ÉLÈVES EN DIFFICULTÉ : DYSCALCULIQUES ?

Michel DERUAZ
Thierry DIAS
Haute école pédagogique Vaud

Résumé. Dans cet article, nous souhaitons interroger la légitimité du recours à l'utilisation du terme dyscalculie dans le contexte de l'enseignement des mathématiques au lycée. En parcourant une étude de cas menée dans le contexte d'appui individuel pour une élève signalée en difficulté, nous présentons les étayages utilisés permettant de relativiser la notion de troubles des apprentissages en mathématiques. Nous montrerons également comment des entretiens de type métacognitifs permettent de mieux repérer les causes des difficultés en ancrant nos propos sur des repères didactiques.

Mots clés. Difficultés d'apprentissage, dyscalculie, appui individuel, lycée, entretien métacognitif.

Abstract. In this issue, we wish to question the legitimacy to use the term dyscalculia in the context of the teaching of the mathematics in the secondary school. By following a case study in the context of individual support for a pupil with learning disabilities, we present a scaffolding process wich put into perspective the notion of learning disorders in mathematics. We shall also show how cognitive interviews allow to better identify the causes of the difficulties by focus this issue on didactic marks.

Key-words. Learning difficulties, dyscalculia, individual support, secondary school, cognitive interview

Introduction

Dans le canton de Vaud, en Suisse romande, les enseignants de mathématiques de l'école secondaire[1] sont de plus en plus souvent confrontés à des élèves ayant reçu un diagnostic de dyscalculie. Ces diagnostics sont établis pour la plupart par des logopédistes[2] selon des processus et des tests assez divers. Pour l'heure, les démarches de signalement, de prise en charge et de bilan préalable à la mise en œuvre d'un test diagnostique ne relèvent pas d'un protocole uniforme. Dès lors, les parents de ces élèves ainsi "étiquetés" revendiquent légitimement des adaptations scolaires spécifiques comme cela est le cas pour la dyslexie par exemple. Comme nous l'avons déjà signalé dans un article précédent (Dias & Deruaz, 2012), l'état des connaissances actuelles au sujet de la dyscalculie ne permet pas encore de proposer de telles adaptations et l'institution scolaire se retourne le plus souvent vers l'enseignant de mathématiques qui se trouve dans une situation professionnelle inconfortable. Comme nous le disions déjà en 2012 :

> L'école et en particulier l'enseignant, ou l'enseignant spécialisé appelé en renfort, se retrouve alors confronté à une situation analogue à celle de l'enfant et de sa famille décrite par Meljac : « Le constat de trouble une fois effectué, l'enfant en difficulté, comme sa famille,

1 L'école secondaire en Suisse Romande concerne tous les enfants à partir d'environ 12 ans.
2 Le terme logopédiste est propre à la Suisse Romande, il s'agit de l'équivalent professionnel de l'orthophoniste en France ou au Québec.

> sont le plus souvent abandonnés à eux-mêmes avec, pour tout viatique, des conseils d'ordre général, qui ne sauraient en aucun cas suffire » (Meljac, 2005, p. 371).(…) Dépourvus de connaissances professionnelles suffisantes dans ce domaine, ils parent souvent au plus pressé avec plus ou mois de réussite dans leurs tentatives, ce qui ne les conduit évidemment pas à construire une posture d'aide solide. Au mieux, la difficulté passagère est atténuée, mais les raisons de cette remédiation restent obscures et sont donc souvent non réutilisables. (Dias & Deruaz, 2012, p. 530)

Par ailleurs, comme le relève Giroux (2013) cette problématique n'est pas spécifique à la Suisse romande :

> L'étude des circulaires ministérielles réalisée par Roiné en France (2009) montre que depuis quelques années, l'institution scolaire exerce une pression importante, à la fois en amont, sur les chercheurs et formateurs, et en aval, sur les enseignants pour que soient développés et mis en œuvre des dispositifs qui soient adaptés aux caractéristiques des élèves. (L'hypothèse que les élèves en difficulté soient affectés d'un déficit sous-tend cette demande. Selon cette hypothèse, les caractéristiques, qu'elles soient cognitives, affectives ou motrices, des publics de l'adaptation scolaire sont déterminantes autant des processus que des produits des apprentissages.) (Giroux, 2013, p. 61).

