LE DÉVELOPPEMENT DE L'HABILETÉ DE VISUALISATION SPATIALE EN MATHÉMATIQUES CHEZ LES ÉLÈVES ÂGÉS DE 8 À 14 ANS

Natacha DUROISIN
INAS, Université de Mons, Belgique
Laboratoire PSITEC Université Charles de gaulle France

Marc DEMEUSE
INAS, Université de Mons, Belgique

Résumé. Dans le but d'évaluer, chez les élèves, certaines habiletés spatiales dans le domaine des mathématiques, une série d'expérimentations a été réalisée à partir d'un matériel simple et concret. Cet article décrit l'une de ces expérimentations. Celle-ci porte sur une habileté spatiale difficilement acquise : la visualisation spatiale. Inspirée de travaux piagétiens peu connus, l'expérimentation met à l'épreuve cette habileté visuo-spatiale au travers d'exercices portant sur la représentation d'empreintes et de sections de solides. L'analyse statistique implicative réalisée permet de mettre en évidence des difficultés récurrentes chez les élèves et ce, de manière surprenante, indépendamment de leur âge. Les résultats de cette expérimentation permettent d'orienter le travail des enseignants de mathématiques.

Mots clés. Visualisation spatiale, habileté visuo-spatiale, géométrie, psychologie cognitive, et développementale, didactique des mathématiques.

Abstract. In order to evaluate, among students, some spatial skills in mathematics, a series of experiments has been performed from a simple and concrete material. This article describes one of these experiments. This concerns a hard-won skill space: spatial visualization. Inspired by Piaget's work little known, this experiment assesses visual-spatial skills through exercises on the representation of prints and sections of solids. Implicative statistical analysis has highlighted the recurrent difficulties in pupils and, surprisingly, regardless of their age. The results of this experiment are used to guide the work of mathematics teachers.

Key-words. Spatial visualization, visual-spatial skill, geometry, cognitive psychology, developmental psychology, didactic teaching mathematics.

Introduction

S'inscrivant dans le cadre d'une recherche plus globale qui vise à comprendre comment les enfants et adolescents appréhendent l'espace et la manière dont l'école propose de formaliser les apprentissages liés au domaine spatial, cet article a pour objectif d'effectuer un état des lieux concernant l'acquisition d'une habileté visuo-spatiale chez les élèves âgés de 8 à 14 ans.

Afin d'investiguer la compréhension qu'ont ces élèves de l'espace et d'identifier les éventuelles difficultés qu'ils éprouvent à appréhender l'espace abstrait, formalisé (c'est-à-dire, l'espace géométrique défini par un consortium de propriétés et de règles, cf. Berthelot & Salin, 1992) au départ de l'espace sensible (c'est-à-dire, de l'espace directement perceptible par les sens, cf. Chevallard & Joshua, 1991), nous avons choisi de nous intéresser à la géométrie puisqu'il s'agit d'un des aspects de formalisation de la compréhension et de la description de l'espace[1]. Plus précisément, c'est de géométries projective et euclidienne dont

[1] Alors que d'autres composantes spatiales sont également abordées dans la recherche (i.e. la géographie), cet

il sera ici question. Selon Piaget & Inhelder (1972), l'espace projectif est caractérisé par la coordination entre objets spatiaux distincts relatifs à des points de vue donnés. On parle d'espace projectif lorsque l'objet cesse d'être envisagé simplement en lui-même pour être considéré relativement à un « point de vue ». Si ce point de vue est celui de l'individu, on parle de « relation de perspective » ; si le point de vue provient d'autres individus ou objets, on parle alors de « projection ». L'espace euclidien est, lui, caractérisé par la coordination entre objets spatiaux distincts relatifs à un système de coordonnées dépendant de certains axes.

Alors que les rapports unissant la didactique à la psychologie restent, pour certains auteurs, sujet à discussions et, somme toute, problématiques, nous partageons ici les conceptions de Vergnaud (1989), Maury (2001) et Crahay (2013) selon lesquelles tout dispositif d'enseignement-apprentissage repose sur des présupposés psychologiques qu'il convient de prendre en considération. On postule également, comme d'autres auteurs l'ont fait avant nous (Duval, 1996 ; Julo, 1995 et Vergnaud, 1989), que l'étude du fonctionnement cognitif du sujet en situation est essentielle pour l'enseignement et qu'il constitue de fait une opportunité pour l'enseignant-chercheur qui souhaite élaborer ou améliorer ses pratiques pédagogiques. Comme le préconise Julo (1995), il s'avère essentiel que les problèmes mobilisés lors des expérimentations aient un intérêt du point de vue des mathématiques et qu'ils permettent de solliciter une véritable activité mathématique chez les apprenants.

L'article proposé ici, qui décrit une expérimentation, s'inscrit dans le domaine de la psychologie cognitive en proposant une approche cognitive de l'exploitation des données recueillies en contexte scolaire, dans le cadre des cours de mathématiques et plus précisément de géométrie. L'expérimentation a la particularité d'avoir été planifiée dès la troisième année primaire (le CE2, en France) jusqu'en troisième année de l'enseignement secondaire en Belgique francophone, c'est-à-dire à un moment charnière de la scolarité des apprenants, caractérisé par le passage de l'enseignement primaire au secondaire.

Alors que dans l'enseignement primaire, l'utilisation et la manipulation d'objets concrets constituent une bonne part de l'enseignement (activités portant, de manière quasi-exclusive, sur la perception, l'observation, la reconnaissance d'objets familiers, de solides, de figures planes, les déplacements d'objets, les associations ainsi que les comparaisons et classements d'objets, de figures planes…), dans l'enseignement secondaire, le recours à la pensée abstraite domine les contenus (Duroisin & Malaise, 2015 ; Duroisin & Demeuse, 2015).

1. L'habileté de visualisation spatiale : des programmes d'études aux évaluations externes

1.1 L'habileté spatiale et la visualisation

Dans la littérature, les termes de « visualisation », « orientation », « représentation » … sont considérés comme des habiletés spatiales (Münzer & Hölscher, 2011). Si Darken et Sibert (1996) considèrent que l'habileté spatiale est un « processus cognitif qui exprime comment on apprend un environnement et les relations entre les objets », Lohman indique qu'elle peut être définie comme :

> la capacité à générer, conserver, récupérer et transformer des images visuelles bien structurées. (Lohman, 1996, p. 98, trad. Libre)

article porte uniquement sur les aspects liés à la géométrie.

Le présent article porte exclusivement sur l'habileté de visualisation spatiale. Considérée comme étant un indicateur, voire un prédicteur, de succès pour l'apprentissage de multiples disciplines (Nagy-Kondor, 2014), cette habileté correspond à la capacité qu'a l'individu de se représenter les informations spatiales non verbales, d'analyser les relations entre les objets d'une configuration et de les manipuler mentalement. À cela, Barisnikov et Pizzo (2013) ajoutent que cette habileté conduit à anticiper l'apparence d'objets complexes et à effectuer des opérations mentales (rotations, transformations ou manipulations) sur des objets en deux dimensions ou trois dimensions lorsqu'ils sont visuellement perçus. Considérée par la plupart des auteurs comme une « capacité » ou une « aptitude », la visualisation spatiale est le résultat d'un apprentissage.

On remarque cependant que cet apprentissage ne fait l'objet que de rares prescriptions dans les programmes d'études (pour cette étude, ce sont les programmes de la Fédération Wallonie-Bruxelles -en Belgique francophone- qui ont été analysés). L'annexe 2 de ce présent article reprend les intitulés des programmes d'études de primaire et secondaire (Ministère de la Communauté française, 2008 ; Ministère de la Communauté française, 2000) en lien avec l'habileté « visualisation spatiale ». Alors qu'il apparaît, dans les titres, que l'habileté est travaillée, des nuances à propos de l'exercice de cette habileté doivent être apportées. À l'exception de l'intitulé « *Apprendre à anticiper mentalement la construction d'un solide à partir d'un développement* » (13-14 ans), il n'est pas ici question de « visualisation spatiale » au sens strict du terme puisqu'il n'est pas demandé aux élèves de visualiser et de manipuler mentalement des objets. En effet, l'apprentissage des transformations du plan se réalise à partir de transparents ou d'objets réels et toutes les actions sont directement observables et effectuées par la manipulation directe. Les intitulés proposés préparent donc les élèves à visualiser spatialement les transformations du plan mais l'habileté spatiale en tant que telle n'est pas exercée. En tant qu'enseignant, chercheur ou tout autre professionnel de l'éducation, il convient donc de rester attentif et de s'interroger sur le sens des intitulés présentés et des objectifs poursuivis. Des constats similaires peuvent être tirés pour la France (Ministère de l'Éducation nationale, 2008).

En pratique, comme l'indique Mithalal (2014), la résolution d'exercices de visualisation spatiale par les élèves ne s'effectue pas sans problème. Lors d'études antérieures (Duroisin, 2015), il a été montré que les exercices portant sur les empreintes posent des difficultés à plus de cinq élèves sur dix de cycle 2 (Figures 1 à 4, questions 1, 2, 3 et 4) mais aussi à près de deux élèves sur dix de 2^{e} année de l'enseignement secondaire (Figure 5, question 5). En ce qui concerne la section de solides, seuls 32% des élèves de 2^{e} année de l'enseignement secondaire parviennent à déterminer le résultat d'une section particulière dans un cube (Figure 6, question 6).

