LES ORGANISATIONS DE SAVOIRS MATHÉMATIQUES À ENSEIGNER : LES ÉQUATIONS AU COLLÈGE

Stéphane SIREJACOB
LDAR – Université Paris Diderot

Résumé. Cet article a pour objectif de mettre en avant des besoins d'apprentissages en algèbre laissés implicites au sein de l'institution, à travers une analyse des programmes de 2008 et de manuels scolaires français sur le thème des équations. La méthodologie pour cette analyse s'appuie sur des éléments de référence au sujet des savoirs à enseigner : par comparaison, sont interrogés les raisons d'être, la place et la fonction des équations dans les programmes et les manuels, les processus de conceptualisation qui leur sont relatifs, les types de problèmes travaillés (ou ceux qui ne le sont pas), les justifications et les modes de validation des calculs utilisés (ou non), les articulations établies (ou non) entre les objets en lien avec l'utilisation, la manipulation et la production d'équations. Les résultats saillants sur les savoirs à enseigner et enseignés sur les équations au collège sont dégagés. En fin d'article, une réflexion sur les nouveaux programmes (2015) est également amorcée.

Mots clés. Equations, organisations de savoirs mathématiques à enseigner, collège, manuels, programmes

Abstract. This article aims at highlighting implicit learning needs in algebra within the education system. We will analyze French school curricula (which date from 2008) and textbooks on equations. Our methodology for this analysis is based on an epistemological reference. By comparing this reference to the curricula and textbooks, we will examine what motivates equations, their place and their function ; which kinds of problems are studied or not ; justifications and validations that are used. Lastly, we will discuss our main results and methodology.

Keywords. Equations, epistemological reference, textbooks, curricula

Introduction : des besoins d'apprentissage implicites

Cet article expose des questions de recherche liées aux besoins d'apprentissages qui demeurent implicites en algèbre élémentaire dans les programmes de 2008 et les manuels scolaires de 2011 de collège. Bien que prenant appui sur les anciens programmes du collège, ce questionnement peut être transposé aux nouveaux programmes en vigueur dans la réforme actuelle du collège (nous y reviendrons en conclusion). L'article est plus particulièrement centré sur le thème des équations en classe de quatrième, niveau où la technique de résolution algébrique, basée sur ce que les manuels appellent les propriétés de conservation de l'égalité, est pour la première fois introduite.

L'enseignement de l'algèbre élémentaire dans le secondaire demeure un enjeu fort dans le système éducatif actuel. En témoignent d'une part le nombre conséquent de travaux de recherche en didactique sur le sujet, d'autre part les difficultés récurrentes des élèves : un symbolisme incompris, des règles appliquées à l'aveugle, souvent fausses ou déformées, peu de sens donné à la lettre, et une incapacité à contrôler des transformations algébriques. Le thème des équations en classe de quatrième, entre autres parce qu'il articule potentiellement l'introduction d'une lettre, la production d'expressions et d'une égalité, et la résolution de problèmes divers, concentre à lui seul bon nombre d'enjeux problématiques de l'enseignement de l'algèbre.

Le questionnement sur ces besoins provient par ailleurs de l'hypothèse selon laquelle les difficultés des élèves, au-delà des difficultés conceptuelles, sont liées à des enjeux d'apprentissages pouvant être *ignorés* par le système d'enseignement (Grugeon-Allys 2012, Castela 2008), c'est-à-dire que ce dernier ne met en place aucune organisation didactique explicite pour les prendre en charge :

> Ces enjeux d'apprentissage sont ignorés de l'institution, dans le sens où celle-ci, même si elle en connaît l'existence, ne s'exprime pas à leur propos et n'en assume pas la responsabilité didactique. (Castela, 2008, p. 137-138)

À une heure où l'école multiplie les dispositifs de différenciation pour prendre en charge les difficultés de *chaque* élève – accompagnement personnalisé, remédiation, individualisation des parcours, etc. – l'identification des besoins d'apprentissages *spécifiques* de ces élèves est plus que jamais nécessaire. Or comment les enseignants pourraient-ils mettre en place de tels dispositifs si en arrière-plan des phénomènes *silencieux,* sur lesquels programmes et manuels ne se prononcent pas, viennent occulter cette identification des besoins ?

L'existence d'implicites dans l'enseignement de l'algèbre a déjà été abordée en recherche en didactique. Par exemple, l'analyse de manuels français de collège et de lycée réalisée dans les travaux de Pilet (2012) à propos de l'étude des expressions algébriques a montré que ces manuels laissent implicites un certain nombre d'éléments, comme l'appui sur les propriétés opératoires pour soutenir la pratique du calcul algébrique, ou encore la dialectique entre le numérique et l'algébrique pour contrôler et valider les transformations effectuées :

> Selon nous, le rapport institutionnel attendu au calcul algébrique n'est pas conforme aux nécessités épistémologiques de la discipline. L'existence de savoirs et savoir-faire implicites est liée au fait que les différents éléments épistémologiques relatifs au travail sur et avec les expressions algébriques ne sont pas enseignés ou pas suffisamment impliqués dans l'activité algébrique demandée aux élèves. (Pilet, 2012, p. 167-168)

Si les programmes officiels et les manuels scolaires nous intéressent de près, c'est parce qu'ils constituent les principaux vecteurs institutionnels du savoir à enseigner. Souvent consultés, utilisés et interprétés par les professeurs pour mettre en œuvre leur enseignement, ils influencent de manière directe le savoir enseigné et le savoir appris. Dans cet article, nous proposons une analyse des programmes de 2008 et de quatre manuels français de collège de 2011 sur le thème des équations. Nous présentons dans un premier temps des éléments de référence à la fois épistémologiques et didactiques, relatifs aux équations, établis à partir de la synthèse de différents travaux issus de la recherche en didactique de l'algèbre. Ces éléments nous servent, dans un deuxième temps, à élaborer une grille d'analyse pour les programmes et les manuels étudiés. Un troisième temps est consacré aux principales tendances dégagées suite à notre analyse.

1. Une synthèse sur les équations algébriques

Comment « traquer » les besoins d'apprentissages portant sur les équations et qui sont ignorés de l'institution dans les programmes et les manuels, alors qu'ils sont, justement, *ignorés* ? Pour répondre à cette question, nous établissons d'abord des éléments de référence épistémologiques et didactiques, relatifs aux équations : qu'est-ce qui, d'après les travaux de recherche en didactique de l'algèbre, permet de construire le concept d'équation et de lui donner du sens ? Ensuite, nous comparons cette référence avec le savoir à enseigner présent dans les programmes et les manuels : ces derniers portent-ils suffisamment les principaux éléments épistémologiques de la référence ? Y a-t-il des tâches mathématiques ne faisant pas l'objet explicite d'un enseignement et qui sont pourtant nécessaires pour pouvoir manipuler les équations de manière idoine ? Les écarts entre ces éléments de référence et le savoir à enseigner sont interprétés comme autant d'enjeux ignorés de l'institution. Il est à noter que le terme de « référence » ne signifie pas qu'il s'agit d'un modèle à prétention prescriptive ; cette « référence » nous sert plutôt comme moyen d'*apprécier* les implicites étudiés.

Nous fondons notre référence épistémologique en croisant deux approches complémentaires. Une première approche (anthropologique, en référence à la Théorie Anthropologique du Didactique de Chevallard, 1998) situe la place et la fonction des équations dans les curriculums et tient compte des processus transpositifs du savoir, tandis que la seconde approche, cognitive, permet d'étudier l'activité algébrique d'un point de vue de l'élève, les sources de signification des équations, les processus de conceptualisation et l'activité des élèves relativement aux équations.

1.1. Préambule : qu'est-ce qu'une équation algébrique ?

La question de la définition d'une équation peut paraître naïve, mais nous avons cherché dans plusieurs manuels universitaires de mathématiques chez différents éditeurs, notamment des manuels de première année de licence prétendant vouloir redéfinir formellement les objets mathématiques étudiés lors des années antérieures, et nous n'avons trouvé aucune définition formelle d'une équation dans la plupart d'entre eux, comme si celle-ci était supposée bien connue des étudiants – ou alors, jugée inaccessible. Il ne s'agit pas pour nous de donner ici une définition qu'il faudrait inscrire dans les manuels de collège ou de licence, ni de faire un cours de mathématiques, mais simplement d'éclaircir ce que l'on entend par « équation » et par « résolution algébrique », car de notre expérience de professeur et de chercheur, la définition de ces termes, même au sein de la communauté des enseignants et des didacticiens, peut laisser place à un certain nombre d'ambiguïtés que nous espérons lever dans les lignes qui suivent.

Définition mathématique. Dans un ouvrage destiné aux étudiants préparant le CAPES et l'agrégation ainsi qu'aux professeurs et formateurs, Rogalski (2001) donne la définition suivante d'une équation :

> Soit f : E → F une application, et y un élément de F. On dit qu'on veut résoudre l'**équation** ($e_{f,y}$), et on note ($e_{f,y}$) : $f(x) = y$, **lorsqu'on recherche** un élément x de E dont l'image par f est y (on peut aussi dire qu'on recherche un antécédent x de y). On dit que x est l'**inconnue**, et que y est **donné**. Un élément x de E qui répond à la question est dit une **solution** de l'équation. (p. 18)

Remarquons que Rogalski ne définit pas ce qu'est une équation et qu'il parle immédiatement de résolution ; selon lui, il y a une nécessairement une *intention* de résoudre un problème lorsqu'on parle d'équation. Il faut inférer, d'après le texte, qu'une équation est une *égalité fonctionnelle*. Nous pouvons ensuite compléter cette définition générale dans le cadre qui nous intéresse (collège), à savoir les équations algébriques, à une variable réelle et à coefficients réels, par quelques éléments de vocabulaire :
- Une équation est définie sur un certain ensemble. Au collège, il s'agit généralement de l'ensemble des nombres réels. Dire que l'on résout une équation, c'est dire que l'on cherche tous les éléments appartenant à cet ensemble de définition vérifiant l'égalité considérée (éventuellement, il peut n'y avoir aucun élément satisfaisant l'égalité). Dans le cas où

l'équation ne possède qu'une seule inconnue et qu'elle est définie sur l'ensemble des réels, on parle alors d'équation à une inconnue réelle ou à une variable réelle (nous verrons dans quelques paragraphes la distinction entre inconnue et variable).

- Deux équations sont dites équivalentes sur un ensemble si elles possèdent les mêmes solutions sur cet ensemble. Par exemple, les équations $x^2=1$ et $x=1$ ne sont pas équivalentes sur l'ensemble des nombres réels, mais elles le sont sur l'ensemble des nombres réels positifs.

- Une équation de la forme $P(x)=0$ à une variable réelle x est dite algébrique (ou polynomiale), à coefficients réels, de degré n**,** si l'objet P est un polynôme à une variable réelle, à coefficients réels, de degré n. Une équation de la forme $Q(x)=R(x)$ où Q et R sont deux polynômes tels que le polynôme $Q - R$ soit un polynôme à une variable réelle, à coefficients réels, de degré n, est équivalente à une équation algébrique de degré n. On constate ainsi que la définition d'une équation algébrique repose sur celle d'un polynôme. D'ailleurs, on parle parfois de *racines* d'une équation, ce qui renvoie aux racines d'un polynôme.

- La résolution d'une équation $P(x)=0$ (où P est un polynôme de degré n) sur un ensemble E est dite *algébrique* si l'on peut exprimer algébriquement dans E sa ou ses solutions, c'est-à-dire les exprimer à l'aide des coefficients du polynôme P, des quatre opérations élémentaires et d'extractions de racines n-ièmes (rappel : un nombre a est une racine n-ième d'un nombre b si $a^n=b$). L'exemple classique est celui d'une équation du second degré de la forme $ax^2+bx+c=0$ dont les deux racines réelles, lorsqu'elles existent, s'expriment algébriquement en fonction des coefficients a, b, c et de la racine carrée (racine « deuxième ») du discriminant $b^2 - 4ac$.

L'apport de la logique. Un éclairage logique permet de compléter ces quelques définitions. En effet, selon Durand-Guerrier & al. (2000, p. 77), une équation peut être vue de deux manières différentes :

- soit on la considère comme étant une égalité supposée vraie et l'on cherche à déterminer la valeur de la lettre (ou des lettres), qui ont alors le statut d'*inconnue* ;

- soit on suppose que l'égalité n'est ni vraie ni fausse, et que sa valeur de vérité est suspendue jusqu'au moment où l'on attribue une valeur à la ou aux lettres, qui ont alors le statut de *variable*.

