

# LES ÉPREUVES D'ADMISSIBILITÉ DU CAPES EXTERNE DE MATHÉMATIQUES : DE POSSIBLES PERSPECTIVES

Lalina COULANGE  
 Laurent HERR  
 Georges SALIBA  
 Grégory TRAIN  
 Université de Bordeaux

**Résumé.** Nous proposons dans cet article des fragments de problèmes susceptibles de contribuer à la conception des épreuves écrites du CAPES de mathématiques. Ces propositions tentent de faire appel à des connaissances à la fois didactiques et mathématiques, et proposent des pistes pour les mettre en fonctionnement conjointement. Le but est de valider, lors du concours, une meilleure prise en compte de l'aptitude des candidats à se placer dans une optique professionnelle, au travers notamment des secondes épreuves d'admissibilité du concours.

**Mots clés.** Admissibilité, capes, épreuves écrites, formation, professionnalisation.

**Abstract.** This article offers extracts from problems that could be used for the second written examination of the math CAPES. These problems attempt to call forth both didactical and mathematical knowledge so that they are used together. The aim is to better assess the ability of the candidates to the teaching competitive exams to place themselves in a professional perspective, especially during the second written qualifying CAPES examination.

**Key-words.** Second written qualifying CAPES examination, formation, professional perspective.

## 1. Positionnement de la démarche

Si le contour des épreuves d'admission du concours du CAPES externe de mathématiques a sensiblement évolué ces dernières années, les épreuves d'admissibilité, quant à elles, apparaissent plus enclines à la stabilité. Cette stabilité relative s'exerce dans un double contexte : un contexte institutionnel en mouvement, celui de la loi d'orientation et de programmation pour la refondation de l'école de la République, porteur de l'idée d'une réforme donnant une véritable dimension professionnelle à la formation et au recrutement des enseignants ; un contexte budgétaire contraignant dans lequel la *bonne distance* entre les écrits 1 et 2 de l'épreuve d'admissibilité est susceptible d'être érigée comme condition d'existence pérenne de ces deux écrits. On peut toutefois envisager des évolutions à venir, à l'instar de ce que l'on constate dans d'autres disciplines (pour lesquelles les sujets d'écrits 2 ont fortement évolué en intégrant des questions dédiées à l'analyse de ressources destinées aux enseignants du secondaire) d'une part, et du fait de l'intégration de la nouvelle option informatique dans le concours du CAPES externe de mathématiques d'autre part.

Nous proposons une contribution à la question des contenus des écrits de la seconde épreuve d'admissibilité sur ce qui semblerait idéalement souhaitable mais aussi ce qu'il

serait réaliste d'envisager. Cette contribution prend la forme d'extraits de sujets d'écrit 2, sujets que nous testons par ailleurs depuis quelques années avec des étudiants de première année du master *métiers de l'enseignement, de l'éducation et de la formation* mention second degré, parcours mathématiques, au sein de l'ESPE (École Supérieure de Professorat et de l'Éducation) d'Aquitaine.

Dans la conception de ces écrits, nous cherchons à prendre en charge de manière plus systématique ce qui est aujourd'hui explicitement demandé dans la note de cadrage des secondes épreuves écrites du CAPES : « *apprécier, outre la maîtrise scientifique du candidat, son aptitude à se placer dans une optique professionnelle* ».

Nous donnons à voir dans la suite différents extraits de sujets d'écrits 2 en précisant en amont et pour chacun d'eux les choix qui ont conduit à de telles propositions. Nous terminons cette présentation par une réflexion plus globale sur le contenu des secondes épreuves écrites.

## 2. Revue des extraits de problèmes

### 2.1 La calculatrice et l'écriture décimale

Bien que la calculatrice tende à devenir un outil banalisé dans l'enseignement des mathématiques, il est encore parfois possible que perdure un climat de suspicion autour d'elle : objet dont il s'agit alors de se méfier ou encore objet fossoyeur de toute réflexion mathématique...

Dans cet extrait de sujet tiré de Chevallard (2006), nous questionnons ce fait à travers une réflexion autour des usages de la calculatrice dans l'enseignement. La question c) constitue l'enjeu du problème : à partir d'une étude mathématique préalable, il s'agit de se prononcer sur la position tenue par un enseignant relativement au fait suivant observé sur une calculatrice :

*La calculatrice donne le même affichage quand on lui demande ce que valent, d'une part  $3\sqrt{5}$ , d'autre part  $\sqrt{45}$ . Cela signifie simplement que les premières décimales de ces deux nombres réels sont bien identiques, mais on ne sait pas s'il en sera de même par exemple avec la 30ième ou la 40ième décimale. On ne peut pas conclure que  $3\sqrt{5} = \sqrt{45}$ .*

**Partie C : la calculatrice et l'écriture décimale**

1. On cherche à calculer la valeur du polynôme  $9x^4 - y^4 + 2y^2$  lorsque  $x = 10864$  et  $y = 18817$ . L'usage d'une calculatrice de collège renvoie les valeurs suivantes aux deux calculs ci-dessous :

$$9 \times 10864^4 - 18817^2 \times (18817^2 - 2) = 0$$

$$9 \times 10864^4 - 18817^4 + 2 \times 18817^2 = -141022$$

(a). Proposer une technique accessible à des élèves de collège combinant l'emploi de la calculatrice et du calcul à la main pour déterminer la valeur exacte de  $10864^4$ .

