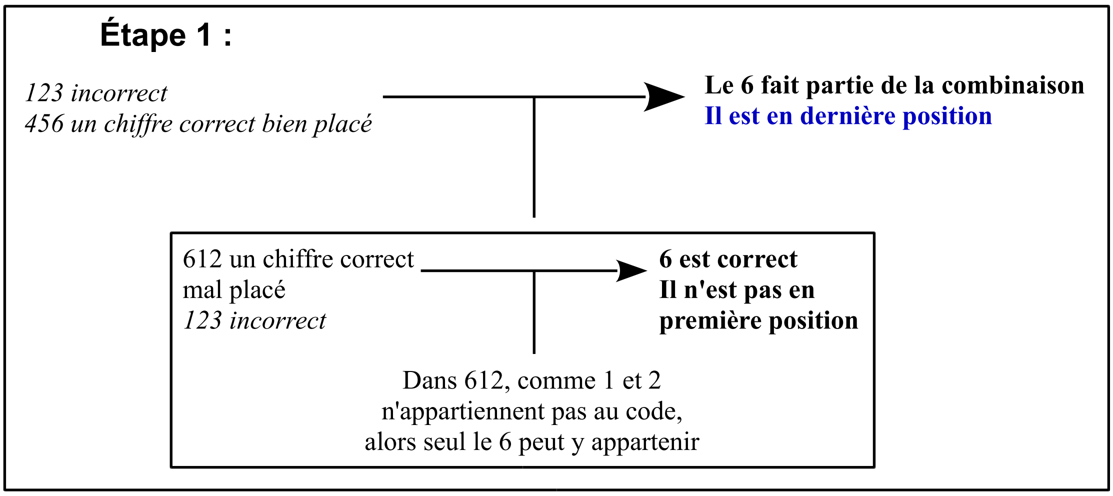


Figure 11 : Schématisation de Toulmin de l'argumentation mathématique rédigée par les élèves de CM2.

De cette comparaison, une première différence nous est apparue. Les élèves de CM2 proposent une argumentation plus complexe avec des arguments que nous qualifions d'enchâssés. Nous appelons un argument « enchâssé » : un pas de l'argumentation qui en encapsule un autre dans le permis d'inférer (voir figure 11, ci-dessus). En effet, les différentes étapes de l'argumentation proposée par les élèves de 6^{e} sont plus successives. Les conclusions des pas précédents deviennent explicitement des données des pas suivants. En revanche, chez les CM2, pour justifier d'un argument, ils justifient en aparté (et non au préalable comme les élèves de sixième) l'argument correspondant au permis d'inférer. Ils traitent deux pas d'argumentation simultanément. Voici de manière schématique les constructions différentes de ces deux types d'argumentations mathématiques :

Schématisation pour les 6^{e} :	Schématisation pour les CM2 :
A → B	A et C → E
C → D	car C → D et A → B
donc D et B	car D et B → E et C → D et A → B
→ E	

Figure 12 : Construction schématique de deux argumentations produites par des élèves de CM2 et de 6^{e}.

Même si l'enchaînement des pas est de structure différente, la logique des différents pas demeure identique (partir des données pour s'approcher du résultat), les conclusions sont identiques (seul l'ordre peut varier) et les données de chaque pas contiennent fréquemment des éléments de l'énoncé ou des conclusions de pas précédents. D'autre part, même si les permis d'inférer diffèrent de par les structures argumentatives (enchâssées ou non), les contenus des arguments utilisés par les élèves restent identiques. Il suffit de citer deux extraits des réponses précédentes, pour en être convaincu : *« Le 9 aurait pris la place de 6 »* (élèves de CM2) et *« Ce n'est pas le 9 car il serait bien placé et il y a déjà le 6 à la position du 9 »* (élèves de 6^{e}).

Par ailleurs, les formulations de ces arguments présentent à la fois des proximités linguistiques comme par exemple l'usage d'un verbe au conditionnel, de pronoms *« on »* ou *« nous »*, de la conjonction *« car »*, mais aussi des différences qui sont dans l'exemple cité, liées à la longueur du texte ou à l'usage de certaines conjonctions comme *« mais »*... Nous avons souhaité approfondir l'analyse de ces différences linguistiques de formulations dans les productions écrites des élèves de CM et de 6e correspondant aux solutions transmises par les différentes classes engagées dans le dispositif du rallye mathématique.

2. Des différences dans la formulation d'une argumentation mathématique

Nous nous sommes intéressées aux formulations, aux différentes formes prises par les argumentations produites à l'écrit par les classes de CM ou de 6e en réponse à ce même problème de logique : longueur du texte produit, outils linguistiques utilisés... Nous avons analysé 23 productions transmises par 14 classes de CM (CM1-CM2 ou CM2) et 9 classes de 6e (appartenant à 3 collèges différents)[11] dans le cadre du rallye mathématique.

Dans un premier temps, nous avons constaté qu'une grande partie des élèves de CM comme de 6e (75 % des productions recueillies) avaient clairement opté pour une résolution avec un agencement restant proche du texte sans ré-agencer les données textuelles *via* un schéma déductif du type de ceux envisagés dans nos analyses (voir I.1., p. 7). Il semble que les élèves ont des difficultés à structurer le texte de leurs argumentations suivant un tel schéma si celui-ci s'éloigne de la chronologie textuelle de l'énoncé. Cette chronologie textuelle de l'énoncé est un facteur visiblement difficile à gérer dans les argumentations produites à l'écrit par les élèves. En étudiant les productions concernées, nous avons mis en évidence des stratégies adoptées par les élèves pour pallier cette difficulté dans leurs argumentations. Une légère différence entre les classes de CM et de 6e se dessine à ce sujet, que l'exemple cité précédemment (figures 8, 9, 10 et 11) donne à voir. Proportionnellement, les élèves de CM laissent plus facilement des arguments implicites ou optent pour une structure argumentative enchâssée (rappelant un argument « après-coup »), alors que les élèves de 6e optent pour des argumentations non enchâssées et structurent leur argumentation de manière à rendre explicites les arguments des différents pas déductifs et leur succession quitte à produire un texte dont la chronologie s'éloigne davantage de celle du texte initial de l'énoncé. L'évolution entre les deux niveaux de classes n'est pas si notable mais il semble que les élèves de 6e s'autorisent davantage à agir en prise directe sur l'énoncé, à en réorganiser les informations pour mettre davantage en exergue la structure déductive de leur argumentation mathématique.

Nous avons aussi analysé de manière systématique les marqueurs qui nous semblaient *a priori* pouvoir être mis en relation avec un raisonnement mathématique déductif dans les productions des élèves investis dans la résolution du problème de logique. Ces marqueurs peuvent être aussi bien des termes de liaison ou connecteurs (conjonctions du type *« car »*, *« mais »*, *etc.*), des adverbes et des locutions (comme *« forcément »*, *« nécessairement »*, *« du coup »*) ou des verbes (*« savoir »*, *« falloir »...*) qui nous semblaient pouvoir être mis en rapport avec des connaissances logiques. Nous avons procédé à un relevé systématique de ces marqueurs (dont la liste est donnée en annexe 3) dans toutes les productions écrites recueillies. Nous avons pu ainsi comparer les termes utilisés, leur fréquence, ainsi que leur nombre par production.