Pour illustrer ces propos, voici deux problèmes qui conduisent à la même équation mais correspondent en réalité aux deux visions suscitées :

Situation 1 : *Anita pense à un nombre x. Si elle ajoute 10 à x, elle obtient le même résultat que si elle multiplie x par 4. À quel nombre x Anita pense-t-elle ?*

Situation 2 : *Soit [AB] un segment de longueur 10 cm. Un point M se déplace le long du segment [AB]. On note x la longueur du segment [AM]. Où doit-on placer le point M sur le segment [AB] pour que le carré de côté AM ait le même périmètre que le triangle isocèle dont la base a pour longueur MB et les deux autres côtés ont chacun pour longueur x ?*

Dans le premier problème, la lettre a le statut d'inconnue (première vision) : Anita pense à un nombre précis, *fixe*, elle en connaît la valeur mais n'en informe pas son interlocuteur qui doit trouver cette valeur. Dans le second problème, la lettre désigne une quantité qui *varie* (seconde vision). Dans la plupart des manuels scolaires – et peut-être dans les classes par effet de contrat didactique – ces deux problèmes seraient traités de la manière suivante : en appelant x le nombre à chercher, ces manuels amèneraient l'élève à établir l'égalité $4x = 10+x$, modulo l'ordre des membres et l'ordre des termes dans les membres de l'équation, sans préciser s'il s'agit d'une égalité supposée vraie (première vision) ou d'une égalité que l'on cherche à rendre vraie (seconde vision).

La différence entre ces deux points de vue peut paraître minime ; d'ailleurs, les élèves et leurs enseignants utilisent souvent l'une ou l'autre de ces visions sans forcément les distinguer – et peut-être ne serait-il pas utile ni pour les uns, ni pour les autres, de faire cette distinction. Toutefois, d'un point de vue mathématique (et logique), les différences sont plus importantes. Par exemple, dans la première vision, l'existence d'une solution est supposée (Anita pense à un nombre réel et elle réalise des opérations sur ce nombre réel) ; sous réserve de cette existence, on peut raisonner ensuite par équivalence sur cette égalité en tant que proposition vraie (et si jamais on aboutissait à une égalité finale fausse, alors cela signifierait que notre supposition implicite de départ, à savoir qu'une solution existe, est fausse et on conclut par l'absence de solution). Dans la seconde vision, cette existence n'est plus supposée, elle est même *interrogée* : il se peut que l'égalité proposée ne puisse pas être rendue vraie (même si la question de la situation 2 est posée de telle sorte qu'on suppose implicitement qu'une solution existe) ; on raisonne alors en disant que résoudre l'équation unetelle est équivalente à résoudre l'équation unetelle et ainsi de suite jusqu'à obtenir une équation dont on peut déterminer la solution ou l'absence de solution.

Ainsi, ce n'est pas tant l'aspect statique / dynamique parfois associé à l'idée de variable qui importe, mais la question de l'existence d'une ou de plusieurs solutions de l'équation. Ceci peut être rapproché des travaux de Kouki (2006) en logique propositionnelle : une équation peut être vue comme une *phrase ouverte*, c'est-à-dire qu'il ne s'agit pas d'une proposition ayant une valeur de vérité, mais d'une fonction propositionnelle comportant une (ou plusieurs) variable(s) libre(s) et qui peut être transformée en une proposition vraie ou fausse selon l'élément assigné à cette variable.

Y a-t-il une vision préférable, d'un point de vue épistémologique, à présenter aux élèves de collège ? Nous débordons ici sur l'approche cognitive que nous verrons plus loin, mais voici ce que Durand-Guerrier & al. (2000) affirment :

> D'une façon générale, notre expérience montre qu'il est plus difficile de passer du point de vue inconnue au point de vue variable que l'inverse. (p. 81)

Selon les auteurs, la conception de l'équation comme égalité avec une inconnue (première vision) renforce l'idée, chez l'élève, que résoudre une équation d'inconnue x, c'est « calculer x ». Plusieurs autres arguments en faveur d'une présentation de la seconde vision *avant* la première peuvent être avancés, entre autres :
- dans la définition de solution d'une équation, c'est le point de vue variable qui est utilisé (on cherche *toutes* les valeurs de la variable qui rendent l'égalité vraie) ;
- de même, lorsque l'élève teste numériquement une solution trouvée (par exemple pour vérifier sa résolution), c'est-à-dire lorsqu'il remplace x par une valeur numérique pour voir si l'égalité est vraie, il utilise le point de vue variable ;
- lorsque les inéquations sont abordées, les solutions sont en nombre infini ; il n'est alors plus possible pour l'élève de « calculer x » puisque x prend une infinité de valeurs.

1.2. L'approche anthropologique

À présent que nous avons effectué la mise au point sur le vocabulaire lié aux équations algébriques au collège, nous présentons les principaux résultats épistémologiques relatifs aux équations, issus de la synthèse de plusieurs travaux majeurs de recherche en didactique de l'algèbre, en commençant par l'approche anthropologique. Dans le cadre de cette approche, nous nous posons les questions suivantes : quelles sont les problèmes qui *motivent* le recours aux équations ? Quels discours mathématiques – mais aussi *pratiques* (Castela, 2008) – justifient et guident la mise en œuvre de la technique de résolution algébrique d'un problème conduisant à une équation ?

Les programmes de calcul pour reconstruire l'algèbre. Des premiers éléments de réponse peuvent être trouvés dans les travaux de Ruiz-Munzon & al. (2012). Les auteurs proposent un modèle d'enseignement selon lequel la genèse de l'algèbre s'inscrit dans un processus progressif d'algébrisation des programmes de calcul (pour rappel, l'expression rhétorique d'un programme de calcul est un énoncé du type « choisir un nombre, le multiplier par 4, et ajouter 9 au résultat »). Plusieurs étapes structurent ce modèle :

- Une première étape concerne les expressions algébriques. Le type de problème pour motiver la production et l'utilisation des expressions à partir des programmes de calcul est le suivant : deux programmes étant donnés, sont-ils équivalents, *i.e.* renvoient-ils toujours le même résultat final ? À condition de prendre les « bons » programmes, ce problème met en échec les démarches arithmétiques et par essais/erreurs et nécessite le recours aux expressions.

- La deuxième étape porte sur les équations. Cette fois, le type de problème est le suivant : deux programmes de calcul étant donnés, quelle(s) même(s) valeur(s) entrer dans chaque programme pour qu'ils renvoient le même résultat ?

- Une troisième étape vient clore le modèle et a pour objet les formules algébriques.

Un exemple de problème à base de programmes de calcul qui nécessite le recours aux équations peut être le suivant :

> ***Problème :*** *Voici deux programmes de calcul.*
> *Programme A : Choisir un nombre de départ, le multiplier par 7, ajouter 3 au résultat.*
> *Programme B : Choisir un nombre, lui soustraire 4, multiplier par 2 le résultat.*
> *Quel même nombre de départ choisir pour que les deux programmes de calcul renvoient le même résultat final ?*

Ce problème met en échec la démarche arithmétique : il est impossible, pour trouver la réponse, de réaliser une « remontée » arithmétique en inversant les opérations – comme les élèves ont l'habitude de le faire à l'école primaire sur des programmes plus simples. En ce sens, il permet de motiver les équations, les présentant comme un outil permettant de résoudre un champ de problèmes plus vaste qu'avec l'outil arithmétique (Gascon, 1993-1994). Ce problème rend aussi quasiment impossible l'utilisation d'une démarche par essais/erreurs, la solution à trouver étant un nombre fractionnaire non décimal $(\frac{-5}{3})$.

La mise en concurrence de techniques « rivales ». Dans leurs travaux sur les stratégies des étudiants mises en œuvre pour résoudre des problèmes non routiniers, Bosch et Gascon (2005, p. 120) soulignent que *l'inexistence de techniques « rivales » pour la réalisation d'un* *même type de tâches* dans les organisations mathématiques à enseigner peuvent conduire les élèves à un rapport personnel « rigide » aux objets de savoir mathématiques. Le type de tâches précédent (programmes de calcul à égaliser), lorsqu'il est rencontré pour la première fois par un collégien, constitue pour ce dernier un type de tâches *problématique,* dans le sens où les techniques connues de l'élève ne lui permettent pas, ou plus, de le résoudre. Ainsi, pour renforcer le caractère « nécessaire » de la technique de résolution algébrique, il est envisageable de la mettre en concurrence avec la technique arithmétique ou par essais/erreurs, et montrer, par un choix judicieux de problèmes, que la technique de résolution algébrique fonctionne là où les deux autres sont mises en échec (et inversement, il est possible de trouver des problèmes où ces deux techniques réussissent là où la technique algébrique échoue, mais ce serait aller à l'encontre du projet didactique visant à motiver cette dernière). Le problème ci-avant sur les programmes de calcul peut ainsi être proposé et confronté à d'autres problèmes similaires qui, eux, sont résolubles par des démarches arithmétiques ou essais/erreurs.

Le travail sur des types de tâches dits « réciproques ». Toujours selon Bosch et Gascon, les difficultés des élèves pourraient provenir du fait qu'ils rencontrent certains types de problèmes, par exemple mettre un problème en équation, mais pas les types de problèmes « réciproques », par exemple : partant d'une équation, inventer un problème pouvant être modélisé par cette équation. Or, comme nous le verrons dans l'approche cognitive ci-après, faire travailler dans les « deux sens » un type de problème a un impact du point de vue de la conceptualisation, car il fait travailler les conversions et la coordination entre différents registres de représentation sémiotiques.

L'appui sur des discours théoriques et pratiques pour mettre en œuvre des techniques. La connaissance de propriétés mathématiques peut ne pas suffire à l'application d'une technique justifiée par ces propriétés. Selon Castela (2008), un discours *pratique*, qui vient guider la mise en œuvre de la technique, est souvent nécessaire. Par exemple, pour résoudre algébriquement une équation au collège, il ne suffit pas de connaître les propriétés de conservation de l'égalité ; il faut également être capable de les appliquer avec une certaine intelligence de calcul, en prenant en compte le degré de l'équation, la structure des expressions en jeu, la présence ou non de termes identiques dans chaque membre de l'équation, etc. De plus, la mise en place d'une stratégie pour appliquer la technique peut être facilitée par l'utilisation de discours comme « isoler l'inconnue », « éliminer l'inconnue de ce membre ». Tous ces éléments relèvent de ce que Castela appelle discours pratique, ou encore composante pratique d'une technologie. À l'inverse, ne s'appuyer que sur un discours pratique, comme ce peut être le cas lorsqu'un élève utilise la fameuse expression « faire passer de l'autre côté » sans aucun appui sur une justification mathématique, occulte complètement l'utilisation de la conservation de l'égalité. Discours théorique et discours pratique vont donc de pair pour justifier et guider l'application d'une technique donnée.

1.3. L'approche cognitive

Selon Vergnaud (1990), la construction d'un concept passe par trois éléments : un ensemble de situations donnant du sens au concept considéré ; un ensemble de processus permettant le traitement de ces situations ; et un ensemble de représentations symboliques et langagières pour pouvoir exprimer des objets et des relations entre ces objets dans ces situations.

Dans l'approche cognitive, nous nous posons donc les questions suivantes : qu'est-ce qui permet et favorise la conceptualisation de l'objet équation quand l'élève l'utilise lors d'une activité algébrique ? Quels sont les processus cognitifs mis en jeu dans cette activité et comment les travailler ?
Dans l'approche anthropologique, nous avons présenté un modèle d'enseignement des équations se basant sur les programmes de calcul et dans lequel le recours aux équations était motivé. Afin de présenter de manière exemplifiée nos résultats théoriques, nous gardons le problème des programmes de calcul (page 6) comme un fil rouge et nous tentons d'apporter des éléments de réponse aux questions posées ci-avant, en lien avec la résolution de problèmes. Parce qu'il motive la technique de mise en équation et la résolution algébrique de cette équation en mettant en échec les démarches arithmétiques et par essais/erreurs, ce problème peut *a priori* contribuer à donner du sens au concept d'équation.