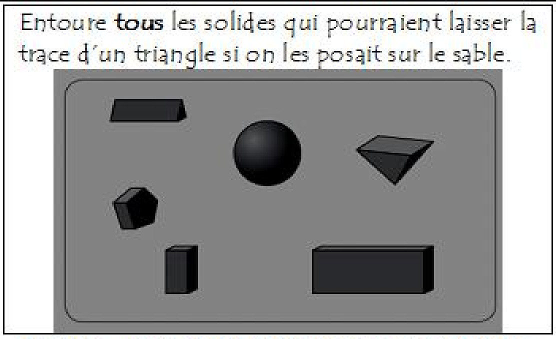


Figure 1 - Question 1 (33% de réussite parmi les élèves de cycle 2 de l'enseignement primaire)

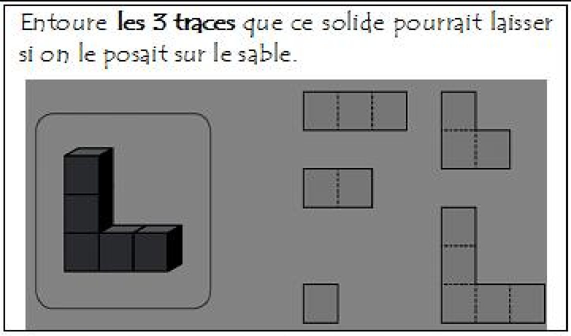


Figure 2 - Question 2 (27% de réussite parmi les élèves de cycle 2 de l'enseignement primaire)

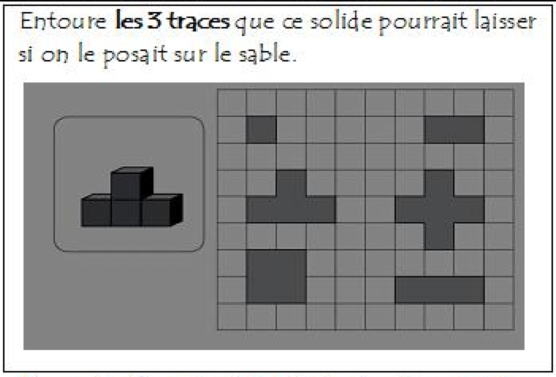


Figure 3 - Question 3 (47% de réussite parmi les élèves de cycle 2 de l'enseignement primaire)

Figure 4 - Question 4 (52% de réussite parmi les élèves de cycle 2 de l'enseignement primaire)

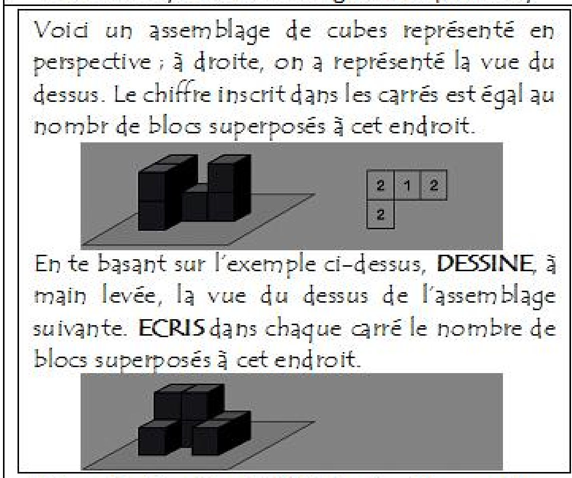


Figure 5 - Question 5 (83% de réussite parmi les élèves de 2[e] année de l'enseignement secondaire)

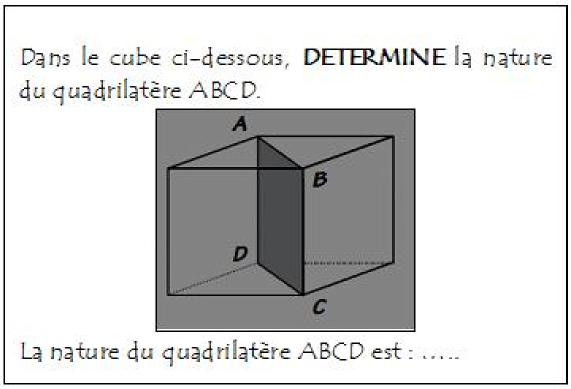


Figure 6 - Question 6 (32% de réussite parmi les élèves de 2[e] année de l'enseignement secondaire)

Figures 1 à 6*. Questions issues des Evaluations Externes Non Certificatives réalisées en Fédération Wallonie-Bruxelles (Duroisin, 2015)*

1.2. Retour sur l'expérience piagétienne

Dans leur compte-rendu d'expérience, Piaget & Inhelder (1972) décrivent les opérations de sections comme étant communes à la « géométrie des objets » et à la « géométrie des points de vue » (p. 286). En d'autres termes, ils considèrent que les exercices de sections de solides peuvent s'apparenter à la géométrie euclidienne (on parle alors de « technique euclidienne » au sens où les opérations portent sur des objets solides envisagés en eux-mêmes, en 3D, ou sur des objets dont les surfaces sont distribuées dans l'espace euclidien) et à la géométrie projective (on parle alors de « technique projective » au sens où les sections ne portent plus sur l'objet même mais sur des faisceaux de droites ou des ombres obtenus à partir des objets).

Pour notre expérience, nous privilégions la technique euclidienne de sections de solides pour deux raisons. D'une part, celle-ci apparaît être la moins artificielle et, d'autre part, elle implique, de toute façon, l'intervention de sections correspondantes à des changements de points de vue ou des projections dans la mesure où elle est accompagnée de représentations dans le plan. Les opérations de sections demandées aux enfants âgés de 4 à 12 ans portent sur plusieurs solides (le cylindre, le prisme, le parallélépipède, la sphère et le cône) et structures plus complexes (des anneaux, un cornet, une hélice…). En fonction des solides ou structures complexes considérés, des opérations de sections différentes sont demandées. Ainsi, le cylindre, le prisme, le parallélépipède et la sphère sont sectionnés transversalement (plan parallèle à une face qui sera désignée en tant que base) et longitudinalement (parallèle à la face latérale du solide). Pour le cône, quatre coupes sont demandées : une coupe transversale (parallèle à la base), une coupe perpendiculaire à la base, une coupe oblique des côtés du cône et une coupe portant sur le côté du cône et la base (dont il résulte, selon Piaget & Inhelder, une parabole). En ce qui concerne les structures complexes, seules des coupes transversales ont été demandées.

L'expérience piagétienne, réalisée individuellement avec chaque enfant, se déroule en deux temps. Dans un premier temps, un solide en pâte à modeler ainsi qu'un couteau sont présentés à l'enfant. Avant de procéder à la section, l'expérimentateur demande à l'enfant de prévoir la forme que prendra la surface de la section en la dessinant (il positionne alors le couteau de telle manière à ce que l'enfant comprenne la section qui sera réalisée). Dans un second temps, l'expérimentateur propose à l'enfant de reconnaître parmi plusieurs dessins la forme de la section.

Les résultats de l'expérience sont qualitatifs et permettent, grâce aux exemples fournis et déclarations des enfants retranscrites par l'expérimentateur, de se rendre compte des erreurs systématiques commises à des « stades » donnés. Ainsi, il apparaît que les plus jeunes enfants (âgés de 4 ans à 6,5 ans environ) ne parviennent pas à répondre correctement aux questions posées, étant donné l'indifférenciation des points de vue (l'enfant juxtapose à la fois l'image du solide coupé vu de l'extérieur à celle du solide entier vu de l'intérieur) ainsi que des actions (l'enfant n'est pas capable de différencier le mouvement de sectionnement de la section en tant que telle). Dès l'âge de 7 ans, l'enfant commence progressivement à différencier les points de vue et les actions. Après avoir dépassé le niveau des intuitions topologiques élémentaires (caractérisé par une indifférenciation des points de vue et des mouvements), c'est la représentation euclidienne des changements de position qui amène à imaginer les premières projections et, dans le même temps, ce sont les projections acquises qui permettent de différencier et de représenter des changements de position. Dans les opérations de sections, cette différenciation s'avère cruciale et son acquisition permet la résolution des exercices de sections demandés. Concrètement, avant toute différenciation, les représentations de l'enfant sont dominées par les rapports topologiques de voisinage et d'enveloppement (l'enfant représente le cylindre en un rectangle comportant, à chacune des extrémités, deux cercles adjacents ou inscrits). Les enfants un peu plus âgés représentent la section en tant que mouvement (déplacement de la lame, on parle alors d'intuition euclidienne) en dessinant une droite coupant transversalement le rectangle (l'enfant dessine d'ailleurs l'empreinte de la section transversale du cylindre comme un demi-rectangle). Les enfants ayant acquis davantage de maturité passent ensuite de l'intuition euclidienne (représentation d'une droite) à la représentation projective de la section (représentation d'une droite incurvée qui épouse la forme du solide sectionné). Enfin, vers l'âge de 8 ans, les opérations de section sont comprises et peuvent faire l'objet de représentations.