*Notons que la calculatrice de collège utilisée plus haut renvoie  $1,393025376 \times 10^{16}$  à ce calcul.*

(b). En déduire une technique accessible à des élèves de collège pour déterminer la valeur du polynôme  $9x^4 - y^4 + 2y^2$  lorsque  $x = 10864$  et  $y = 18817$ .

2. Un professeur tient le discours suivant dans sa classe : "La calculatrice donne le même affichage quand on lui demande ce que valent, d'une part  $3\sqrt{5}$ , d'autre part  $\sqrt{45}$ . Cela signifie simplement que les premières décimales de ces deux nombres réels sont bien identiques, mais l'on ne sait pas s'il en sera de même par exemple avec la 30<sup>e</sup> ou la 40<sup>e</sup> décimale. On ne peut pas conclure que  $3\sqrt{5} = \sqrt{45}$ ".

(a). Soit  $a, b, c \in \mathbb{N}^*$ . Démontrer que si  $a\sqrt{b} \neq \sqrt{c}$ , alors :

$$|a\sqrt{b} - \sqrt{c}| \geq \frac{1}{a\sqrt{b} + \sqrt{c}}$$

(b). En déduire que :

$$|a\sqrt{b} - \sqrt{c}| < \frac{1}{a\sqrt{b} + \sqrt{c}} \Rightarrow a\sqrt{b} = \sqrt{c}$$

(b). En déduire que pour  $5 \leq a \leq 16$  et  $b \leq 24$ , si les affichages sur la calculatrice de  $\sqrt{a} + \frac{2}{\sqrt{a}}$  et de  $\sqrt{b + \frac{4}{a}}$  sont identiques jusqu'à la première décimale, alors

$$\sqrt{a} + \frac{2}{\sqrt{a}} = \sqrt{b + \frac{4}{a}}$$

4. Considérons les fractions  $\frac{221}{481}$  et  $\frac{119}{259}$  et les résultats fournis par la calculatrice :

$$\frac{119}{259} = 0,459459459459 \qquad \frac{221}{481} = 0,459459459459$$

Démontrer que comme l'affichage de la calculatrice est identique dès la troisième décimale, alors les deux fractions sont égales. On procédera à un raisonnement analogue en montrant notamment que si  $\frac{a}{b} \neq \frac{c}{d}$  alors  $|\frac{a}{b} - \frac{c}{d}| \geq \frac{1}{PPCM(b,d)}$ .

## 2.2 Développements décimaux et périodicité du développement décimal des rationnels

Défini comme un nombre rationnel dont la représentation en fraction réduite a pour dénominateur un entier dont les facteurs premiers ne sont que des 2 ou des 5, le nombre décimal apparaît quelque peu insolite aux yeux du profane : pourquoi par exemple 2 et 5 plutôt que 3 et 7 ? Et d'autres faits entretiennent ce trait de caractère. Ce nombre n'est par exemple nullement nécessaire à l'édifice numérique, l'ensemble des rationnels pouvant être construit par symétrisation du demi-groupe multiplicatif  $\mathbb{N}^*$ , ensemble quotient de  $\mathbb{N}^*$  par la relation d'équivalence :  $(x,y) \sim (x',y') \Leftrightarrow xy' = x'y$ . L'ensemble des décimaux n'apparaît d'ailleurs pas en tant qu'objet d'étude dans les éléments de Bourbaki. Il ne constitue pas non plus un corps, ce qui le rend « impropre » au calcul algébrique.

Notre propos n'est pas de nous attarder sur les propriétés manquantes de  $\mathbb{D}$  – cet ensemble en possède par ailleurs<sup>1</sup> – mais plutôt de souligner que si les nombres décimaux sont des objets incontournables, ils le sont plus volontiers par leur pratique sociale omniprésente, pratique fondée sur leur écriture, plus que sur leur poids mathématique. Ils sont en particulier incontournables dans les questions de mesures concrètes en sciences expérimentales, le résultat d'une mesure exprimant le fait que la grandeur que l'on mesure contient un nombre entier de fois l'unité, plus un certain nombre de dixièmes, de centièmes... de cette unité.

Sur le plan didactique, les obstacles liés à l'enseignement des décimaux sont bien identifiés.