Certains termes, comme *« car »*, sont utilisés largement par tous les élèves et aucun résultat significatif n'apparaît au sujet de leur usage. Toutefois, certains marqueurs du raisonnement sont davantage présents dans des productions d'élèves de 6e que de CM ou peuvent être corrélés à la

[11] Rappelons que les classes participant au rallye sont censées remonter une solution commune par classe (soit 23 solutions pour 23 classes dans le cas présent). Les solutions sont rédigées par un groupe d'élèves de la classe et éventuellement relues/discutées par un autre groupe, la classe entière selon le fonctionnement installé dans chaque classe.

validité de la production écrite. On note ainsi que :

- *« si »*, *« soit »* sont des marqueurs utilisés exclusivement par des élèves de 6e qui ont réussi à produire une solution valide (2 classes pour *« si »* et 1 classe pour *« soit »*) ;
- *« ensuite »* n'a été utilisé que par des élèves de CM qui ne sont pas allés au bout de la résolution ;
- *« forcément »* est un marqueur utilisé exclusivement par des élèves de 6e qui ont réussi à produire une solution valide (2 classes — 1 avec une solution valide et 1 avec un permis d'inférer implicite) ;
- *« grâce à »* a été utilisé par des élèves de CM ayant réussi à produire une solution valide ;
- *« ne peut être que »* a été utilisé par des élèves de 6e (2 classes) qui ont réussi à produire une solution valide.

Les marqueurs qui expriment une nécessité (comme *« forcément »*) ou l'implication (*« si »*) sont donc majoritairement utilisés par les élèves de 6e et on observe une corrélation avec la réussite au problème posé. Le lecteur pourra consulter l'annexe 3 pour avoir plus de détails à ce sujet.

D'autre part, lorsqu'on comptabilise le nombre de termes — connecteurs considérés *a priori* comme marqueurs du raisonnement logique , on note des corrélations entre ce nombre et le niveau de classe (CM ou 6e) ou entre ce nombre et la production de solutions valides. Le tableau 2 (p. 21) résume les résultats obtenus.

Les connecteurs considérés *a priori* comme des marqueurs du raisonnement (les conjonctions, adverbes ou locutions, voir annexe 3) se trouvent en quantité très variable selon les solutions produites et transmises par les classes d'élèves de CM-6e : allant de 1 seul jusqu'à 13 par solution ! Nous avons distingué deux groupes, ceux ayant utilisé 1 à 5 connecteurs, et ceux qui en ont utilisé plus de 6, on retrouve :

- 1 à 5 connecteurs : 9 classes, soit 41 % des classes, dont 7 classes de CM (50 %) et 2 seulement de 6e (25 %). Parmi ces 9 classes, 7 ont produit des solutions erronées, inachevées ou avec plus de 2 permis d'inférer implicites, contre 2 qui ont produit des solutions valides ou avec 1 ou 2 permis d'inférer implicites.
- À partir de 6 connecteurs : il y a 13 classes, soit 59 % des classes, dont 7 classes de CM (50 %) et 6 classes de 6e (75 %). Parmi ces 13 classes, 10 classes ont produit des solutions valides ou avec 1 ou 2 permis d'inférer implicites contre 3 qui ont produit des solutions erronées ou avec plus de 2 permis d'inférer implicites.

Nous pouvons penser qu'il y a des liens entre l'utilisation de ces connecteurs, la réussite dans la production d'une argumentation mathématique écrite valide et le niveau de classe considéré. Nous avons procédé de même pour d'autres types de marqueurs comme les verbes mais aucune corrélation n'est apparue.

L'analyse des productions écrites finalisées transmises par les classes impliquées dans le rallye mathématique montre pour partie une évolution des genres de discours mathématiques produits par les élèves de CM et par ceux de 6e. L'évolution porterait sur le sens donné à l'implication avec la présence de davantage de connecteurs (le *« si »* mais aussi le *« ensuite »*) et d'autres marqueurs (*« forcément »*, *« obligatoirement »*) qui accentueraient la nécessité liée à l'implication en mathématique (condition nécessaire). Ces indicateurs nous paraissent d'autant plus significatifs qu'ils sont souvent corrélés à la validité mathématique de l'argumentation, de par leur nature ou leur fréquence. Toutefois l'analyse de ces productions écrites est sans doute à nuancer au regard de la cohorte d'élèves considérée et du collectif « classe » qu'elles sont censées représenter pour chacune d'entre elles : rappelons que chaque classe s'accorde sur une solution à transmettre pour chaque problème. Cette analyse ne nous dit par ailleurs rien des conditions dans lesquelles de telles argumentations mathématiques ont été produites et finalisées à l'échelle d'un groupe d'élève ou d'une classe.

Nombre de termes marqueurs du raisonnement	**Solutions des classes de CM/6e (23 classes)**		**Solutions des classes de CM (14 classes)**		**Solutions des classes de 6e (9 classes)**		**Validité des réponses produites (inachevée, erronée, contenant plus de 2 permis d'inférer implicites valides)**
	Effectif	**%**	**Effectif**	**%**	**Effectif**	**%**	
1	1	4,5 %	1	7 %	0	0 %	Une solution erronée
2	1	4,5 %	1	7 %	0	0 %	Une solution contenant 1 ou 2 permis d'inférer implicites
3	2	9 %	1	7 %	1	12,5 %	Une solution erronée Une solution contenant plus de 2 permis d'inférer implicites
4	3	13 %	2	14 %	1	12,5 %	Une solution inachevée Une solution erronée Une solution contenant 1 ou 2 permis d'inférer implicites
5	2	9 %	2	14 %	0	0 %	Une solution non aboutie Une solution contenant plus de 2 permis d'inférer implicites
6	2	9 %	1	7 %	1	12,5 %	Une solution inachevée Une solution valide
7	3	13 %	2	14 %	1	12,5 %	Deux solutions valides Une solution contenant 1 ou 2 permis d'inférer implicites
8	4	18 %	2	14 %	2	25 %	Une solution valide Trois solutions contenant 1 ou 2 permis d'inférer implicites
9	1	4,5 %	1	7 %	0	0 %	Une solution contenant plus de 2 permis d'inférer implicites
10	1	4,5 %	1	7 %	0	0 %	Une solution contenant 1 ou 2 permis d'inférer implicites
11	1	4,5 %	0	0 %	1	12,5 %	Une solution valide
12	0	0 %	0	0 %	0	0 %	
13	1	4,5 %	0	0 %	1	12,5 %	Une solution valide

Tableau 2 : Utilisation des termes « marqueurs du raisonnement logique » dans l'argumentation.

