CONDITIONS POUR DIFFUSER DES SITUATIONS ISSUES DE LA RECHERCHE EN DIDACTIQUE DES MATHÉMATIQUES : L'EXEMPLE DU CARRÉ BORDÉ

Sylvie COPPÉ
Université de Genève FPSE, Equipe DiMaGe
Brigitte GRUGEON-ALLYS
Université Paris Est Créteil, LDAR
Julia PILET
Université Paris Est Créteil, LDAR

Résumé. En se focalisant sur la situation connue du carré bordé, nous nous proposons de déterminer sous quelles conditions une situation issue de la recherche en didactique, à fort potentiel didactique, peut être diffusée dans l'enseignement pour être mise en place dans les classes ordinaires de façon optimale. Après avoir situé la question la diffusion des situations d'enseignement et d'apprentissage dans les travaux de recherche en didactique des mathématiques, nous commençons par présenter le texte initial du carré bordé et son analyse *a priori*. Nous montrons ensuite que cette situation est relativement présente dans les articles, les ouvrages à destination des enseignants, les documents ressources du ministère et les manuels scolaires mais, souvent avec des énoncés qui dénaturent ses enjeux et sans indication précise de mise en œuvre facilitant sa viabilité. Nous donnons ensuite deux exemples de déroulement de cette situation en classe en pointant des conditions de mise en œuvre qui la rendent viable dans l'enseignement ordinaire.

Mots clés. Diffusion, Algèbre élémentaire, Didactique des mathématiques, Situations issues de la recherche, Enseignement ordinaire, Carré bordé

Abstract. By focusing on the well-known « Carré bordé » situation, we propose to determine under what conditions a situation resulting from education research, with a high learning potential, can be streamed in education to be optimally implemented in ordinary classes. After situating the issue of dissemination of teaching and learning situations in mathematics education research, we start by presenting the original text of the "carré bordé" and its *a priori* analysis. We then show that this situation is relatively present in articles, books for teachers, documents ministry resources and textbooks, but often with statements that misrepresent its stakes and without clear indication facilitating a viable implementation in class. We then give two examples of implementation in class by pointing the conditions that make it viable in ordinary education.

Key-words. Dissemination, Elementary Algebra, Didactic of Mathematics, Situations from research, Regular Teaching, Carré bordé

Introduction

L'objectif de cet article est de déterminer des conditions qui permettent de diffuser de façon viable, des situations issues de la recherche, pour nous en didactique des mathématiques. Plus particulièrement, nous nous demandons à quelles conditions une situation reconnue potentiellement riche par les chercheurs peut être intégrée de façon viable dans une séance ou une séquence d'enseignement ordinaire. Par viable, nous entendons à la fois que cette situation n'est pas complètement en rupture avec ce qui est fait dans les classes dites ordinaires (par exemple, elle est conforme au programme scolaire, elle peut être mise en œuvre sur une durée raisonnable, elle ne nécessite pas de moyens ou de dispositifs particuliers) mais également qu'elle ne risque pas d'être totalement transformée lors de sa mise en œuvre en termes d'apprentissages visés notamment en ajoutant des questions intermédiaires fermées ou en guidant de façon excessive le travail des élèves.

Les questions portant sur la diffusion des recherches et des résultats constituent une préoccupation ancienne. Elles ont été abordées par de nombreux chercheurs (Artigue, 1986 ; Brousseau, 1989 ; Robert, 2001 ; Chevallard, 2007) et ceci, dès le début de la didactique des mathématiques, à travers plusieurs dimensions, au cours des étapes progressives de la construction de ce domaine.

Ainsi Artigue (1986), en prenant le point de vue de la reproductibilité, souligne l'importance de la question, puis pointe les contraintes qui pèsent sur la diffusion de pratiques innovantes. Elle aborde donc le difficile problème de la transformation des pratiques enseignantes et elle souligne que si les situations qui pourraient être implantées dans les classes ne sont pas suffisamment décrites et comprises, celles-ci seront abandonnées.

> Le problème auquel nous nous intéressons ici est celui de la reproductibilité des situations didactiques. C'est une question fondamentale car l'obtention de résultats dans ce domaine conditionne en partie les possibilités de transmission voire d'utilisation des travaux de recherche. (p. 7)
>
> L'expérience montre que ces situations où le maître, tout en exerçant un contrôle sur la dynamique de la classe, a le souci de laisser le plus possible aux élèves la responsabilité de la construction de leur savoir, sont des situations difficiles à gérer. En l'absence d'informations précises sur à la fois les certitudes et les incertitudes de leur dynamique, sur les moments clefs de décision, l'enseignant peut avoir tendance à forcer la reproduction de dynamiques déjà observées ou décrites dans des documents, la réalisation de cette reproductibilité externe se faisant souvent contre une reproductibilité au niveau du sens. (p. 56)

En 2011, Artigue élargit son propos pour resituer « le questionnement sur l'ingénierie didactique dans un ensemble plus vaste, celui du *design* didactique. Elle pose la question des rapports que la recherche didactique, ici ou ailleurs, entretient avec le *design* et sur les moyens qu'elle se donne pour travailler ces rapports.» (Artigue, 2011, p. 15)

La théorie de la double approche (Robert, 2001, 2008) permet de rendre compte des contraintes qui pèsent sur le professeur et de donner des éléments d'explication à la difficulté liée à la mise en place effective de situations d'enseignement/apprentissage ayant une certaine robustesse didactique. En utilisant ce cadre, Roditi (2008) pointe les difficultés de mise en place de ces situations et note des divergences de pratiques importantes.

> L'analyse des stratégies d'enseignement montre que les ingénieries didactiques ne sont pas reprises dans l'enseignement ordinaire mais, au-delà de ce constat, des divergences apparaissent, notamment concernant l'introduction et l'institutionnalisation du nouveau savoir. (Roditi, 2008, p. 83)

Toujours dans ce cadre Chesné et al. (2009) indiquent la nécessité de tenir compte des pratiques effectives des enseignants. Enfin, de nombreuses questions, encore en débat, sont soulevées concernant la formation. Voici ce qu'indiquait Robert, il y a dix ans déjà, sur cette difficulté de la diffusion et, par conséquent, sur l'élaboration de formations :

> C'est là qu'est le vrai mystère, que ce soit pour comprendre les difficultés à adopter en classe des séquences non habituelles, ou pour évaluer le rôle de ce que l'enseignant dit ou ne dit pas, ou pour comprendre comment se forment les pratiques, voire pour percevoir les besoins des formés, avant de concevoir des scénarios de formation (y compris continue). (Robert 2004, p.19)

Nous nous intéressons maintenant à la situation dite du carré bordé.

1. Le carré bordé dans les publications

Pour traiter les questions relevant de la difficulté de la diffusion, nous choisissons de partir de la situation bien connue du « Carré bordé » proposée par Combier et al. (1996) dans l'ouvrage « Les débuts de l'algèbre au collège. Au pied de la lettre ! ». Rappelons que ce livre avait pour but de proposer une réflexion sur le passage de l'arithmétique à l'algèbre en début du collège français, en proposant quelques situations pour introduire la lettre, dont celle-ci.
Nous allons tenter de comprendre pourquoi ce problème, qui a un fort potentiel didactique, est souvent proposé avec un énoncé comportant de nombreuses questions intermédiaires qui le ferment et ne permettent pas toujours de travailler sur les savoirs visés ou bien pourquoi les professeurs abandonnent assez vite son utilisation. Coulange et Grugeon (2008) avaient déjà montré comment un professeur affaiblissait ses potentialités en rajoutant des questions fermées et en utilisant des arguments non pertinents (« on n'a pas le droit… ») qui s'appuient sur le registre « légal » et qui sont très éloignés d'un questionnement sur la validité des expressions algébriques qui devrait être requis pour contrôler les calculs. De plus, dans les publications, cette situation est souvent étudiée très localement, sans être mise en perspective d'une progression et ainsi les enseignants ont à leur charge son intégration dans leur pratique habituelle. Dans ce cas le carré bordé devient une situation d'enseignement « isolée » sortie d'une organisation didactique qui viserait à donner une raison d'être aux expressions algébriques.
L'étude que nous proposons dans cet article nous permettra de dégager des conditions qui pourraient permettre une meilleure utilisation du carré bordé par les enseignants et, plus largement, de diffuser des situations issues de la recherche en les resituant dans le cadre des organisations mathématiques et didactiques relatives à un niveau donné.
Notre cadre d'analyse est celui de la théorie anthropologique du didactique (Chevallard, 1999, 2007) à travers les notions de praxéologie mathématique, notamment locale et régionale, et de praxéologie didactique. Rappelons qu'une praxéologie mathématique est formée d'un type de tâches, qui est accompli au moyen d'une technique, justifiée et rendue intelligible par une technologie, elle-même justifiée par une théorie. Les praxéologies s'agrègent en praxéologies locales autour d'une même technologie mathématique et en praxéologies régionales, autour d'une même théorie. Les praxéologies didactiques sont formées de différents moments permettant d'organiser l'étude des praxéologies mathématiques. Nous nous appuyons sur les travaux en didactique de l'algèbre dont Chaachoua (2015), Coppé et Grugeon (2015) ont fait une synthèse. Nous considérons, à la suite des travaux de Ruiz-Munzón (2010), Ruiz-Munzón et al. (2012) ainsi que Bosch et Gascon (2005) que l'enseignement de l'algèbre doit viser le développement d'un rapport fonctionnel à l'algèbre. Pour cela il doit favoriser un calcul intelligent (c'est-à-dire utilisant des règles de calcul justifiées et valides), au service de la résolution de problèmes -problèmes de modélisation, de mise en équation, de généralisation et de preuve -, contrôlé par la syntaxe mais aussi par la structure interne des objets et par la sémantique des expressions équivalentes obtenues par transformation. La dialectique entre l'algébrique et le numérique y joue un rôle important.