Les conversions sémiotiques. Pour traiter le problème, l'élève va devoir mettre en œuvre trois activités cognitives (Duval, 1993) : une activité de *formation,* où l'élève doit produire une équation, ce qui implique des choix de sa part dans les données du contenu à représenter en respectant la règles d'écriture algébrique ; une activité de *traitement* durant laquelle l'élève résout algébriquement l'équation dans le registre des écritures algébriques ; et une activité de *conversion* qui correspond au passage d'un registre à un autre registre. Ceci implique la *coordination* entre les deux registres qui, d'après Duval, est loin d'être naturelle pour l'élève et peut s'avérer complexe, en particulier lorsque la conversion d'un registre à un autre ne présente pas de *congruence*. Par exemple, la conversion de la phrase « Le nombre F de filles multiplié par 2 est égal au nombre G de garçons » en la formule « F×G=2 » présente une congruence sémiotique, alors que celle de la phrase « Il y a deux fois plus de filles que de garçons » en la même formule nécessite une certaine réorganisation et ne présente donc pas de congruence. Les types de problèmes « réciproques », évoqués dans l'approche anthropologique, peuvent permettre un travail de cette coordination inter-registres.

L'articulation entre syntaxe et sémantique et la dialectique numérique-algébrique. La résolution d'une équation algébrique nécessite l'articulation entre la syntaxe (l'élève doit suivre les règles de formation de l'équation et les règles de transformations de l'équation en une équation équivalente) et la sémantique (comme lorsque l'élève va contrôler, interpréter et choisir les transformations à effectuer, ou tester des valeurs numériques, conjecturer graphiquement l'existence et le nombre de solutions de l'équation). Un élève n'articulant pas syntaxe et sémantique ne peut pas pratiquer une activité algébrique idoine, comme le montre Chevallard (1989) en donnant l'exemple d'un élève sachant parfaitement factoriser l'expression relativement complexe $(2x-3)^2-4(x+1)(4x-6)+(4x^2-9)$ mais qui est incapable de contrôler numériquement son résultat. L'élève est, dans cet exemple, resté uniquement sur l'aspect syntaxique des transformations. On voit à travers cet exemple l'importance de la dialectique entre numérique et algébrique, étroitement liée à l'articulation entre syntaxe et sémantique.

Une rupture épistémologique avec l'arithmétique. L'équation que l'élève a à résoudre dans notre problème (page 6) est la suivante : $7x+3=(x-4)\times 2$ (en appelant x le nombre choisi au départ pour les deux programmes). L'inconnue est présente dans les deux membres de l'équation et l'élève va devoir opérer sur cette inconnue. Pour cela, il est nécessaire de laisser en suspens certaines opérations (par exemple, la somme $7x+3$ ne sera pas, contrairement à ce que l'élève avait l'habitude de faire à l'école primaire, *effectuée*) et considérer l'égalité comme une relation symétrique alors qu'en primaire, l'égalité peut ne constituer qu'une annonce d'un résultat, « ceci plus ceci *donne* cela », avec une lecture gauche-droite dissymétrique. C'est ce que Vergnaud & al. (1987) appellent une *rupture épistémologique* : arithmétique et algèbre partagent des symboles communs (opérateurs, égalité, lettre) mais qui n'ont pas la même signification.

Le double aspect structural et procédural. Ce que Sfard (1991) appelle le *double aspect procédural et structural* d'un objet mathématique est également en jeu dans notre problème. Une équation dite « arithmétique » (l'inconnue est présente dans un seul membre), par exemple $7x+3=24$, peut être considérée d'une façon *procédurale* : « choisir un nombre *x*, puis le multiplier par 7, puis lui ajouter 3, puis obtenir 24 ». En confondant l'équation avec ce *processus*, l'élève peut le « remonter » en inversant les opérations : partant de 24, il soustrait 3, puis divise le résultat par 7 et trouve enfin la valeur de *x*. Mais dans notre problème, où l'inconnue se situe dans les deux membres (équation non arithmétique), l'aspect procédural ne suffit plus. L'élève, pour résoudre l'équation, doit la considérer dans son ensemble, comme un « tout », repérant simultanément l'égalité, les opérations, les délimitants (parenthèses), en bref, la *structure* de l'équation, pour pouvoir exercer un calcul intelligent : quelles transformations effectuer et dans quel ordre. C'est alors l'aspect structural qui est convoqué.

De l'usage des métaphores : la balance Roberval. Selon Kieran (2007), une des sources de signification de l'algèbre porte sur ce qui est extérieur aux mathématiques, comme les gestes, les artefacts, les métaphores, etc. Une approche assez classique pour introduire la technique de résolution algébrique d'une équation consiste à utiliser la balance Roberval : les plateaux de la balance représentent les deux membres de l'équation, les masses posées sur chaque plateau représentent les quantités (connues et inconnues) de chaque membre de l'équation, et l'égalité est traduite par celle des hauteurs des deux plateaux. Toutefois, la pertinence de cette métaphore d'un point de vue cognitif est controversée. Bloch (2009) donne l'exemple d'un enseignant dont le discours métaphorique sur l'équilibre de la balance n'est pas cohérent avec la résolution attendue des équations qu'il propose, et met en avant l'importance d'articuler ce discours avec les règles algébriques de résolution. Certains défenseurs de la balance (comme Radford & Grenier, 1996) arguent que les règles d'élimination des quantités sont facilitées par l'utilisation de cette métaphore, tandis que d'autres (comme Filloy & Rojano, 1989) évoquent la restriction des situations représentées par la balance : par exemple, comment représenter des masses négatives ? Les travaux et expérimentations de Vlassis (2002) semblent montrer que les arguments avancés par les « détracteurs » de la balance ne constituent pour autant pas nécessairement des obstacles pour les élèves :

> Our observations show that the balance model can certainly help students to learn the formal method of applying the same operation in the two members. Its essential interest consists not only of giving a concrete meaning to these manipulations, but also providing students with an 'operative' mental image that contains the principles to be applied. (p. 356)

1.4. Éléments de référence sur les organisations mathématiques à enseigner relatifs aux équations

Nous avons présenté dans les sections précédentes les principaux éléments épistémologiques relatifs aux équations. Dans le cadre d'une approche anthropologique (Chevallard, 1998), nous partons du postulat que tout individu, dès qu'il réalise une tâche, agrège tout un ensemble de moyens, de discours et de « sous-tâches » pour ce faire. Par exemple, résoudre une équation à coefficients réels, à une variable réelle et du premier degré constitue un *type de tâches*. Pour le réaliser, plusieurs moyens – plusieurs *techniques* – sont envisageables : inverser les opérations pour remonter au résultat (dans le cas d'équations arithmétiques), ou tester des valeurs numériques jusqu'à trouver celle qui rende l'égalité vraie, ou transformer algébriquement l'équation en une équation équivalente dont la solution est aisée à déterminer.

Chacune de ces techniques peut être justifiée à l'aide d'un discours rationnel, la *technologie* (par exemple, les propriétés de conservation de l'égalité pour la technique algébrique), et cette technologie, à un niveau supérieur, peut elle-même être justifiée par une *théorie*. Mais, pour résoudre algébriquement une équation, nous avons vu que tout un ensemble de processus cognitifs était à l'œuvre et que plusieurs « sous-tâches » étaient *convoquées* : il faut être à même de reconnaître la structure des expressions et de l'équation en jeu, ce qui passe par la capacité à saisir le sens des opérateurs, des délimitants, de l'égalité, à considérer l'équation sous un aspect procédural et structural ; il faut savoir pratiquer du calcul algébrique sur les expressions, en appui sur la distributivité ; il faut savoir remplacer une lettre par une valeur numérique pour tester une égalité ; etc. Autrement dit, la réalisation d'un type de tâches convoque un ensemble d'*organisations praxéologiques*, chaque organisation étant généralement composée, à un niveau ponctuel, d'un type de tâches, d'une technique pour le réaliser, d'une technologie pour justifier la technique, et d'une théorie pour justifier la technologie.

À partir des sections précédentes, nous tentons d'élaborer des éléments de référence sur les organisations mathématiques des savoirs à enseigner relatifs aux équations, en nous centrant sur ceux proposés au collège. D'abord, nous listons et « rangeons » les genres de tâches relatifs aux équations en fonction des discours mathématiques et pratiques qui justifient et guident les techniques permettant de réaliser ces genres de tâches. Ceci permet de mettre en avant les technologies « phares » en lien avec les équations. Ensuite, nous dégageons les agrégations entre les différentes organisations ainsi regroupées, agrégations dont nous faisons l'hypothèse que la mise en œuvre demeure, pour certaines, implicites dans l'enseignement actuel. Enfin, nous faisons de cette organisation un outil opérationnel pour analyser le savoir à enseigner présent dans les programmes et les manuels afin d'apporter des éléments de réponse à notre questionnement initial : quels sont les besoins d'apprentissages laissés implicites ?

Nous distinguons trois groupes. Le premier groupe, « organisation 1 », concerne la génération des équations. D'après notre étude épistémologique et didactique, les équations constituent un outil pour résoudre certains types de problèmes et que des processus de modélisation impliquant des changements de registres étaient en jeu. Cette organisation 1 est pilotée par des éléments technologiques justifiant les techniques de mise en équation. Elle comporte les genres de tâches de mises en équation : produire une équation pour résoudre un problème sans que l'inconnue ne soit nommée, traduire une situation où l'inconnue est nommée en une équation, associer une situation donnée à une équation donnée ou inversement. La technique de mise en équation consiste à identifier les quantités connues et inconnues pertinentes, à identifier les relations entre ces quantités, notamment ce qui, dans le registre de départ, correspond à une égalité, puis à traduire ces relations données dans le registre de départ dans le registre des écritures algébriques, ou inversement. Cette technique est justifiée par les règles de formation des équations et de conversion d'un registre de représentation à un autre, le rôle des quatre opérateurs de base, des puissances, des délimitants, des priorités opératoires et du signe d'égalité dans les équations. D'un point de vue pratique, la technique peut être guidée par l'identification de l'expression « est égal à » dans l'énoncé de départ s'il est en langage naturel, ou bien, si l'égalité est implicite, il faut reformuler le problème en l'explicitant (par exemple en utilisant une propriété de géométrie) ou identifier qu'une même grandeur est exprimée de deux façons différentes ; elle est également guidée par le choix de l'inconnue, qui peut être évident s'il n'y a qu'une seule grandeur à chercher, ou qui ne l'est pas quand plusieurs grandeurs sont inconnues et qui nécessite dans ce cas d'exprimer ces grandeurs inconnues en fonction d'une seule.

Le second groupe, « organisation 2 », porte sur les transformations algébriques des équations en vue de les résoudre. La technique de résolution algébrique consiste, selon les expressions en présence de part et d'autre de l'égalité, à ajouter un même terme aux deux membres, à multiplier ces deux membres par un même facteur non nul, éventuellement à développer ou à factoriser un des membres (ou une partie), dans le but de transformer l'équation de départ en une équation équivalente dont l'ensemble des solutions est aisé à déterminer. En classe de quatrième, il s'agit principalement de transformer l'équation initiale pour obtenir une équation équivalente de la forme $x=a$ d'inconnue x et dont l'unique solution est a. Les propriétés de conservation de l'égalité justifient cette technique. Quant à sa mise en œuvre, elle peut être facilitée par des discours du type « Isoler l'inconnue », « Transformer l'équation de sorte à obtenir une équation avec l'inconnue dans un membre et un nombre dans l'autre membre », ou bien en se référant à l'image mentale de la balance de Roberval.

Enfin, le troisième groupe, « organisation 3 », concerne la structure des équations, en lien avec le concept de solution. L'intelligence des calculs nécessaire dans la résolution d'équations s'appuie, d'après les éléments épistémologiques précédemment présentés, sur l'identification de la structure d'une équation et éventuellement sur un contrôle numérique, par substitution, des solutions trouvées. La vision d'une équation en tant que phrase ouverte, comme nous l'avons vu avec l'éclairage de la logique (Durand-Guerrier & al. 2000, Kouki 2006), est potentiellement utile à leur résolution et pose la question de l'existence et du nombre de solutions de cette équation, question qui est nécessaire pour exercer un contrôle des calculs. Le test d'égalité pour déterminer si un nombre donné est solution ou non d'une équation, l'identification de la structure de l'équation et le dénombrement de solutions en sont les principaux genres de tâches. La technique pour tester une égalité consiste à substituer la lettre par une valeur numérique et à comparer, suite à cette substitution, les valeurs des expressions de chaque membre. Celle pour identifier la structure de l'équation s'appuie sur l'identification des opérateurs, des délimitants et des exposants. Le dénombrement des solutions d'une équation est surtout demandé en fin de collège (classe de troisième) à l'occasion de la rencontre avec les équations du second degré pouvant être transformées en une équation produit nul. Dans ce cas, la technique pour dénombrer les solutions d'une telle équation consiste à la transformer en une équation produit nul et à observer chaque facteur de ce produit : s'il s'agit d'une expression de la forme $ax+b$ d'inconnue x avec a non nul, alors $\frac{-b}{a}$ est une solution.