- Il s'agit par exemple des décimaux vus comme « des entiers naturels avec un changement d'unités », donc des « naturels » (avec une virgule) et des mesures. Une telle assimilation des décimaux aux naturels est génératrice notamment, dans l'étude des opérations dans  $\mathbb{D}$ , du traitement différencié de la partie entière et de la « partie décimale », ouvrant à des erreurs du type  $0,5^2=0,25$  ou encore  $2,3^2=4,9$ .
- Il s'agit, de manière conséquente, de bien comprendre les perturbations des relations topologiques liées à la densité de  $\mathbb{D}$  dans  $\mathbb{R}$ . De telles perturbations conduisent notamment les élèves à ne pas trouver de décimal entre 3,25 et 3,26 mais à déclarer un prédécesseur dans  $\mathbb{D}$  à 3,15 : 3,14. Ces conceptions erronées sont parfois suffisamment résistantes pour réapparaître, sous des formes « plus élaborées » chez des étudiants de Master se destinant aux métiers d'enseignants de mathématiques, avec la conception erronée que l'on n'utilise qu'un ensemble discret de nombres et l'idée fautive qu'il existe  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $\forall x \in \mathbb{R}, \forall d \in \mathbb{D}$  tel que  $[|x-d| < 1/10^n \Rightarrow x = d]$  (c'est-à-dire que  $x$  est "pratiquement remplaçable" par  $d$ ,  $x-d$  est nul...). Ce type d'erreurs qui peut par ailleurs surprendre de la part d'étudiants ayant fréquentés les mathématiques à l'université fait écho aux constatations faites par Durand-Guerrier et Tanguay (2016) : « L'idée que les

<sup>1</sup>  $\mathbb{D}$  est un sous anneau intègre de  $\mathbb{Q}$  engendré par  $\{1/10\}$  par exemple.

ensembles denses  $\mathbb{D}$  et  $\mathbb{Q}$  puissent laisser des « interstices » sur la droite réelle est contre-intuitive, et nous faisons l'hypothèse que la continuité suggérée par le tracé de la droite cristallise l'idée d'une dichotomie entre le *discret* et le *continu* qui donne toute la place à la *densité*, alors confondue avec la continuité. »

- Il s'agit encore, dans l'assimilation des décimaux à « des naturels avec une virgule », de ne pas considérer les naturels comme des décimaux et par contre de ranger 0,33... du côté des décimaux.

C'est plus largement la question des nombres et de leurs représentations qui est posée et de la nécessité d'unifier deux continents séparés, les rationnels et les décimaux. Cette unification apparaît délicate à négocier dans l'enseignement, en particulier pour les professeurs stagiaires que nous suivons en formation initiale. Ainsi paraît-il parfois difficile de faire vivre la nouvelle définition de quotient donnée en classe de sixième :

«  $\frac{a}{b}$  est le nombre qui multiplié par  $b$  donne  $a$  ». Cette dernière définition est souvent enseignée par les stagiaires de façon isolée et sans l'ériger comme moyen d'articulation et d'unification de ces deux continents. «  $\frac{a}{10}$  est le nombre qui multiplié par 10 donne  $a$  » peut pourtant amener à (re)définir un décimal comme « un nombre qui multiplié par 10, 100, 1000 etc... donne un entier », en classe de sixième. Cette définition vient unifier les rationnels et les décimaux et a une certaine valence par rapport à la revisite des techniques de calcul sur les décimaux.

Par exemple, si l'on considère le produit  $T=4,3 \times 1,25$ . On a par définition :

$$4,3 \times 10 = 43 ; 1,75 \times 100 = 175.$$

$$43 \times 175 = (4,3 \times 10) \times (1,75 \times 100) = 4,3 \times 1,75 \times 1000 = T \times 1000.$$

$$T = 4,3 \times 1,75 \text{ est donc le nombre qui multiplié par } 1000 \text{ donne } 43 \times 175$$

$$4,3 \times 1,75 = \frac{43 \times 175}{1000} = \frac{7525}{1000} = 7,525 \quad .$$

L'extrait de sujet proposé a pour but de vérifier la connaissance qu'ont les candidats des nombres rationnels à travers leurs écritures décimales. Est exploré en particulier le phénomène de la répétition de suites de chiffres dans le développement décimal illimité des rationnels et la longueur possible pour la période. Les candidats sont questionnés sur la manière de tenir à des élèves de collège un discours explicatif justifiant certains résultats sur les écritures décimales (période, etc...). Ils sont plus largement interrogés sur les obstacles liés à l'enseignement des nombres rationnels.

### Périodicité du développement décimal des rationnels

1. Démontrer en utilisant des arguments mathématiques accessibles à un élève de sixième que  $\sqrt{2}$  n'est pas un nombre décimal. *On rappelle qu'en classe de sixième, on aura présenté  $\sqrt{2}$  comme le nombre qui multiplié par lui-même donne 2.*
2. Soit  $q$  un entier. Démontrer que  $q$  est premier avec 10 si et seulement si il existe  $n$  non nul tel que  $10^n \equiv 1 \pmod{q}$ .
3. Soit  $x = \frac{a}{b}$  un rationnel. On suppose  $b$  premier avec 10. Soit  $n$  un entier strictement supérieur à 0 vérifiant  $10^n \equiv 1 \pmod{b}$ . Démontrer que la suite des décimales de  $x$  admet une période de longueur  $n$ , c'est à dire que l'on a  $a_i = a_{i+n}$  pour tout  $i \geq 1$ .
4. On admet que le développement décimal de  $\frac{1}{p}$  n'a pas de *pré-période* si 2 et 5 ne divisent pas  $p$ . Par exemple,  $\frac{1}{15} = 0,0666\dots$  a une pré-période de longueur 1,  $\frac{1}{7} = 0,142857142857\dots$  n'en possède pas.. Une calculatrice donne 0,1438581 au calcul suivant :  $\frac{1}{999} + \frac{1}{7}$ . A partir de l'affichage de la calculatrice et du résultat établi à la question 3, donner en justifiant le développement décimal illimité de cette somme.