IV. ARGUMENTER POUR RÉSOUDRE UN PROBLÈME DE LOGIQUE DANS LA CLASSE

Nous avons, dès lors, voulu nous intéresser à ce qui se produisait au sein de la classe au moment de la recherche d'une solution par des petits groupes d'élèves en réponse à un problème donné dans le cadre du rallye. L'objectif pour les élèves est de résoudre collectivement le problème, ce qui conduit à une argumentation heuristique, mais aussi éventuellement d'amener les autres élèves de leur groupe à adhérer à leur argumentation mathématique, ce qui conduit à une argumentation rhétorique, au fur et à mesure que celle-ci se construit dans les interactions langagières au sein du groupe. Nous avons enregistré les interactions d'un groupe de quatre élèves alors qu'ils étaient en train de résoudre le problème de logique déjà analysé (à la fois *a priori* et *a posteriori*) dans les parties précédentes de l'article.

Nous avons analysé la transcription des interactions au sein de ce petit groupe d'élèves du point de vue de l'argumentation mathématique « en train de se construire » au sein du groupe et du point de vue de la secondarisation des pratiques langagières argumentatives. Dans notre analyse, nous avons ainsi mis en évidence les différentes fonctions de l'argumentation : rhétorique ou heuristique, les deux pouvant d'ailleurs s'entremêler dans les échanges au sein du groupe d'élèves, une argumentation pouvant avoir une double fonction celle de convaincre autrui, et d'avancer dans la résolution du problème si l'argument retenu est valide du point de vue mathématique. Nous avons cherché à appréhender des relations entre ces deux fonctions de l'argumentation dans l'analyse du discours des élèves. Nous avons également cherché à identifier des positions énonciatives des quatre élèves dans la situation d'interlocution. Ce type d'analyse vise notamment à nous renseigner sur l'ancrage de ces positions énonciatives dans une communauté discursive scolaire mathématicienne, sur l'hétéroglossie en jeu et sur son orchestration dans la construction progressive d'une argumentation mathématique.

Nous constatons tout d'abord que les échanges retranscrits ne sont pas nécessairement tous de l'ordre de l'argumentation mathématique. Une partie des interactions n'est d'ailleurs pas proprement dédiée à l'argumentation (ni heuristique, ni rhétorique). D'assez nombreuses interventions d'élèves sont liées à des préoccupations pratiques (comme le contrôle de la contrainte de temps, le matériel...) liées au cadre de la tâche ou à un « faire » qui n'est pas à proprement parler mathématique, mais qui le conditionnent pour autant. C'était, somme toute, tout à fait prévisible, mais on peut voir que s'entrecoupent ainsi de manière récurrente ce type d'interventions et la formulation d'arguments référés au problème mathématique à résoudre. Ce qui est plus notable est que des interventions de certaines élèves (plus que d'autres) restent presque exclusivement centrées sur ces actions matérielles. Nous y revenons ci-après.

Si nous nous intéressons à la nature des arguments ou des « pas argumentatifs », nous constatons que des arguments dont la validité a déjà été éprouvée côtoient à plusieurs reprises des arguments en train d'être validés. Certains arguments sont utilisés comme s'ils étaient déjà validés alors que leur justification reste implicite dans le discours de l'élève. Les élèves peuvent ainsi utiliser temporairement des arguments non « validés » dans le discours, comme résultats pour justifier d'une autre étape de l'argumentation, puis les justifier explicitement par la suite.

Nous retenons un passage centré sur la découverte suivante : *« le 7 fait partie du code »* pour illustrer ce phénomène didactique. Nous avons mis en gras les deux prises de parole que l'on peut identifier comme étant des arguments liés à cette découverte. La première formulation produite par Elsa (intervention 169) autour du pas argumentatif concerné, n'est pas correcte, car incomplète. En effet, elle conclut à partir des deux arguments uniques *« 456 il avait un seul chiffre correct bien placé »* et *« 547 - il avait un seul chiffre correct mais mal placé »*. Cependant, le fait que ces deux chiffres reviennent ne suffit pas à conclure. Peinant visiblement à convaincre ses camarades, Elsa enrichit par la suite sa première formulation, par l'intermédiaire d'une reprise modification de cette formulation qui explicite que comme dans 456, c'était le 6 qui convenait, alors le 4 et le 5 sont incorrects ; dès lors, ils le seront également dans 547, seul le 7 peut être le chiffre valable évoqué. Nous remarquons également que c'est l'argument valide qui explicite ce permis d'inférer (laissé implicite jusqu'ici) qui convainc une de ses camarades qui répond d'un ton convaincu *« là c'est le 7 »*, le groupe s'engageant ensuite dans la recherche de la position du chiffre. Ceci montre, dans le cas présent, une relation forte entre argumentation heuristique et rhétorique : c'est aussi la recherche d'adhésion du groupe ou d'un de ses membres qui semble avoir permis la production d'un pas argumentatif valide du point de vue mathématique.

168	Élise	50	Qu'est-ce que tu fais alors ?
169	Elsa	47	**Là, regarde ::: Marion regarde ! Il y a un seul chiffre correct mais bien placé.** **Là y a que le 6 et là y a le 4 et le 5 (débit accéléré) et là le 4 et le 5 il revient donc c'est le 7.**
170	Marion	40	Oui, mais...
171	Élise	51	Qu'est-ce que vous faites ?
172	Elsa	48	**Vu que là ils disent il y a un seul chiffre correct et bien placé, on a trouvé que c'était le 6, donc du coup ces deux-là ils vont pas, donc du coup c'est le 7.**
173	Marion	41	Là c'est le 7 ?
174	Elsa	49	Beh oui !
175	Marion	42	À la place du 8, euh non...
176	Elsa	50	Beh oui !

Figure 13 : Reprise-modification permettant de produire un « pas argumentatif » valide.

À l'instar de l'exemple donné ci-dessous, nous constatons plusieurs passages où des arguments valides du point de vue mathématique recueillent l'adhésion du groupe d'élèves : ce qui montre une mise en cohérence d'une argumentation heuristique et rhétorique qui contribue à la production d'une argumentation mathématique.

Cependant, la conviction obtenue n'est bien souvent que passagère et l'argumentation doit se reproduire, être répétée. Les élèves obtiennent de manière réitérée la même conclusion, mais l'argumentation produite ne semble pas toujours permettre de la stabiliser, en vue d'avancer de manière définitive dans la résolution du problème mathématique. On peut par exemple s'étonner que, ci-après, la proposition de Marion apportant la bonne réponse au problème, qui comprend des conclusions déjà partiellement validées (le « 6 » et le « 7 », *cf.* figure 13 ci-avant) ne soit pas reprise par ses camarades qui reviennent en arrière sur la production du « 6 » (*« ça serait pas le truc de Elsa de tout à l'heure en fait ? »*) bien plus tard. Ceci tend à montrer que dans ces conditions de recherche en autonomie de ces quatre élèves, la communauté discursive mathématicienne peine à s'instituer.

230	Marion	58	Bah alors moi je dis que c'est 6 7 8.
231	Elsa	62	Mais tu...
232	Élise	68	Non mais on s'embrouille, là, on fait n'importe quoi.