2. Questions de recherche et méthodologie

Alors que l'ensemble des exercices proposés dans le cadre des évaluations traditionnelles (qu'elles soient nationales ou internationales) porte exclusivement sur des représentations de solides (évaluations de type « papier-crayon ») et ne s'effectue jamais à partir de la présentation et de la manipulation de solides réels, une situation intermédiaire est proposée par le biais de cette expérimentation.

Après avoir observé quatre solides réels (cube, cône, boule, cylindre), les élèves effectuent plusieurs exercices de visualisation spatiale différents. Comme dans l'expérience piagétienne, ils sont questionnés sur l'anticipation de la forme que prendra la surface de section du solide (dessin de la forme de la section simulée sur le solide). À cela s'ajoutent des exercices portant sur la représentation d'empreintes de solides (dessin de l'empreinte du solide). De façon à ne pas trop s'éloigner des situations présentées dans le cadre des évaluations traditionnelles et de l'expérience piagétienne, il a été choisi de ne pas faire manipuler les solides par les élèves. C'est donc à l'enseignant qu'incombe cette tâche de démonstration et de manipulation.

Alors que les données qualitatives de l'expérimentation piagétienne rendent compte, pour certaines opérations de sections demandées, de difficultés précises d'un nombre restreint d'élèves à un âge donné, celles-ci ne permettent pas d'obtenir une vision globale du niveau de performances des élèves en fonction des solides ou des exercices de sections considérés. Menée à plus large échelle, dans une perspective développementale et effectuée de façon plus systématique (quatre empreintes demandées pour quatre solides différents), l'expérimentation permet de répondre aux trois questions suivantes :

- Y a-t-il des différences de performances en termes de scores moyens (tous exercices de visualisation spatiale confondus) en fonction de l'âge des élèves ?
- Sur la base des résultats des élèves, quelle classification hiérarchique des exercices de visualisation spatiale est-il possible de définir ?
- Compte tenu des tâches demandées, quelles sont les erreurs les plus commises par les élèves ?

2.1. Échantillon

Deux-cent-soixante-seize élèves (N = 276) âgés de 8 à 14 ans, issus de cinq écoles montoises, ont participé à cette expérimentation. Le choix des participants a été effectué sur la base de leur appartenance à un établissement scolaire dont les caractéristiques socio-économiques sont situées dans la moyenne (rangs 8 à 11 dans une distribution qui comporte 20 rangs couvrant chacun 5% de l'effectif total). Les effectifs par âge sont présentés dans le Tableau 1. Sur l'ensemble des élèves interrogés, seuls deux élèves n'ont pas remis leur copie (départ en cours d'expérimentation).

Ages	Correspondances théoriques[2]	Effectifs	Pourcentages des effectifs
8 ans	3e cycle (3e et 4e années) (enseignement fondamental)	44	16,1
9 ans		40	14,6
10 ans	4e cycle (5e et 6e années) (enseignement fondamental)	37	13,5
11 ans		36	13,1
12 ans	1ere année (enseignement secondaire)	41	15,0
13 ans	2e année (enseignement secondaire)	40	14,6
14 ans	3e année (enseignement secondaire)	36	13,1
Total		**274**	**100,0**

***Tableau 1**. Répartition du nombre d'élèves en fonction de leur âge*

2.2. Descriptions du matériel et des tâches demandées

Pour l'expérimentation, quatre solides différents, présentés en trois dimensions, sont utilisés. Le premier solide est un cube de couleur rouge, de dimensions 40 cm x 40 cm. Le deuxième solide est un cône de couleur verte dont le diamètre de la base mesure 40 cm et la hauteur 40 cm. Le troisième solide est une boule de couleur bleue, d'un diamètre de 40 cm. Le quatrième solide est un cylindre de couleur orange dont les dimensions sont de 40 cm pour la hauteur et 40 cm de diamètre. L'objet tranchant utilisé pour simuler la section est une large lame de 50 cm de longueur.

Pour la retranscription des réponses, les élèves disposent de quatre feuilles de papier en format paysage A4 et de deux feuilles de brouillon. Chacune des feuilles contient les emplacements spécifiques pour les réponses aux questions demandées.

Réalisée en session collective, l'expérimentation est précédée d'exercices de compréhension afin que tous les élèves comprennent bien ce qu'est une « empreinte » et ce qu'il faut entendre par « coupe »[3] (ou section) du solide. À ce moment, l'expérimentateur s'assure également du fait que les élèves comprennent que le résultat attendu sur la feuille de papier est le dessin de la forme de la surface de la coupe. Pour ce faire, trois exercices préalables sont réalisés. Afin de faire (re)découvrir la notion d'empreinte, l'expérimentateur donne l'exemple des empreintes de la main et du pied (main et pied, trempés dans de l'encre, donnent des empreintes différentes). Pour faire comprendre la notion de « section », de « surface » et le résultat attendu de chaque section, l'expérimentateur fournit un exemple en prenant pour objet une bouteille. Sans montrer le résultat de la section (cette fois-ci réellement effectuée sur l'objet), l'expérimentateur explique qu'il s'agit d'imaginer la forme de la surface de la coupe effectuée. Il explique, avec des gestes, qu'il faut, par exemple, imaginer que l'on trempe dans de l'encre (petit plateau avec de l'encre) la base inférieure de la partie supérieure sectionnée (il désigne la partie en question) puis, qu'on la dépose sur une feuille de papier. L'expérimentateur ne montre pas la forme qui apparaît sur la feuille de papier. Suite à cela,

[2] Des informations complémentaires à propos du système éducatif belge francophone peuvent être trouvées via la page suivante du site Eurydice : https://webgate.ec.europa.eu/fpfis/mwikis/eurydice/index.php/Belgique-Communaute-francaise:Aper%C3%A7u_des_principaux_%C3%A9l%C3%A9ments

[3] Dans le but d'être mieux compris par les élèves, le mot « section » est remplacé par « coupe ». Les deux termes sont ici utilisés sans distinction.

l'expérimentateur répond ensuite aux éventuelles questions des élèves et leur indique que des exercices identiques, avec des solides géométriques en trois dimensions, vont leur être proposés.

Une fois la séance d'exercices de compréhension terminée, l'expérimentation à proprement parler peut débuter. Rappelons que celle-ci a pour objectif d'évaluer les capacités de visualisation spatiale des élèves. Pour ce faire, des solides différents sont successivement présentés. Il est alors demandé aux élèves de dessiner les empreintes et les formes des surfaces de trois sections simulées (transversale, longitudinale ou perpendiculaire et oblique) sur chacun des solides.

Concrètement, l'expérimentateur présente le cube aux élèves et le manipule au-devant de la classe (l'expérimentateur veille à ne pas montrer aux élèves la « base » du cube). Ceux-ci disposent de quelques secondes pour l'observer. L'expérimentateur donne ensuite la consigne suivante : « Voici un cube. Imaginez que je trempe la base de ce cube dans de l'encre et qu'ensuite je le dépose sur une feuille blanche. Quelle sera l'empreinte laissée par ce cube ? ». L'expérimentateur demande alors aux élèves de dessiner, à main levée, l'empreinte laissée par le cube dans l'encadré adéquat sur la feuille de papier et de préciser le nom de la forme qui a été dessinée.

L'expérimentateur explique aux élèves qu'un autre exercice leur est à présent demandé. En reprenant le cube, l'expérimentateur donne la consigne suivante : « Je reprends le cube. Imaginez à présent que je prends ce grand couteau et que je coupe le cube comme ceci (il pose la lame sur une des faces du cube, parallèlement à sa « base »). Quelle sera la forme de la surface de la coupe si je coupe le cube comme ceci? » Les élèves dessinent de nouveau la forme et précisent son nom.

L'expérimentateur enchaîne ensuite avec un autre exercice. En reprenant le même cube, l'expérimentateur donne la consigne suivante : « C'est encore un nouvel exercice à présent. Il s'agit toujours de travailler sur le cube mais c'est une autre coupe qui va être demandée. Imaginez à présent que je reprenne mon grand couteau et que je coupe le cube comme ceci (il pose la lame de biais (en oblique) au milieu de la face supérieure (du dessus) du cube, perpendiculairement à sa base et parallèlement à ses faces latérales). Quelle sera la forme de la surface de la coupe si je coupe le cube comme ceci ? ». Comme pour les autres exercices, les élèves dessinent la forme et précise son nom.

Enfin, un dernier exercice effectué avec le cube est demandé aux élèves. L'expérimentateur reprend le cube et donne la consigne suivante : « Il s'agit du dernier exercice que vous allez faire avec le cube. Une autre coupe vous est demandée. Imaginez à présent que je reprenne ma grande lame et que je coupe le cube comme ceci (il pose la lame au départ de la partie supérieure d'une face (avant le sommet) du cube et indique aux élèves que la lame rejoindra l'arête opposée en biais, c'est-à-dire la partie inférieure de la face latérale opposée). Quelle sera la forme de la surface de la coupe si je coupe le cube comme ceci ? ». Les élèves dessinent la forme et précise son nom.

L'expérimentateur procède ensuite à la même série d'exercices pour le cône, la boule et le cylindre. Au total, l'expérimentation dure une trentaine de minutes et 16 exercices sont réalisés. Ces 16 exercices sont décrits dans le Tableau 2, présenté ci-dessous.