1.1 La publication initiale

Voici le texte initial qui a été proposé par Combier et al. (1996) pour la classe de 6e[1] (élèves de 11-12 ans). Il était indiqué dans le choix de la situation :

[1] Ceci dans le cadre des programmes de 1985, ceux de l'époque.

Le problème consiste à établir une formule qui permet de calculer le nombre de carreaux hachurés d'une figure construite sur le modèle ci-contre, quel que soit le nombre de carreaux sur le côté du carré.

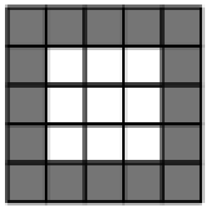


Figure 1. *Le texte initial de la situation des carreaux colorés (Combier et al., 1996 p. 42)*

Dans le déroulement, le calcul est demandé pour un carré de côté 5, puis 37, ensuite, il s'agit de formuler une méthode générale de calcul.

> « Vous venez d'utiliser une méthode pour calculer le nombre de carreaux hachurés quand le coté du carré compte 37 carreaux ; maintenant vous allez décrire cette méthode, en une ou plusieurs phrases, pour qu'elle permette de calculer le nombre de carreaux hachurés pour n'importe quel carré construit sur le même modèle » (Combier et al., 1996 p.43)

Pour terminer, il s'agit de passer d'une formulation écrite en français à une écriture mathématique, le nombre de carreaux d'un côté du carré étant désigné pour n'importe quel nombre par une lettre.

1.2 Analyse *a priori* et potentialités de cette situation

Analyse a priori

Il s'agit donc de trouver le nombre de carreaux colorés pour n'importe quel carré. Lorsque le côté du carré est un nombre entier assez petit, les élèves peuvent faire le dessin et compter le nombre de carreaux colorés. En donnant un nombre entier plus grand pour le côté du carré, cette procédure de dessin/comptage est bloquée et les élèves sont obligés de trouver une méthode pour déterminer le nombre cherché par le calcul. Il y a donc ici un jeu sur la variable didactique « nombre de carreaux du côté » qui devrait inciter les élèves à déterminer le nombre de carreaux hachurés non plus en les comptant (comme pour 5) mais en trouvant une méthode de calcul qui se traduit par un programme de calculs, ce qui pourrait engendrer l'idée d'une formule qui pourrait elle-même se traduire par une expression littérale.

Avant d'expliciter les différentes méthodes et réponses, nous apportons une précision quant à la distinction entre formule et expression littérale/algébrique. Nous considérons à la suite de Hauchecorne (2003) que le terme « Formule est associé à une égalité dépendant de paramètres et valables dans les cas fixés par l'hypothèse ». A chaque fois, on peut considérer que les élèves produisent une formule du type $N = 4 \cdot n – 4$ ou même Nombre de carreaux = 4·côté– 4 qui traduit un procédé de calcul dans la situation du carré bordé et donc, les deux formules $N = 4 \cdot n – 4$ et $N = 4 \cdot (n – 1)$ peuvent ne pas apparaître comme équivalentes pour les élèves. En revanche, on peut dire que les expressions littérales issues de ces formules sont équivalentes. Notons que dans les manuels ou dans les discours des professeurs (y compris celles citées plus loin), la distinction n'est pas toujours faite.

Les différentes techniques correctes pour calculer sont les suivantes (on appelle n le nombre de carreaux d'un côté du carré).

1. Puisqu'on a un carré, le nombre de carreaux colorés correspond au périmètre auquel on enlève les quatre coins qui sont comptés deux fois. On aboutit à des expressions du type n+n+n+n-4 ou 4n-4.
2. Pour éviter de compter deux fois les coins, on peut ajouter quatre fois n-1 carreaux. On aboutit à des expressions du type n-1+n-1+n-1+n-1 ou bien 4(n-1) via l'addition itérée.

3. On peut ajouter le nombre de carreaux d'un côté n, ceux des deux côtés suivants qui seront n-1 et celui du dernier n-2 (en tenant compte des coins). On aboutit à des expressions du type n+n-1+n-1+n-2 ou bien n+2(n-1)+n-2
4. On peut ajouter le nombre de carreaux sur deux côtés opposés n et ensuite ceux sur les deux autres n-2. On aboutit à des expressions du type n+n+n-2+n-2 ou 2n+2(n-2).
5. On peut ajouter 4 fois le nombre de carreaux sans les coins n-2 et ajouter 4. On aboutit à 4(n-2)+4.
6. On peut faire la différence des aires des carrés de côté n et n-2. On aboutit à une expression du type n^2- $(n-2)^2$.

Pour chacune de ces techniques, on peut aboutir à des expressions telles que nous les avons citées mais aussi à des expressions en langue naturelle qui décrivent le procédé du type « On ajoute les carreaux des côtés et on enlève les 4 coins », à des programmes de calcul qui décrivent le calcul « On multiplie par 4 le nombre de carreaux et on enlève 4 », ou bien à des dessins sur des cas particuliers qui illustrent la méthode et qui ont valeur de cas général comme celui – ci :

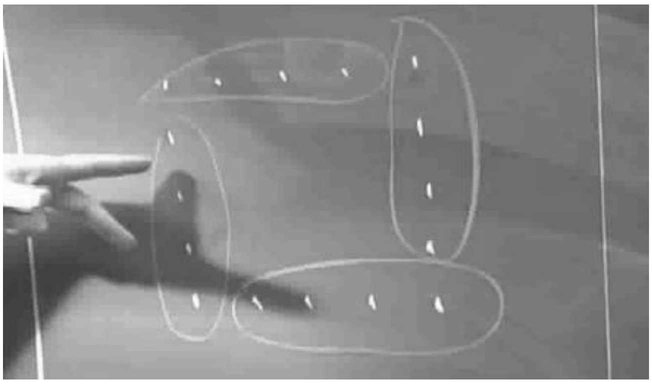


Figure 2. *Un dessin pour montrer comment compter les carreaux.*

A cela s'ajoutent soient des techniques incorrectes (par exemple ne pas tenir compte que l'on a compté deux fois les coins dans la technique 1, ou prendre n-1 dans la technique 5) soit des résultats incorrects (par exemple dans les réductions ou développements des expressions) ou bien des expressions avec plusieurs variables (par exemple avoir recours à des nouvelles variables p, q pour désigner n-1, puis n-2).

Potentialités didactiques

Cette analyse *a priori* des techniques et des réponses possibles nous montre la richesse de cette situation pour l'enjeu qui consiste à calculer le nombre de carreaux pour tous les carrés même ceux que l'on ne peut pas dessiner. Elle met en lumière la diversité des techniques, formulations (procédé, programme de calcul), formules ou expressions qui peuvent être produites. Notons que cette grande diversité peut s'avérer difficile à gérer pour l'enseignant.
Voici enfin les différents objectifs d'enseignement qui, selon nous, ne doivent pas se limiter au premier si l'on se place dans une perspective algébrique :

1. élaborer une technique de calcul du nombre de carreaux pour n'importe quel carré avec différentes formulations,
2. introduire une lettre, la non unicité du choix de la lettre, pour traduire les formulations en expressions littérales,
3. montrer l'équivalence de ces différentes expressions littérales.

Pour 1, une fois les différentes formulations/formules/expressions recensées, il s'agira de les valider ou non. On peut penser que certaines pourront être invalidées par recours aux premiers exemples avec un nombre petit de carreaux, un dessin ou/et le comptage. Il est plus difficile de les valider : en fait on valide la méthode de calcul.
Pour 2, même si les élèves ont déjà rencontré des formules à l'école primaire, il y a peu de chance qu'ils mobilisent spontanément une formulation symbolique et une lettre. On peut donc penser que l'affirmation de départ sur la production d'expressions comme enjeu didactique, en laissant à la charge des élèves la mobilisation d'une lettre et sa désignation, sera difficile à atteindre. Au delà du jeu sur la valeur de la variable didactique Nombre de carreaux, nous voyons deux pistes pour favoriser la production d'expressions littérales générales en dehors d'une injonction du professeur. La première porte sur la place de cette activité dans la progression, autrement dit sur la praxéologie mathématique proposée aux élèves lors d'une des premières rencontres avec les expressions littérales. Pour nous, ce problème ne peut pas être proposé comme une première activité, il doit être replacé dans une progression en termes de types de tâches et techniques utilisant, par exemple, des programmes de calcul (voir Alves et al., 2013). Une seconde piste est de proposer une question comme « si le nombre de carreaux colorés est 108, quel était le nombre de carreaux sur le côté du carré ? » ou bien « le nombre de carreaux peut-il être … » car il est toujours un multiple de 4, ce qui peut nécessiter la transformation de certaines formulations en expressions littérales mais pas toutes et la résolution reste arithmétique.
Enfin pour 3, il faut se poser la question de la place dans la praxéologie mathématique de la distributivité de la multiplication sur l'addition (d'autres propriétés comme la commutativité ou l'associativité de l'addition ou de la multiplication sont en jeu mais elles sont plus faciles à justifier et n'occasionnent pas d'erreurs). En effet, c'est bien la propriété de distributivité qui permet de justifier les transformations d'expressions littérales et d'engager la question de l'équivalence des expressions.

Le statut de la propriété de distributivité de la multiplication par rapport à l'addition

Assude et al. (2012), Alves et al. (2013), Ferraton et Chaachoua (2013) et Bellard et al. (2012) ont montré que la distributivité était souvent passée sous silence et remplacée par des justifications portant sur la forme ou sur le cadre des grandeurs dans lequel est contextualisée la situation du carré bordé.