5. Soit  $x \in \mathbb{R}$ . Démontrer que  $x$  est rationnel si et seulement si son développement décimal illimité est périodique à partir d'un certain rang. (En particulier, en supposant  $x = \frac{a}{b}$  rationnel, on supposera que  $b = 2^\alpha 5^\beta q$  avec  $q$  premier avec 10.)
6. a) Déterminer une fraction dont le développement décimal illimité est le suivant : 0,45673673...
6. b) Montrer que le réel  $x = 0,0100100010\dots$  ; où le nombre de 0 qui suit le chiffre  $a_k = 1$  est augmenté de 1 à chaque étape, est irrationnel.
7. Justifier à des élèves de collège que, d'une part, les mêmes chiffres réapparaissent dans le développement décimal des nombres rationnels et d'autre part, que des mêmes chiffres réapparaissent dans le même ordre à partir d'un certain rang

### 2.3 Grandeurs géométriques et raisonnements

Les programmes de mathématiques du collège soulignent qu'un apprentissage de la notion d'aire ne peut se réduire à la manipulation de formules. Pour éviter cette centration prématurée sur les aspects calculatoires, les programmes de la classe de sixième inscrivent comme compétence exigible la détermination d'aires à partir d'un simple pavage et encouragent dans les commentaires la détermination d'aires à l'aide "soit de reports, de décompositions, de découpages et de recollements, soit de quadrillages et d'encadrements". De telles pratiques sont par ailleurs historiquement situées (travaux d'Euclide dans ses *Eléments* et David Hilbert (1862-1943) dans *Les fondements de la géométrie*).

L'extrait de sujet suivant tiré de Perrin (2006) s'inscrit dans une telle perspective. Il propose de placer les candidats dans une telle situation en supposant, au début du problème, que seules les notions de longueur d'un segment, d'aire d'un polygone dans un plan sont connues ainsi que les trois cas d'isométrie d'un triangle et les propriétés usuelles des polygones. En particulier la formule de l'aire d'un triangle n'est pas supposée connue et sera déterminée dans le problème. L'étude mathématique permet de

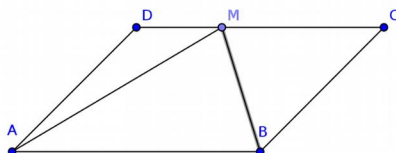
déterminer l'égalité d'aires de différentes figures du plan sans recourir aux formules. Un préambule à destination des étudiants ayant composé sur ce sujet précise ces éléments . Ceci permet de clarifier le contrat didactique et les outils à disposition des candidats pour répondre aux questions posées. Les résultats capitalisés permettent en fin de problème de se confronter au problème de lieux suivant :

On considère un triangle  $ABC$  et on note  $A(ABC)$  l'aire du triangle  $ABC$ . Quels sont les points  $M$  du plan qui sont tels que  $\frac{A(AMB)}{A(AMC)}$  soit égal à une constante positive  $d$  donnée. »

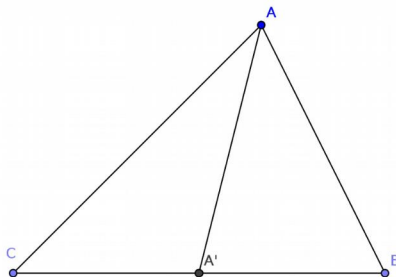
L'étude questionne également l'utilité des logiciels de géométrie dynamique dans la résolution de tels problèmes. Notons que la question posée sur l'usage d'un tel logiciel dans l'extrait de sujet est laissée volontairement ouverte de manière à permettre aux étudiants déjà initiés aux apports potentiels des nouvelles technologies dans les apprentissages mathématiques de faire part de leur expertise personnelle en réponse à cette question. Cet extrait de sujet pointe également la nécessité du recours à des configurations clés dans la conduite de raisonnements géométriques, qui nous paraît un enjeu crucial de la formation des futurs enseignants en géométrie. Ce sujet est d'ailleurs un point d'appui dans notre formation de Master. Il permet notamment un travail approfondi sur des points qui leur font précisément difficulté de manière récurrente dans le domaine géométrique.

## Partie A

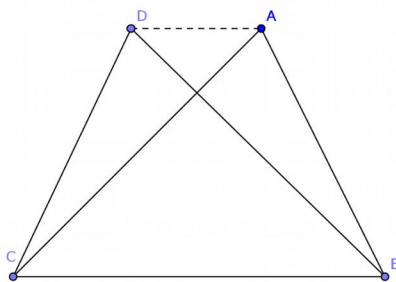
1. Soit  $ABCD$  un parallélogramme. Démontrer que la diagonale partage  $ABCD$  en deux triangles de même aire.
2. Soit  $ABCD$  un parallélogramme et soit  $M$  un point de  $[DC]$ . Montrer que l'aire du triangle  $AMB$  est la moitié de celle du parallélogramme.