Le cadre de notre étude se situe dans le champ spécifique des difficultés d'apprentissage en mathématiques telles qu'elles sont constatées par les enseignants dans leurs classes. Le degré parfois important de déficience, ainsi que la persistance de ces difficultés questionnent dès lors légitimement les professionnels sur leur classification en terme de troubles durables. Ainsi est alors évoquée la terminologie de dyscalculie qui est utilisée de façon trop précipitée et de manière trop approximative selon nous. En accord avec Vannetzel (2012) nous pensons que la définition de cette notion ne fait pour l'instant aucun consensus dans la communauté scientifique :

> Nombreux sont les auteurs à dénoncer le flou en la matière et à appeler au recentrage de la définition sur la spécificité du trouble, afin de ne pas englober sous une même étiquette sémantique une vaste nébuleuse de difficultés, liées à des causes variées pour lesquelles les modalités d'aide diffèrent aussi (Landerl & al., 2004 ; Fischer, 2009 ; Rubinstein, 2009 ; Vigier, 2009, Fayol, 2012). (Vannetzel, 2012, p. 499)

Du fait de l'absence d'une définition précise de ce trouble y compris au niveau international si l'on s'en réfère aux grandes classifications (DSM-V et CIM 10)[3], on peut aisément comprendre que les critères diagnostiques sont difficiles à établir, mais aussi que les taux de prévalence relèvent parfois de l'incohérence puisqu'ils varient selon les auteurs de 1% à 8% (Fischer, 2009). Cependant, dans une telle situation de flou, certains professionnels n'hésitent pas à poser des diagnostics de déficience dans l'apprentissage des mathématiques et somment ainsi l'institution scolaire à prendre des mesures adaptatives.

Notre étude ne cherche pas à contribuer à une définition de la dyscalculie et encore moins à nier l'intérêt d'un tel débat autour des origines de ces troubles. Nous nous intéressons aux outils et aux gestes professionnels utiles aux enseignants qui doivent

3 Le DSM V (*Diagnostic and Statistical Manual of Mental Disorders*) est la cinquième version du manuel américain publié par l'APA; la CIM 10 *(Classification Internationale des Maladies)* est la version 10.

aider les élèves en grande difficulté dans leur classe qu'ils soient dyscalculiques ou qu'ils ne le soient pas. Notre perspective est donc essentiellement didactique puisqu'elle interroge le processus d'enseignement apprentissage dans son ensemble sans se centrer exclusivement sur l'élève. Nous interrogeons donc plutôt la notion de dysmathématie (Dias & Deruaz, 2012, p.532) qui englobe tous les élèves en grande difficulté en mathématiques à un moment de leur scolarité, quelles que soient les causes de ces difficultés. Nous faisons d'ailleurs l'hypothèse que la plupart de ces élèves ne sont pas dyscalculiques, en particulier au gymnase[4]. En effet, l'école vaudoise est relativement sélective et seule une minorité des élèves a accès à ce niveau de scolarité. Dans ce contexte, il nous semble surprenant, au vu des taux de prévalence indiqués par Fischer (2009), que des élèves dyscalculiques puissent poursuivre leur cursus jusqu'à ce niveau d'études. Mais le diagnostic ne relève ni de la compétence de l'enseignant ni de celle du chercheur en didactique. Comprendre et aider les élèves en difficultés en mathématiques relève en revanche du champ de compétence des enseignants et des didacticiens. Cependant, les éléments et les outils de repérage sont pour l'heure peu disponibles pour ces professionnels qui manquent souvent cruellement de formation dans ce domaine.

1. Cadre théorique et présentation de la recherche

Lorsque des élèves plus jeunes, en particulier à l'école primaire, se retrouvent en grande difficulté en mathématiques, ils sont pris en charge par des psychologues ou par des logopédistes suite à un repérage. Ces professionnels ont un certain nombre d'outils d'évaluation à disposition (WISC-IV, UDN-II)[5] pour effectuer des diagnostics puis pour entreprendre des suivis thérapeutiques. Ces outils sont spécifiques à un âge donné et, pour la plupart, atteignent leur limite vers 12 à 15 ans. Avec des élèves plus âgés, les psychologues et les logopédistes sont non seulement confrontés à l'absence d'outils adéquats, mais se trouvent également confrontés à des notions mathématiques plus complexes. Celles-ci nécessitent des connaissances spécifiques qu'ils n'ont pas nécessairement pour comprendre et interpréter les erreurs des élèves en terme de difficultés d'apprentissage. Si le maître de mathématiques n'a pas plus d'outil diagnostique, il a par contre des connaissances mathématiques et professionnelles qui peuvent lui permettre de mener ce travail interprétatif et ainsi étayer les apprentissages.