> Il en résulte que la propriété de distributivité perd sa prépondérance technologique pour justifier et valider les calculs. Il y a donc un risque que les élèves ne l'utilisent pas et se rabattent sur des techniques portant sur les transformations d'écritures exclusivement basées sur des ostensifs, avec des critères de vérification peu opérationnels portant sur la forme. (Assude et al., 2012, p. 55).

Il y a ici un problème de transposition didactique et donc un problème d'enseignement majeur concernant le passage de l'arithmétique à l'algèbre. En effet, la distributivité est généralement introduite de façon intuitive dans le cadre arithmétique pour faire du calcul mental ou pour justifier la technique habituelle en France de la multiplication posée. A l'entrée dans l'algèbre, avec une activité comme le carré bordé, il est nécessaire que la distributivité ait été reconnue comme un élément technologique et, pour cela, qu'elle ait été institutionnalisée en classe de 5^{e}. A ce niveau, cela ne peut se faire que par l'écriture de deux identités : une pour l'addition et une pour la soustraction (ce qui suppose des conditions sur les nombres en jeu) puisque les nombres relatifs ne sont pas encore introduits. De plus dans les programmes de 2005, 2007 et

2008, la multiplication des relatifs était au programme de la classe de 4^{e,} ce qui compliquait encore la question de la place de cette activité du carré bordé à la charnière entre les classes de 5^e et 4^e. Il y a des changements avec les nouveaux programmes de 2016 qui devraient amener une plus grande cohérence entre la place des relatifs et celle de la distributivité.

Or, il semble qu'il y ait ici deux façons de montrer que les expressions littérales sont équivalentes. Soit on revient aux procédés de calcul des carreaux dans le contexte de la situation (ou à partir d'une représentation) et on valide ces procédés : on peut donc en conclure que puisqu'ils sont valides ils donneront toujours le même résultat pour le même nombre de carreaux du côté. Soit on ne considère que les expressions littérales et elles sont équivalentes parce qu'on admet que l'une s'obtient par transformation à partir de l'autre par des règles de calcul valides appuyées sur la propriété de distributivité. Pour ceci, il est nécessaire d'avoir invalidé les autres transformations par la mobilisation de contre exemples numériques. Par exemple, 4(n+1) et 4n+1 ne sont pas équivalentes car on n'obtient pas le même nombre pour n = 5. Cette activité nécessite aussi d'avoir travaillé préalablement les priorités opératoires et la substitution d'une lettre par un nombre. Ceci nous semble être un point essentiel de l'analyse de ce problème, qui peut permettre de montrer ses potentialités, mais qui peut se révéler être une difficulté dans la gestion des réponses des élèves.

Conclusion partielle sur les conditions à mettre en place autour de cette situation

Par cette analyse, nous avons montré que la situation peut motiver l'introduction des expressions algébriques, le rôle du contre-exemple pour invalider une assertion fausse en donnant une place à la dialectique algébrique/numérique et également l'usage de la propriété de distributivité de la multiplication sur l'addition dans ses aspects syntaxique et sémantique. Cependant, au vu de ces différents potentiels didactiques, nous avons pointé qu'il il ne semble pas pertinent d'envisager de la proposer de façon isolée (comme un problème de recherche, ce qui pourrait expliquer les difficultés de sa mise en œuvre). Il est nécessaire de se questionner sur sa place dans une organisation mathématique et didactique.

On peut donc voir qu'ici le travail sur des programmes de calcul qui précèdent la situation du carré bordé et une articulation entre des moments de première rencontre, d'institutionnalisation et de constitution du savoir autour de la propriété de la distributivité sont déterminants dans la réussite de cette activité pour favoriser les apprentissages des élèves. Si ces conditions ne sont pas mises en place, cette situation risque de ne pas être exploitée avec intérêt pour les élèves et pour le professeur. Pour les élèves, si elle est trop éloignée des problèmes habituels ou si elle n'est pas posée au bon moment, elle peut se révéler trop complexe (ou trop simple) et, dans tous les cas, ne pas permettre les apprentissages visés ; pour les professeurs, si elle est trop éloignée de leurs pratiques, ils risquent de la simplifier (par l'ajout de multiples questions intermédiaires) ou de ne pas pouvoir gérer la mise en commun en s'appuyant sur les productions des élèves et sur des modes de raisonnement algébrique (contre-exemple ou usage d'une transformation s'appuyant sur la propriété de distributivité).

2. Les publications concernant le carré bordé

Après cette analyse, nous revenons maintenant aux différentes publications (articles, ouvrages à destination des enseignants, document d'accompagnement, manuels scolaires) qui concernent le carré bordé. Nous allons analyser comment ces publications décrivent la mise en œuvre de la situation et comment elles prennent en compte les objectifs visés dans l'analyse *a priori* (produire différentes formulations, produire les expressions littérales associées et les comparer pour montrer qu'elles sont équivalentes).

2.1 Le livre « Les débuts de l'algèbre au collège » (Combier et al., 1996)

Dans ce livre, les auteurs (Combier et al., 1996) montrent leur souci de choisir des problèmes qui permettent à la fois d'introduire la lettre et d'avoir différentes expressions littérales.

> Notre expérimentation prouve qu'il est possible de faire de la production de formules un enjeu didactique dans ces classes[2]. La non-unicité du choix des lettres, la non-unicité de la formule produite pour un même choix des lettres, lorsqu'elles apparaissent dans la production des élèves, participent au dévoilement de nombreux implicites du codage algébrique, et ceci sans que le professeur ait besoin d'intervenir lourdement. (Combier et al., 1996, p. 29)

De la page 42 à la page 47, les auteurs proposent ensuite un déroulement avec quatre phases dont l'objectif est précisé (recherche pour 5 carreaux de côté avec dessin, recherche pour 37 carreaux de côté sans dessin, formulation d'une méthode de calcul et mise en évidence des différentes procédures de calcul et enfin passage d'une formulation à une formule), avec des consignes explicites et avec des productions d'élèves qui fournissent des informations au lecteur sur ce qu'on peut attendre en termes de formulation de la part des élèves.

> On cherche maintenant à écrire un calcul du nombre de carreaux hachurés qui est vrai pour tous les carrés. Quand les mathématiciens sont confrontés à ce genre de problème, ils donnent un nom au nombre de carreaux sur le côté du carré, ils l'appellent par exemple n (n désigne un nombre). Et ils écrivent leur procédé de calcul en n'utilisant que la lettre n, des symboles (+, -, x, :), des parenthèses et des nombres. Vous allez devoir traduire votre méthode de calcul en respectant les règles d'écriture qui sont celles des mathématiciens, sans utiliser de mot. (p. 45)

A travers cette consigne, les auteurs ont choisi d'indiquer clairement aux élèves le travail à faire, certainement parce qu'ils étaient conscients de la difficulté de ce passage mais, de fait, cela affaiblit l'affirmation de départ sur la production d'expressions littérales comme enjeu didactique de cette activité.

En page 47, les auteurs ne mettent que très peu l'accent sur la difficulté de prouver l'équivalence des formules notamment lors de la mise en commun « Les formules écrites, tout en étant différentes, sont équivalentes. Lorsque, dans chacune d'elles, on remplace les lettres par un même nombre, on obtient toujours le même résultat. ». Ainsi, ils ne mettent pas l'accent sur la transformation des expressions littérales via la propriété de distributivité, ni sur la généralité de l'équivalence.

En conclusion, on peut voir ici une publication qui montre l'intérêt de ce problème d'un point de vue des enjeux didactiques, qui décrit son utilisation en phases mais sans préciser leur durée, ni les difficultés envisageables de gestion. De plus, la publication donne à voir des travaux d'élèves qui vont permettre au lecteur de ne pas se trouver démuni face à des productions personnelles. En revanche, ce texte ne replace pas le problème dans une progression qui pourrait indiquer les savoirs mathématiques à travailler préalablement avec des tâches envisageables. Il aborde trop vite la question du traitement de l'équivalence des différentes expressions produites, sans aborder les propriétés et raisonnements algébriques mis en jeu.

2.2 L'article « n, c'est un nombre ou c'est des nombres » (Denis et al., 2004)

Le problème du carré bordé fait l'objet de cet article (Denis et al., 2004) de la revue Repères IREM. Les auteurs en proposent une mise en œuvre d'une dizaine d'heures dans une classe de

---

[2] 6e et 5e à l'époque de la parution du livre en 1996 ; on dirait maintenant plutôt 5e et 4e .

5e découpée en dix phases avec en phase 7 un nouvel énoncé (double rangée de carreaux) et en phase 10 le débouché sur une résolution d'équation.
Tout d'abord les auteurs explicitent leurs objectifs pour l'algèbre au collège, notamment ne pas travailler seulement les techniques, favoriser la modélisation intra mathématique, travailler sur les variables avant de travailler sur les inconnues. Le texte de l'énoncé choisi (phase 1) présente la situation à travers trois carrés (de côtés 5, 7 et 10) et la question posée est « Pierre se demande s'il peut savoir à l'avance combien de carreaux de mosaïque il lui faut pour fabriquer n'importe quel carré ». Les auteurs ont donc fait le choix de ne pas proposer de lettre pour la variable dans l'énoncé. Dans la description des phases et les commentaires des auteurs, qui constituent l'essentiel de l'article, il est précisé qu'en phase 4 (après un premier temps de recherche individuelle puis de groupe de plus d'une heure) le professeur indique aux élèves qu'il est possible d'utiliser une formule comme le font les mathématiciens (ceci est conforme à l'énoncé initial). Dans les annexes, les auteurs montrent toutes les affiches produites par les groupes lors des différentes phases et on y trouve les différentes formulations, puis l'évolution vers des formules dans lesquelles apparaissent plusieurs désignation de variables écrites avec des lettres minuscules et majuscules, sur le modèle des formules d'aire ou de périmètre (par exemple le carreau du coin est désigné par B), ce qui donne le titre de l'article. En ce sens, ces productions sont très différentes de celles du livre précédent. C'est dans un des commentaires que les auteurs montrent qu'ils ont vu le problème de l'équivalence des expressions mais ils passent assez rapidement sur ce point.