233	Elsa	63	Et pourquoi ça serait pas le 9, d'ailleurs ?
234	Marion	59	**8 7 6**
235	Élise	69	**Et pourquoi ça serait pas le truc de Elsa de tout à l'heure en fait ? Là on s'embrouille, regardez on n'a rien écrit, là.**
			[...]
239	Elsa	64	Alors, déjà...
240	Marion	61	**Moi, je dirais 8 7 6.**
241	Elsa	65	123, il n'y a aucun chiffre correct, donc 1 2 3.

Figure 14 : Des difficultés à capitaliser les conclusions des pas « argumentatifs ».

Nous constatons par ailleurs des positions énonciatives différentes entre les quatre élèves engagées dans cette phase de recherche : elles ne s'investissent visiblement pas de la même manière dans la production d'une argumentation mathématique.

Par exemple, l'élève nommée Coralie intervient 88 fois, alors que les trois autres plus de 113 fois. Un décalage existe, ne serait-ce que dans la prise de parole au sein du groupe. Par ailleurs, les prises de paroles de cette élève sont fréquemment tournées vers l'aspect matériel de la tâche : l'enregistrement, l'écriture, la calculatrice... Coralie est plutôt dans un « faire » non mathématique : soit lié à la mise en forme d'un écrit (intervention 137), soit lié au matériel (feuille, calculatrice) à utiliser (interventions 6 et 29). Toutefois, elle cherche parfois à participer à l'argumentation mathématique en train de se construire au sein du groupe, soit en validant[12] une proposition d'élève qu'elle reformule partiellement (intervention 48), soit en interrogeant une camarade (intervention 89).

6	Coralie	2	Ah... mais ma feuille, Elsa...
29	Coralie	6	Tu veux ::: Attends : tu veux que j'aille te chercher une calculatrice ?
48	Coralie	9	Et bah oui, ça veut dire que là on peut pas ceux-là... Donc y'a le 6.
89	Coralie	15	Elsa, comment tu fais ?
137	Coralie	21	Comment ça s'écrit « schéma » ?

Figure 15 : Exemples d'interventions de Coralie.

Certaines des interventions de l'élève nommée Élise peuvent également concerner l'organisation pratique du travail du groupe (intervention 8). Toutefois, l'ensemble de ses interventions se centre davantage sur la résolution du problème mathématique que celles de Coralie. Cela se manifeste par la validation des propositions de certaines de ses camarades (intervention 111), des interrogations ou des demandes d'explications (interventions 84 et 98). Élise peut être force de proposition de conclusions : toutefois, celles-ci sont souvent non valides, car non justifiées (sans

[12] Nous entendons par « validation d'une proposition » une manifestation de l'élève qui montre son accord avec une conclusion soit en reformulant même partiellement l'argument correspondant, soit en marquant une certitude, une liaison en lien avec l'argument précédemment énoncé (« alors »).

permis d'inférer, ni données) voire formulées comme relevant de choix arbitraire (intervention 28 : choix du 6). Par contre, Élise peut contredire une proposition formulée par une camarade en formulant (parfois partiellement) un pas argumentatif (intervention 36).

8	Élise	2	Bon, alors, on écoute Elsa en premier, on fait chacun son tour, on essaie.
28	Élise	7	C'est le 6.
36	Élise	10	Mais non... parce qu'il a dit qu'il y avait UN SEUL chiffre correct.
84	Élise	21	Mais qu'est-ce que t'as tapé en fait ? j'ai pas suivi ce que t'as tapé.
98	Élise	25	Mais pourquoi t'as tapé 8 6 6 ?
111	Élise	30	Ah bah alors c'est le 8, ben oui.

Figure 16 : Interventions d'Élise.

Le discours de l'élève nommée Marion se distingue par l'expression récurrente de doutes, sous la forme d'interjections (interrompant parfois une formulation en cours d'une autre élève), de temps de réflexion (pauses) ou de questions (interventions 3, 65). Ses doutes s'expriment également par le temps du verbe qu'elle utilise *« je dirais »* comme pour montrer une distance (intervention 54) avec un énoncé formulé qui reste pour elle de l'ordre de la conjecture. Elle reprend et modifie parfois des énoncés au fil d'une même intervention, ce qui marque des déplacements de position énonciative (intervention 56 qui commence avec la formule *« je dis que c'est 6 »*, repris et modifié *« c'est le 6 ! »*) qui vont de pair avec l'explicitation partielle d'un permis d'inférer (*« il y avait un seul chiffre correct bien placé »*) ou sa reformulation (intervention 357).

3	Marion	2	Alors, euh :: Alors...
54	Marion	12	Non ! C'est le 8 vu que là on a déjà 6 :: 6 ! Moi je dirais que c'est le 8.
65	Marion	15	Euh... Elsa ::: euh non, euh :: bon, tant pis... Et là :: le 5 ou le 4 ?
156	Marion	36	Là, bon, déjà :: là 6 :: il y avait un seul chiffre correct bien placé :: alors moi je dis que c'est 6, enfin je dis que c'est 6 ::: C'est 6 !
357	Marion	89	Explication, tu dis le premier code 1 2 3 n'est pas possible (dicte doucement) beh quoi devant le...

Figure 17 : Interventions de Marion.

L'élève nommée Elsa intervient quant à elle souvent en se référant aux données du texte et en agissant sur ces données (interventions 22, 34, 47). On voit qu'elle exprime des certitudes (intervention 4). C'est l'élève du groupe qui formule le plus souvent des pas argumentatifs (interventions 47) et qui emploie de manière récurrente des connecteurs spécifiques du raisonnement (interventions 34, 99, *« donc »*, *« parce que »*) Elle peut aussi parfois remettre en doute ou valider les propositions des autres élèves (interventions 162 et 174).

4	Elsa	1	Je sais comment on peut faire.
22	Elsa	5	Je fais ::: je fais une case :: je fais une case où on va marquer les chiffres où on peut pas :: et les chiffres où on peut ::: donc voilà ::: et les chiffres où on peut pas :: Alors, déjà y dit que ::: 123 il n'y avait aucun chiffre correct.
34	Elsa	9	Mais attends, :: mais le 4 aussi... le 5 aussi donc... pour l'instant on met les 4 : le 4, le 5 et le 6. Voilà :
47	Elsa	14	Regarde 123 il n'y aucun chiffre correct, et là ils disent 612 mais là le 1 et le 2 il est là (Elsa montre très probablement une colonne des chiffres qui ne peuvent pas y être)
61	Elsa	18	(Elle réfléchit) 6...
99	Elsa	30	Attends, je t'explique :: parce que regarde le...
162	Elsa	46	Mais pourquoi ce serait pas le 5 ou le 7 ?
174	Elsa	49	Beh oui !

Figure 18 : Interventions d'Elsa.