3. Soit  $ABC$  un triangle et soit  $A'$  le milieu de  $[BC]$ . Montrer que l'aire de  $ABA'$  est égale à l'aire de  $AA'C$ . (ie la médiane  $(AA')$  partage le triangle en deux triangles de même aire).



4. Soient  $ABC$  et  $DBC$  deux triangles de même base  $[BC]$  dont les sommets  $A$  et  $D$  sont sur une parallèle à  $(BC)$  (de sorte que l'un des polygones  $ABCD$  ou  $ADBC$  est convexe, donc un trapèze). Montrer que les deux triangles ont la même aire.

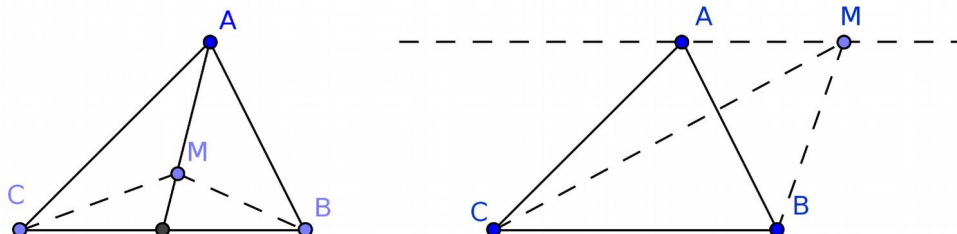


5. Dans cette question, on admet que si  $ABCD$  est un rectangle de longueur  $L$  et de largeur  $l$ , alors son aire est  $L \times l$ . Soit  $ABC$  un triangle et  $(AH)$  la hauteur issue de  $A$ . Montrer que l'aire du triangle est égale à  $\frac{1}{2}BC \times AH$  (base multipliée par hauteur et divisée par 2)

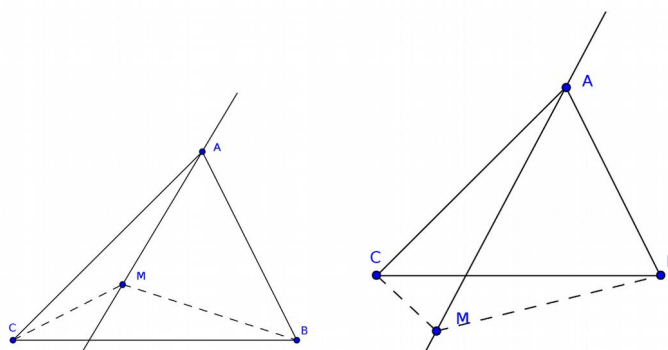


## Partie B

1. On s'intéresse au cas où  $\frac{\mathcal{A}(AMB)}{\mathcal{A}(AMC)}$  égale 1. Démontrez la proposition suivante :  
*si  $M$  est sur la médiane issue de  $A$  ou sur la parallèle à  $(BC)$  passant par  $A$ , alors les aires de  $AMB$  et  $AMC$  sont égales.*



2. On note  $M$  un point distinct de  $A$ . On suppose de plus que  $(AM)$  coupe  $(BC)$  en  $M'$ .  
 Démontrer que l'on a :  $\frac{\mathcal{A}(AMB)}{\mathcal{A}(AMC)} = \frac{M'B}{M'C}$ . On pourra distinguer plusieurs cas suivant que  $M$  est à l'intérieur de  $ABC$  ou que  $M$  est l'extérieur de  $ABC$ .



3. Énoncez une proposition dans le cas général ( $\frac{\mathcal{A}(AMB)}{\mathcal{A}(AMC)}$  est égal à une constante positive quelconque) et démontrez-la.

*Dans les questions suivantes, on se propose d'examiner quelques applications du résultat établi notamment à la question 2.*

4. Soit  $ABC$  un triangle. Soient  $B' \in [AB]$  et  $C' \in [AC]$ . On suppose que  $(B'C')$  est parallèle à  $(BC)$ . Démontrer les deux égalités suivantes :  $\frac{BB'}{BA} = \frac{CC'}{CA}$  et  $\frac{AB'}{BA} = \frac{AC'}{AC} = \frac{B'C'}{BC}$

5. Soit  $ABC$  un triangle. Démontrer que les trois médianes de  $ABC$  sont concourantes.

6. Soit  $ABC$  un triangle. Une droite  $\Delta$  coupe respectivement  $(BC)$ ,  $(CA)$ , et  $(AB)$  en  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$ . Démontrer que l'on a alors l'égalité suivante :

$$\frac{A'B}{A'C} \times \frac{B'C}{B'A} \times \frac{C'A}{C'B} = 1$$

7. L'énoncé du problème évoqué plus haut est proposé sous la forme suivante à des élèves de seconde :

*"On considère un triangle  $ABC$ . Quels sont les points  $M$  qui sont tels que le rapport des aires des triangles  $AMB$  et  $AMC$  soient égales ? "*

Discutez l'intérêt potentiel de l'utilisation d'un logiciel de géométrie dynamique dans la résolution de ce problème par les élèves.