> Les formules vont se détacher progressivement de la situation et gagner en autonomie (…) - la mise en lien des formules entre elles provoque l'éloignement de la situation initiale…

On a donc ici une proposition d'un autre scénario détaillé avec une illustration par des travaux d'élèves. Le fait qu'il s'étale sur environ dix séances peut s'avérer être un obstacle à sa mise en œuvre dans une classe ordinaire. Cependant les auteurs ne donnent pas plus de repères sur la place de cette activité dans une progression et la question de l'équivalence est encore une fois peu prise en compte.

2.3 Le document ressource « Du numérique au littéral » (MEN 2006, 2009)

L'institution fait également référence au problème du carré bordé dans le document ressource : cette situation sert à illustrer différents aspects de l'algèbre comme l'intérêt des formules, les aspects structural et procédural (Sfard, 1991) des expressions algébriques ou encore les différents statuts de la lettre, ici variable mais également inconnue si on cherche le nombre de carreaux du côté du carré connaissant le nombre de carreaux colorés. Notons que les auteurs du document donnent cet « exemple de problème » accompagné de formules correctes (et seulement elles) qui peuvent être produites. :
Au départ, il est indiqué qu'« il s'agit d'établir une formule qui permet de calculer le nombre de carreaux grisés d'une figure construite sur le modèle ci-contre, quel que soit le nombre de carreaux sur le côté du carré. » (p. 1). Ainsi aucune finalité n'est donnée c'est-à-dire que la raison pour laquelle on doit produire des expressions algébriques n'est pas indiquée. Toutefois plus loin dans le document les auteurs présentent des prolongements qui rejoignent les objectifs que nous avons déterminés dans l'analyse *a priori*. En particulier, il est possible de déterminer le nombre de carreaux sur le côté du carré quand le nombre de carreaux grisés est connu, la lettre ayant le statut d'inconnue, mais aussi l'équivalence des expressions, la lettre étant ici une indéterminée.

> Ils (Les calculs) consistent en des transformations d'écritures légitimées, non plus en référence à la situation traitée, mais par des règles formelles. (p. 3)

Contrairement aux deux autres publications, le problème est présenté pour illustrer et exemplifier le discours sur l'algèbre, ce qui ne donne pas d'indications sur son statut. S'agit-il d'un simple exemple, d'un exemple générique, d'un problème à proposer dans les classes, d'un problème permettant de développer des compétences de base ? Il n'y a aucune indication de mise en œuvre ni d'intégration dans une progression.

2.4 Brochure de l'IREM de Clermont-Ferrand (Lé Quang et Noirfalise, 2009)

Lé Quang et Noirfalise (2009) proposent une analyse *a priori* de la situation « Les carreaux bordés ». Ces auteurs indiquent « qu'il ne faut pas se tromper d'enjeu » : la situation des « carreaux bordés » a pour objectif de comparer plusieurs programmes de calcul afin d'étudier s'ils donnent toujours le même résultat et d'aborder ainsi la question de l'équivalence de deux expressions littérales en utilisant la propriété de distributivité ; la traduction des programmes de calcul n'est donc pas son seul objectif. Lé Quang et Noirfalise indiquent des difficultés à surmonter : l'introduction des lettres, l'usage de calculs en ligne pour exprimer les résultats des programmes de calcul, la validation de l'égalité des résultats des programmes de calcul en référence à l'équivalence des expressions littérales et non en référence à la situation. Ils proposent de s'appuyer sur un répertoire de connaissances disponibles, le calcul en ligne, le parenthésage et les priorités opératoires, mais aussi l'utilisation de formules (aire et périmètre).

Dans cette brochure, les auteurs décrivent avec soin les variables didactiques attachées à la situation pour faire évoluer les techniques et donner des conditions favorables à l'entrée dans l'algèbre. Les auteurs insistent sur l'importance d'inscrire cette situation dans une progression (à la fois en termes d'organisation praxéologique et didactique). Ils développent d'abord des conditions à mettre en place pour introduire différentes expressions d'un programme de calcul, pour conjecturer que deux programmes de calcul retournent le même résultat (à l'aide d'un tableur) puis, pour justifier leur égalité à partir de l'équivalence des expressions et de la propriété de distributivité de la multiplication par rapport à l'addition et à la soustraction (sans les dessins). Ils proposent ensuite de choisir un programme de calcul pertinent pour résoudre une équation (par exemple, retrouver le nombre de carreaux sur le côté du carré initial sachant que le nombre de carrés grisés est 228). Après l'institutionnalisation de la propriété de distributivité, les auteurs proposent la résolution d'exercices de développement et de factorisation pour convoquer la propriété de distributivité par rapport à l'addition. En revanche, ils ne donnent pas d'informations sur des difficultés rencontrées par les enseignants pour gérer les médiations en classe, ni sur la durée des différentes phases.

2.5 Dans les manuels scolaires

Nous avons fait une recherche dans les manuels scolaires de collège depuis 1996. Il y a eu 5 séries de manuels couvrant chacun les 4 années de collège : 1996 -1999, 2000 -2004, 2005-2008, 2009-2012 et à partir de 2013. Nous avions 26 séries de manuels de collège (nous n'avons cherché que dans les manuels de 5^{e} et 4^{e}) et nous avons trouvé de nombreuses occurrences de la situation du carré bordé dans des manuels de 5^{e} ou 4^{e} voire même dans un manuel de 2nde (Indice Bordas, 2014) avec différentes adaptations et différentes places entre activité d'introduction, exercice, devoir à la maison ou activités « Pour chercher ».

Nous avons ainsi répertorié cette situation treize fois dans ces manuels de collège. Nous donnons en annexe 1 la liste des collections de manuels consultés avec en gras ceux dans lesquels elle figure avec le niveau. Nous reproduisons en annexe 2 la grille d'analyse utilisée et quelques versions du carré bordé en annexe 3 pour illustrer nos catégories.

Nous constatons que la collection Triangle l'a proposé à chaque nouvelle version alors que c'est plus variable pour les autres collections. Cette situation est présente en classe de 5^{e} ou de 4^{e}. Dans le manuel Sesamath, elle se trouve même dans les deux niveaux de classe avec une petite différence d'énoncé (dans l'énoncé de 5^{e} on ne compte pas les carreaux des coins).
Dans toutes les versions, il ressort que l'utilisation de la lettre est indiquée soit sur le dessin soit dans une question, par exemple « en appelant x (ou n), on trouve….», y compris quand la situation est posée en introduction ou « Pour chercher ». L'enjeu de faire mobiliser la lettre pour résoudre un problème ne se retrouve donc dans aucun des manuels.
Nous pouvons dégager quatre types d'adaptations de la situation.

1. Un texte court avec une seule question « Exprime en fonction de x (ou n) le nombre de carreaux colorés ». Dans ce cas il n'y a aucune autre finalité que de produire une expression littérale. Ici seul l'aspect sémantique est mis en avant. On ne demande pas explicitement aux élèves de faire des essais numériques. Il est laissé à la charge du professeur de savoir comment il va traiter les diverses réponses (Triangle Hatier 2001, 2006 et 2010 et manuel de 2nde Bordas).
2. Plusieurs calculs numériques demandés pour des valeurs entières petites puis plus grandes, avec ensuite production d'une expression littérale (Triangle Hatier 1997, Myriade Bordas 2010, Horizon Didier 2010). Notons que dans Myriade on demande une formulation en langue naturelle avant une « formule » comme dans l'énoncé original. Dans Horizon on demande en plus de « comparer les formules obtenues » sans préciser à l'élève les critères de comparaison. On peut penser que c'est une façon pour les auteurs de prendre en charge l'aspect syntaxique. Ici on peut penser que les multiples essais numériques devraient guider l'élève vers la formule. Dans tous les cas il n'y a toujours pas de finalités pour l'écriture des formules.
3. Un texte long avec de nombreuses questions intermédiaires. Le début de l'énoncé est le même que dans la précédente catégorie : des essais numériques puis la demande de production d'une « formule » ou « expression » (2 sur 5). Ensuite le manuel propose des formules qui sont celles dégagées dans l'analyse a priori et il est demandé aux élèves de prouver leur équivalence, certains manuels indiquant « en développant et en réduisant » ! (Phare Hachette, 2007, Transmath Nathan, 2007, Dimathème Didier 2007, Sesamath, 2010 et Zenius Magnard 2011). Ici c'est l'aspect syntaxique qui est plus fortement travaillé comme si la situation du carré bordé était un prétexte pour faire du calcul littéral. Il est étonnant de constater que l'on ne demande pas aux élèves de travailler sur leur propre formule. Selon nous, le fait de dévoiler les différentes expressions prive l'élève de la responsabilité de la recherche et de l'enjeu de découverte.
4. Enfin deux manuels se distinguent un peu. Dans Math Magnard 2002, on reste sur le numérique, les élèves doivent vérifier si le nombre de carreaux colorés connaissant le côté du carré est correct. Donc ici il n'y a pas d'enjeu de production de formule, c'est seulement la technique pour dénombrer qui est visée. Dans Sesamath 2011, on ne demande pas aux élèves de produire une expression, on propose différents schémas illustrant des méthodes de dénombrement des carreaux. Là encore pourquoi ne pas faire confiance aux élèves sur leur capacité de faire ce travail (puisque les exemples choisis sont bien, encore une fois, ceux prévus par l'analyse *a priori)*? D'ailleurs on a l'impression que le manuel veut proposer tous les cas de dénombrement y compris celui avec les aires.