De ces exemples, on retient une hétéroglossie apparente dans les discours tenus par ces quatre élèves lors de la phase de recherche. On perçoit nettement que certaines positions énonciatives sont d'emblée plus adaptées, ancrées dans la communauté discursive mathématique que d'autres et que ce sont celles qui permettent la production d'arguments valides. C'est le cas de la majorité des interventions d'Elsa qui joue un rôle important dans la construction progressive de l'argumentation mathématique. On note également des positions énonciatives plus éloignées et qui n'évoluent pas vraiment de manière significative pour certains élèves : par exemple, pour Coralie, dont la majorité des interventions restent centrées sur des aspects matériels ou organisationnels de l'activité, et ce tout au long de la phase de recherche. Toutefois, on remarque des déplacements de position énonciatives pour certaines élèves au fil des échanges : par exemple, *via* des reprises-modifications d'énoncés récurrentes dans le discours de Marion.

Nous nous sommes par ailleurs intéressées au rôle des interactions langagières dans la construction progressive et collective d'une argumentation mathématique. Un épisode a particulièrement attiré notre attention. Les élèves échangent autour du 6 à partir de l'argument *« 456 un chiffre correct et bien placé »* :

22	Elsa	5	Je fais ::: je fais une case :: je fais une case où on va marquer les chiffres où on peut pas :: et les chiffres où on peut ::: donc voilà ::: et les chiffres où on peut pas :: Alors, déjà y dit que ::: 123 il n'y avait aucun chiffre correct.
23	**Élise**	**6**	**Bon bah alors on le barre.**
24	Elsa	6	Bon 1:: 2 ::: 3 :: on peut pas.

25	**Marion**	**5**	**Oui, déjà on barre.**
26	Elsa	7	Et là :: il dit : ils disent 456 mais il y avait 1, il y avait 1 seul chiffre.
28	**Élise**	**7**	**C'est le 6.**
30	**Élise**	**8**	**C'est le 6.**
33	**Élise**	**9**	**Le 6, c'est bon.**
34	Elsa	9	Mais attends, :: mais le 4 aussi... le 5 aussi donc... pour l'instant on met les 4 : le 4, le 5 et le 6. Voilà :
36	**Élise**	**10**	**Mais non... parce qu'il a dit qu'il y avait UN SEUL chiffre correct.**
37	Elsa	10	Oui mais comment on sait que c'est que le 6 alors ?
39	**Élise**	**11**	**Il avait un seul chiffre correct.**
40	**Elsa**	**11**	**On va voir au fur et à mesure** **Là, le 6 ::: le 6 ::: il y avait un seul chiffre mal placé :: et déjà :: déjà on regarde. j'ai trouvé on regarde.** **Déjà, j'ai trouvé, déjà il y a le 6.**
43	Elsa	12	Regardez ::12, on dit que aucun...
45	**Elsa**	**13**	**Aucun... on peut pas les 3. Et là ils disent le 1 et le 2. Donc, déjà, on sait que c'est le 6**
46	**Marion**	**10**	**Moi, je dirais que oui, il y a le 6.**
47	**Elsa**	**14**	**Regarde, 123 il n'y aucun chiffre correct, et là ils disent 612, mais là le 1 et le 2 il est là.**
48	**Coralie**	**9**	**Et bah oui, ça veut dire que là on peut pas ceux-là... Donc y'a le 6.**
49	**Marion**	**11**	**Donc le 6.**
50	**Élise**	**13**	**Donc le 6, c'est bon.**
51	Elsa	15	<u>Il y avait un seul chiffre correct mais mal placé</u>... On sait pas. <u>Il y avait un seul chiffre correct mais bien placé</u>.

Figure 19 : Quelques interactions permettant d'identifier le 6 comme faisant partie du code.

Les élèves ne se positionnent pas de la même façon dans cet échange. Elsa et Marion produisent initialement une argumentation qui paraît principalement rhétorique (visant davantage à convaincre, sans formuler de « pas argumentatif » dans leurs interventions 40 et 46). Élise, quant à elle, insiste sur le fait que, dans 456, le chiffre correct est le 6. Au départ, elle ne produit pas non plus de pas argumentatif. Ensuite, elle semble formuler un permis d'inférer *« il y avait un seul chiffre »* non valide, comme si elle estimait que parmi le 4, le 5 et le 6 on ne pouvait en prendre qu'un seul, comme si le fait de dire que c'est soit le 4, soit le 5, soit le 6 et de laisser la possibilité pour les trois, c'était déjà prendre trois chiffres. Même si les données sont bonnes et la conclusion correcte, le permis d'inférer ne semble pas valide : exprime-t-elle un choix arbitraire ou une conviction ? En revanche, Élise répète plusieurs fois ce qui est pour elle une conclusion, cet argument semble essentiellement rhétorique, en vue de convaincre ses camarades. De ce fait, elle incite Elsa à formuler un pas argumentatif (échanges 43, 45 et 47) avec un permis d'inférer valide (*« Regarde, 123 il n'y aucun chiffre correct, et là ils disent 612, mais là le 1 et le 2 il est là »*). Elsa arrive ainsi à convaincre ses trois camarades (échanges 48 à 50 avec l'emploi réitéré du marqueur *« donc »*), le permis d'inférer étant même partiellement reformulé par Coralie. On voit par cet échange comment des arguments d'ordre rhétorique avancés peuvent contribuer au développement et à l'explicitation d'une argumentation heuristique et ancrée dans la communauté discursive mathématicienne, et ce du fait de positions énonciatives variées d'élèves qui s'orchestrent dans un tel échange.

Cependant, malgré quelques avancées notables dans la production collective d'une argumentation mathématique et des déplacements de positions énonciatives au cours de tels épisodes, celles-ci restent pour autant hétérogènes et on note également de nombreux malentendus entre les quatre élèves. Il peut d'ailleurs paraître étonnant de constater qu'à la suite d'un tel échange, le « 6 » ne soit finalement pas acté comme faisant partie du résultat. Il sera remis en question bien plus tard. Les élèves y reviennent comme si l'argumentation mathématique n'avait pas permis de clore la question. L'intervention 156 de Marion déjà citée, revient de nouveau sur ce « 6 » : « Là, bon, déjà :: là 6 :: il y avait un seul chiffre correct bien placé :: alors moi je dis que c'est 6, enfin je dis que c'est 6 :: C'est 6 ! . Il semble manquer quelque chose aux élèves pour leur permettre de franchir une étape supplémentaire. L'argumentation mathématique peine à être développée de manière collective par les élèves car elles ne considèrent pas nécessairement des conclusions valides déjà formulées comme stabilisées. La communauté discursive mathématicienne ne semble pas pouvoir s'instituer de manière autonome au sein de ce groupe d'élèves dans le temps imparti. Ces quatre élèves ne parviendront finalement pas à produire une solution écrite correcte au problème posé, et ce, malgré le fait que cette solution ait d'ailleurs été mise en avant de manière fugitive au fil des échanges (voir figure 14, interventions de Marion).