En reprenant notre problème à base de programmes de calcul, nous pouvons constater que les trois organisations précédentes sont sollicitées : l'élève doit mettre le problème en équation (organisations 1 et 3), résoudre l'équation obtenue (organisations 2 et 3), éventuellement vérifier que la solution obtenue est correcte (organisations 1 et 3). L'organisation 3 intervient à chaque étape de la résolution, car la reconnaissance de la structure d'une équation est nécessaire pour contrôler la mise en équation, pour exercer une intelligence des calculs et pour tester une solution (le test de solution pouvant également servir à contrôler un résultat ou à prouver une équivalence entre équations). Ainsi, c'est la capacité à convoquer et à articuler les éléments de ces trois organisations qu'il est nécessaire de posséder pour produire et manipuler de manière idoine les équations. Bien entendu, des organisations praxéologiques relatives aux expressions, à la géométrie, à la numération, etc., peuvent potentiellement être convoquées dans la résolution d'un tel problème (voir par exemple le problème « Situation 2 » évoqué dans la section 2.1). Nous nous focalisons ici uniquement sur les organisations de savoir mathématiques à enseigner en lien avec les équations.

	Mise en équation (organisation 1)	Résolution (organisation 2)	Structure et solution (organisation 3)
Genres de tâches	Mettre un problème en équation, Traduire un problème en une équation, Associer un problème à une équation	Transformer algébriquement une équation en vue de la résoudre	Identifier la structure d'une équation, Tester une solution (ou une égalité), Dénombrer les solutions d'une équation
Techniques	Choisir une inconnue pour modéliser Exprimer des relations entre grandeurs d'un registre vers un autre	Opérer sur les membres de l'équation pour isoler l'inconnue	Repérer les opérateurs, les délimitants, … ; substituer la lettre par une valeur numérique Transformer l'équation en une équation produit nul
Eléments technologiques	Règles de conversion entre registres	Propriétés de conservation de l'égalité	Substitution Un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un au moins des facteurs est nul

Tableau 1. *Éléments de référence des savoirs à enseigner relatifs aux équations au collège*

2. Une analyse des programmes et des manuels

Nous utilisons les éléments de référence précédents sur les savoirs mathématiques à enseigner relatifs aux équations pour réaliser à présent une analyse praxéologique des programmes de 2008 et de quelques manuels scolaires (2011) sur le thème des équations. Nous cherchons à répondre aux questions suivantes : le contenu des programmes et des manuels de quatrième fournit-il les éléments technologiques identifiés dans la référence épistémologique et pilotant les organisations locales de l'organisation de référence relative aux équations ? Quels sont les types de tâches qui y sont présents, peu présents ou complètement absents ? Y a-t-il une mise en évidence des convocations entre les organisations locales ?

2.1. Analyse des programmes

Nos résultats d'analyse portent sur trois documents institutionnels : le Bulletin Officiel du 28 août 2008 et deux documents d'accompagnement[1].

[1] *Du numérique au littéral au collège* (février 2008) et *Le calcul sous toutes ses formes au collège et au lycée* (février 2013).

Des implicites sur la résolution de problèmes et des types de tâches absents

Dans le Bulletin Officiel d'août 2008, la résolution de problèmes est un élément central de l'apprentissage des mathématiques et c'est par ce biais que les équations sont travaillées. Cependant, quel que soit le niveau, nous allons voir que les *conditions* pour que les problèmes en question motivent le recours à l'algèbre et aux équations demeurent pour la plupart implicites, et que certains types de tâches pourtant nécessaires, d'après la référence épistémologique, ne sont pas présents.

En classe de cinquième, un des objectifs de la résolution de problèmes vise l'initiation à la notion d'équation, « *dans des situations où le problème ne peut pas être facilement résolu par un raisonnement arithmétique* » (p. 23), mais aucun exemple précis de telle situation n'est fourni. Certaines situations peuvent ne pas être facilement résolubles arithmétiquement sans toutefois motiver le recours à une équation. C'est le cas par exemple des problèmes pouvant être résolus par essais/erreurs, par une méthode de fausse position, ou à l'aide d'un schéma. En l'absence des propriétés de conservation de l'égalité, la résolution algébrique semble exclue. Le seul type de tâches exigé concerne le test d'égalité (organisation 3 dans notre organisation de référence) ; aucun travail sur les autres types de tâches et les autres organisations n'est explicitement suggéré.

En quatrième, les problèmes doivent conduire à une équation du premier degré à une inconnue, mais là encore, aucune information supplémentaire n'est fournie : quels types *précis* de problèmes travailler ? À quel type *précis* d'équations doivent-ils aboutir ? Un problème arithmétique ou résoluble par essais/erreurs peut être mis en équation, ou l'équation à laquelle conduit un problème peut être résolue arithmétiquement ou par essais/erreurs, sans qu'aucun recours à la technique algébrique ne soit nécessaire (nous verrons que les manuels « glissent » ici sur ces implicites et proposent une proportion importante de problèmes ne nécessitant absolument pas la technique de mise en équation ou de résolution algébrique). Concernant les types de tâches, la mise en équation, la résolution de l'équation et l'interprétation de la solution sont demandées. Ces types de tâches relèvent des organisations 1 et 2 de l'organisation de référence relative aux équations. Nous pouvons donc constater l'absence d'exigences concernant le travail de types de tâches de l'organisation 3 qui est pourtant cruciale puisqu'elle concerne la reconnaissance des structures dans une équation, reconnaissance sans laquelle aucune intelligence des calculs ne peut avoir lieu. Nous remarquons également que l'ingrédient technologique « propriétés de conservation de l'égalité » n'est pas nommé comme tel (le programme présente plutôt des relations d'ordre) et fait l'objet d'une rubrique portant sur la comparaison de nombres relatifs ; bien que les commentaires précisent l'utilité de ces propriétés dans le domaine du calcul littéral, elles ne sont pas directement reliées aux équations.

En classe de troisième, l'un des objectifs de la résolution de problèmes est « *de compléter les bases du calcul littéral et d'en confronter le sens pour résoudre des problèmes* ». Cette tournure de phrase laisse supposer que la résolution de problèmes vient *après* le travail sur les bases du calcul littéral ; or, les problèmes à base de programme de calcul permettent *aussi* de motiver le calcul littéral et le recours aux équations. Les conditions à imposer aux problèmes travaillés par les élèves demeurent aussi implicites qu'en quatrième, le programme parlant simplement de problèmes du second degré se ramenant à des problèmes du premier degré. La mise en équation et la résolution d'équations produit nul sont exigées ; aucun type de tâches de l'organisation 3 n'est, une fois de plus, explicitement demandé.

Dans leur étude de l'évolution de quelques objets algébriques dans les programmes de collège, Assude & al. (2012) ont mis en avant un manque potentiel de cohérence entre les diverses injonctions données et la mise à l'écart de certaines connaissances du socle commun. Nous rejoignons ces constats avec les contradictions provoquées par les remarques relatives au socle commun où le recours à l'algèbre n'est pas exigible : « *La notion d'équation ne fait pas partie du socle commun* » (classe de 5$^{\text{ème}}$, p. 23, et classe de 3$^{\text{ème}}$, p. 36) ; « *Les élèves, dans le cadre du socle commun, peuvent être amenés à résoudre des problèmes se ramenant à une équation du premier degré sans que la méthode experte soit exigible.* » (classe de 4$^{\text{ème}}$, p. 29). Comment les enseignants gèrent-ils ces contradictions dans les programmes ? Comment parviennent-ils à proposer simultanément des problèmes permettant de « *conforter les bases du calcul littéral* » tout en n'obligeant pas le recours aux équations ? Comment un élève, habitué aux démarches arithmétiques ou par essais/erreurs depuis plusieurs années peut-il donner des raisons d'être à l'outil algébrique s'il lui est proposé des situations où il peut s'en passer ?

2.2. Des documents d'accompagnement en marge du Bulletin Officiel

Les directives générales du Bulletin Officiel d'août 2008 sont complétées par des documents d'accompagnement relativement récents et dont nous pouvons interroger, de par leur caractère « marginal », l'utilisation qui en est faite par les enseignants. Viennent-ils néanmoins combler les enjeux d'apprentissages laissés implicites dans le Bulletin Officiel ?

Pour ce qui est de l'enseignement de l'algèbre et des équations, deux documents ont retenu notre attention. Le premier, « Du numérique au littéral au collège » (février 2008), propose un exemple précis de situation (*cf.* annexe 1) pour introduire la notion d'équation (et le calcul littéral) en classe de cinquième, celle du carré bordé (Combier, Pressiat et Guillaume, 1996). Dans ce problème, un grand carré est composé de plusieurs petits carrés identiques, les petits carrés de la bordure étant grisés. Le nombre de petits carrés grisés sur le côté du grand carré définit la taille de ce dernier. Il s'agit de déterminer la taille du grand carré pour que le nombre total de carreaux grisés soit égal à un nombre donné, ce nombre étant choisi relativement « grand » pour empêcher une stratégie de comptage à partir d'un dessin. Le document suggère l'utilisation d'un tableur pour faire travailler les notions de variable et de solution d'une équation, installant ainsi un nouveau statut pour l'égalité. Pour motiver la technique de résolution algébrique et questionner la démarche par essais/erreurs – qui est celle employée lorsque les élèves recherchent les solutions à l'aide d'un tableur – le document explique que le nombre de tentatives ou l'accessibilité des solutions peuvent constituer des arguments. Cette situation et les explications qui l'accompagnent sont en accord avec les éléments de la référence épistémologique relative aux équations que nous avons établie : les types de tâches des trois organisations locales sont mis en jeu : produire une équation en passant par la production d'une expression littérale (organisation 1) ; travailler la structure de ces expressions et tester une égalité (organisation 3) ; puis aboutir à la résolution algébrique d'une équation (organisation 2). Signalons qu'un autre exemple précis et lui aussi en accord avec les éléments de la référence épistémologique relative aux équations est fourni dans ce document d'accompagnement (*cf.* annexe 2), celui de la boîte sans couvercle : un grand carré de 10 cm de côté auquel on retire quatre petits carrés identiques au niveau des « coins » constitue le patron d'une boîte sans couvercle. Il s'agit de déterminer la longueur du côté d'un petit carré pour que la boîte ait un volume donné. Ce problème nécessite lui aussi d'articuler les trois organisations locales.

Le second document d'accompagnement, « Le calcul sous toutes ses formes au collège et au lycée », bien que se concentrant sur le calcul de manière générale, contient des informations sur le calcul algébrique et notamment sur les équations. Un exemple précis de problème, très proche d'un problème à base de programmes de calcul comme celui que nous avons proposé, y est présenté (*cf.* annexe 3). Ce problème conduit à des équations algébriques (c'est-à-dire de la forme $ax+b = cx+d$), avec des solutions fractionnaires non décimales, ce qui motive bien le recours aux équations et à la technique de résolution algébrique. Si le document souligne que les solutions ne peuvent être trouvées par une démarche par essais/erreurs, le fait que les équations obtenues soient algébriques demeure implicite. De plus, bien que les commentaires insistent sur le caractère motivant de la traduction algébrique (organisation 1), puis sur l'introduction qui doit se faire des propriétés permettant de résoudre l'équation (organisation 2), la question de la reconnaissance des structures des expressions et des équations (organisation 3) reste implicite également. Le document insiste sur l'importance de l'exercice d'un calcul intelligent mais les recommandations sont d'ordre général (« *L'enseignement doit prendre en charge le développement des moyens de cette intelligence du calcul nécessaire à un calcul raisonné, des moyens qui sont en partie communs et en partie propres à chaque type de calcul.* » p. 8) et aucun exemple mettant en jeu les équations n'est donné.