A travers cette étude nous avons voulu montrer la diversité relative des énoncés. Certes, les auteurs de manuels ont des contraintes de rédaction qui ne leur permettent peut-être pas de proposer des activités très ouvertes mais on peut constater que tous ont tendance à en faire des versions appauvries selon nous soit parce qu'il manque une finalité soit parce que celle-ci est détournée au profit des techniques de calcul. Nous avons même pointé une certaine incohérence à demander une formule et à en proposer ensuite. On peut penser que les professeurs risquent de prendre cet énoncé comme il est proposé et de ne pas utiliser ces potentialités. La gestion en classe qui en sera faite se révèlera déterminante.

3. Deux exemples de mise en œuvre du carré bordé en classe dans le cadre d'un travail collaboratif entre enseignants et chercheurs

A travers les exemples de Clara et de Garance, professeures expérimentées de l'enseignement secondaire, nous tentons de montrer en quoi un travail collaboratif entre enseignants et chercheurs peut favoriser une mise en œuvre plus adaptée de cette situation au sein d'une séquence d'enseignement. Nous aborderons les questions de la diffusion dans les perspectives.

Dans les deux cas nous préciserons :

- l'organisation mathématique retenue,
- les enjeux didactiques de la séance et les conditions mises en place,
- la gestion effective de l'enseignant : temps de recherche, organisation des différentes phases notamment la phase de formulation / validation,
- l'utilisation de la distributivité comme élément technologique.

3.1 Mise en œuvre du carré bordé par Clara en classe de quatrième

Clara a été filmé en 2010 dans une classe de 4^{e} en début d'année durant 18 séances consécutives. Elle a alors dix ans d'ancienneté (cinq dans un collège ZEP et cinq dans le collège de centre ville où nous l'avons filmée), elle participe aux travaux du groupe de recherche collaborative SESAMES (documents disponibles sur le site http://pegame.ens-lyon.fr/) depuis trois ans (Coppé, 2012, 2013).

Présentation de l'énoncé retenu par Clara

Voici le texte du problème proposé qui est un peu différent de celui de la publication initiale. Il a fait l'objet d'un travail dans le groupe de recherche (le problème s'appelle ici « Les carreaux colorés »). Il avait été fait le choix d'indiquer différents types de formulation possibles et qu'il fallait calculer et non compter (le dessin était bien sûr donné).

Voici un carré quadrillé de côté 5. On hachure tous les carreaux qui sont le bord. Combien de carreaux sont hachurés ?

On refait avec un carré de côté 6, puis de côté 10, puis de côté 100, puis de côté 123. Combien de carreaux sont hachurés à chaque fois ?

Trouve une formule, une expression, un moyen de dire comment calculer ce nombre de carreaux.

Figure 3. Le texte retenu par Clara

Clara connaît très bien l'activité car elle a participé aux nombreuses discussions et à l'élaboration finale du texte. Elle voit clairement son but : motiver l'introduction des expressions algébriques et l'usage de la propriété de distributivité de la multiplication sur l'addition dans ses aspects syntaxique et sémantique. Elle connaît les procédures et les erreurs des élèves. Elle a utilisé cette situation plusieurs fois déjà.

De plus, dans sa classe de 4e, Clara a intégré « Les carreaux colorés » dans une organisation mathématique utilisant des programmes de calcul pour arriver à l'équivalence des expressions. La propriété de distributivité de la multiplication sur l'addition a déjà été mise en avant comme élément technologique pour le calcul mental et ensuite sur des programmes de calculs simples.

En considérant les énoncés proposés, les variables didactiques retenues et les institutionnalisations, nous pouvons analyser l'organisation mathématique effective concernant une praxéologie locale sur l'équivalence des expressions.

Séance 14 : faire fonctionner un programme de calcul sur des nombres, « remonter » le programme pour trouver un nombre de départ et écrire la suite des calculs en une expression numérique. Cette dernière exigence vise à préparer les écritures d'expressions littérales.

Séance 15 : faire une conjecture sur un programme de calcul qui donne toujours 5. Dans l'institutionnalisation la professeure aide à la preuve. Il n'y a qu'un développement simple à faire pour la preuve.

Séance 16 : faire une conjecture et la prouver sur un programme de calcul qui donne toujours -5 fois le nombre de départ. Cette conjecture est plus complexe car le programme ne donne pas une constante mais est fonction du nombre de départ (« on ne voit pas directement le résultat »). La transformation de l'expression littérale est un peu plus complexe.

Séance 17 : travail sur la notion de contre exemple à partir de deux programmes de calcul.

On peut ainsi voir comment s'articulent et évoluent les différents types de tâches et notamment comment «Prouver l'équivalence des expressions» peut s'intégrer à la praxéologie régionale en lien avec la propriété de distributivité. De plus les institutionnalisations partielles portent sur les aspects syntaxiques et sémantiques (nécessité d'introduire une lettre et des expressions littérales et nécessité de prouver avec l'utilisation d'une propriété ou d'un contre exemple.

Analyse de la mise en œuvre

L'activité des « Carreaux colorés » est proposée à la séance 18 de l'année, pendant une heure entière de la façon suivante :

Etape	Durée
Présentation du problème, questions	5'02''
Recherche individuelle	5'56''
Recherche en groupe de 4, confrontation des procédures et des formules produites	17'29''
Mise en commun	14'02''
Institutionnalisation	7'

Tableau 1. *Les différentes phases et leur durée dans la séance de Clara*

La mise en commun vise d'une part à valider les expressions produites, puis d'autre part, à montrer l'équivalence des expressions algébriques, ce qui correspond bien aux objectifs visés. Comme nous l'avons indiqué dans l'analyse *a priori*, c'est un moment difficile à gérer qui nécessite des compétences professionnelles importantes pour prendre en compte les réponses diverses et variées des élèves.

Clara a organisé le tableau en délimitant six colonnes. Un élève de chaque groupe est venu écrire sa synthèse qui est constituée, selon les groupes, de différentes expressions ou de dessins montrant des procédés de calcul, un groupe a tenté de montrer l'équivalence de deux formules produites. La mise en commun est pilotée par Clara qui reprend les objectifs fixés. Elle commence par demander ce que désigne la lettre employée (elle le rajoute à la production de chaque groupe). Ensuite, elle fait expliciter les méthodes de calcul du nombre de carreaux afin de vérifier la validité des expressions puis elle cherche à faire prouver leur équivalence en mettant fortement l'accent sur la distributivité. Pour chacun de ces points, elle va plus particulièrement travailler sur la production d'un groupe, en interrogeant les élèves. On voit bien à travers cette phase comment sa connaissance de la situation et de ses buts, au-delà de la situation elle-même, lui permet de gérer au mieux le temps didactique, l'avancée du savoir et de co-construire avec les élèves des éléments d'institutionnalisation fortement en lien avec ce qui a été fait.

La professeure est face aux élèves, elle les interroge nommément et à la fin, elle institutionnalise par écrit avec eux les trois points qui ont été largement travaillés dans la mise en commun :

> P : Il y a plusieurs solutions à ce problème. On a prouvé avec la distributivité que les formules[3] sont égales entre elles. Une lettre peut remplacer un nombre et elle permet d'écrire des expressions.

Si nous analysons les interactions, en dégageant les termes utilisés dans les justifications, nous pouvons repérer la place attribuée à la propriété de distributivité comme élément de justification de l'équivalence des expressions. Nous voyons que contrairement à d'autres mises en œuvre dans les classes, la professeure n'utilise pas d'arguments d'autorité. On constate que les élèves mobilisent assez spontanément le fait que la validation s'appuie soit sur un contre exemple pour invalider, soit sur la distributivité comme montre l'extrait suivant.

> 11. P : Des propriétés alors par exemple Sophie qu'est-ce que vous avez utilisé comme propriété pour prouver que ces expressions sont égales
> E : La distributivité
> ….
> 14. P : Alors ici la distributivité c'est une propriété dans le calcul littéral et cette propriété nous a permis déjà de prouver que ces deux expressions elles étaient égales entre elles d'accord on regarde les expressions suivantes alors qu'est-ce que vous pensez de $4x - 4$ Blandine
> E : Ben en fait on a utilisé un peu la distributivité à l'envers et c'est la même que la plus grande

Un autre point concerne la participation importante des élèves qui suivent, voire posent des questions. Il y a notamment une discussion mathématique très intéressante sur les aspects sémantiques/syntaxiques des expressions produites. En effet, toutes les formules sauf une ont été élaborées à partir de la situation du carré comme un procédé de calcul mais dans un groupe, les élèves ont produit une expression à partir de transformation d'une autre et un élève (Joe) conteste la méthode. Notons l'intervention 53 : « on dirait que c'est une solution qui aboutit à une autre » Nous faisons l'hypothèse que cette discussion peut avoir lieu car la professeure, grâce au travail fait dans le groupe sur le savoir mathématique enseigné, est capable de réagir aux raisonnements des élèves et elle comprend le questionnement de Fatima face à Carole. Dans cet extrait, Aurélie explique comment son groupe a trouvé une première expression puis l'a transformée pour la rendre plus simple grâce à la distributivité.

[3] Nous gardons ses termes

38. P : C'est la même alors vous comment vous vous avez fait pour trouver cette formule est ce que vous avez fait comme Fatima, Aurélie
    E : En fait on s'est rendu compte que on enlevait ben comme elle a fait le dessin on enlevait deux côtés en fait on faisait moins 2 pour chaque côté pour deux des côtés et donc on a fait x moins 2 et on le multiplie fois 2 vu que
39. P : Y'en a deux comme ça
    E : Et on a fait x fois 2
40. P : D'accord alors comment vous avez trouvé votre autre formule oui
    E : Alors on s'est dit que comme elle était assez dure il y avait peut-être une formule plus simple donc on a utilisé la distributivité

Alors que dans le groupe de Joe et Fatima, les deux expressions ont été produites séparément.