#### **2.4 Directe, réciproque, contraposée**

La logique dans l'enseignement des mathématiques, après avoir longtemps disparu des programmes du secondaire, semble aujourd'hui se frayer une bonne place : on constate en effet un effort visible de transposition didactique des notions de logique dans les mathématiques à enseigner actuellement au lycée. Notons que cet effort de transposition s'accompagne d'un nombre conséquent de travaux en didactique des mathématiques qui visent à outiller la réflexion d'enseignants et de formateurs de mathématiques dans ce domaine d'étude. Preuve en est d'ailleurs qu'il s'agit précisément de la thématique centrale du centième numéro de la revue *Petit x*.

Ce type de sujets (un autre ayant été récemment proposé sur les questions liées à la récurrence) permet, dans notre formation, une revisite des savoirs logiques (sur la notion d'implication et la récurrence) en lien avec les travaux de Faber et Grenier (2011) et Grenier (2012), savoirs qui apparaissent par ailleurs rarement institutionnalisés en tant que tels dans l'institution lycée-université.

Il y a de surcroît une volonté explicite d'enseigner des démarches liées au raisonnement au collège et de faire acquérir à tous les élèves des compétences à ce sujet à l'issue de la scolarité obligatoire (dans le cadre du socle commun).

Il s'agit ici de conduire une réflexion autour des aspects logiques du raisonnement en mathématiques. L'étude, tirée de Mulet-Marquis (1995) questionne en particulier les potentielles difficultés d'enseignement des propriétés directes et réciproques en géométrie.

### Partie C

1. Justifier que l'implication  $P \Rightarrow Q$  est fautive uniquement si :  $P$  vrai  $Q$  faux.
2. Examiner d'un point de vue logique le raisonnement suivant :

Je sais que  $AB^2 + AC^2 \neq BC^2$   
 De plus : si  $ABC$  est un triangle rectangle en  $A$  alors  $AB^2 + AC^2 = BC^2$   
 Donc  $ABC$  n'est pas un triangle rectangle en  $A$ .

3. (a). Justifier d'un point de vue logique que le raisonnement suivant est faux :

Je sais que  $AB^2 + AC^2 \neq BC^2$  De plus, si  $AB^2 + AC^2 = BC^2$  alors le triangle est  
 rectangle en  $A$ .  
 Donc le triangle  $ABC$  n'est pas rectangle en  $A$ .

- (b). Expliquer en quoi il apparaît difficile de justifier du caractère faux de ce raisonnement à des élèves de la classe de quatrième.

- (a). Préciser en quoi la réciproque donnée n'est pas la réciproque du théorème.
- (b). Formuler la contraposée du théorème donné dans l'extrait du manuel.

5. Un autre manuel propose la contraposée du théorème de Thalès suivante :

$ABC$  est un triangle,  $B'$  est sur la droite  $(AB)$ ,  $C'$  est sur la droite  $(AC)$ .  
 Si  $\frac{AB'}{AB} \neq \frac{AC'}{AC}$ , alors les droites  $(B'C')$  et  $(BC)$  ne sont pas parallèles.

Proposer une formulation du théorème de Thalès dont la contraposée est celle présentée dans cet ouvrage.

#### 2.5. Modèle et simulation

Faire des mathématiques, c'est apprendre à construire des modèles de différentes réalités et de s'assurer de la consistance de ces modèles. Le professeur de mathématiques n'a pas l'exclusivité de la construction de modèles ; les physiciens, les chimistes, les économistes construisent aussi des modèles, certains étant plus ou moins mathématisés. C'est au mathématicien qu'incombe sans doute le plus nettement la tâche de traiter de la consistance de ces modèles. C'est la place originale des mathématiciens dans la grande famille des scientifiques et un professeur doit en être conscient pour pouvoir répondre par exemple à la célèbre question : « à quoi ça sert les maths ? ». De nombreux didacticiens des mathématiques mettent l'accent sur ce que d'aucuns appellent ainsi des « praxéologies de modélisation » et sur leur importance dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques (Schneider 2011).

Ces éléments liés à la modélisation en mathématiques trouveraient à notre sens toute leur place dans une formation épistémologique du professeur de mathématiques. Ils sont dans les faits particulièrement incontournables dans le domaine des probabilités et de la statistique, où s'opèrent explicitement des choix de modèles.

L'extrait de sujet, tiré de Barbazo et al. (2003) propose de questionner le choix d'un modèle d'une expérience aléatoire et de la simulation de ce modèle dans le secteur des

probabilités et de la statistique . Sachant que seuls les modèles discrets sont susceptibles d'être simulés, la question posée dans cet extrait est celle de la simulation d'une expérience aléatoire dont l'ensemble des issues possibles est par exemple l'intervalle  $[0,1]$ , en bref la question de la simulation discrétisée d'une loi continue.