Solides	Empreinte ou coupes/sections	Description de l'exercice demandé	Réponses attendues
Cube (hexaèdre régulier)	Empreinte	L'empreinte demandée constitue la « base » du cube	Carré
	Coupe transversale	La section simulée est une coupe parallèle à la « base » du cube (parallèle à une face du cube)	Carré
	Coupe longitudinale	La section simulée est une coupe parallèle à une face latérale du cube	Carré
	Coupe oblique	La section simulée est une coupe oblique des faces latérales du cube	Rectangle
Cône (cône de révolution ou cône circulaire droit)	Empreinte	L'empreinte demandée constitue la base du cône	Disque
	Coupe transversale	La section simulée est une coupe parallèle à la base du cône	Disque (plus petit que le précédent)
	Coupe perpendiculaire (ou, pour simplifier les propos, longitudinale)	La section simulée est une coupe perpendiculaire à la base du cône	Triangle
	Coupe oblique	La section simulée est une coupe oblique du cône	Ellipse (ou ovale)
Boule	Empreinte	L'empreinte demandée correspond à la trace laissée par la boule quand elle est posée	Point ou petit disque
	Coupe transversale	La section simulée est une coupe parallèle effectuée sur la boule	Disque
	Coupe perpendiculaire (ou, pour simplifier les propos, longitudinale)	La section simulée est une coupe perpendiculaire effectuée sur la boule	Disque
	Coupe oblique	La section simulée est une coupe oblique de la boule	Disque
Cylindre (cyl. de révolution / cyl. droit)	Empreinte	L'empreinte demandée constitue la base du cylindre	Disque
	Coupe transversale	La section simulée est une coupe parallèle à la base du cylindre	Disque
	Coupe longitudinale	La section simulée est une coupe perpendiculaire à la base	Rectangle
	Coupe oblique	La section simulée est une coupe oblique sur la face latérale du cylindre	Ellipse (ou ovale)

Tableau 2*. Description des exercices de visualisation spatiale demandés et des réponses attendues*

2.3. Recueil et analyses des données

Par élève, 16 réponses sont donc attendues (Tableau 2). Ces réponses consistent en la représentation (dessins de formes) des empreintes laissées par les quatre solides quand ceux-ci sont posés sur le sol (on parlera alors d'« empreinte sans coupe ») et des empreintes obtenues suite à la section simulée de chacun des quatre solides (on parlera alors d'« empreinte après coupe transversale », d'« empreinte après coupe longitudinale » ou d'« empreinte après coupe oblique »).

Les réponses, de chacun des élèves, sont encodées manuellement dans le logiciel SPSS (celui-ci est utilisé pour le traitement statistique des données). Chacune des empreintes (empreintes sans coupe et empreintes après coupes) représentées est alors rattachée à une catégorie de réponses (bonne réponse ou réponse erronée/absence de réponse). Les réponses erronées ont également été codées en fonction du type d'erreur commis.

À chaque exercice réalisé (16 exercices au total), l'élève obtient un score dichotomisé (échec = 0 ou réussite = 1). Sur la base de ces scores, des taux de réussite (scores moyens, en %) ont été calculés. La partie « Résultats » porte sur l'utilisation des trois scores moyens suivants :

– *Scores moyens* (%) reprenant les pourcentages de réussite des 16 exercices demandés (tous les exercices confondus) ;
– *Scores moyens des exercices d'empreintes de solides* (%) reprenant les taux de réussite pour chacune des empreintes ou des coupes considérées (tous solides confondus) ;
– *Scores moyens relatifs aux solides géométriques* (%) reprenant les taux de réussite pour chacun des solides considérés (toutes coupes confondues).

3. Résultats

3.1. Y a-t-il des différences de performances en termes de scores moyens en fonction de l'âge des élèves ?

Dans cette section, nous nous interrogeons sur l'existence de différences de scores moyens en fonction de l'âge des élèves. Les scores moyens présentés portent ici sur toutes les empreintes et tous les solides. Un seul score moyen (en %) est donc attribué à chacun des élèves. Les scores moyens calculés pour chaque âge permettent de rendre compte d'une amélioration globale en fonction des âges des élèves. Le score moyen à l'âge de 8 ans est de 37,8% et de 45,6% à l'âge de 9 ans. À l'âge de 10 ans, ce score moyen diminue légèrement puisqu'il est de 44,3%. Il augmente ensuite progressivement (49,6% à l'âge de 11 ans, 53,7% à l'âge de 12 ans, 61,9% à l'âge de 13 ans) jusqu'à atteindre les 66,7% à l'âge de 14 ans.[4]

Alors que l'analyse de variance effectuée montre qu'il existe des différences entre les groupes d'âges, celle-ci ne précise pas où se trouvent ces différences. Pour situer ces dernières, un test post hoc de Games-Howell a été réalisé. Il en résulte qu'il n'existe aucune différence significative de performances entre le groupe d'élèves âgés de 8 ans et les groupes d'élèves âgés de 9 ans, 10 ans et 11 ans ($p > .05$). Il révèle cependant que les performances des élèves âgés de 8 ans sont significativement plus faibles que les élèves issus des groupes d'âges de 13 ans et 14 ans ($p = .000$). En ce qui concerne les élèves âgés de 8 ans et ceux de 12 ans, on remarque des différences de performances à la limite de la significativité ($p = .064$). Pour ce qui est du groupe d'élèves âgés de 9 ans, le post hoc test de Games-Howell montre qu'il n'existe aucune différence significative de performances avec les groupes d'élèves âgés de 10 ans, 11 ans et 12 ans ($p > .05$). Le post hoc test révèle par contre des différences significatives entre les élèves âgés de 9 ans et ceux âgés de 13 ans ($p = .023$) et 14 ans ($p = .002$). En ce qui concerne le groupe d'élèves âgés de 10 ans, il n'existe aucune différence significative de performances avec le groupe d'élèves âgés de 11 ans ($p = .985$) et 12 ans ($p = .774$). Par contre, les performances des élèves âgés de 10 ans sont significativement plus faibles que les élèves issus des groupes d'âges de 13 ans ($p = .034$) et 14 ans ($p = .005$). Pour le groupe d'élèves âgés de 11 ans, les différences de performances avec les autres groupes d'élèves plus âgés sont toutes en dessous du seuil de significativité ($p > .05$). Le post hoc permet toutefois de remarquer des différences de performances à la limite de la significativité ($p = .055$) pour les élèves âgés de 11 ans et 14 ans. Enfin, le post hoc test de Games-Howell montre qu'il n'existe aucune différence significative de performances entre les groupes d'élèves âgés de 12 ans, 13 ans et 14 ans ($p > .05$).

[4] Les détails concernant les statistiques inférentielles réalisées sont disponibles en Annexe 1.

3.2. Quelle classification hiérarchique des exercices de visualisation spatiale est-il possible de définir ? Utilisation de la statistique implicative

Étant donné le nombre restreint d'élèves composant chacune des tranches d'âges, les analyses proposées dans cette section sont réalisées sur l'ensemble des élèves, quelle que soit leur appartenance à une classe d'âge donnée. Il est à noter que les données ne sont pas normalement distribuées et ne permettent pas d'effectuer des analyses de régressions.

Alors que l'utilisation de la statistique inférentielle a permis d'apprécier, dans la section précédente, les différences de performances en termes de scores moyens en fonction de l'âge des élèves, il est à présent question d'étudier les relations qu'entretiennent entre eux les 16 exercices proposés. Par le biais de l'analyse statistique implicative (ASI), on s'interroge ici sur l'ensemble des exercices d'empreintes et de sections en étudiant, d'une part, leurs ressemblances et, d'autre part, les implications les plus pertinentes qui les unissent.

Pour ce faire, le logiciel CHIC (Classification Hiérarchique Implicative et Cohésitive) a été utilisé. Parmi les différents traitements statistiques offerts par le logiciel, deux sont ici employés : l'arbre des similarités et le graphe implicatif.

Création d'un arbre des similarités pour présenter les ressemblances entre les exercices proposés

Dans le cadre de cette expérimentation, l'analyse des similarités révèle dans quelle mesure les différents exercices proposés sont ou non semblables. Le logiciel calcule pour chacun des couples d'exercices réussis ou ratés la similarité entre ceux-ci et agrège ensuite, selon l'importance de l'intensité de similarité, des classes composées elles-mêmes d'autres classes selon différents niveaux (Gras & Régnier, 2009). Concrètement, un arbre à plusieurs niveaux est créé. Dans le cas présent, le logiciel associe, entre eux, les exercices qui sont réussis de manière semblable par les élèves.