45. P : D'accord Joe dans ton groupe à Fatima et toi est ce que vous avez fait comme elles c'est à dire on a essayé de simplifier la formule en utilisant la distributivité
    E : Non moi j'avais trouvé la première et après on a mis en commun nos deux réponses et on a ces deux formules

D'ailleurs un peu plus loin, Joe remet en cause la façon de faire d'Aurélie un peu comme s'il ne pouvait envisager que des formules contextualisées à la situation.

53. P : alors qu'est ce que vous en pensez qu'est ce que vous en pensez de ce que Joe a dit donc Joe il dit le problème c'est quand on écrit comme ça on voit que ces deux formules elles sont égales mais par contre on voit pas que c'est deux modes de calcul différents
    Joe : on dirait que c'est une solution qui aboutit à une autre
    E : mais c'est ça en fait

Cet exemple, appuyé sur le travail collaboratif fait dans le groupe de recherche, illustre selon nous les potentialités didactiques offertes par cette situation proposée non pas comme une toute première rencontre avec les expressions littérales tel qu'il est indiqué dans les publications analysées au début de cet article. Certes, on peut au mieux faire produire des formules aux élèves mais la question de l'équivalence des expressions qui constitue une raison d'être du calcul littéral au collège risque alors d'être passée sous silence. Il nous semble donc plus intéressant d'intégrer cette situation dans une organisation mathématique où les questions de preuve et de justifications ont été abordées. Nous en avons donné un exemple utilisant les programmes de calcul, ce n'est certainement pas le seul. On peut également noter à travers l'exemple de Joe comment le lien entre les aspects syntaxiques et sémantiques peut se révéler difficile ; cette situation peut alors permettre de rendre explicites des questions à ce sujet.

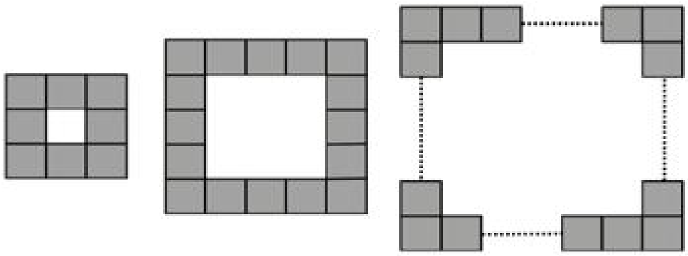
3.2 Mise en œuvre des carreaux colorés par Garance pour reprendre l'algèbre en classe de troisième

Garance exerce depuis plusieurs années dans un collège de la région parisienne. De 2010 à 2013, elle a participé aux travaux du groupe IREM « Algèbre et différenciation de l'enseignement » de l'université Paris-Diderot qui réunit des chercheurs en didactique des mathématiques et des enseignants de collège et de seconde, qui sont à la recherche de solutions face à des difficultés professionnelles liées à l'enseignement de l'algèbre et la prise en compte de la diversité des connaissances des élèves dans ce domaine (Pilet, 2015).

Présentation de l'énoncé retenu par Garance

Voici le texte du problème proposé qui, comme pour Clara, est un peu différent de la publication initiale mais conserve ses objectifs. Ici la variable est le nombre de carreaux du carré intérieur (le carré blanc), cela permet d'obtenir des expressions avec uniquement des additions et de faciliter l'utilisation de la propriété de distributivité au moment de prouver l'équivalence des expressions. Les méthodes évoquées dans l'analyse a priori (§1.2) pour calculer le nombre de carreaux gris restent valables.

On considère un carré blanc entouré de carrés unités gris comme sur les figures ci-dessous. L'objectif est de calculer le nombre de carrés unités gris.



1)Si le carré blanc a un côté unité de 3 unités, calcule le nombre de carrés unités gris.

2)Si le carré blanc a un côté unité de 10 unités, calcule le nombre de carrés unités gris.

3)Si le carré blanc a un côté unité de 100 unités, calcule le nombre de carrés unités gris.

4)Ecris une formule qui donne le nombre de carrés gris en fonction du nombre de carrés unités sur le côté du carré blanc.

Figure 4. *Enoncé de la situation du carré bordé retenu par Garance, pour sa classe de 3^e^*

Garance a participé aux discussions du groupe sur l'énoncé, ses enjeux et les procédures envisageables a priori. La différence avec Clara réside dans le fait que Garance propose le carré bordé dans une classe de 3e et non de 4e. L'enjeu, connu et discuté avec Garance, n'est plus d'introduire l'algèbre mais de reprendre son étude pour rappeler les raisons d'être des lettres et des expressions littérales dans une situation de généralisation et en remotivant la propriété de distributivité de la multiplication sur l'addition pour prouver l'équivalence d'expressions algébriques.

Ainsi le carré bordé s'inscrit différemment dans la séquence de Garance. Il constitue la première séance de reprise (au sens de Larguier 2012) du calcul littéral, c'est-à-dire que les élèves ayant déjà rencontré la lettre, il s'agit de lui redonner des raisons d'être pour pouvoir ensuite poursuivre l'étude de l'organisation mathématique régionale des expressions algébriques. Préalablement Garance a fait travailler la structure d'expressions et les priorités opératoires dans le cadre numérique. La praxéologie mathématique et didactique de Garance commence donc par un moment de reprise avec l'algèbre à partir d'un problème de généralisation, le carré bordé, et d'un travail sur l'équivalence des expressions algébriques. Le travail des techniques de développement et de factorisation s'inscrit dans la résolution de problèmes de généralisation et de preuve conduisant à un travail sur l'équivalence des expressions algébriques. Elle institutionnalise des méthodes de contrôle des calculs et de preuve, et notamment le rôle du contre-exemple dès les premières séances.

Analyse de la mise en œuvre

Sa mise en œuvre se déroule sur une séance d'une heure.

Etape	Durée
Lancement	1'20''
Temps de recherche jusqu'à la production d'expressions algébriques	26'32''
Mise en commun	11'43''
Temps de recherche sur la preuve de l'équivalence d'expressions algébriques	9'
Synthèse	3'

Figure 5.*Les différentes phases et leur durée dans la séance de Garance*

C'est la deuxième année que Garance met en œuvre cette activité. Suite à la première année, nous avions longuement discuté avec elle de la gestion du temps afin d'optimiser les temps de recherche sur les premières questions numériques pour ne pas cantonner les élèves les plus faibles dans des tâches de « comptage de carreaux » et les amener rapidement à des tâches de calcul puis à la nécessité de généraliser et de produire des expressions littérales. Dans la seconde mise en œuvre développée ici, la gestion du temps évolue. Le temps de recherche est réduit à 26 minutes ce qui permet de garder du temps pour la mise en commun des procédures et l'institutionnalisation des savoirs algébriques visés . Nous proposons d'analyser plus particulièrement ces deux phases.

Dans la mise en commun, Garance demande aux élèves combien il y a de carreaux colorés pour 3 unités, 10 unités et 23 unités, puis elle leur demande très rapidement leurs « techniques » pour déterminer ce nombre. Elle commence par montrer les limites du comptage des carreaux pour un carré de côté 100 et, pour cette même étape, fait écrire les expressions numériques en ligne qui traduisent les méthodes utilisées par les élèves. Cette étape est essentielle pour la traduction en expressions algébriques. La lettre est introduite par les élèves (rappelons le contexte de reprise) et à la lecture de la question 4, les élèves utilisent facilement une lettre pour généraliser. Garance s'appuie sur les expressions numériques produites pour produire les expressions littérales correspondantes et pour revenir sur le rôle des parenthèses et des priorités opératoires. La question de l'équivalence des expressions littérales produites est soulevée par Garance et est suivie de nombreux échanges sur le contre-exemple et la preuve algébrique. L'institutionnalisation qui suit porte sur les différents objectifs visés : le rôle de la lettre pour généraliser, l'équivalence des expressions littérales et une méthode - test par des valeurs numériques pour conjecturer puis contre-exemple ou preuve algébrique pour invalider ou prouver cette conjecture.

Conclusion sur la mise en œuvre

A travers ces exemples de mise en œuvre dans deux classes de collège de la situation du carré bordé, nous avons voulu montrer que cette situation est assez difficile à proposer dans une classe car elle nécessite une bonne connaissance des objectifs, des procédures d'élèves et surtout elle doit être replacée dans une progression. La praxéologie mathématique locale (avec, pour Clara les programmes de calcul qui précèdent la situation des carreaux) et la praxéologie didactique (une articulation entre des moments de première rencontre, d'institutionnalisation et de constitution de savoirs théoriques qui justifient et valident les techniques utilisées) sont déterminantes dans la réussite de cette activité pour les apprentissages des élèves. Si ces conditions ne sont pas mises en place, cette situation risque effectivement de ne pas être exploitée avec intérêt pour les élèves et pour le professeur. Pour les élèves, si elle est trop éloignée des problèmes habituels ou si elle n'est pas posée au bon moment, elle peut se révéler trop complexe (ou trop simple) et dans tous les cas, ne pas permettre d'apprentissage ; pour les professeurs, si elle est trop éloignée de leurs pratiques, ils risquent de la simplifier (par l'ajout de multiples questions intermédiaires) ou de ne pas pouvoir gérer la mise en commun. C'est pourquoi un des enjeux du travail à visée collaborative entre enseignants et chercheurs peut être de travailler sur la rédaction de documents qui explicitent les conditions de mise en œuvre permettant les enjeux didactiques visés de la situation mais aussi qui stipulent comment les situations s'insèrent dans des progressions « ordinaires » des enseignants.