Lorsqu'il établit un diagnostic ou qu'il entreprend un suivi thérapeutique, le psychologue (ou le logopédiste) cherche à aider l'élève en difficulté en utilisant des outils spécifiques. L'enseignant quant à lui ne peut utiliser ces mêmes outils ni effectuer des diagnostics au sens de la psychologie. Il peut en revanche s'inspirer des postures employées par les psychologues notamment par rapport au contexte des observations nécessaires au repérage des difficultés. Une première conséquence de cette hypothèse est qu'il est nécessaire de mener ces observations hors du contexte de la classe, par exemple lors de séances d'appui individuel que nous décrivons plus précisément dans la suite de cet article (paragraphe 1.2). En effet, il faut non seulement que l'enseignant

4 Concerne les élèves dès 15 ans et correspond au niveau lycée en France.

5 Le WISC IV (Wechsler Intelligence Scale for Children) est un test d'évaluation psychométrique basé sur l'échelle de Wechsler, il est utilisé pour les enfants de 6 à 16 ans. Le protocole UDN II (utilisation du nombre) permet d'explorer les capacités de compréhension et d'utilisation de notions en rapport plus ou moins étroit avec la construction et l'utilisation du nombre chez des enfants de 4 à 11 ans. Il existe d'autres protocoles de repérage mais nous ne citons ici que deux des principaux.

chargé de cet appui puisse se consacrer totalement aux difficultés de cet élève, mais il faut aussi donner un cadre sécurisant à l'élève afin de lui permettre d'oser faire des mathématiques sans être observé par ses camarades. L'élève n'est d'ailleurs pas le seul qui doit avoir la possibilité de changer de rôle, l'enseignant doit avoir lui aussi la liberté de se positionner différemment que lorsqu'il est devant une classe entière. En particulier, il doit pouvoir laisser l'élève se confronter au doute et à l'erreur sans réagir trop rapidement et faire preuve d'un maximum d'empathie.

1.1 Cadre théorique

Les séances d'appui individuel que nous décrivons dans ce texte sont une relation d'aide au sens que Rogers (1970) lui donne. On retrouve d'ailleurs un positionnement similaire chez Giroux (2013) qui, à la suite de la description des interactions avec une élève de 15 ans dans un entretien, écrit :

> De la même manière, je cherche, non pas les mots qui font défaut, mais les « gestes » que Cathy cherche à produire. Ils sont pour moi, en tant qu'interlocutrice, des indices de son activité mathématique sur laquelle je tends à me synchroniser. (…) Autrement dit, je « joue » à son jeu d'une certaine manière en étant très attentive aux indices labiaux et gestuels. Et c'est sur cette base que j'interviens à quelques reprises pour soutenir la mise en œuvre de la stratégie lorsqu'elle peine à la contrôler. (Giroux, 2013, p. 72).

Les conditions décrites par Rogers (1970) pour qu'une relation d'aide aboutisse nous semblent pertinentes dans le contexte des séances d'appui individuel. Nous n'en citerons que deux : il faut que l'enseignant qui donne cet appui soit libre de le faire ou pas, qu'il soit totalement consentant ; et deuxièmement, il faut que l'élève éprouve ou perçoive que les conditions qui concernent l'enseignant sont réalisées. En effet, ce n'est pas parce que ces conditions sont réalisées que l'élève en sera nécessairement conscient et qu'il acceptera de s'ouvrir, de prendre des risques face à l'enseignant. Nous ajouterons une condition à celles exposées par Rogers, implicite dans le cas d'une psychothérapie, mais loin de l'être dans le cadre scolaire tant la pression de l'institution ou de l'entourage familial peut être importante : il faut que l'élève soit volontaire pour cet appui.

Lorsqu'il fait passer un test à un enfant (par exemple l'UDN II), le psychologue lui demande de réaliser les tâches prévues selon le protocole du test. Il doit noter ce que l'enfant arrive à faire sans aide, mais il doit aussi le questionner sur le comment et le pourquoi de sa solution. Il lui propose éventuellement des pistes pour ses réponses, mais il met également en doute les démarches de l'enfant, que celles-ci soient correctes ou pas. C'est l'ensemble des réactions de l'enfant qui permettront au psychologue d'établir son diagnostic. Nous faisons l'hypothèse que dans notre contexte d'appui, un questionnement entre le maître et l'élève autour de la réalisation d'une tâche est non seulement important pour permettre au maître de comprendre les difficultés de l'élève, mais aussi pour permettre à l'élève de mieux saisir quelles sont les questions que posent les mathématiques. Malgré toute votre bonne volonté, vous ne trouverez pas de champignon lors de votre balade si vous ne savez ce qu'il faut regarder dans une telle situation alors que votre grand-père qui vous suit de quelques pas en aura récolté un plein panier. Il en va peut-être de même pour certains élèves en grande difficulté en mathématiques, ils ne savent pas où regarder. Ils veulent immédiatement s'accrocher à une procédure connue, souvent de type algorithmique.