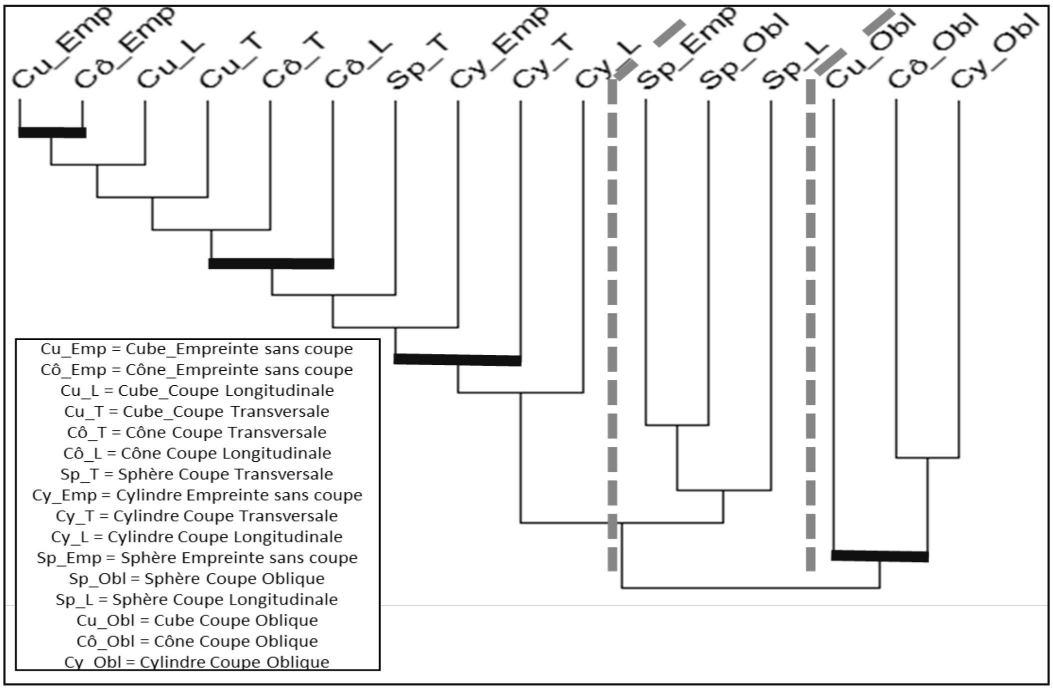


***Figure** 7. Arbre de similarités relatif aux 16 exercices de visualisation spatiale*

L'arbre de similarités, généré par le logiciel CHIC, permet d'obtenir une représentation graphique des similarités unissant les 16 exercices proposés (Figure 7). Les traits épais indiquent que le degré de similarité « est plus significatif que le précédent et le suivant » (Gras & Régnier, 2009). La représentation peut être scindée en trois groupes (séparation des groupes par des lignes bleues discontinues). Le premier groupe, sur la gauche, réunit dix exercices en neuf niveaux, le deuxième groupe, au centre, réunit trois exercices en deux niveaux et le troisième groupe réunit également trois exercices en deux niveaux. Pour le premier groupe, on remarque que les exercices Cube_Empreinte et Cône_Empreinte sont d'abord associés (premier niveau de similarité). Ainsi, qu'il s'agisse de l'empreinte du Cube ou du Cône, ces exercices sont aussi bien réussis l'un que l'autre par les élèves. L'autre exercice étant réussi de façon semblable aux deux précédemment cités est le Cube_Coupe Longitudinale (deuxième niveau), s'en suit le Cube_Coupe Transversale (troisième niveau). Il apparaît ainsi que les exercices portant sur le Cube (à l'exception du Cube_coupe Oblique) sont réussis de manière semblable. Proche des performances du Cube_Coupe Transversale, l'exercice Cône_Coupe Transversale y est agrégé (quatrième niveau). Le Cône_Coupe Longitudinale est lui-même rattaché à la classe précédente (cinquième niveau). On peut donc dire que les exercices relatifs au Cube et au Cône (quelles que soient les empreintes ou sections demandées) se ressemblent le plus du point de vue des performances des élèves. Réussi de façon semblable à l'exercice Cône_Coupe Longitudinale, l'exercice Boule_Coupe Transversale lui est associé (sixième niveau). Les exercices portant sur le Cylindre sont globalement réussis de façon similaire par les élèves (septième au neuvième niveau). Concernant le deuxième groupe, on remarque que les trois exercices relatifs à la Boule ((Boule_Empreinte, Boule_coupe Oblique), Boule_coupe Longitudinale) entretiennent, entre eux, des liens de similarités. Enfin, dans le troisième groupe, sont rassemblés trois des quatre exercices portant sur les coupes en oblique (Cône_coupe Oblique, Cylindre_coupe Oblique), Cube_coupe Oblique).

En résumé, il apparaît donc que les exercices à avoir été les plus réussis concernent les Empreintes (toutes les Empreintes, exceptée celle de la boule), les coupes transversales (T) et les coupes longitudinales (L, exceptée celle de la boule). Les exercices les moins réussis concernent les coupes obliques du cube, du cône et du cylindre.

Le graphe implicatif : classification hiérarchique des exercices en visualisation spatiale

Dans cette section, il est question d'envisager l'expérimentation réalisée comme une épreuve psychométrique, composée de 16 exercices, dont on cherche à déterminer les qualités psychométriques. L'indice de fiabilité, permettant d'apprécier la cohérence interne de l'échelle considérée, est l'alpha de Cronbach. Dépassant le seuil minimum requis de .70, cet indice a ici une valeur très élevée (α = .894). D'une part, cela signifie que l'ensemble des éléments constituant l'expérimentation est très consistant ou homogène et, d'autre part, cela permet de s'assurer que les exercices mesurent le « vrai score » de l'individu (diminuant, de fait, l'erreur de mesure qui fait varier le score global d'une mesure à une autre prise dans le temps). Fort de ce résultat, on peut raisonnablement suggérer, en synthèse, une classification hiérarchique des exercices de visualisation spatiale proposés.

Pour parvenir à déterminer cette typologie, le second traitement réalisé grâce au logiciel CHIC est la construction d'un graphe implicatif. À visée prédictive, l'utilisation de l'ASI amène ici à une représentation modélisée sous la forme d'un graphe qui met en évidence, par la mesure (en référence au seuil d'implication utilisé), l'ensemble des relations de quasiimplication qui existe entre les couples d'exercices. Les relations implicatives entre deux exercices (exercices *a* et *b*) sont du type « si on observe *a* alors on a aussi tendance à observer *b*, et ceci de manière statistiquement significative » ou, en d'autres termes, « si *a* alors presque *b* » (Gras & Régnier, 2009). Dans le cadre de cette expérimentation, la relation entre les exercices proposés se traduit par : « si l'exercice *a* est maîtrisé alors il y a de fortes chances que l'exercice *b* le soit également ».

La lecture du graphe implicatif, présenté en Figure 8, permet de visualiser les liens qui existent entre les différents exercices proposés lors de l'expérimentation. Ces liens sont de forte intensité d'implication (p = .99 et p = .98). Il en ressort que la maitrise de l'exercice Cube_Coupe Oblique implique la maîtrise de l'exercice Boule_Coupe Longitudinale qui, lui-même, implique la maitrise de l'exercice Boule_Empreinte. Parallèlement à cela, l'exercice Cylindre_Coupe Oblique implique la maitrise de Cône_Coupe Oblique, qui implique lui-même la maitrise de l'exercice Boule_Empreinte. La maitrise de l'exercice Boule_Coupe Longitudinale ainsi que la maitrise de l'exercice Cône_Obl impliquent donc, toutes deux, la maitrise de l'exercice Boule_Empreinte. La maîtrise de ce dernier exercice implique, quant à lui, la maitrise de l'exercice Cône_Coupe Transversale et de l'exercice Boule_Coupe Oblique et ces deux derniers exercices impliquent la maitrise de Boule_Coupe Transversale. L'exercice Boule_Coupe Transversale, lui, implique la maitrise de l'exercice Cône_Coupe Longitudinale, qui implique la maitrise de l'exercice Cube_Coupe Transversale. Il en va ainsi pour les exercices restants, l'un impliquant l'autre avec une forte intensité d'implication (p = .99).

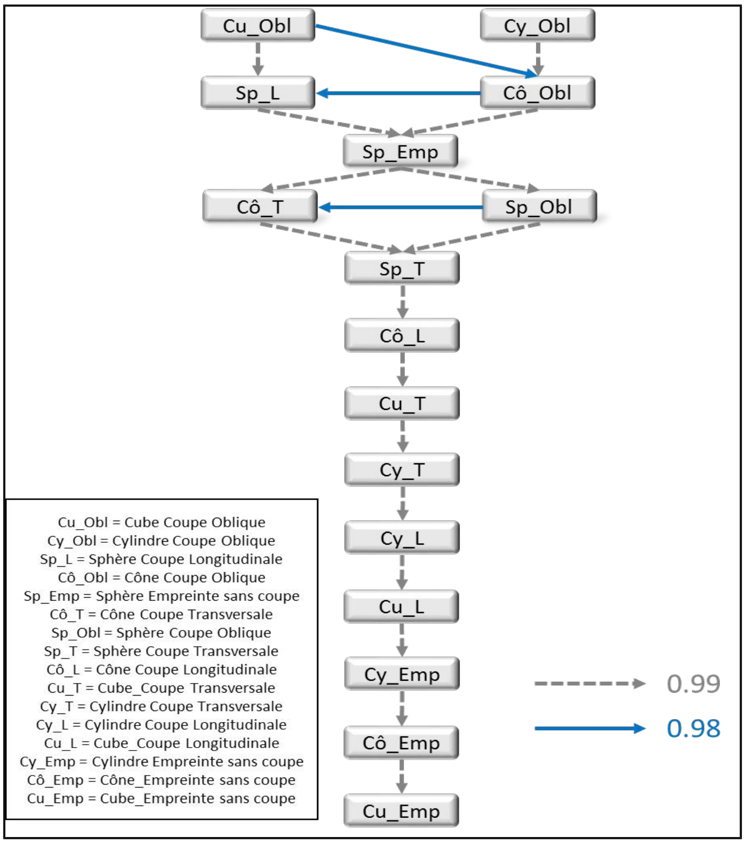


Figure 8. *Graphe implicatif au seuil 0,98 relatif aux exercices de visualisation spatiale proposés*