Conclusion

A travers l'exemple du carré bordé, nous avons tenté de montrer que la diffusion de situations reconnues didactiquement pertinentes nécessitait des conditions qui semblent peu réalisées actuellement. L'analyse des publications et des documents institutionnels, amène au constat suivant : la situation du carré bordé, même si elle est robuste, est le plus souvent proposée (et, surement de fait, enseignée) de façon isolée et peu inscrite dans une praxéologie mathématique et didactique. Au-delà des contenus proposés dans ces documents, les descriptions donnent peu d'indications sur le scénario des différentes phases, les difficultés dans leur gestion, ni sur le rôle de l'enseignant qui reste le plus souvent implicite tant en ce qui concerne la gestion du temps que celle des processus de dévolution, de validation et d'institutionnalisation. Nous constatons encore que les publications étudiées n'outillent pas vraiment les enseignants et que pour faire évoluer leur rapport à l'algèbre et à son enseignement, ceux-ci doivent prendre à leur charge le travail d'organisation praxéologique mathématique et didactique. La présentation des conditions de mise en œuvre d'une situation est donc absolument indispensable. Or, s'il est peut-être difficile que les documents institutionnels proposent des éléments d'organisation, le travail fait notamment dans des groupes IREM et plus largement dans des groupes de recherche collaborative pourraient être orienté vers l'explicitation des conditions de mise en œuvre de séquences d'enseignement plutôt que d'activités, certes potentiellement riches, mais isolées.

Ce constat nous amène à de nouvelles questions. Pour aider les professeurs à s'approprier les changements nécessaires et institutionnellement demandés, faut-il changer les conditions de conception de ces ressources, la forme et le contenu des ressources et/ou faut-il développer la formation à l'utilisation de ces ressources. Bien sûr, selon nous, ces différentes pistes doivent être étudiées conjointement. Sur le contenu des ressources, il nous semble préférable de proposer des séquences avec des scénarios de classes comprenant des praxéologies mathématiques au moins locales, explicites et complètes et des praxéologies didactiques associées plutôt que des situations isolées. Mais nous connaissons bien la difficulté de la rédaction de tels documents puisque cela suppose des textes longs qui risquent de ne pas être lus. En ce qui concerne les manuels scolaires, une réflexion est à mener sur leur fonction et leurs usages : par exemple à qui sont-ils destinés, aux élèves ou aux enseignants ? Si dans le primaire, il existe des livres du maitre, pourquoi n'en y a t-il pas pour le secondaire ? Ils permettraient, en particulier, de préciser les enjeux des situations au sein d'une organisation mathématique et didactique, le choix des variables didactiques pour faire évoluer les

techniques et le rôle du professeur dans la gestion des différentes phases mises en œuvre avec des pistes pour gérer les difficultés déjà repérées.
Une autre piste, déjà abordée dans l'article, est le développement de travail collaboratif pour l'élaboration des ressources. Il serait certainement fructueux de développer davantage de dispositifs de formation continuée fondés sur la construction collaborative de ressources pour les enseignants et les formateurs (Georget, 2009 ; Coppé, 2013 ; Grugeon-Allys et al., 2012 ; Pilet 2015) associant des chercheurs, des professeurs et des acteurs du système avec des apports d'expertise dans des domaines différents et complémentaires.

Références

ALVES, C., COPPE, S., DUVAL, V., GOISLARD, A., KUHMAN, H., MARTIN DAMETTO, S., PIOLTI LAMORTHE, C. & ROUBIN, S. (2013) Utilisation des programmes de calcul pour introduire l'algèbre au collège, *Repères IREM,* **92**, numéro spécial Algèbre, 9-30.

ARTIGUE, M. (1986) L'étude de la dynamique d'une situation de classe. Une approche de la reproductibilité. *Recherches en Didactique des mathématiques*, **7 (1)**, 5-62.

ARTIGUE, M. (2011) L'ingeniérie didactique comme thème d'étude. In C. Margolinas, M. Aboud-Blanchard, L. Bueno-Ravel, N. Douek, A. Fluckiger, P. Gibel, F. Vandebrouck & F. Wozniak (Eds), *En amont et en aval des ingénieries didactiques (pp. 15-25)*. Grenoble : La Pensée Sauvage.

ASSUDE, T., COPPE, S. & PRESSIAT, A. (2012) Tendances de l'enseignement de l'algèbre élémentaire au Collège : atomisation et réduction. In L. Coulange, J-P. Drouhard, J-L. Dorier & A. Robert (Eds), *Recherche en didactique des mathématiques. Hors série. Enseignement de l'algèbre, élémentaire Bilan et perspectives (pp. 41-62)*. Grenoble : La Pensée Sauvage.

BELLARD, N., BRONNER, A., BOULLIS, M., BONICEL, F., DIUMENGE, M., DUPE, C., DUTAUT, S., EHRSAM, N., GIRMENS, Y., JOLIVET, S., PELLEQUER, S., REBILLARD, E., & ROCHE, M. (2012) *La distributivité dans tous ses états*, IREM de Montpellier.

BOSCH, M. & GASCON, J. (2005) La praxéologie comme unité d'analyse des processus didactiques. In A. Mercier & C. Margolinas (Eds), *Balises pour la didactique des mathématiques : cours de la 12e École d'été de didactique des mathématiques (pp.107-122).* Grenoble : La pensée sauvage.

BROUSSEAU, G. (1989) Utilité et intérêt de la didactique pour un professeur de collège. *Petit x* 21, 47-68.

CHAACHOUA, H. (2015) Etude comparative des recherches sur l'apprentissage de l'algèbre élémentaire : rapports croisés, bilan et perspectives. In D. Butlen, I. Bloch, M. Bosch, C. Chambris, G. Cirade, S. Clivaz, S. Gobert, C. Hache, M. Hersant & C. Mangiante-Orsola (Eds.), *EE17 Rôles et places de la didactique et des didacticiens des mathématiques dans la société et le système éducatif* (pp. 21-40). Grenoble : La Pensée Sauvage.

CHEVALLARD, Y. (1999) L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en didactique des mathématiques*, **19 (2)**, 221-265.

CHEVALLARD, Y. (2007) Passé et présent de la théorie anthropologique du didactique. In Ruiz-Higueras L., Estepa A., García F. J. (eds) *Sociedad, escuela y matemáticas. Aportaciones de la teoría antropológica de la didáctico*, Jaén : Publicaciones de la Universidad de Jaén, 705-746.

CHESNE, J.F., PARIES, M. &ROBERT, A. (2009). « Partir des pratiques » en formation professionnelle des enseignants de mathématiques des lycées et collèges. *Petit x*, **80**, 25-46.

COPPE, S. (2012) Démarche d'investigation et aspects temporels des processus d'apprentissage/enseignement. In J-L. Dorier & S. Coutat (Eds.) *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle* – Actes du colloque EMF2012 (GT10, pp. 1306–1318). http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes- emf-2012

COPPE, S. (2013) Effets du travail collaboratif sur la pratique d'enseignement : une étude de cas d'une enseignante de mathématiques en collège. In M. Grangeat (Ed.) *Le travail collectif dans les enseignements scientifiques fondés sur les démarches d'investigation : formations, pratiques, effets (pp. 115-125)*. Presses Universitaires de Grenoble.

COPPE, S. & GRUGEON-ALLYS, B. (2015) Étude multidimensionnelle de l'impact des travaux de recherche en didactique dans l'enseignement de l'algèbre élémentaire : Quelles évolutions ? Quelles contraintes ? Quelles perspectives ? In D. Butlen, I. Bloch, M. Bosch, C. Chambris, G. Cirade, S. Clivaz, S. Gobert, C. Hache, M. Hersant & C. Mangiante-Orsola (Eds.), *EE17 Rôles et places de la didactique et des didacticiens des mathématiques dans la société et le système éducatif* (pp. 41-74). Grenoble : La Pensée Sauvage.

COMBIER, G., GUILLAUME &J.C., PRESSIAT, A. (1996) *Les débuts de l'algèbre au collège.* Paris : INRP

COULANGE, L. & GRUGEON-ALLYS, B. (2008) Pratiques enseignantes et transmission de situations d'enseignement en algèbre, *Petit x,* **78,** 5-23.

DENIS, M-H., FAES, S., JAFFROT, M., RIEDWEG, C., STAÏNER, H. & VAISSIER, V. (2004) N c'est un nombre ou des nombres ou Algèbre, Modélisation, Formalisation. *Repères IREM,* **92**, 5-21.

FERRATON, G. & CHAACHOUA, H. (2013) Rapport institutionnel au calcul littéral. Etat des lieux et perspectives *Petit x*, **91**, 49-67.

HAUCHECORNE, B. (2003) *Les mots et les maths*. Ellipses Editions.

LARGUIER, M. (2012) La connaissance des différents types de nombres : un problème de la profession de seconde. *Recherches en didactique des mathématiques*, 32 **(1)**, 101-144.

LE QUANG, G. & NOIRFALISE, R.. (2009) Les débuts de l'algèbre au collège ou introduction au calcul littéral in IREM de Clermont-Ferrand Groupe d'étude situation-problèmes (Eds.) *Quelques activités qui peuvent donner du sens à notre enseignement. De la sixième à la terminale S*. IREM de Clermont Ferrand.

MEN Ministère de l'Éducation Nationale (2006, 2009) *Ressources pour les classes de 6^{e}, 5^{e}, 4^{e} et 3^{e} du collège. Du numérique au littéral au collège*. Consultable en ligne :

http://cache.media.eduscol.education.fr/file/Programmes/17/3/du_numerique_au_litteral_109173.pdf

PILET, J. (2015) Réguler l'enseignement en algèbre élémentaire par des parcours d'enseignement différencié. *Recherches en didactique des mathématiques*, **35(3)**, 273-312.

ROBERT, A. (2001) Les recherches sur les pratiques des enseignants et les contraintes de l'exercice du métier d'enseignant. *Recherches en didactique des mathématiques*, **21(1-2)**, 57-80.