IV. CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES

Cette recherche est très contextualisée puisqu'elle porte sur un dispositif particulier de rallye mathématique, et dans le contexte de ce dispositif, sur deux types d'énoncés de problèmes *« pour chercher »* ou *« ouverts »* : l'un dit « de logique » et l'autre dit « poules-lapins ». Ces énoncés semblent toutefois fortement représentés dans la plupart des dispositifs de rallyes : on peut par exemple constater une présence importante de ce type de problèmes dits « de Logique et de Raisonnement » et « Algèbre et équations » dans la banque d'énoncés du Rallye Mathématique Transalpin[13] (Grugnetti & Jacquet 1997 ; Jacquet, 1996) qui est une des plus reconnues en la matière. Les problèmes « poules-lapins » sont également fortement représentés dans les manuels scolaires (Pineau-Choquet, 2014). Cette étude nous a permis de mettre en avant différents résultats sur l'argumentation et la résolution de problèmes sur lesquels nous revenons après, en faisant l'hypothèse qu'ils restent en partie valables pour d'autres contextes de rallyes, voire de pratiques de classes plus ordinaires autour de problèmes *« ouverts »* ou *« pour chercher »*.

Tout d'abord, ce travail nous a permis de caractériser la variabilité de structures

[13] http://www.projet-ermitage.org/ARMT/doc/bp-rmt-acces-fr.html (consulté le 12/02/2019).

d'argumentations mathématiques possibles liées à la résolution des problèmes mathématiques variés, souvent qualifiés de problèmes *« pour chercher »* ou *« ouverts »* par la profession enseignante et proposés dans le cadre des dispositifs de rallyes mathématiques. Caractériser, cerner cette variabilité nous a tenu à cœur car il s'agit par là-même de mieux identifier ce qui pourrait être des enjeux d'apprentissage possibles en lien avec la résolution de ces problèmes. Autrement dit, l'identification de structures d'argumentations mathématiques liées à des raisonnements déductifs ou à des raisonnements dits par essais-erreurs (avec contrôle des essais) constitue de notre point de vue, un point d'appui essentiel pour préciser cette variabilité. Cela permet de trouver des éléments de réponse à la question des connaissances mathématiques d'élèves liées à des pratiques argumentatives dans la résolution de tels problèmes. Restent toutefois à identifier les conditions des apprentissages concernés, en lien avec ces structures argumentatives...

Il nous semble que l'étude conduite dans le cadre du rallye mathématique, autour des solutions produites par une cohorte de classes d'élèves de CM et de 6^{e} en réponse à un problème de type logique nous donne des premières informations au sujet de l'argumentation déductive. En effet, la réorganisation de structures argumentatives que nous avons qualifiées d'enchâssées (plutôt présentes dans les écrits des élèves de CM et réorganisées dans les écrits d'élèves de 6^{e}) ou l'utilisation de certains marqueurs linguistiques de type connecteurs (comme *« si »* ou *« ensuite »*) ou d'adverbes qui traduisent l'expression d'une nécessité (comme *« forcément »* ou *« obligatoirement »*), possiblement liée au sens donné à l'implication, montrent des appropriations de l'argumentation déductive à des degrés divers. Toutefois, il est assez difficile, dans les conditions de l'étude menée, de savoir ce qui pourrait être précisément les causes potentielles de tels apprentissages. Les différences constatées à ce sujet entre des élèves de CM et de 6^{e} montrent-elles une acculturation progressive d'un genre plus second de discours mathématique dans la transition école-collège ? Si tel est le cas, qu'est-ce qui pourrait être à l'origine de cette secondarisation apparente des pratiques langagières des élèves ? Est-ce en lien avec l'enseignement-apprentissage de la résolution de problèmes *« ouverts »* ou *« pour chercher »* ou en lien avec la résolution de problèmes dans des domaines de savoirs mathématiques (comme la géométrie) proposés en amont ou en aval, à même de participer à la mise en place d'un schéma déductif de raisonnement et d'argumentation ?

L'étude des interactions au sein d'un petit groupe d'élèves de CM2 nous invite à une grande prudence dans le rôle potentiellement joué par un dispositif de type rallye (si celui-ci est vécu de manière isolée) dans de tels apprentissages. Autrement dit, il ne faudrait pas conclure à l'issue de cette étude qu'un dispositif type rallye mathématiques ou que la seule fréquentation de tels problèmes à résoudre « en autonomie » est nécessairement à l'origine d'apprentissages liés à l'argumentation mathématique pour tous les élèves. La dernière partie de ce texte donne à voir la complexité de ce qui se joue dans les interactions entre des élèves de CM2 investis collectivement dans la recherche d'une solution à ce même problème de logique. Elle montre notamment comment peuvent coexister des positions énonciatives hétérogènes au fil d'interactions d'élèves lors d'une phase de recherche, même quand celles-ci contribuent à amorcer collectivement la production une argumentation mathématique valide. Cette étude de cas a également montré comment cette hétéroglossie ainsi rencontrée au sein d'un petit groupe d'élèves peut peiner à s'orchestrer de manière autonome : les élèves éprouvant des difficultés à stabiliser des arguments dont la validité a pourtant été préalablement éprouvée. La seule fréquentation de problèmes donnés à résoudre au sein d'un rallye mathématique peut-elle contribuer à faire évoluer de telles positions énonciatives et à faire progresser l'ensemble des élèves dans le développement d'une argumentation mathématique ?

Nous pouvons regretter que notre travail de recherche n'amène finalement qu'assez peu d'éléments de réponse à une telle question qui correspondait pourtant à notre questionnement « naïf » initial. Pour autant, les résultats de cette étude exploratoire peuvent nourrir des perspectives de recherche sur l'argumentation et la résolution de problèmes dans la classe de mathématiques. Notre étude des structures argumentatives mathématiques possibles associées à différents énoncés de problèmes pourrait fonder la recherche de repères de progressivité pour des apprentissages liés à l'argumentation mathématique dans la résolution de problèmes. D'autre part, notre recherche met en avant des aspects langagiers spécifiques de l'argumentation mathématique comme l'expression du caractère nécessaire d'une implication dans un raisonnement déductif (avec des marqueurs linguistiques ou la réorganisation textuelle de pas argumentatifs « enchâssés ») qui pourraient constituer des leviers pour de tels apprentissages. Affaire à suivre ?

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

Balacheff, N. (1999). L'argumentation est-elle un obstacle ? Invitation à un débat..., *International Newsletter on the Teaching and Learning of Mathematical Proof*. http://www.lettredelapreuve.org/OldPreuve/Newsletter/990506Theme/990506ThemeFR.html

Bernié, J.-P. (2002). L'approche des pratiques langagières scolaires à travers la notion de "Communauté discursive" : un apport à la didactique comparée ? *Revue française de pédagogie, 141*, 77-88.

Douaire, J. & Hubert, C. (1999). *Vrai ? Faux ?... On en débat ! De l'argumentation vers la preuve en mathématiques au cycle 3*. ERMEL - Paris : INRP.

Douaire, J. & Hubert, C. (2000). Mise en commun et argumentation en mathématiques. *Grand N, 68*, 29-40.

Duval, R. (1993) Argumenter, démontrer, expliquer : continuité ou rupture cognitive. *Petit x, 31*, 37-61.