En procédant à la lecture ascendante de cette représentation implicative, on peut donc remarquer que la maîtrise des empreintes du cube semble précéder celle des empreintes des autres solides, comme l'exercice relatif au cône est précurseur de l'exercice relatif au cylindre. Ainsi, il apparaît que les exercices de représentation d'empreintes du cube et du cône doivent être maîtrisés par les élèves afin que ces derniers puissent parvenir à résoudre les autres exercices. Il en va ainsi pour les exercices qui concernent le Cube_Coupe Oblique et le Cylindre_Coupe Oblique. Avec une marge d'erreur minime, il est donc possible d'affirmer que si l'élève parvient à maîtriser la représentation de la section oblique d'un cube, alors, il y a de fortes chances de maîtriser la représentation de l'ensemble des sections demandées.

3.3. Quelles sont les erreurs principalement commises en fonction de l'âge ?

Après avoir décrit les performances en termes de scores moyens, un intérêt est porté aux erreurs-types commises par les élèves pour chacun des exercices demandés (Tableau 3). Globalement, deux constats peuvent être dégagés. D'une part, les erreurs commises sont souvent les mêmes quel que soit l'âge des apprenants[5]. D'autre part, les élèves ne prennent pas systématiquement en compte la 3D et considèrent le tracé simulé de la coupe sur une des faces du solide pour produire la forme 2D associée.

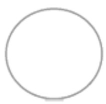
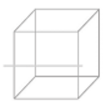
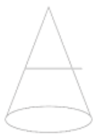
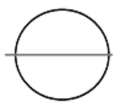
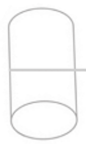
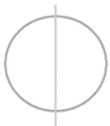
Empreintes et coupes demandées	Erreurs principales commises	Empreintes et coupes demandées	Erreurs principales commises	Empreintes et coupes demandées	Erreurs principales commises	Empreintes et coupes demandées	Erreurs principales commises
1)Empreinte 	-Rectangle -Ligne	5)Empreinte 	-Triangle isocèle -Arc de cercle	9)Empreinte 	-Disque -Demi-disque	13)Empreinte 	-Arc de cercle
2)Coupe Transversale 	-Rectangle reposant sur sa longueur	6)Coupe Transversale 	-Disque de même diamètre que le précédent -Arc de cercle	10)Coupe Transversale 	-Demi-disque	14)Coupe Transversale 	-Ligne -Rectangle (non-achevé)
3)Coupe Longitudinale 	-Rectangle reposant sur sa largeur -Ligne verticale	7)Coupe Longitudinale 	-Demi-disque	11)Coupe Longitudinale 	-Demi-disque -Demi-cercle -Ligne	15)Coupe Longitudinale 	-Demi-disque
4)Coupe Oblique 	-Triangle rectangle -Ligne	8)Coupe Oblique 	-Disque -Arc de cercle	12)Coupe Oblique 	-Demi-cercle -Arc de cercle -Ligne oblique	16)Coupe Oblique 	-Disque -Demi-disque

Tableau 3*. Tableau reprenant les principales erreurs commises*

Modalité de lecture : Au premier exercice (1) (empreinte laissée par un cube), les élèves n'ayant pas donné la bonne réponse ont représenté un rectangle ou tracé une ligne.

[5] Une analyse plus détaillée de ces résultats est présentée dans notre thèse (Duroisin, 2015).

Pour la coupe transversale du cube, la majorité des erreurs consiste en la représentation d'un rectangle reposant sur sa longueur. Près de 25% des élèves âgés de 9 ans, 10 ans, 11 ans et 12 ans commettent cette erreur. Pour la coupe longitudinale du cube, l'erreur principalement commise par les élèves est de représenter un rectangle reposant sur sa largeur. La majorité des erreurs commises pour la représentation de la surface de l'empreinte après une coupe oblique dans le cube est la représentation d'un triangle rectangle (Tableau 4).

Solide	Exercices	8 ans	9 ans	10 ans	11 ans	12 ans	13 ans	14 ans
Cube	Empreinte	Aucune erreur	(2.5%)	(2.7%)	Aucune erreur	(4.9%)	Aucune erreur	Aucune erreur
	Coupe Transversale	(6.8%)	(22.5%)	(24.3%)	(22.2%)	(21.9%)	(7.5%)	(11.2%)
	Coupe Longitudinale	(9.1%)	(10%)	(16.2%)	(22.2%)	(12.2%)	(5%)	(11.1%)
	Coupe Oblique	(45.4%)	(25%)	(32.4%)	(50%)	(29.3%)	(45%)	(22.2%)

Tableau 4*. Illustrations des principales erreurs commises par les élèves en ce qui concerne le cube*

En ce qui concerne la représentation de l'empreinte sans coupe du cône, l'erreur principalement commise par les élèves âgés de 8 ans est la représentation d'un triangle isocèle. Les élèves plus âgés représentent, quant à eux, un arc de cercle ou un demi-cercle (c'est-à-dire, des lignes ouvertes). Pour la simulation de la coupe transversale dans le cône, la majorité des élèves dessinent un disque (c'est-à-dire, une ligne fermée), ce qui est une réponse correcte *a priori* ; cependant, ils ne représentent pas ce disque avec un diamètre plus petit que celui dessiné à l'exercice précédent. Pour la coupe longitudinale du cône, l'erreur principale commise est la représentation d'un demi-disque et ce, quel que soit l'âge des apprenants. Enfin, pour la coupe oblique simulée dans le cône, l'erreur des élèves âgés de 9 à 14 ans a consisté en la représentation d'un disque ou, pour les élèves âgés de 8 ans, d'un arc de cercle.

En ce qui concerne les exercices réalisés à partir de la présentation de la boule, les erreurs commises sont des plus surprenantes. Quel que soit leur âge, les élèves représentent un disque ou un demi-disque pour désigner l'empreinte de la boule. Lorsqu'il est demandé de représenter la surface laissée par l'empreinte de la boule après une coupe transversale, longitudinale ou oblique, les résultats sont tout aussi interpellants. La forte majorité des élèves qui ne parviennent pas à donner la réponse attendue représentent un demi-disque. Seule la position de ce demi-disque change en fonction de la coupe demandée (Tableau 5). Pour l'empreinte laissée par le cylindre, la majorité des réponses erronées recueillies consiste en la représentation d'un arc de cercle. Pour la représentation de l'empreinte après la coupe transversale, on remarque que les élèves ont représenté soit une ligne (segment de droite) ou la forme d'un rectangle. En ce qui concerne la coupe longitudinale, les élèves ayant mal représenté l'empreinte ont majoritairement opté pour la représentation d'un demi-disque.
Enfin, pour la coupe oblique dans le cylindre, une part importante des réponses erronées a consisté en la représentation d'un disque.

Solide	Exercices	8 ans	9 ans	10 ans	11 ans	12 ans	13 ans	14 ans
Boule	Empreinte	(56.8%)	(35%)	(32.4%)	(36.1%)	(26.8%)	(47.5%)	(30.6%)
	Coupe Transversale	(29.5%)	(20%)	(21.6%)	(25%)	(19.5%)	(5%)	(5.6%)
	Coupe Longitudinale	(43.7%)	(25%)	(16.2%)	(36.1%)	(26.8%)	(40%)	(36.1%)
	Coupe Oblique	(44.4%)	(20%)	(45.9%)	(47.2%)	(26.8%)	(47.5%)	(25%)

Tableau 5. *Illustrations des principales erreurs commises par les élèves en ce qui concerne la boule*

3.4. Discussion

Afin d'évaluer, dans une perspective développementale, la capacité de l'élève à déterminer les traces laissées par une face de solides et sa capacité à procéder à la découpe mentale d'un solide pour en déduire la forme de la section, l'expérimentation menée reposait sur la réalisation de seize exercices de visualisation spatiale. Tenant compte des découvertes piagétiennes, l'expérimentation a été proposée aux enfants à partir de 8 ans. C'est, en effet, à cet âge que les enfants sont à même de comprendre les opérations de sections et de les représenter (Piaget & Inhelder, 1972).

Au terme de l'expérimentation et des analyses effectuées, on peut tout d'abord affirmer que les exercices proposés posent problème à un nombre important d'élèves, quel que soit leur âge. Ainsi, les performances en termes de scores moyens calculés (tous exercices confondus) ont permis de remarquer que plus de cinq élèves de 8 ans sur dix ne parviennent pas à réaliser les exercices demandés. À 14 ans, ces exercices posent encore des difficultés à plus de trois élèves sur dix. On peut donc affirmer que les lacunes des élèves en ce qui concerne l'acquisition de l'habileté de visualisation restent importantes et ce, durant la majeure partie de la scolarité obligatoire.