2.3. Analyse de quatre manuels de collège

Dans les manuels scolaires de collège, quels sont les savoirs mathématiques à enseigner relatifs aux équations présents dans les manuels scolaires de collège ? Que nous apprennent les éléments de référence épistémologiques et didactiques développés ci-avant dans l'analyse de ces savoirs ? En quoi permettent-ils de discuter les organisations mathématiques de ces savoirs mises à l'étude au collège ? Nous tentons d'apporter des éléments de réponse à ces questions en présentant maintenant les résultats de nos analyses de quatre manuels scolaires français de collège en mathématiques : le manuel *Horizon* (quatrième, 2011, Ed. Didier), le manuel *Myriade* (quatrième, 2011, Ed. Bordas), le manuel *Phare* (quatrième, 2011, Ed. Hachette) et le manuel *Transmath* (quatrième, 2011, Ed. Nathan).

Méthodologie. Les manuels suivent généralement une structure similaire dans leur manière d'organiser les contenus. Nous distinguons trois grandes parties pour chaque manuel : *activités*, *cours et savoir-faire*, et *exercices*. Pour chaque partie, nous identifions les organisations praxéologiques travaillées, leur poids et les articulations mises en évidence dans les manuels. Nous associons à chacune de ces parties plusieurs moments didactiques (Chevallard, 1998), qui correspondent en quelque sorte à leur « fonction », et nous précisons les éléments sur lesquels nous nous focalisons pour les analyses :

- La partie *activités* a pour fonction de proposer des premières rencontres avec des types de tâches nouveaux ou bien connus mais présentés dans des situations inédites, et des contenus visant à élaborer de nouvelles techniques pour réaliser les types de tâches rencontrés ainsi que les discours technologiques justifiant ces techniques. Ici, nous sommes particulièrement attentifs aux types de tâches présents dans les situations proposées (motivent-ils le recours aux équations ?), à la présence de changements de registres (par exemple à travers des situations à base de programmes de calcul), au statut donné en premier à la lettre (variable ou inconnue ?) et à la manière dont ces situations amènent la construction du discours technologique justifiant les techniques de résolution algébrique et de mise en équation.
- La partie *cours et savoir-faire* concerne l'institutionnalisation (ce qui est « à retenir ») et comporte des exercices visant à travailler les techniques découvertes. Quelle définition d'une

équation est retenue ? Quel discours technologique justifie la technique de résolution algébrique ? Quels discours pratiques sont employés pour faciliter la mise en œuvre de cette technique et de celle de mise en équation ? Quels moyens de contrôle (des transformations et des solutions) sont présentés ?
- La partie *exercices* prolonge ce travail des techniques et peut aussi comprendre des moments d'évaluation de ces techniques (dans des rubriques du type « J'évalue mes connaissances »). Quels types de tâches sont ou ne sont pas présents ? Quel poids est accordé à chaque organisation locale (1, 2 et 3) ? Quels types d'équations et de problèmes sont travaillés (arithmétiques, non arithmétiques) ? Quelles justifications sont demandées ?
Toutes les questions que nous nous posons sont mises en perspective avec la référence épistémologique relative aux équations et l'organisation praxéologique de référence (tableau1).

Analyse des parties *activités*. Dans trois des quatre manuels, les équations sont motivées grâce à des situations à base de programmes de calcul. Dans un premier temps, les démarches arithmétiques et par essais/erreurs fonctionnent. Mais à la fin des activités, les programmes à égaliser font échouer ces démarches, la solution à trouver étant fractionnaire non décimale, ce qui motive le recours à une équation. Ceci est en accord avec les éléments que nous avons dégagés dans la référence épistémologique. Seul le manuel *Phare* (quatrième, 2011) propose une activité ne motivant pas le recours aux équations (*cf.* annexe 4) : il s'agit principalement de donner du vocabulaire à l'élève (équation, inconnue, degré).

Dans ces situations d'introduction aux équations, nous notons toutefois que pour trois manuels, la lettre a dans un premier temps un statut d'inconnue et non de variable ; ce n'est que dans un second temps, lorsque les démarches par essais/erreurs sont employées, qu'elle acquiert le statut de variable. Seul le manuel *Horizon* (quatrième, 2011), parce qu'il propose une activité avec utilisation du tableur, introduit d'abord la notion de variable avant celle d'inconnue.

Concernant l'élaboration du discours technologique « propriétés de conservation de l'égalité », deux manuels – *Phare* (quatrième, 2011) et *Transmath* (quatrième, 2011) – utilisent la métaphore de la balance (*cf.* annexe 5). Cependant, aucun ne présente les limites d'une telle métaphore. De plus, dans le manuel *Phare* (quatrième, 2011), la tâche de l'élève est réduite à identifier les masses retirées sur les balances et à leur associer une équation ; dans le manuel *Transmath* (quatrième, 2011), l'activité n'a pas de motivation particulière dans le sens où la balance présente deux masses inconnues x et y dont on ne cherche pas à trouver la valeur (les élèves doivent simplement conclure l'activité par l'énoncé des propriétés). Le manuel *Myriade* (quatrième, 2011, *cf.* annexe 6), quant à lui, utilise les propriétés de conservation de l'égalité pour résoudre des équations mais celles-ci sont arithmétiques (donc ne nécessitent pas la technique de résolution algébrique) et ne correspondent à aucune situation particulière (donc ne sont pas motivées). Enfin, le manuel *Horizon* (quatrième, 2011) propose une activité similaire à la balance avec des boîtes dont les contenus possèdent des quantités égales (*cf.* annexe 7) ; contrairement à la métaphore de la balance, la situation permet de mettre en jeu des quantités négatives et fractionnaires. Les équations sont motivées, la technique de résolution algébrique aussi (une des solutions à trouver est fractionnaire non décimale), et l'image employée (les boîtes) a l'avantage de dépasser les limites potentielles de l'image de la balance Roberval. Le savoir à enseigner dans le manuel *Horizon* (quatrième, 2011) est donc le seul à porter les principaux éléments épistémologiques relatifs aux équations des éléments des organisations mathématiques (section 2.4) pour l'élaboration du discours technologique justifiant la technique de résolution algébrique.

Enfin, la technique de mise en équation est différemment traitée dans les quatre manuels. Le manuel *Phare* (quatrième, 2011) ne propose aucune activité pour élaborer cette technique. Les manuels *Myriade* (quatrième, 2011) et *Transmath* (quatrième, 2011) présentent chacun une situation énoncée en langage naturel mais qui relève de la traduction (*cf.* annexe 8) : l'inconnue est déjà nommée, l'élève n'a donc pas à sa charge de produire des expressions ou des équations, et il n'y a donc pas plusieurs choix possibles pour cette inconnue. Or, c'est la capacité à gérer cette complexité dans la convocation des types de tâches qui, d'après la référence épistémologique, permet de manipuler les équations de manière idoine. Le manuel *Horizon* (quatrième, 2011) est celui qui fait le plus travailler cette complexité, d'abord parce qu'il propose trois problèmes différents à résoudre (*cf.* annexe 9), deux en langage naturel et un issu de la géométrie, ce qui favorise les changements de cadres et de registres ; ensuite parce que l'égalité à trouver dans chaque énoncé nécessite un effort différent : le premier requiert l'utilisation d'une propriété géométrique (égalité de longueurs dans un parallélogramme), les deux autres de débusquer ce qui, dans le langage naturel, fait référence à une égalité (par exemple, la présence de l'adjectif « identique ») ; enfin, la résolution d'un des problèmes nécessite de faire un choix pour l'inconnue parmi deux possibles et d'exprimer les autres grandeurs en fonction de cette inconnue.

Nous mettons à présent en avant plusieurs autres implicites dans les parties *activités* des manuels analysés. Premièrement, aucun manuel ne met explicitement les techniques arithmétiques ou essais/erreurs en concurrence avec la technique algébrique ; parfois, ces techniques sont mises en parallèle mais aucun discours ne vient mettre en lumière les avantages de l'une par rapport aux autres (sauf le manuel *Transmath* (quatrième, 2011) qui pose, à l'issue d'une activité, la question « *Pourquoi ne pouvait-on pas trouver cette solution avec le tableur [...]* ? »).

Ensuite, nous avons noté l'absence quasi-totale de types de tâches « réciproques » dans les activités. Seul le manuel *Transmath* (quatrième, 2011) en présente un dans une de ses activités : « *Imaginer une situation [...] qui conduit à résoudre l'équation 8x +7 = 5x + 12 (c'est-à-dire trouver sa solution)* » (page 96 du manuel). Or, nous avons expliqué l'intérêt de ces types de tâches au niveau de la « flexibilité » qu'ils font développer chez les élèves.

Terminons avec les types de tâches des trois organisations locales de l'organisation épistémologique de référence relative aux équations : si la plupart sont présents dans les activités, l'un d'entre eux ne fait jamais l'objet d'un travail spécifique explicite dans les quatre manuels analysés. Il s'agit de l'identification de la structure d'une équation et des expressions la composant et qui fait partie de l'organisation 3. Nous interrogeons ce choix de la part des auteurs de manuels, qui est en désaccord avec la référence épistémologique : comment les élèves peuvent-ils exercer une intelligence des calculs sans passer par la reconnaissance des opérateurs, des délimitants, des puissances et des priorités opératoires ? Comment peuvent-ils sans cela contrôler la cohérence entre leur modèle (l'équation) et la situation proposée ?

Analyse des parties *cours et savoir-faire*

Au niveau de la définition d'une équation, trois manuels emploient, à quelques mots près, la suivante : « Une équation est une égalité dans laquelle un ou plusieurs nombres de valeur inconnue interviennent. » Le manuel *Horizon* (quatrième, 2011) ne donne pas de définition, il laisse à la charge de l'élève d'inférer celle-ci à partir d'un exemple (« *ceci* est une équation »). Tous les manuels donnent une définition similaire de ce que signifie « résoudre une équation » (trouver toutes les valeurs rendant l'égalité vraie) et ce qu'est une solution d'une équation (la valeur donnée à la lettre et qui rend l'égalité vraie).

Au niveau des discours technologiques, les manuels exposent les propriétés de conservation de l'égalité. Tous présentent ensuite des exemples de résolution d'équations. Les propriétés de conservation de l'égalité sont alors employées différemment d'un manuel à l'autre pour justifier la technique de résolution algébrique et guider sa mise en œuvre. Les paramètres suivants varient : identification des propriétés utilisées, ostensifs employés (couleurs, flèches, …) et raisons d'être des transformations effectuées. Par exemple, le manuel *Horizon* (quatrième, 2011, *cf.* annexe 10), en accord avec les éléments de référence épistémologiques, propose une résolution d'équation où, à chaque étape, la propriété utilisée est identifiée, et la raison pour laquelle telle ou telle transformation est réalisée est explicitée à l'aide de discours pratiques comme « isoler l'inconnue » ; des bulles fléchées, colorées, où apparaissent les transformations effectuées, accompagnent le discours. À l'inverse, le manuel *Phare* (quatrième, 2011, *cf.* annexe 10) n'identifie pas la propriété utilisée et n'expose pas de stratégie générale expliquant le choix des transformations opérées dans les exemples du cours ; seuls des ostensifs « couleurs » accompagnent le discours (de plus, les équations résolues sont arithmétiques, ce qui ne motive pas l'outil algébrique).

Pour ce qui est des discours pratiques facilitant la mise en œuvre de la technique de mise en équation, nous remarquons là encore des variabilités entre les manuels. Si tous proposent une méthode générale déclinée en trois ou quatre étapes (choix de l'inconnue, mise en équation, résolution, vérification) et appliquée sur des exemples, seul le manuel *Horizon* (quatrième, 2011) détaille la complexité des types de tâches qui peuvent être convoqués et articulés lors de cette mise en équation : trouver l'égalité (quatre cas sont distingués : ou l'égalité est donnée, ou il faut utiliser une reformulation, ou il faut utiliser une propriété géométrique, ou il faut trouver une grandeur exprimée de deux façons différentes), choisir l'inconnue (trois cas distingués : ou l'inconnue est déjà donnée, ou un seul nombre est à chercher et c'est lui qui sera l'inconnue, ou plusieurs nombres sont à chercher, auquel cas il faut en choisir un comme inconnue et exprimer les autres en fonction de celui-ci), et traduire les deux membres de l'équation par des expressions algébriques faisant intervenir l'inconnue.

Enfin, concernant la validation des calculs, tous les manuels proposent au moins un exemple de résolution d'équation où la solution trouvée est ensuite testée dans l'équation de départ pour contrôler le fait que l'égalité obtenue est bien vraie, et aucun n'évoque la question de l'existence et de l'unicité de la solution. L'identification de la structure de l'équation et des expressions est encore le type de tâches absent, alors qu'il pourrait servir à contrôler en partie la cohérence entre le modèle et la situation.