Grugnetti, L. & Jaquet, F. (1997). La résolution de problèmes par classes. *Grand N, 61*, 61-69.

Hersant, M. (2008). « Problèmes pour chercher », des conduites de classes spécifiques. *Grand N, 81*, 57-75.

Hersant, M. (2012). Conditions d'une émancipation à travers la résolution de problèmes ouverts en mathématiques à l'école primaire. In M. Hersant (coord.) *Symposium La résolution de problèmes en mathématiques - quelles émancipations possibles ? À quelles conditions ?* Actes du colloque Formes d'émancipation et processus d'émancipation (pp. 20-28). CREAD, Université de Bretagne Occidentale et Université Rennes 2. https://esup.espe-bretagne.fr/colloque_cread_2012/paper_submission/Hersant.pdf

Gobert, S. (2014) Déplacements dans le processus de secondarisation. *Spirale, 54*, 69-82.

Grize, J.-B. & Piéraut-Le Bonniec, G. (1983). *La contradiction. Essai sur les opérations de la Pensée*. PUF.

Hitt, F. (2005). L'argumentation, la preuve et la démonstration dans la construction des mathématiques : des entités conflictuelles ? Une lettre de Godefroy Guillaume Leibnitz à Chrétien Wolf. In D. Tanguay (Ed) *Actes du colloque du Groupe des didacticiens des mathématiques du Québec GDM 2004* (pp. 135-146). Université de Québec à Montréal.

Jaquet, F. (1996). 5e Rallye mathématique transalpin. *Math-Ecole, 176*, 20-28.

Jaubert, M. & Rebière, M. (2011) *Positions énonciatives pour apprendre dans les différentes disciplines scolaires : une question pour la didactique du français ?* http://www.ardm.asso.fr/ee16/documents/cours/theme2-complet/cours-Rebiere-complet/docs-preparatoires/pratiques%20def%2010%2001%202011.pdf

Jaubert, M. & Rebière, M., avec la participation de Bernié, J.-P. (2012) *Communautés discursives disciplinaires scolaires et construction de savoirs : l'hypothèse énonciative*. http://www.leseforum.ch/myUploadData/files/2012_3_Jaubert_Rebiere_Bernier.pdf

Pedemonte, B. (2002) *Étude didactique et cognitive des rapports entre argumentation et démonstration dans l'apprentissage des mathématiques*. Thèse de l'Université Joseph Fourier-Grenoble I et Université de Gênes.

Pineau-Choquet, C. (2014) *Une caractérisation des pratiques de professeurs des écoles lors de séances de mathématiques dédiées à l'étude de problèmes ouverts au cycle 3*. Thèse de l'Université de Nantes.

ANNEXE 1
SCHÉMATISATION DE TOULMIN DE LA SOLUTION PROPOSÉE PAR UNE CLASSE DE 6^{E} AU PROBLÈME DE LOGIQUE

Etape 1 :
123 il n'y a aucun chiffre de bon

Nous pouvons éliminer les 1, 2 et 3 dans toutes les combinaisons

Il n'y aura pas de 1,2 ou 3 dans aucune combinaison

Etape 2 :
Dans 456 un chiffre correct bien placé

Nous sommes passés à 612

Nous ne savons pas lequel est bon et lequel est bien placé

Etape 3 :
612 un chiffre correct et mal placé

1 et 2 éliminés dans toutes les combinaisons (étape 1)

le 6 est correct

Ils nous disent que un est bon et que nous avons déjà rayé le 1 et le 2

Etape 4 :
Dans 456 un chiffre correct bien placé

Le 6 est correct (étape 3)

6 est le dernier chiffre de la combinaison et on peut rayer les 4 et les 5 dans toues les combinaisons

dans 456 le bon chiffre est le 6 et comme il est bien placé le 6 est le dernier chiffre

Etape 5 :
547 un chiffre correct mal placé

4 et 5 éliminés dans toutes les combinaisons (étape 4)

le sept est bon mais on nous a dit qu'il est mal placé alors il faut le replacer.

Dans 547, on sait qu'il n'y a pas de 4, ni de 5.

Etape 6 :
849 un chiffre correct bien placé

4 éliminés dans toutes les combinaisons (étape 4)

6 est le dernier chiffre de la combinaison (étape 3)

Le chiffre bon est le 8

Et en première position

Dans 849 on avait déjà rayé le 4 donc c'est soit le 8 ou le 9 de bon.

Ce n'est pas le 9 car il serait bien placé et il y a déjà le 6 à la position du 9

Etape 7 :
Le chiffre bon est le 8 *en 1ère position* (étape 6)

6 est le dernier chiffre de la combinaison (étape4)

Le sept est bon mais il faut le replacer (étape 5)

Donc le code final est 876

Le 7 ne pouvait être qu'à la 2ème position.

ANNEXE 2
SCHÉMATISATION DE TOULMIN DE LA SOLUTION PROPOSÉE PAR UNE CLASSE DE CM2 AU PROBLÈME DE LOGIQUE

En bleu, les arguments laissés implicites.

Etape 1 :

123 incorrect

456 un chiffre correct bien placé

Le 6 fait partie de la combinaison
Il est en dernière position

612 un chiffre correct mal placé

6 est correct

Il n'est pas en première position

123 incorrect

Dans 612, comme 1 et 2 n'appartiennent pas au code, alors seul le 6 peut y appartenir

Etape 2 :

547 un chiffre correct bien placé

Le 7 fait partie de la combinaison
Il est mal placé, n'est pas en dernière position

Le 5 et le 4 sont faux

456 un chiffre correct bien placé
Le 6 fait partie de la combinaison

Il n'y a pas de 4 ni de 5

Dans 456, comme le 6 appartient au code, alors le 4 et le 5 ne peuvent pas en faire partie

Etape 3 :

849 a un chiffre correct bien placé

Le 8 fait partie de la combinaison
Il est bien placé, il est en première position

le 4 n'est pas bon (étape 2)
le 9 aurait pris la place du 6

849 un chiffre bien placé
Le 6 est en dernière position

Le 9 ne peut pas être bien placé en dernière position puisqu'il y a le 6

Le 6 étant correct en dernière position, il ne peut pas y avoir aussi le 9 à cette même position

Etape 4:

Le 6 fait partie de la combinaison
Il est en dernière position

Le 7 fait partie de la combinaison
Il est mal placé, n'est pas en dernière position

Le 8 fait partie de la combinaison
Il est bien placé, il est en première position