En ce qui concerne les différences de performances selon l'âge des élèves, il a été montré que, globalement, les performances en termes de scores moyens progressent en fonction de l'âge. Les post hoc de Games-Howell ont, quant à eux, permis de situer à quels âges les différences de scores moyens peuvent être remarquées. Il en résulte que les scores moyens des élèves âgés de 8 ans, 9 ans, 10 ans, 11 ans et 12 ans ne diffèrent pas de manière significative les uns des autres et que les scores moyens des élèves âgés de 11 ans, 12 ans, 13 ans et 14 ans ne diffèrent pas non plus de manière significative entre eux. A contrario, les scores moyens des groupes d'élèves âgés de 8 ans, 9 ans et 10 ans diffèrent de manière significative des scores moyens des élèves âgés de 13 ans et 14 ans. Ces résultats, présentés à partir de scores moyens, permettent donc de remarquer que les performances des élèves plus âgés (deuxième et troisième secondaire) sont significativement meilleures que celles des élèves de primaire. Si cette évolution est attendue, force est de constater qu'elle s'effectue tardivement. Ceci peut être expliqué par le fait que les programmes d'études de l'enseignement primaire ne comportent que peu d'intitulés relatifs à l'exercice de l'habileté de visualisation spatiale (contrairement à ce que préconisent certains auteurs, cf. Mathé, 2012). Et, quand ils en contiennent, ces intitulés du programme sont rédigés de manière telle que ce n’est, en fin de compte –comme nous l’avons montré dans d’autres articles–, pas l’habileté de visualisation spatiale qui est exercée (Duroisin, 2015 ; Duroisin & Demeuse, 2015a,b ; Duroisin, Demeuse & Bohbot, 2015). On a ainsi pu remarquer, lors de l’analyse des programmes d’études, que l’enseignement de connaissances géométriques n'y est supposé s’effectuer que par le biais de manipulations concrètes. Si ces exercices de manipulations concrètes sont utiles, voire nécessaires - à condition que l’enseignant soit compétent dans la manipulation des objets utilisés (Sowell, 1989) - il n’est spécifié à aucun endroit dans les programmes d’études qu’une phase de modélisation doit être proposée aux élèves. Pourtant, celle-ci s’avère cruciale puisqu’elle amène l’apprenant à se construire une représentation synthétique des connaissances qu’il est en train d'acquérir. Dans le programme d’études de mathématiques de l’enseignement secondaire, seul un intitulé porte explicitement sur l’anticipation mentale. Si cet intitulé ne peut expliquer à lui seul la différence de performances qui existe entre les plus jeunes élèves et ceux de 13-14 ans, on peut alors supposer que ces derniers ont acquis une maturité suffisante pour parvenir à visualiser mentalement des objets dans l’espace.

Après avoir mis en évidence des différences de performances en fonction de l’âge des élèves, nous avons choisi de considérer distinctement les seize exercices de visualisation proposés, c’est-à-dire, les quatre solides ainsi que les empreintes et coupes qui leur sont associés, sans tenir compte de âges. Les analyses effectuées par le biais de la statistique implicative ont d’abord permis de mettre en évidence trois groupes d’exercices réussis de manière semblable par les élèves. Celles-ci fournissent des pistes pour l’enseignement étant donné leur proximité de niveaux de complexité. Le 1er groupe comprend les exercices relatifs au cube, au cône et au cylindre (excepté les exercices « coupes obliques » pour ces trois solides). Le 2^{e} groupe ne comporte que les exercices relatifs à la boule (exception faite de la coupe transversale de la boule). Enfin, dans le 3^{e} groupe, on retrouve les exercices relatifs aux coupes obliques. Ceux-ci sont donc réussis de la même manière par les élèves (la coupe oblique de la boule apparait dans le 2^{e} groupe).

Concernant les erreurs commises, celles-ci sont bien souvent liées à la non prise en compte de la 3D. L’enfant a plutôt tendance à représenter un volume par une image plate. Ainsi, pour la coupe en oblique du cube, les enfants considèrent le cube comme un carré coupé en deux, de façon oblique, et représentent alors un triangle rectangle, soit une partie de la face du solide directement perceptible après la coupe simulée. La connaissance des volumes n’est donc pas innée et est le résultat d’un apprentissage. L’analyse des erreurs commises a également permis de remarquer que les élèves commettent globalement les mêmes erreurs quelle que soit leur âge. Ces erreurs peuvent être considérées comme des conceptions préalables erronées, c’est-à-dire comme de fausses connaissances que l’élève mobilise de manière spontanée pour répondre à une question ou résoudre un problème. Le plus souvent installées avant tout apprentissage, ces conceptions sont « les premiers liens que l’apprenant peut avoir avec les connaissances nouvelles qu’on cherche à lui faire acquérir » et sont donc à l’origine d’« une grille de lecture et de prévision du monde » (Giordan & De Vecchi, 1994). Souvent, elles constituent un solide point d’attache et résistent aux changements (Treagust & Duit, 2008) puisqu’elles s’ancrent dans une expérience personnelle avec des années de confirmation. Compte-tenu des erreurs commises par les élèves, de leur récurrence au travers des âges et de leur importance (en termes de pourcentages d’erreurs commises), il parait nécessaire que l’enseignant puisse en avoir conscience et mette l’accent sur leur apparition comme sur leur transformation.

Conclusion

Contrairement aux évaluations traditionnelles qui sont réalisées dans les classes, l'expérimentation décrite ici avait pour but de proposer des exercices de visualisation spatiale en présentant aux élèves de réels solides en 3 dimensions. Concernant les types d'exercices proposés, en plus d'interroger les élèves sur les sections de solides comme l'ont fait Piaget & Inhelder (1972), il a été choisi de les questionner sur les empreintes de solides non sectionnés, en portant une attention particulière au type de solide considéré (cube, cône, boule et cylindre).

Cette expérimentation a permis de mettre en évidence des lacunes ciblées chez les élèves en ce qui concerne l'habileté de visualisation spatiale. Il a été démontré que certains exercices de visualisation étaient plus simples que d'autres et que les difficultés n'étaient pas toujours là où on pouvait les attendre. Si l'on pouvait envisager de moins bons résultats pour les élèves âgés de 8 ans, on a pu s'étonner de la faiblesse de ceux obtenus par les élèves âgés de 13 ans et 14 ans. Dans sa pratique, l'enseignant de mathématiques doit ainsi être conscient que la représentation d'une empreinte d'un solide peut encore poser des difficultés aux élèves plus âgés (cf. empreinte d'une boule). Sans prise en considération de cette réalité, comment pourrait-il réellement faire comprendre à l'élève une notion requérant de tels pré-requis ? En plus de cela, il semble que les élèves se fient davantage aux connaissances conventionnelles qu'ils possèdent du solide (même si, dans ce cas-ci, ces connaissances sont fausses) plutôt qu'aux informations qu'ils peuvent retirer de l'observation directe de ce dernier. Outre les difficultés relatives au passage vers l'abstraction, on remarque donc que ce qui est vu par les élèves ne s'impose pas forcément à eux. La fragilité des représentations ainsi que le caractère récurrent des erreurs commises, quel que soit leur âge, constituent des preuves que l'observation n'est pas suffisamment utilisée par les élèves.

Les réponses recueillies permettent également de remarquer que la manière dont les élèves prennent en compte la 3D n'est pas correcte. En effet, il semble que l'appréhension de la 3D est incomplète ou en cours d'acquisition. Pour plusieurs des exercices proposés, de nombreux élèves basent leur réflexion sur la forme (le carré, par exemple) et non sur le solide présenté (le cube, dans ce cas-ci). Exit les difficultés inhérentes à la prise en compte du changement de perspectives et du caractère tri-dimensionnel de l'espace : certains élèves réalisent les exercices demandés en ne prenant pas systématiquement et correctement en considération l'axe z, relatif à la profondeur.

Alors que l'habileté de visualisation spatiale est considérée comme étant un indicateur de succès pour l'apprentissage d'une variété de domaines académiques, techniques et professionnels (Nagy-Kondor, 2014), il parait nécessaire de travailler cette habileté dès la troisième année de l'enseignement primaire en faisant émerger et en faisant évoluer les conceptions préalables erronées des élèves par un travail comprenant une phase d'observation, de manipulation et de modélisation.

Références

BERTHELOT, R. & SALIN, MH. (1992). *L'enseignement de l'espace et de la géométrie dans la scolarité obligatoire*. Thèse de doctorat en Didactique des mathématiques. Université de Bordeaux I.

En ligne http://tel.archivesouvertes.fr/docs/00/41/40/65/PDF/these_Berthelot_Salin.pdf.

BARISNIKOV, K. & PIZZO, R. (2013). L'examen des compétences visuo-spatiales. In Nel, M.-P., Bil (Eds.), *Neuropsychologique de l'enfant* (chapitre 6). Bruxelles : Mardaga.

CHEVALLARD, Y. & JOSHUA, M.-A. (1991). *La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné*. Grenoble : La pensée sauvage.

CRAHAY, M. (2013). Nécessité et insuffisance d'une psychologie de l'apprentissage pour enseigner les mathématiques. *Education & Formation*. N°e-298-01, pp. 11-22.