Analyse des parties *exercices*

La figure 1 ci-après présente la proportion des organisations locales présentes dans les manuels[2]. Nous remarquons les tendances suivantes : l'organisation 2 (résolution) est

[2] Les graphiques présentés ici ont été élaborés à partir d'une version légèrement différente des organisations praxéologiques à enseigner relatives aux équations de celles présentées dans cet article, mais cela modifie peu significativement les tendances que l'on peut observer.

dominante dans les quatre manuels, et pour trois d'entre eux, l'organisation 3 (structure et solution) est la moins présente. Parmi les types de tâches les plus travaillés, notre comptage indique que la résolution d'équation (organisation 2) arrive largement en tête, et la reconnaissance des structures (organisation 3) est pratiquement absente. Ceci est peu étonnant et peut s'expliquer par le fait qu'il n'y a quasiment que des problèmes du premier degré à une inconnue qui sont abordés dans les manuels de quatrième. Toutefois, la question de l'existence d'une solution n'est que rarement posée, et l'appui sur la structure d'une équation pour exercer une intelligence des calculs dans la résolution algébrique est très peu présent. Le type de tâches majoritairement travaillé dans l'organisation 3 est le test de solutions. Les types de tâches « réciproques » ne sont quasiment pas travaillés (leur proportion est de l'ordre de 1%) ; de fait, le travail sur les conversions entre différents registres de représentation sémiotiques et leur coordination en est amoindri.

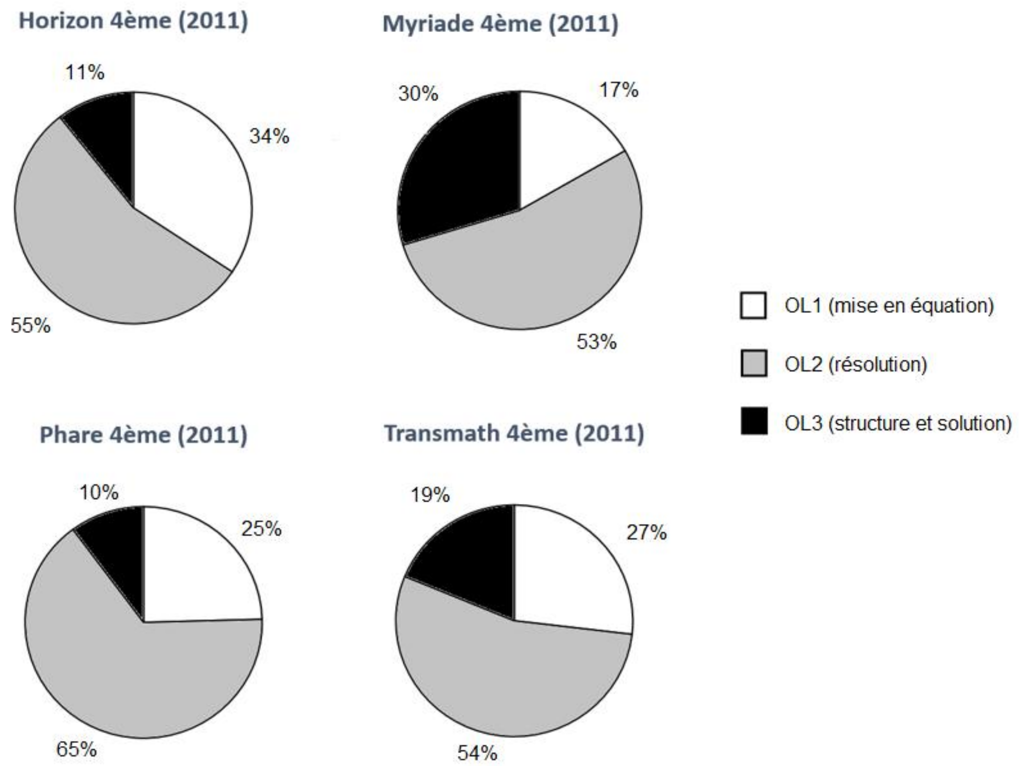


Figure 1. *Les organisations mathématiques relatives aux équations dans les quatre manuels*

La figure 2 ci-après expose la proportion d'équations à résoudre seules, sans contexte, et d'équations issues de problèmes de modélisation. Nous pouvons constater qu'un pourcentage non négligeable d'équations (entre un quart et la moitié des équations que l'on peut résoudre dans tous les exercices du chapitre sur les équations) concerne des équations données à résoudre seules. Or la résolution de problèmes est ce qui *donne* du sens aux équations, ce qui favorise leur conceptualisation. Si le travail de la technique a bien entendu sa place et est complémentaire de la résolution de problèmes, il peut être à craindre que la présence d'une telle proportion d'exercices purement techniques conduise les enseignants à en faire faire à leurs élèves de manière isolée et déconnectée de la résolution de problèmes.

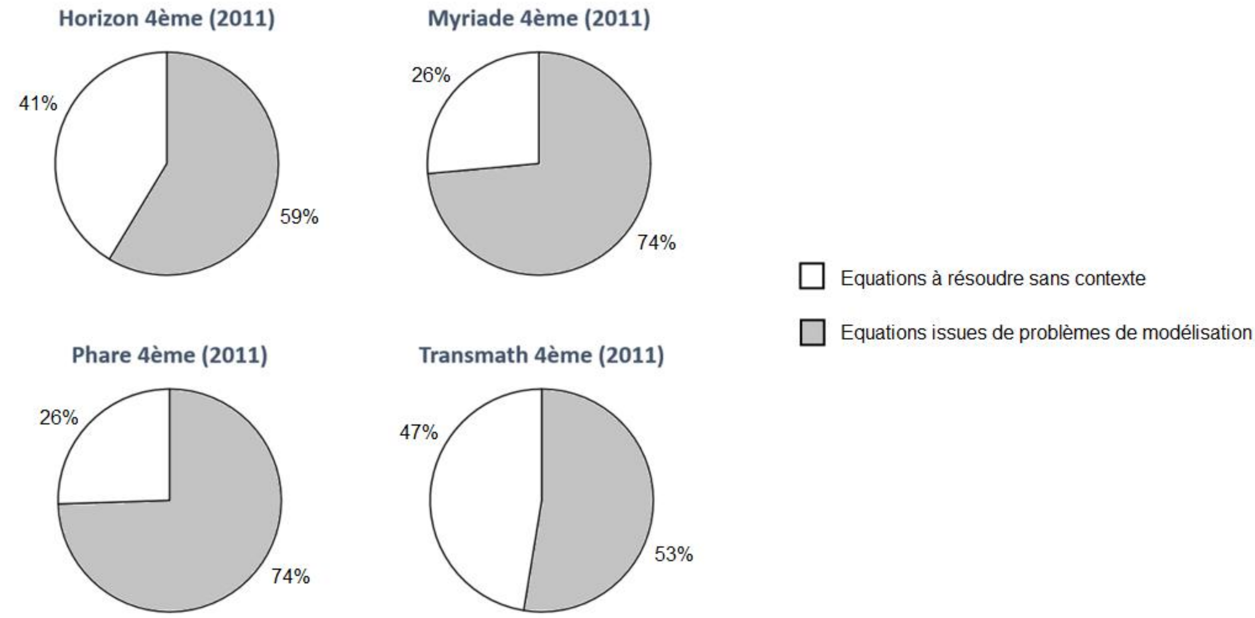


Figure 2. *Proportions d'équations à résoudre seules et d'équations issues de problèmes dans les quatre manuels analysés*

Nous nous sommes intéressé de plus près aux problèmes proposés dans les exercices (figure 3 ci-après). Dans les quatre manuels, quasiment un problème sur deux peut être résolu de manière non algébrique (tous les problèmes relevant du socle commun sont dans ce cas). Nous avons considéré qu'un problème ne nécessitait pas une résolution algébrique s'il était possible de le résoudre par une démarche arithmétique ou essais/erreurs, ou à l'aide d'un schéma, de manière « raisonnable ». Si dans le manuel *Horizon* (quatrième, 2011), la proportion de problèmes non algébriques peut être en partie expliquée par le fait que le chapitre ne s'intitule pas « équations » mais « résolution de problèmes » et que tous les types de problèmes, algébriques ou non, sont étudiés, nous interrogeons pour les trois autres manuels le choix des auteurs de proposer une si grande proportion de situations ne nécessitant pas le recours à l'algèbre : les élèves, habitués depuis l'école primaire à utiliser des démarches non algébriques, vont-ils être à même de donner des raisons d'être aux équations et aux techniques de résolution algébrique et de mise en équation si la moitié des problèmes qu'ils rencontrent sont susceptibles d'être résolus autrement ?

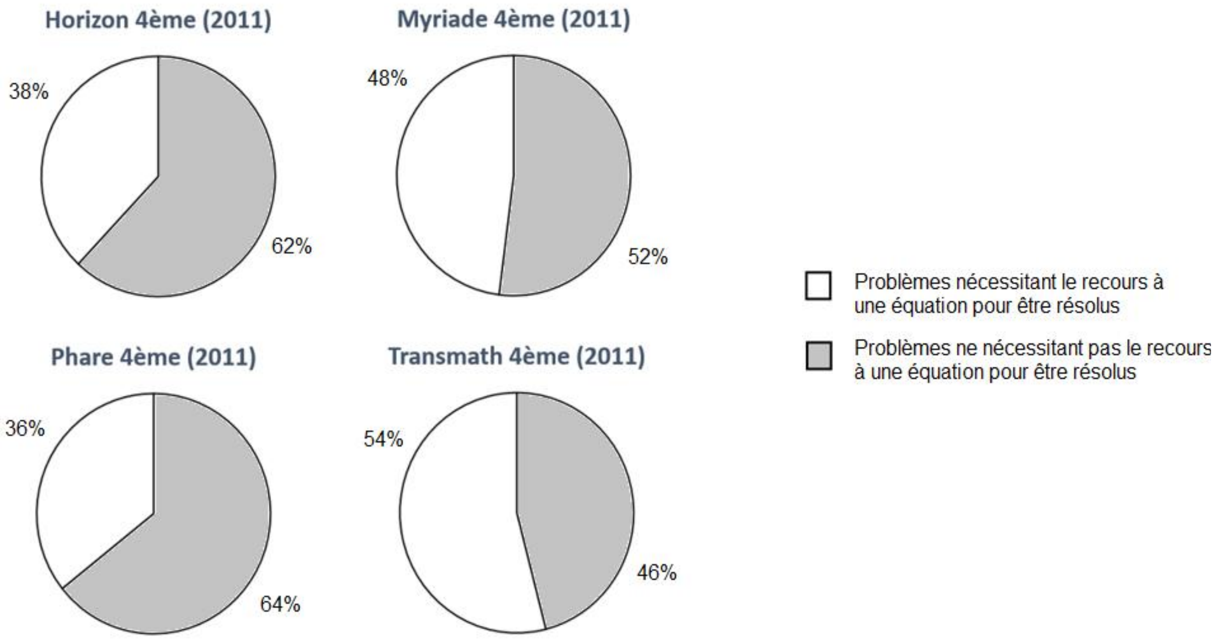


Figure 3. *Proportions des problèmes algébriques et non algébriques dans les quatre manuels*

Conclusion et perspectives

Les enjeux d'apprentissages relatifs aux équations ignorés dans les programmes et les manuels

La comparaison des programmes et des manuels français sur le thème des équations avec une référence épistémologique nous a permis de dégager un ensemble d'enjeux d'apprentissages laissés implicites par l'institution au niveau du savoir à enseigner. Nous résumons ici nos principaux résultats :

- Le Bulletin Officiel d'août 2008 présente des directives générales ; bien que son objectif ne soit probablement pas de fournir des exemples exhaustifs, il n'en demeure pas moins qu'il comporte des implicites au niveau des équations : les variables didactiques à utiliser sur les situations proposées aux élèves et les équations auxquelles ces situations doivent conduire ne sont pas précisées.
- Les documents d'accompagnement ne comblent pas toujours les implicites du Bulletin Officiel. De plus, ils se situent en marge du Bulletin et nous interrogeons leur utilisation par les enseignants.
- Concernant les manuels étudiés, la majorité recourt à des activités motivant le recours aux équations. Cependant, dans ces activités, la lettre est souvent présentée en premier avec un statut d'inconnue et non de variable ; certains manuels utilisent la métaphore de la balance de Roberval sans en préciser les objectifs ou les limites, ne s'attardent pas sur la complexité de la technique de mise en équation, et ne mettent pas en concurrence les techniques algébriques avec les techniques arithmétiques ou essais/erreurs.
- Au niveau du cours et des savoir-faire, l'existence et le nombre de solutions d'une équation ne sont pas abordés. Certains manuels utilisent des ostensifs (couleurs, flèches) dans leurs exemples de résolution d'équations, sans les accompagner d'un discours mathématique ou

d'une stratégie explicative. La validation des calculs, lorsqu'elle est présente, ne passe pas par la reconnaissance des structures des expressions et des équations.
- Pour ce qui est des exercices, un certain déséquilibre entre les organisations locales est identifié, avec une prédominance pour l'organisation 2 (résolution). Ce déséquilibre se retrouve dans les types de tâches travaillés, avec notamment l'absence presque totale de la reconnaissance des structures des expressions et des équations, qui pourtant guide l'intelligence des calculs et permet un contrôle des transformations. La résolution pure d'équations est travaillée de manière isolée, sans contexte moteur, à travers de nombreux exercices techniques. Les types de tâches « réciproques », favorisant une flexibilité chez les élèves, sont présents en quantité infime. Enfin, près de la moitié des problèmes ne nécessitent pas l'utilisation de techniques algébriques.