Le 8 et en premier, le 6 en dernier
Il ne reste que le milieu pour le 7

Le code est 876

ANNEXE 3
LISTE DE MARQUEURS DU RAISONNEMENT
RÉSOLUTION D'UN PROBLÈME DE LOGIQUE

Catégorie grammaticale	**Mots ou expressions**	**Idée exprimée** (à l'aide du dictionnaire Larousse en ligne)	**Nombre de classes qui l'utilisent**	**Nombre d'occurences**
Conjonction de coordination	**car**	Apporte une explication, une justification de ce qui est affirmé avant.	**16** soit 73 % des classes • 9 classes de CM (64 %) • 7 classes de 6^e (87 %)	**45** • 1 occurence : 5 classes • 2 occurences : 2 classes • 3 occurences : 5 classes • 4 occurences : 2 classes • 6 occurences : 1 classe • 7 occurences : 1 classe soit une moyenne de 2,8 occurences par classe qui l'a utilisée ou 2 sur toutes les classes.
	donc	Marque la conclusion d'un raisonnement, la conséquence.	**16** soit 73 % des classes • 10 classes de CM (71 %) • 6 classes de 6^e (75 %)	**40** • 1 occurence : 4 classes • 2 occurences : 3 classes • 3 occurences : 6 classes • 4 occurences : 2 classes • 5 occurences : 1 classe soit une moyenne de 2,5 occurences par classe qui l'a utilisée ou 1,8 sur toutes les classes.
	mais	Qui peut revêtir plusieurs significations : • une opposition, • le renforcement. (plutôt utilisé par des classes qui ont produit des solutions valides ou contenant 1 ou 2 permis d'inférer implicites, 1 seule classe a produit une solution avec plus de 2 permis d'inférer implicites).	**6** soit 27 % des classes • 4 classes de CM (28 %) • 2 classes de 6^e (25 %)	**10** • 1 occurence : 3 classes • 2 occurences : 2 classes • 3 occurences : 1 classes
			1 soit 4,5 % des classes • 1 classe de CM	**1**

	et	Relie deux idées. Permet l'accumulation (figure d'insistance).	**15** soit 68 % des classes • 8 classes de CM (57 %) • 7 classes de 6^e (87 %)	**32** • 1 occurence : 7 classes • 2 occurences : 5 classes • 4 occurences : 1 classes • 5 occurences : 1 classes • 6 occurences : 1 classe soit une moyenne de 2,1 occurences par classe qui l'a utilisée ou 1,5 sur toutes les classes.
Conjonction	**si**	Exprime une hypothèse plus ou moins vraie, réalisable.	**2** • 2 classes de 6^e	**2**
	soit	Exprime une alternative.	**1** • 1 classe de 6^e	**1**
	puisque	Indique une raison (une cause, une explication) Plus évidente que « car » ou « comme »...	**2** soit 9 % des classes • 1 classes de CM • 1 classes de 6^e	**2** • 1 occurence pour chacune des classes
	puisque	Permet d'introduire une référence, dans notre cas, un indice du texte, du raisonnement qui apportera une cause, une raison.	**2** soit 9 % des classes • 1 classes de CM • 1 classes de 6^e	**4** • 2 occurences pour chacune des classes
	comme	Introduit une explication mais aussi l'idée d'une justification.	**2** soit 9 % des classes • 1 classes de CM • 1 classes de 6^e	**4** • 2 occurences pour chacune des classes
	parce que	Indique la cause, le motif. 3 réussites avec 1 implicite, 3 avec erreurs de raisonnement ou bcp d'implicite.	**6** soit 27 % des classes • 4 classes de CM (28 %) • 2 classes de 6^e (25 %)	**8** • 1 occurence : 4 classes • 2 occurences : 2 classes
	alors que	Marque une opposition.	**1** soit 4,5 % des classes • 1 classe de CM avec une solution erronée	**1**

Adverbe	**aussi**	Idée d'accumulation, pour insister ou simplement relier deux idées. Peut aussi marquer une conclusion.	**1** soit 4,5 % des classes 1 classe de CM avec une solution avec un permis d'inférer implicite	**1**
	alors	Introduit l'expression d'une conséquence.	**2** • 1 classe de 6^e solution valide • 1 classe de CM2 solution erronée	**2**
	au début	Permet de commencer, annoncer première argument.	**2** • 2 classes de CM	**2**
	ensuite	Introduit une succession dans le temps.	**2** • 2 classes de CM (solutions erronées)	**2**
	après		**2** • 2 classes de CM	**2**
	puis		**3** soit 14 % des classes • 2 classes de CM (57 %) • 7 classes de 6^e (87 %)	**3** • 1 occurence pour chacune des classes
	enfin	Permet de conclure, à la fin.	**1** • 1 classe de 6^e (solutions contenant plus de 2 permis d'inférer implicites)	**1**
	forcément	Exprime une conséquence évidente, naturelle.	**2** • 2 classes de 6^e (solutions valides ou contenant un permis d'inférer implicite)	**3** • 1 occurence : 1 classe • 2 occurences : 1 classe
Locution	**du coup**	Lien de causalité, indique une conséquence.	**4** soit 18 % des classes • 2 classes de CM (solutions contenant un permis d'inférer implicite) • 2 classes de 6^e (solutions valides)	**4** • 1 occurence pour chacune des classes

	grâce à	Permet d'exprimer un moyen, une cause.	**1** • 1 classe de CM (solution valide)	**2**
	vu que	Permet d'introduire une référence, dans notre cas, un indice du texte, du raisonnement, qui apportera une cause, une raison (comme « puisque », mais plus soutenu).	**3** soit 27 % des classes • 3 classes de CM • 3 classes de 6^{e}	**8** • 1 occurence : 4 classes • 2 occurences : 2 classes
Préposition	**d'après**	Permet l'expression d'un point de vue.	**1** • 1 classe de 6^{e} (solution valide)	**2**
Verbes ou Locutions verbales	**se rendre compte**	Exprime la position, l'action du « chercheur » avec des nuances sur l'assurance de la validité et le degré de prise en charge.	**1** • 1 classe de CM (solution erronée)	**1**
	voir		**2** • 2 classes de CM	**4** • 1 occurence : 1 classe • 3 occurences : 1 classe
	savoir		**6** soit 27 % des classes • 5 classes de CM (36 %) • 1 classes de 6^{e} (12 %)	**11** • 1 occurence : 3 classes • 2 occurences : 2 classes • 4 occurence : 1 classe 1 formulation à la forme négative.
	penser		**1** • 1 classe de CM (solution erronée)	**1**
	découvrir		**1** • 1 classe de CM (solution valide)	**1**
	dire		**3** soit 14 % des classes • 3 classes de CM (57 %)	**3** • 1 occurence pour chacune des classes
	se dire		**1** • 1 classe de CM (solution contenant deux permis d'inférer implicites)	**1**

	être sûr		**2** • 1 classes de CM • 1 classes de 6^e	**4** • 1 occurence : 1 classe • 3 occurences : 1 classe
	hésiter		**1** • 1 classe de CM (solution contenant un permis d'inférer implicite)	**1**
	trouver	Permet d'exprimer un résultat, une conclusion.	**4** soit 18 % des classes • 1 classes de CM (7 %) • 3 classes de 6^e (37 %)	**4** • 1 occurence pour chacune des classes
	donner	Permet d'exprimer un résultat, une conclusion (intermédiaire éventuellement).	**1** • 1 classe de CM (solution erronée)	**1**
	ne pouvoir être que	Donne une conclusion dont on est certain qu'il ne peut pas en être autrement.	**1** • 1 classe de 6^e (solution valide)	**1**