DARKEN, R. & SIBERT, J. (1996). Navigating Large Virtual Spaces. *Int. J. of Human-Computer Interaction, **8**(1)*, 49-72.

DUROISIN, N. (2015). *Quelle place pour les apprentissages spatiaux à l'école ? Etude expérimentale du développement des compétences spatiales des élèves âgés de 6 à 15 ans*. Thèse de doctorat en Sciences psychologiques et de l'éducation. Université de Mons. En ligne https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-01152392/document.

DUROISIN, N & DEMEUSE, M. (2015a). What Role for Developmental Theories in Mathematics Study Programmes in French speaking Belgium? An Analysis of the Geometry Curriculum's Aspects, Framed by Van Hiele's Model. *Cogent Education 'Curriculum & Teaching Studies'*, ***2**(1)*, 1-15. En ligne http://www.tandfonline.com/doi/pdf/10.1080/2331186X.2015.1049846?needAccess=true.

DUROISIN, N & DEMEUSE, M. (2015b). Impact of the Spatial Structuring of Virtual Towns on the Navigation Strategies of Children Aged 6 to 15 Years Old. *PsychNology Journal*, **13***(1)*, 75 – 99.

DUROISIN, N. & MALAISE, S. (2015). *Mise à l'épreuve de situations scolaires visant à développer le processus d'abstraction chez les élèves âgés de 8 à 14 ans*. Rapport de recherche. Université de Mons.

DUROISIN, N., DEMEUSE, M., BOHBOT VD. (2016). Apprendre l'espace à l'école. *Cahiers Pédagogiques « Neurosciences et pédagogie »*, 527, 48-49.

DUVAL R. (1996). - Quel cognitif retenir en didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, **76-3**, p. 349-380.

JULO, J. (1995). *Représentation des problèmes et réussite en mathématiques. Un apport de la psychologie cognitive à l'enseignement*. Rennes : PUR.

GIORDAN, A. & DE VECCHI, G. (1994). *Les origines du savoir : Des conceptions des apprenants aux concepts scientifiques*. Paris : Delachaux et Niestlé.

GRAS, R. & REGNIER, J. (2009). Fondements théoriques de l'analyse statistique implicative. In R. Gras (Ed.), *Analyse statistique implicative. Une méthode d'analyse pour la recherche de causalités* (17-51). Toulouse : Cépaduès.

HOWELL, D., YZERBYT, V., & BESTGEN, Y. (2008). *Méthodes statistiques en sciences humaines*. Bruxelles: De Boeck.

LOHMAN, D. (1996). Spatial Ability. In I. Dennis & P. Tapsfield (Eds.), *Human Abilities: Their Nature and Assessment* (97–116). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

MATHE, A. - C. (2012). Jeux et enjeux de langage dans la construction de références partagées en classe de géométrie. Recherches en Didactique des Mathématiques, *Grenoble : La Pensée Sauvage, **32**(2),* 195-228.

MAURY, S. (2001). Didactique des mathématiques et psychologie cognitive : un regard comparatif sur trois approches psychologiques. *Revue française de pédagogie*, **137**, 85-93.

MINISTERE DE LA COMMUNAUTE FRANCAISE (2008). *Programme des études. Enseignement fondamental*. Volume 1. Enseignement de la communauté française, AGERS, Service général des Affaires pédagogiques, de la Recherche en Pédagogie et du Pilotage de l'Enseignement organisé par la communauté française.

MINISTERE DE LA COMMUNAUTE FRANCAISE (2000). *Programme d'études du cours de mathématiques*. 1ère année A – 2e année. Enseignement de la communauté française, AGERS, Service général des Affaires pédagogiques, de la Recherche en Pédagogie et du Pilotage de l'Enseignement organisé par la communauté française.

MINISTERE DE L'ÉDUCATION NATIONALE (2008). *Programmes du collège. Programmes de l'enseignement de mathématiques*. Bulletin officiel spécial.

MITHALAL, J. (2014). Voir dans l'espace : est-ce si simple ? *Petit x*, **96**, 51-73.

MÜNZER, S. & HÖLSCHER, C. (2011). Entwicklung und Validierung eines Fragebogens zu räumlichen Strategien. *Diagnostica*, ***57(3)***, 111-125.

NAGY-KONDOR, R. (2014). Importance of Spatial Visualization Skills in Hungary and Turkey: Comparative Studies. *Annales Mathématiques et Informatiques*, **43**, 171–181.

PIAGET, J. & INHELDER, B. (1972). *La représentation de l'espace chez l'enfant*. Paris: PUF.

SOWELL, E. (1989). Effects of Manipulative Materials in Mathematics Instruction. *J. for Res. in Math. Ed., **20**(5)*, 498-505.

TREAGUST, D. & DUIT, R. (2008). Conceptual Change. *Cultural Studies of Science Education, **3** (2)*, 297-328.

VERGNAUD, G. (1989). La formation des concepts scientifiques. Relire Vygotski et débattre avec lui aujourd'hui. *Enfance*, **1-2**, 111-118.

Annexe 1

Le coefficient de détermination (R^2) calculé permet de déterminer à quel point l'équation de régression linéaire est adaptée pour décrire la distribution des scores moyens. Ce R^2 a, ici, une valeur très élevée ($R^2 = .951$). Cela signifie que la variable « âges » peut expliquer 95% de la variabilité des scores moyens. L'ANOVA à un facteur permet, quant à elle, d'affirmer qu'il existe une différence significative de performances entre les groupes d'âges ($F(6,267) = 6.80$, $p = .000$). Des informations complémentaires concernant l'ANOVA peuvent être trouvées dans l'ouvrage de Howell *et al*. (2008).

Annexe 2. Extraits des programmes d'études pour illustrer les habiletés « visualisation spatiale », « rotation mentale » et « changement de perspectives »

Habileté « visualisation spatiale » / « rotation mentale »
Solides et figures planes ; Décrire – Classer – Construire ; Développements
5-8 ans, 8-10 ans, 10-12 ans : Aucune mention dans le programme d'études 13-14 ans : Apprendre à anticiper mentalement la construction d'un solide à partir d'un développement.
Déplacer des objets les uns par rapport aux autres, dans l'espace ou dans le plan (transformations du plan)
5-8 ans : Dans le plan, superposer des figures à elles-mêmes (à l'aide d'un transparent) par déplacement et/ou par retournement. 8-10 ans : Dans le plan, superposer des figures à elles-mêmes (à l'aide d'un transparent) par déplacement et/ou par retournement 10-12 ans : Déplacer des figures planes et distinguer: - la translation; - la rotation ; - la symétrie orthogonale («faire retourner» autour d'un axe); - la symétrie centrale (autour d'un point, rotation de 180°).
Les transformations du plan ; Les mouvements simples dans l'espace et leurs correspondants dans le plan
13-14 ans : Reconnaître l'isométrie qui permet de passer de l'objet à son image. On aura recours au travail expérimental (pliage, papier calque, pavage…) et à l'outil informatique pour faciliter ces découvertes.
5-8 ans : Dans le plan, utiliser translation (faire glisser sur des rails), la rotation (faire pivoter), la symétrie orthogonale (faire retourner) dans des activités concrètes d'expression à l'aide de transparents. Déplacer des objets dans un espace limité (le ballon et le cerceau roulent, tournent en toupie, en rétro). 8-10 ans : Dans des activités concrètes d'expression (dessin, peinture, pliages, pavages, découpages…), utiliser les transformations du plan En observant les positions initiales et finales de deux figures planes de même grandeur, exprimer le mouvement de l'une par rapport à l'autre (à l'aide d'un transparent): glissement (sens de la translation); pivotement (sens de la rotation); retournement (symétrie orthogonale). 10-12 ans : En observant les positions initiales et finales de deux figures planes de même grandeur, exprimer le mouvement de l'une par rapport à l'autre (à l'aide d'un transparent) : glissement (sens de la translation), pivotement (sens de la rotation), retournement (symétrie orthogonale). 13-14 ans : Associer un mouvement de l'espace à l'isométrie du plan qui lui correspond : « glissement rectiligne » et translation, rotation d'un demi-tour autour d'un axe et symétrie orthogonale, rotation autour d'un point et : rotation, symétrie centrale. Reconnaître les isométries du plan dans des frises, pavages, papiers peints, rosaces. Reconnaître les invariants communs aux quatre isométries : conservation de l'alignement, conservation de la longueur d'un segment, conservation de l'amplitude d'un angle, conservation du parallélisme. Construire aux instruments l'image d'une figure par : une translation, une symétrie orthogonale, une symétrie centrale.
Habileté « changement de perspectives »
Reconnaitre – Comparer – Construire - Exprimer
5-8 ans, 8-10 ans : Aucune mention dans le programme d'études 10-12 ans : Associer un solide à sa représentation dans le plan: - vue de face, de profil, de dessus; - perspective cavalière.
Solides et figures planes ; Décrire – Classer – Construire ; Représentations planes
13-14 ans : Associer un solide à ses différentes représentations dans le plan. Comparer différents types de représentations planes : photographies, plans de bâtiments, représentations en vues coordonnées et en perspective. Construire un cube, un parallélépipède rectangle en perspective cavalière.