Perspectives

Nous ne tirons pas de conclusions directes sur l'impact de la présence d'implicites dans le savoir à enseigner dans les manuels et les programmes sur le savoir enseigné et le savoir appris, même si nous soutenons qu'une influence du premier sur les seconds existe. L'enseignant, parce qu'il met en œuvre les activités, les exercices et le cours des manuels à sa manière, en les modifiant, en les adaptant, en les agençant d'une certaine façon, en les complétant aussi, peut être à même d'expliciter tous les enjeux d'apprentissages relatifs aux équations ignorés par les documents officiels et les manuels. Cependant, nous faisons l'hypothèse, à vérifier expérimentalement, que certains implicites échappent à la vigilance de l'enseignant, et qu'un travail spécifique de ces implicites permettrait de favoriser chez les élèves la construction d'un rapport idoine aux équations.

Dans cet article, nous avons proposé des éléments de référence épistémologiques et didactiques sur les organisations de savoirs mathématiques à enseigner sur les équations au collège. Ils peuvent servir de base à la conception de situations et de leçons à mettre en œuvre dans les classes et qui seraient en accord avec les principaux éléments épistémologiques nécessaires à la discipline. En particulier, ils sont potentiellement une aide à l'identification des besoins en algèbre chez les élèves de collège, besoins que l'on sait nombreux et variés, ainsi qu'à la construction d'une réponse adaptée vis-à-vis des apprentissages explicites ou ignorés de l'institution.

Enfin, ces éléments peuvent être utiles pour questionner le découpage des organisations mathématiques des programmes mis en œuvre à la rentrée de 2016. Par exemple, dans les « repères de progressivité », la modélisation d'un problème à l'aide d'une équation du premier degré est conseillée en classe de quatrième ; cependant, la technique de résolution algébrique ne semble être un attendu qu'en classe de troisième (en quatrième, un tel problème se résout seulement d'une *« façon exacte ou approchée »*, sans ajout sur ce que cela signifie précisément). Pourquoi alors utiliser une équation pour modéliser un problème si c'est pour le résoudre non algébriquement ? Autre questionnement : la notion de variable fait explicitement son apparition dans la rubrique « Calcul littéral » aux côtés de la notion d'inconnue. Nous l'avons vu, cette notion est potentiellement intéressante à travailler dans le cadre de l'enseignement des équations ; mais elle ne fait l'objet d'aucun commentaire explicite, ni dans les attendus de fin de cycle, ni dans ces repères de progressivité. Le document ressource du cycle 4 « Nombres et calculs » évoque seulement l'utilité du tableur pour aborder cette notion.

Nous espérons donc que dans le contexte particulier de l'importante réforme actuelle du collège, les éléments de référence que nous avons développés dans cet article pourront servir d'éclairage sur les savoirs à enseigner relatifs aux équations dans les nouveaux programmes.

Références

ASSUDE T., COPPE S. et PRESSIAT A. (2012) Tendances de l'enseignement de l'algèbre élémentaire au collège : atomisation et réduction, *Recherches en didactique des mathématiques, hors série, Enseignement de l'algèbre, bilan et perspectives,* pp. 41-62

BOSCH M. et GASCON J. (2005) La praxéologie comme unité d'analyse des processus didactiques. In A. Mercier & C. Margolinas (Eds.), *Balises pour la didactique des mathématiques : cours de la 12e Ecole d'été de didactique des mathématiques, du 20 au 29 août 2003, Corps (Isère), Grenoble : La Pensée Sauvage,* 107-122.

BLOCH I. (2009) Les interactions mathématiques entre professeurs et élèves. Comment travailler leur pertinence en formation ? *Petit x*, **81**, 2009.

CASTELA C. (2008) Travailler avec, travailler sur la notion de praxéologie mathématique pour décrire les besoins d'apprentissage ignorés par les institutions d'enseignement. *Recherches en didactique des mathématiques,* **28,** 135-182.

CHEVALLARD Y. (1989) Le passage de l'arithmétique à l'algébrique dans l'enseignement des mathématiques au collège. Seconde partie. Perspectives curriculaires : la notion de modélisation, *Petit x,* **19,** 43-72.

CHEVALLARD Y. (1998) Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques : approche anthropologique. In R. Noirefalise (Ed.), *Actes de l'Ecole d'été de la Rochelle, du 4 au 11 juillet 1998, La Rochelle, Clermont-Ferrand : IREM de Clermont-Ferrand,* 91-120.

COMBIER G., GUILLAUME J.-C. et PRESSIAT A. (1996) Les débuts de l'algèbre au collège : au pied de la lettre, *Institut National de Recherche Pédagogique, Didactiques des disciplines, Paris.*

DURAND-GUERRIER V., LE BERRE M., PONTILLE M.-C. et REYNAUD-FEURLY J. (2000) Le statut logique des énoncés dans la classe de mathématiques. Eléments d'analyse pour les enseignants. *IREM de Lyon.*

DUVAL R. (1993) Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, IREM de Strasbourg,* **5,** 37-65.

FILLOY E. et ROJANO T. (1989) Solving equations : The transition from arithmetic to algebra, *For the learning of the mathematics,* **9(2),** 19-25.

GASCON J. (1993-1994) Un nouveau modèle de l'algèbre élémentaire comme alternative à l' « arithmétique généralisée », *Petit x,* **37,** 1993-1994.

GRUGEON-ALLYS B., PILET J., CHENEVOTOT-QUENTIN F. et DELOZANNE E. (2012) Diagnostic et parcours différenciés d'enseignement en algèbre élémentaire, *Recherches en didactique des mathématiques, hors série, Enseignement de l'algèbre, bilan et perspectives,* pp. 137-162

KIERAN C. (2007) Learning and Teaching Algebra At The Middle School Through College Levels. Building Meaning for Symbols and Their Manipulation, In J. Lester F. K. (Ed.), *Second Handbook of research on Mathematics Teaching and Learning,* **2,** 707-762.

PILET J. (2012) Parcours d'enseignement différencié appuyés sur un diagnostic en algèbre élémentaire à la fin de la scolarité obligatoire : modélisation, implémentation dans une plateforme en ligne et évaluation, *Thèse de doctorat, Paris.*

RADFORD L. et GRENIER M. (1996) Les apprentissages mathématiques en situation, *Revue des Sciences de l'éducation,* **XXII,** 253-276.

ROGALSKI M. (2001) Carrefours entre analyse, algèbre, géométrie, Ellipses (Ed.).

RUIZ-MUNZON N., MATHERON Y., BOSCH M. et GASCON J. (2012) Autour de l'algèbre : les entiers relatifs et la modélisation algébrico-fonctionnelle, *Recherches en didactique des mathématiques, hors série, Enseignement de l'algèbre, bilan et perspectives,* pp. 87-106.

SFARD A. (1991) On the dual nature of mathematical conceptions : Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics,* **22,** 1-36.

VERGNAUD G., CORTES A. et FAVRE-ARTIGUE P. (1987) Introduction de l'algèbre auprès de débutants faibles. Problèmes épistémologiques et didactiques. In *Actes du Colloque de Sèvres : Didactique et acquisition des connaissances scientifiques, La Pensée Sauvage,* 259-288.

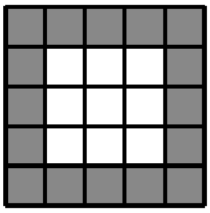
VERGNAUD G. (1990) La théorie des champs conceptuels, *Recherches en didactique des mathématiques,* **10.2(3),** 133-170.

VLASSIS J. (2002) The balance model : hindrance or support for the solving of linear equations with one unknown, *Educational Studies in Mathematics,* **49,** 341-359.

ANNEXES

Annexe 1

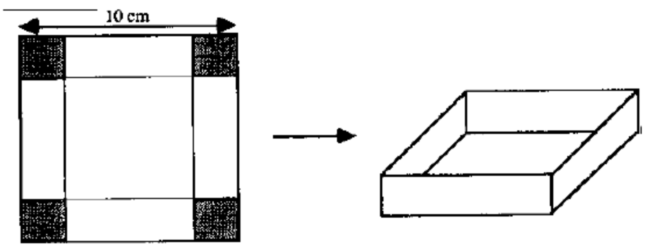
Exemple de problème : il s'agit d'établir une formule qui permet de calculer le nombre de carreaux grisés d'une figure construite sur le modèle ci-contre, quel que soit le nombre de carreaux sur le côté du carré.[1]



La situation du carré bordé
(extrait du document officiel « Du numérique au littéral au collège », février 2008, p. 1)

Annexe 2

On dispose d'une plaque de carton carrée de 10 cm de côté. Dans chaque coin de la plaque, on découpe un carré comme indiqué sur le dessin. On obtient alors le patron d'une boîte parallélépipédique, sans couvercle.
Quelle doit être la mesure du côté du carré que l'on découpe dans chaque coin pour que le volume de la boîte soit 72 cm³ ?



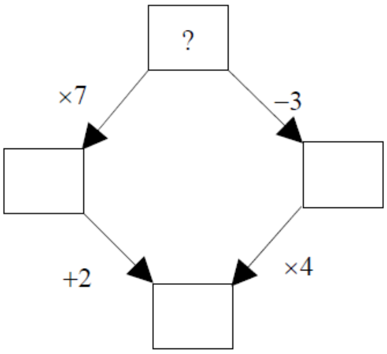
La situation de la boîte sans couvercle
(extrait du document officiel « Du numérique au littéral au collège », février 2008, p. 4)

Annexe 3

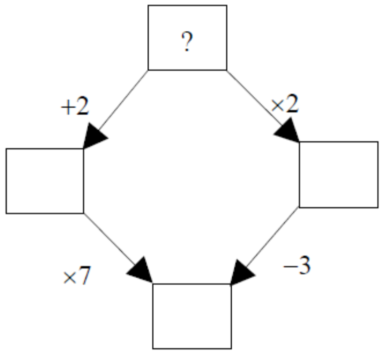
<u>Exemple 4 (classe de 4^e, avant d'introduire les équations)</u>

Dans les deux situations qui suivent, les deux chemins mènent au même résultat. De quel nombre est-on parti ?

a)



b)



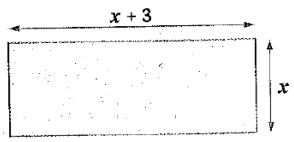
Situation précédant l'introduction des équations
(extrait du document officiel « Le calcul sous toutes ses formes au collège et au lycée », février 2013, p. 7)

Annexe 4 – *Activité d'introduction des équations, manuel Phare 4ème 2011 p. 78*

1 Je découvre le vocabulaire

x désigne une longueur.

Toutes les longueurs sont exprimées en centimètres.



1 **a)** Exprimer en fonction de x le périmètre du rectangle jaune.

b) Développer, puis réduire l'expression trouvée en **1 a)**.

c) Le périmètre du rectangle jaune est de 30 cm.

Traduire cette phrase par une égalité en utilisant l'expression trouvée en **1 b)**.

