ACTIVITÉ ….. *Découpe d'un aquarium dans une sphère*

Denise GRENIER
Institut Fourier – Université Grenoble Alpes

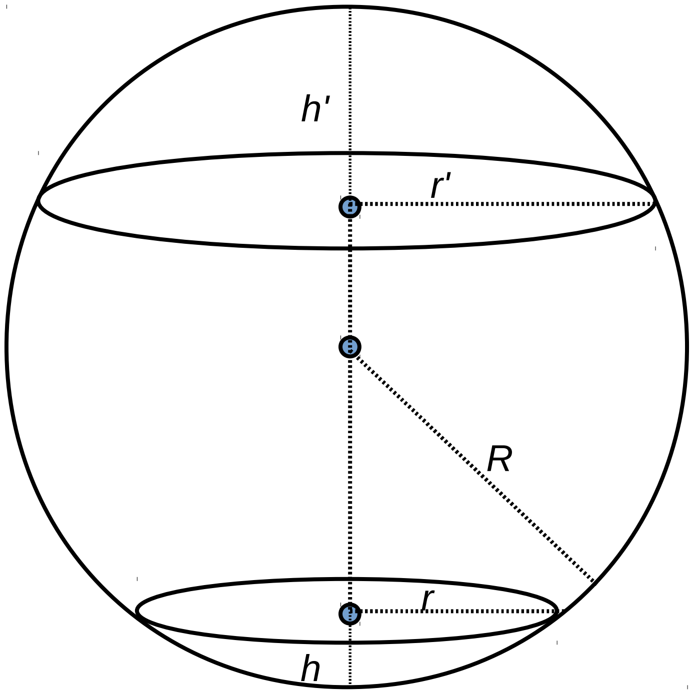
Un verrier veut fabriquer un grand aquarium (de luxe) dans une sphère creuse en verre. Il doit pour cela découper deux calottes sphériques parallèles, une petite pour la base de l'aquarium et une grande pour l'ouverture haute (il devra ensuite fondre un disque en verre pour fermer la base du récipient). Avant de découper, le verrier doit calculer, chacune des calottes sphériques, le diamètre du cercle défini par le plan de section et sa hauteur (distance entre le sommet de la sphère et le plan de section).

On note R le rayon de la sphère. Les deux calottes sphériques seront coupées à des hauteurs h et h' . On note r et r' les rayons des cercles définis par les plans de section, et d et d' leurs diamètres respectifs. La figure ci-dessous précise ces données. Dans tout le problème, on négligera l'épaisseur du verre.

Questions

(1) Écrire les relations entre h, r et R d'une part et h', r' et R d'autre part.

(2) Le maître verrier dispose d'une sphère de diamètre 50 cm. À quelle hauteur h' doit-il couper la sphère pour que l'ouverture soit un cercle de diamètre d'=48 cm ? Quel sera le diamètre du cercle de base pour que la hauteur de la calotte basse soit h =1 cm ?



(3) Question « pour aller plus loin »

Le volume d'une calotte sphérique de hauteur h, découpée dans une sphère de rayon R, et dont le cercle du plan de section est de rayon r est donné par les formules :

$$V_{cal} = \pi\times h^2 (R - h/3) = (1/2)\ \pi\times h\ (r^2+h^2/3)$$

Calculer le volume de l'aquarium d'abord avec les données de la question 2, puis dans le cas général.

Note. Si $h = R$, on retrouve le volume de la demi-sphère. Vérifiez !