### Partie D : les décimaux et les lois continues

Soit  $k$  un entier naturel et  $k \neq 1$ . Désignons par  $\mathcal{D}_k$  l'ensemble des décimaux de  $[0, 1[$  dont l'écriture décimale comporte au plus  $k$  chiffres après la virgule :

$$\mathcal{D}_k = \left\{ \frac{i}{10^k} \mid i \in \llbracket 0, 10^k - 1 \rrbracket \right\}$$

On considère l'expérience aléatoire consistant à tirer "au hasard" un élément de  $\mathcal{D}_k$ , c'est à dire selon la loi équirépartie de  $\mathcal{D}_k$  (chaque élément est donc de probabilité  $\frac{1}{10^k}$ ).

On se donne deux réels fixés  $a$  et  $b$  de  $[0, 1[$  tels que  $a < b$  et on se propose de démontrer le résultat suivant : **la probabilité que l'élément  $X$  tiré dans  $\mathcal{D}_k$  soit dans l'intervalle  $]a, b]$  est telle que  $|P(a < X \leq b) - (b - a)| \leq 10^{-k}$**

1. Soit  $x$  un réel fixé dans  $[0,1[$ . Démontrer que l'événement  $\{0 \leq X \leq x\}$  n'est autre que

$$\left\{ \frac{i}{10^k} \mid i \in \llbracket 0, E(10^k x) \rrbracket \right\}$$

2. En déduire que  $\mathbb{P}(0 \leq X \leq x) = \frac{1}{10^k} (1 + E(10^k x))$

3. En déduire que  $\mathbb{P}(a < X \leq b) = \frac{1}{10^k} (E(10^k b) - E(10^k a))$

4. En utilisant l'encadrement  $x - 1 < E(x) \leq x$  ( $\forall x \in \mathbb{R}$ ), démontrer que :

$$|\mathbb{P}(a < X \leq b) - (b - a)| \leq 10^{-k}$$

*On peut donc affirmer que "à partir de nombres au hasard" sur  $\mathcal{D}_k$ , on peut, à  $10^{-k}$  près, fabriquer des nombres au hasard sur  $]0,1[$ .*

### 2.6. Algorithmique

L'algorithmique constitue un domaine d'étude qui prend de l'importance tant au lycée depuis déjà quelques années et plus récemment au collège. Cette arrivée soulève de nombreuses obligations, en particulier celles de situer ce domaine par rapport à d'autres ou encore d'articuler les concepts introduits en algorithmique par rapport à ceux présents en mathématiques par ailleurs. De fait, ce nouvel enseignement génère un fort besoin de formation des enseignants pour tenter d'en assurer la viabilité. Compte tenu de l'utilité de plusieurs concepts mathématiques utilisés en informatique, la formation initiale et les épreuves d'écrits du capes de mathématiques semblent pouvoir constituer un terrain fertile pour débiter et évaluer une formation liée à l'algorithmique.

Ce type de besoins nous paraît fortement accru aujourd'hui à la fois du fait d'enjeux nouveaux liés à l'enseignement de l'algorithmique au collège (réforme du collège prévue

à la rentrée 2016) d'une part, et de la mise en place de l'option informatique au CAPES de mathématiques externe d'autre part. Notons que la mise en place de cette option soulève d'ailleurs la question nouvelle des savoirs mathématiques et informatiques à même de constituer une culture commune entre des étudiants et futurs enseignants ayant un parcours universitaire « strictement » mathématique et d'autres ayant un parcours universitaire mixte et/ou informatique.

L'extrait de sujet ci-dessous propose de tester la disponibilité de connaissances algorithmiques des candidats (des connaissances proches par ailleurs de celles qui sont attendues au lycée) pour traiter de la résolution d'un problème mathématique relatif à la période du développement décimal illimité de  $\frac{1}{p}$ .

### Partie E : autour de l'algorithmique

1. Ecrire un algorithme qui permet de calculer le pgcd de deux nombres entiers
2. Soit  $n$  un entier naturel non nul.
  - a) On note  $\Phi(n)$  l'indicatrice d'Euler, indicatrice du nombre de générateurs de  $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ .  
Montrer que  $m$  est générateur de  $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$  si et seulement si  $m$  est premier avec  $n$ .
  - b) Ecrire un algorithme qui détermine de manière itérative  $\Phi(n)$ .
3. Ecrire un algorithme en langage naturel permettant de déterminer l'ensemble des diviseurs d'un entier naturel  $n$  non nul. Le faire fonctionner pour 216.
4. Soit  $p \in \mathbb{N}^*$ . On admet que la pré-période du développement décimal de  $\frac{1}{p}$  est au plus de longueur  $\max(m, q)$  où  $m$  et  $q$  sont des entiers tels que  $p = 2^m \times 5^q \times p'$  avec  $p'$  premier avec 2 et 5.

On cherche à déterminer de manière itérative la longueur de la période du développement décimal illimité de  $\frac{1}{p}$ .

On se donne un nombre  $p \in \mathbb{N}^*$ .

tab est un tableau ordonné contenant l'ensemble des diviseurs de  $d$ .

tab[i] est le  $i + 1$ -ième élément du tableau.