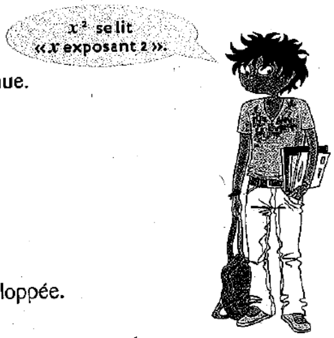
Dans cette égalité, y a-t-il des termes en x^2 ?

On dit que les termes en x sont d'exposant 1, c'est pourquoi cette égalité est appelée **équation du premier degré à une inconnue.**

d) Tester cette égalité pour $x = 3$, pour $x = 4$, enfin pour $x = 5$.

Tout nombre vérifiant l'égalité est appelé **solution de l'équation.**

Proposer un nombre qui est solution de cette équation.



2 **a)** Exprimer en fonction de x l'aire du rectangle jaune.

b) Développer l'expression trouvée au **2 a)**.

c) L'aire du rectangle est de 65 cm².

Traduire cette phrase par une égalité en utilisant l'expression développée.

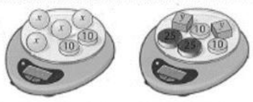
Dans cette égalité, y a-t-il des termes en « x exposant 2 » ?

Cette égalité est appelée **équation du second degré à une inconnue.**

Annexe 5 – *Activités utilisant la métaphore de la balance de Roberval*

4 Opérations et égalités

Les masses des objets posés sur ces deux balances identiques sont indiquées en grammes.
Les deux balances indiquent **la même masse totale.**
Ceci se traduit par l'égalité $20 + 4x = 70 + 2y$.



a. À partir de cette situation, cinq élèves imaginent des actions possibles sur les plateaux de ces balances.

Pour chaque enfant, dire si la situation se traduit encore par une égalité. Si oui, laquelle ?
b. En s'appuyant sur les exemples précédents, faire des phrases du type :
« On obtient une nouvelle égalité, en … un même nombre … membre d'une égalité ».

2 Je résous une équation

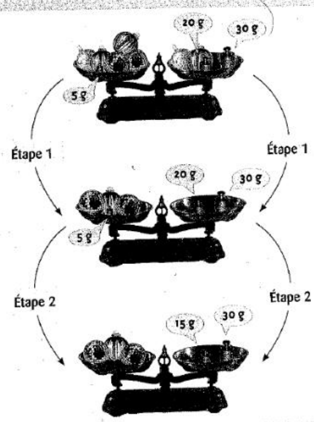
Sur la balance en équilibre ci-contre, les boules de Noël ont toutes la même masse *m* en grammes.
On veut déterminer la masse *m* d'une boule.

1 Écrire une équation traduisant l'équilibre de la balance du haut.

2 **a)** Qu'a-t-on fait à l'**étape 1** ?
b) Écrire une nouvelle équation traduisant cet équilibre.

3 **a)** Qu'a-t-on fait à l'**étape 2** ?
b) Écrire une nouvelle équation traduisant cet équilibre.
c) Résoudre cette dernière équation.

4 **a)** Quel nombre est solution de l'équation trouvée en **3 b)** ?
b) Avec ce nombre, tester l'égalité écrite dans la question **1**.
À quoi correspond concrètement ce nombre ?



dans les manuels Phare 4ème 2011 p. 78 (à droite) et Transmath 4ème 2011 p. 96 (à gauche)

Annexe 6 – S*ur les propriétés de conservation de l'égalité , Myriade 4ème 2011 p. 84-85*

2 Résoudre une équation

Une transformation d'équations

1. On veut résoudre l'équation $3x - 8 = 7$, c'est-à-dire trouver les valeurs de x pour lesquelles cette égalité est vraie.
 a. Ajouter 8 à chacun des membres de l'équation puis les écrire le plus simplement possible.
 b. Cette nouvelle équation a-t-elle les mêmes solutions que $3x - 8 = 7$? Expliquer.

2. **a.** Diviser chacun des membres de la nouvelle équation par 3 puis les écrire le plus simplement possible.
 b. Cette nouvelle équation a-t-elle les mêmes solutions que $3x - 8 = 7$? Expliquer.
 c. En déduire la solution de l'équation $3x - 8 = 7$.

3. **a.** Pourquoi a-t-on choisi d'ajouter 8 à chacun des membres à la question **a.** ? Pourquoi a-t-on choisi de diviser par 3 chacun des membres à la question **c.** ?
 b. Quelles actions semble-t-on pouvoir faire pour transformer une équation en une autre équation qui a les mêmes solutions ?

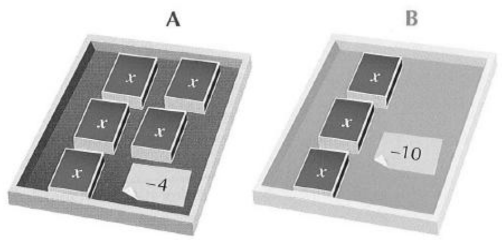
4. Manu doit résoudre l'équation $9x = 5x + 20$. Il prétend qu'elle a les mêmes solutions que l'équation $4x = 20$. Justifier l'affirmation de Manu et en déduire la solution de cette équation.

Annexe 7 – *Activité sur les propriétés de conservation de l'égalité, Horizon 4ème 2011 p. 114*

5 Un jeu pour résoudre une équation

@

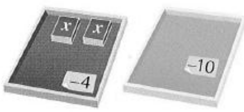
Lucien et Loubna jouent ensemble. Lucien cache un nombre, toujours le même, dans chaque boîte bleue. Loubna doit deviner ce nombre.



Matériel : 2 plateaux A et B, des boîtes et des étiquettes.
Déroulement du jeu : un des joueurs écrit le même nombre au fond de chaque boîte puis il les referme.
But : l'autre joueur doit trouver le nombre caché.
Règle : la somme des nombres présents sur chaque plateau est la même.

1. On appelle x le nombre écrit dans les boîtes.
a. Écrire en fonction de x la somme des nombres du **plateau A**.
b. Écrire en fonction de x la somme des nombres du **plateau B**.
c. Écrire une équation qui traduit le fait que les deux sommes sont égales.

2. Loubna enlève trois boîtes de chaque plateau.
a. Le nombre inscrit dans les boîtes a-t-il changé ?
b. Écrire en fonction de x la somme des nombres du **plateau A** et la somme des nombres du **plateau B**.
c. Expliquer pourquoi ces sommes sont égales.



3. Loubna ajoute une étiquette 4 sur chaque plateau.
a. Expliquer pourquoi les sommes des nombres présents sur les deux plateaux sont toujours égales.
b. Écrire une équation qui traduit la nouvelle disposition sur les plateaux et réduire les deux membres si c'est possible.

4. Loubna annonce le nombre inscrit dans les boîtes. Quel est ce nombre ? Comment a-t-elle fait ?

Annexe 8 – *Activités sur la mise en équation des manuels Myriade 4ème 2011 p. 85 (à gauche) et Transmath 4ème 2011 p. 97 (à droite)*

1. On cherche à savoir combien d'euros Chloé doit donner à Paul.
a. On appelle x le nombre cherché. Écrire, en fonction de x, la somme que Chloé aura après la transaction.
b. De même, écrire, en fonction de x, la somme que Paul aura après la transaction.
c. Écrire une équation traduisant le fait que ces deux quantités doivent être égales.
d. Résoudre cette équation.
e. L'équation précédente a-t-elle une solution ? Si oui laquelle ? Est-il alors possible que Chloé donne une certaine somme à Paul pour qu'ils aient ensuite la même somme d'argent? Si oui, combien. Sinon, expliquer pourquoi.

2. Clara dispose de 621 cartes du jeu Majax et Arthur en a 258. Est-il possible que Clara donne un certain nombre de cartes à Arthur pour qu'ils en aient ensuite le même nombre ? Si oui combien. Sinon, expliquer pourquoi.

3. Quelles sont les différentes actions à mener pour résoudre un problème à l'aide d'une équation ?

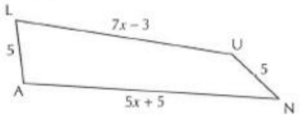
Dans un magasin :
- Emma achète 2 stylos identiques et un CD à 15 € ;
- Greg achète 6 de ces stylos et un livre à 10 €.

À la caisse, ils paient la même somme.
On se propose de trouver le prix p, en euros, de l'un de ces stylos.
a. Traduire cette situation par une équation d'inconnue p.
b. Résoudre cette équation avec la méthode vue à l'activité 5.
c. Conclure sur le prix d'un stylo acheté par Emma et Greg.

Annexe 9 – *Activité sur la mise en équation du manuel Horizon 4ème 2011 p. 113*

A Le quadrilatère LUNA

Problème 1
Trouver la valeur de x pour que le quadrilatère LUNA soit un parallélogramme.



1. Quelles conditions doivent respecter les côtés de LUNA pour qu'il soit un parallélogramme ?

2. En déduire une équation qui permet de trouver la solution du problème.

B Les billes de Lucien et Loubna

Problème 2
Lucien a 6 paquets de billes plus 42 billes. Loubna avait 9 paquets de billes mais elle a perdu 3 billes. Lucien et Loubna s'aperçoivent qu'ils ont le même nombre de billes. Les paquets de billes sont tous identiques.
Combien y-a-t-il de billes dans un paquet ?

1. Que cherche-t-on à connaître dans cet exercice ? On désigne par x ce nombre que l'on ne connaît pas.

2. Quelle phrase de l'énoncé exprime l'égalité de deux quantités ? Quelles sont ces deux quantités ? Les exprimer en fonction de x.

3. En déduire une équation qui permet de trouver la solution du problème.

C Les SMS du mois de décembre

Problème 3
Candice, Lisa et Yohan comptabilisent le nombre de SMS envoyés au mois de décembre. Candice a envoyé 2 fois plus de SMS que Lisa, et Yohan a envoyé 12 SMS de moins que Lisa. À eux 3, ils en ont envoyés 96.
Combien chacun en a-t-il envoyé ?

1. Que cherche-t-on à connaître dans cet exercice ? Combien y-a-t-il de nombres que l'on ne connaît pas ? Choisir un de ces nombres et l'appeler x.

2. Exprimer les autres nombres que l'on ne connaît pas en fonction de x.

3. Quelle phrase dans l'énoncé exprime une égalité ? En déduire une équation qui permet de trouver la solution du problème.

4. Comparer les équations obtenues dans la classe.

BILAN Donner les étapes qui permettent de mettre un problème en équation.

Annexe 10 – *Extraits de la partie « cours » des manuels Horizon 4ème 2011 p. 116 (en haut) et Phare 4ème 2011 p. 79 (en bas*

EXERCICE RÉSOLU 1

Résoudre l'équation $2x + 5 = 8x - 7$.

SOLUTION

$$2x + 5 = 8x - 7$$
$-2x$ | $-2x$
$$5 = 6x - 7$$
$+7$ | $+7$
$$12 = 6x$$
On échange les deux membres
$$6x = 12$$
$:6$ | $:6$
$$x = \frac{12}{6} = 2$$
La solution de l'équation $2x + 5 = 8x - 7$ est 2.

MÉTHODE

1 On applique la propriété P1 pour ne plus avoir d'inconnue dans un membre : ici on soustrait **$2x$** à chaque membre.

2 On applique P1 à nouveau pour isoler le terme en x dans un membre : ici on ajoute **7** à chaque membre.

3 On échange les deux membres si on le veut.

4 On multiplie ou on divise chaque membre par un même nombre : ici on divise par **6**.

5 On obtient la seule solution de l'équation.

PROPRIÉTÉ ADMISE Une égalité vraie reste vraie lorsque l'on **ajoute** (ou l'on **soustrait**) un même nombre à chacun de ses membres.

a, b et c désignent des nombres relatifs.
- Si $a = b$, alors $a + \mathbf{c} = b + \mathbf{c}$.
- Si $a = b$, alors $a - \mathbf{c} = b - \mathbf{c}$.

EXEMPLES :

- On a l'égalité : $3 = x - 2$.
On **ajoute 2** à chacun de ses membres :
$3 + \mathbf{2} = x - 2 + \mathbf{2}$
On obtient l'égalité : $5 = x$.

- On a l'égalité : $6 + x = -2$.
On **soustrait 6** à chacun de ses membres :
$6 + x - \mathbf{6} = -2 - \mathbf{6}$
On obtient l'égalité : $x = -8$.