ROBERT, A. (2004) Que cherchons- nous à comprendre des pratiques des enseignants ? Quelles recherches menons-nous ? In M.L. Peltier (Ed.) *Dur d'enseigner en ZEP (pp. 15-32).* Grenoble : La Pensée Sauvage.

ROBERT, A. (2008) Problématique et méthodologie commune aux analyses des activités mathématiques des élèves en classe et des pratiques des enseignants de mathématiques, In F. VANDEBROUCK (Ed.) *La classe de mathématiques : activités d'élèves, pratiques des enseignants (pp. 31-59)* Toulouse : Octarès.

RODITI, E. (2008) Des pratiques enseignantes à la fois contraintes et personnelles, et pourtant cohérentes. In F. Vandebrouck (Ed.) *La classe de mathématiques, activités des élèves et pratiques des enseignants (pp. 73-94)*. Toulouse : OCTARES.

RUIZ-MUNZON, N. (2010) La introducción del álgebra elemental y su desarollo hacia la modelización funcional. Thèse de doctorat, Université Autonome de Barcelone.

RUIZ-MUNZON N., MATHERON Y., BOSCH M. & GASCON J. (2012) Autour de l'algèbre : les entiers relatifs et la modélisation algébrico-fonctionnelle. In L. Coulange, J-P. Drouhard, J-L. Dorier & A. Robert (Eds), *Recherche en didactique des mathématiques. Hors série. Enseignement de l'algèbre, élémentaire Bilan et perspectives (pp. 87-106).* Grenoble : La Pensée Sauvage.

SFARD, A. (1991) On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, **22**, 1-36.

ANNEXE 1. Listes des manuels collèges consultés

Le tableau ci-dessous présente la liste des collections de manuels consultés (seulement ceux des classes de 5^e et 4^e). Nous indiquons en gras les manuels dans lesquels l'activité du « Carré bordé » est présente et dans ce cas, nous précisons le niveau de classe.

1996 à 1999	**2000 à 2004**	**2005 à 2008**	**2009 à 2012**	**2013 ou 2014**
Triangle Hatier 5e	**Triangle Hatier 5e**	**Triangle Hatier 5e**	**Triangle Hatier 5e**	
Cinq sur cinq Hachette	Cinq sur cinq Hachette	**Phare Hachette 4e**	Phare Hachette	
	Diabolo Hachette	Diabolo Hachette		
	Math Magnard 4e	Math Magnard	**Zenius Magnard 4e**	
	Nouveau décimale Belin	Prisme Belin	Nouveau prisme Belin	
Transmath Nathan	Transmath Nathan	**Transmath Nathan 4e**	Transmath Nathan	**Transmath Nathan 5e**
	Dimathème Didier	**Dimathème Didier 4e**	**Horizon 4e** Didier	
		Babylone Bordas	**Myriade Bordas 5e**	
			Sesamath 5e et 4^e	
		Mathématiques Bréal		

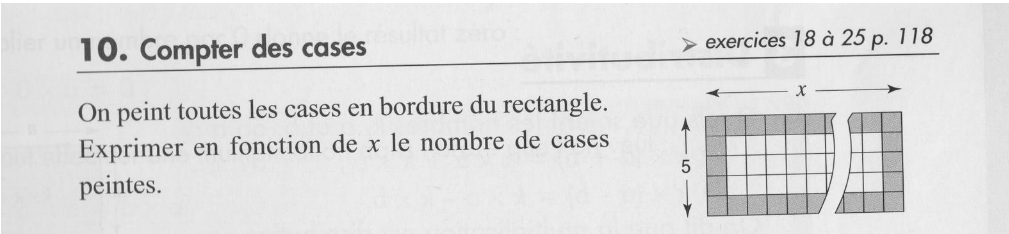
ANNEXE 2. Grille d'analyse des manuels sur le Carré bordé

Type	Manuels	Classe	Place	Lettre donnée	Essais sur nbs	Nb de Questions	Finalités	Modifications
2	Triangle Hatier 1997	5	Exercice	oui	oui	3	Produire formule avec essais numériques	
1	Triangle Hatier 2001	5	Introduction	oui	non	1	Produire formule	Oui un côté mesure 5
4	2002 Math Magnard	4	Exercice	non	oui	2	Dire si un nombre de carreaux est juste	Pas de généralisation
1	Triangle Hatier 2006	5	Introduction	oui	non	1	Produire formule	Oui un côté mesure 5
3	2007 Phare Hachette	4	Exercice	oui	oui	6	Formules données, montrer l'équivalence	
3	Transmath Nathan 2007	4	Exercice	oui	oui	5	Formules données, montrer l'équivalence	
3	Dimathème Didier 2007	4	Devoir maison	oui	oui	6	Formules données, montrer l'équivalence	Deux unités : carreaux et cm
1	Triangle Hatier 2010	5	Exercice	oui	non	1	Produire formule	Oui un côté mesure 5
2	Myriade Bordas 2010	5	Introduction	oui	oui	11	Produire formule avec de nombreux essais numériques	Passage au langage courant avant formule
3	Sesamath 2010	5	Introduction	oui	oui	10	Formules données, montrer l'équivalence	Pas les coins
2	Horizon Didier 2011	4	Pour chercher	oui	oui	4	Comparer les formules obtenues- ne sont pas données	Passage par langage courant avant formule
3	2011 Zenius Magnard	4	Travail en groupe	oui	oui	11	Formules données, montrer l'équivalence	Une équation et multiple de 4
4	Sesamath 2011	4	Introduction	oui	oui	11	Chercher à trouver les grands types de formules possibles Des schémas de découpage sont donnés	Formule avec aires

ANNEXE 3. Différentes versions du carré bordé proposées dans les manuels scolaires selon la classification proposée

Catégorie 1 : Un énoncé court, la variable est indiquée sur le schéma.

Manuel Triangle 5e chez Hatier, énoncé identique présent dans la partie d'Activités d'introduction en 2001 et 2006, puis dans la partie Exercices en 2011.

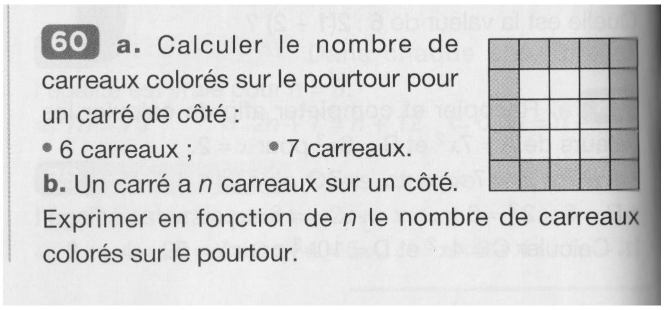


10. Compter des cases ➢ exercices 18 à 25 p. 118

On peint toutes les cases en bordure du rectangle. Exprimer en fonction de x le nombre de cases peintes.

Catégorie 2 : Plusieurs calculs numériques demandés pour des valeurs entières petites puis plus grandes, avec ensuite production d'une formule

Manuel Transmath 5e chez Nathan, en 2014, dans la partie Exercices. Notons que le choix de demander le nombre de carreaux pour 6 et 7 ne permet sans doute pas d'aller vers une formule.



60 **a.** Calculer le nombre de carreaux colorés sur le pourtour pour un carré de côté :

• 6 carreaux ; • 7 carreaux.

b. Un carré a n carreaux sur un côté. Exprimer en fonction de n le nombre de carreaux colorés sur le pourtour.

Catégorie 3 : Un exercice avec de nombreuses questions intermédiaires

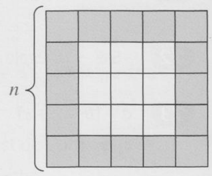
Manuel Phare chez Hachette, 4e , 2007, dans la partie Exercices.

Pour les exercices 90 et 91, on veut carreler une pièce carrée.

On dispose de carreaux carrés de deux couleurs : orange pour le pourtour et blancs pour la partie centrale.

On appelle n le nombre de carreaux sur un côté du carré et N le nombre total de carreaux orange.

Pour cette figure, $n = 5$ et $N = 16$.



90 **1)** Faire un dessin correspondant à $n = 4$. Déterminer N pour cette valeur de n.

2) Mêmes questions pour $n = 6$.

3) Conjecturer la valeur de N pour $n = 10$; pour $n = 50$.

91 **1)** Établir une formule permettant de calculer le nombre N de carreaux orange en fonction du nombre n de carreaux sur le côté du carré.

2) Voici quelques propositions d'élèves.

Roger : $N = 4n - 4$;

Isabelle : $N = 2n + 2(n - 2)$;

Christine : $N = 4\ (n - 1)$;

Christophe : $N = n + 2(n - 1) + (n - 2)$;

Dominique : $N = n^2 - (n - 2)(n - 2)$.

a Développer et réduire chaque formule, si c'est possible. Que remarque-t-on ?

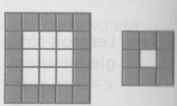
b Expliquer le raisonnement qu'a fait chaque élève pour aboutir à sa formule.

Catégorie 4 : pas de généralisation demandée

Math Magnard 4e, 2002

110 — Carré bordé

Sur une feuille de papier quadrillé, construire plusieurs carrés de tailles différentes.



Colorier les carreaux qui bordent le carré intérieur.

Pour chaque carré, il y a un certain nombre de carreaux coloriés et de carreaux non coloriés.

Pierre trouve, pour son carré 6 592 carreaux coloriés.

André trouve, pour le même carré, 6 594 carreaux coloriés.

Qui a raison ? Pourquoi ?

Combien ce carré contient-il de carreaux non coloriés ? Pouviez-vous le prévoir ?

(D'après l'IREM de Rouen.)