On se propose dans cette partie d'étudier et de compléter l'algorithme suivant

+++Début de l'algorithme+++

Entrée :  $p, \text{tab}$  ;

Variables :  $T, k, d, n, \text{odg}, \text{test}$  ;

Traitement :

```

00   test :=0 ;
01   d :=  $\Phi(p)$  ;
02   tab := l'ensemble ordonné des diviseurs de d
03   k :=0 ;
04   T := size(tab)-1 ;
05   Déterminer  $p'$  et  $\text{odg}=10^{\max(m,q)}$ 
06   tantque  $k < T$  faire
07     n :=tab[k] ;
08     si (floor)((1/p)*odg*10n-odg*(1/p))==((1/p)*odg*10n-odg*(1/p))) alors
09       k := T ;
10       test :=1 ;
11     sinon
12       k :=k+1 ;
13     fsi ;
14   fintantque ;

```

```

15     si test == 0 alors
16         afficher "conjecture fausse";
17     sinon
18         afficher "n".
19     fsi.

```

+++Fin de l'algorithme+++

6. Implémenter la ligne 05 de l'algorithme pour faire calculer p' et odg.
7. Expliquer ce que fait l'algorithme dans la boucle tantque.
8. Quelle conjecture l'algorithme permet-il de tester ?

## 2.7. Techniques de calculs

Donner une véritable dimension professionnelle à la formation et au recrutement des enseignants, c'est aussi interroger les candidats sur des aspects de la profession plus directement liés à l'analyse des procédures des élèves, à la pertinence de documents pédagogiques ou encore aux connaissances à construire et aux remédiations à envisager. C'est in fine interroger les candidats sur ce qui constitue une part substantielle du travail du professeur.

L'extrait de sujet ci-dessous s'inscrit dans cette dynamique. De ce point de vue, il diffère quelque peu des extraits précédents mais offre une réelle complémentarité avec ces derniers.

### Partie 1

1. Rappelez la nouvelle définition du quotient  $\frac{a}{b}$  donnée en classe de sixième.
2. En utilisant cette nouvelle définition, justifiez le calcul du produit de  $\frac{7}{5}$  et  $\frac{4}{3}$ .
3. Analysez les extraits de manuels en ligne sur la multiplication de deux nombres décimaux.

#### IV. MULTIPLICATION DE DEUX DÉCIMAUX QUELCONQUES :

Pour multiplier à la main deux nombres décimaux :

1. On multiplie les deux nombres en ignorant les virgules.
2. On place la virgule dans le produit en sachant que le résultat doit avoir autant de décimales que deux facteurs réunis.

Exemples :

$$\begin{array}{r}
 14,53 \\
 \times 7,2 \\
 \hline
 2906 \\
 10171. \\
 \hline
 104,616
 \end{array}$$

1 + 2 = 3 chiffres derrière la virgule

$$\begin{array}{r}
 0,546 \\
 \times 0,89 \\
 \hline
 4914 \\
 4368. \\
 \hline
 0,48594
 \end{array}$$

3 + 2 = 5 chiffres derrière la virgule

source internet : <http://fr.maths.free.fr/>

## **J** *e retiens*

Sachant que  $23 \times 341 = 7\,843$ , on peut facilement déduire des produits comme :

$$\begin{array}{ccc} 2,3 & \times & 34,1 = 78,43 \\ \uparrow & & \uparrow \\ 1 \text{ décimale} & & 1 \text{ décimale} \\ & & 1 + 1 = 2 \\ & & 2 \text{ décimales} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} 2,3 & \times & 3,41 = 7,843 \\ \uparrow & & \uparrow \\ 1 \text{ décimale} & & 2 \text{ décimales} \\ & & 2 + 1 = 3 \\ & & 3 \text{ décimales} \end{array}$$

source internet : <http://www.academie-en-ligne.fr/Ressources/4/MA61/AL4MA61TEWB0109-Sequence-04-Partie-01.pdf>

4. Justifiez, en utilisant la définition d'un quotient donnée en sixième, le produit de 2,3 et 3,41.

### Partie 2

Soit l'exercice suivant : " pour faire une expérience de chimie, un professeur verse dans un récipient 6 dL d'eau et 15 g de sucre. Dans le récipient d'un élève, il y a 8 dL d'eau. Quelle quantité de sucre doit mettre cet élève dans son récipient pour obtenir une eau aussi sucrée que le professeur ? "

1. Résoudre cet exercice en utilisant la propriété d'homogénéité de l'application linéaire sous-jacente et dans les différents registres suivants :

- registre de la langue naturelle
- registre pré-fonctionnel

2. Expliquez pourquoi dans des exercices relevant de la proportionnalité, le recours au coefficient de proportionnalité est en général conceptuellement plus difficile que le recours aux propriétés d'homogénéité et d'additivité de la fonction linéaire associée.

3. Indiquez quel intérêt didactique peut représenter le registre pré-fonctionnel dans l'étude des problèmes relevant de la proportionnalité au collège.

### Partie 3

1. Indiquez en quoi la transformation algébrique suivante n'est pas nécessairement une attente légitime en classe de seconde.

$$\frac{5x + 3}{x} = 5 + \frac{3}{x}$$

2. Identifiez l'erreur commise dans la transformation algébrique donnée ci-dessous et indiquez la logique sous-jacente qui semble expliquer cette erreur.

$$\frac{2x + 5}{2x + 6} = \frac{5}{6}$$