Pour laisser la possibilité à l'élève de mettre en place des stratégies erronées, il est important que le questionnement proposé par le maître soit le plus ouvert possible. Même si les entretiens mis en œuvre dans ces séances d'appui ne sont pas, à proprement parler, des entretiens d'explicitation[6] comme l'entend Vermersch (2003), nous pensons qu'une partie des outils qu'il propose peuvent être repris dans notre contexte. Dans son introduction, Vermersch (2003) à la suite des travaux de Rogers, développe trois points qui lui paraissent importants pour mener un entretien, en particulier dans une relation d'enseignant à élève. Au sujet de l'attitude d'écoute dont nous avons déjà parlé, il relève le risque suivant :

> Chez l'enseignant, on retrouve souvent une surdité à ce que dit l'élève, par un filtrage permanent opéré en fonction de l'aspect normatif de ce qu'il aurait fallu faire, ou de la manière dont l'enseignant procède. (Vermersch, 2003, p. 24)

Cette difficulté que rencontre l'enseignant à entrer dans la démarche de l'élève est probablement la conséquence d'une volonté d'efficacité en classe. En effet, pour donner du rythme à sa leçon, pour faire tout ce qu'il a prévu, l'enseignant prépare sa réponse pendant la fin de l'intervention de l'élève. Mais, si elle ne correspond pas à sa démarche, elle peut décourager un élève qui a ainsi l'impression de ne pas être entendu ceci étant accentué dans une configuration d'entretien individuel. Les autres points relevés par Vermersch (2003), sont la gestion des silences « combien il était important de les gérer paisiblement pour pouvoir accompagner l'autre dans sa propre mise en mots » et les techniques de reformulation, en particulier la reformulation en écho qu'il préconise prioritairement. Plus loin, l'auteur précise un autre point, plus spécifique à l'entretien d'explicitation qui nous semble particulièrement judicieux dans notre contexte :

> Dans la technique que je proposerai, l'objectif sera d'aider l'élève, enfant ou adulte, à formuler dans son propre langage le contenu, la structure de ses actions et sa pensée privée. Pour viser efficacement cet objectif, il sera important d'éviter les formulations de questions sous forme d'alternatives. Pour l'interviewé, elles comportent trop de risques de le gêner et de l'empêcher de prendre conscience de son propre fonctionnement intellectuel. Pour l'interviewer, il a de fortes chances, quand il propose des alternatives, de se retrouver en train d'essayer d'inventer la réalité de l'autre et donc de le faire en référence à sa propre expérience et d'y projeter son propre fonctionnement. (Vermersch, 2003, p. 25)

Ce point nous semble d'autant plus important qu'il va un peu à l'encontre de la démarche habituelle de certains enseignants qui veulent faire profiter à leurs élèves de leur propre expertise. Nous pensons que cela est probablement utile dans un second temps après la verbalisation par l'élève de sa propre démarche. C'est en effet à l'issue de cette phase soutenue par l'enseignant que l'élève pourra prendre conscience des limites de sa démarche et ainsi être en mesure d'accepter et d'entendre des propositions plus expertes que peut lui fournir le professeur.

Vermersch (2003) cite trois buts pour l'entretien d'explicitation qui nous semblent parfaitement similaires à ceux que nous envisageons par l'organisation de ces séances

6 Dans l'entretien d'explicitation, l'interviewer essaye de faire expliciter à l'interviewé son action *a posteriori* alors que dans notre contexte, l'entretien se fait simultanément à l'action.

d'appui individuel même si nous préférons parler de trois finalités possibles et souhaitables à long terme :

– Permettre à l'enseignant de prendre de l'information sur les difficultés de l'élève ;
– Permettre à l'élève de mettre à jour ses propres démarches ;
– Permettre à l'élève d'apprendre à apprendre.

Il est possible que dans certaines situations, seule la première finalité soit visée. Dans un tel cas, la description de sa démarche par l'élève peut s'arrêter au moment où l'enseignant (ou le chercheur) a obtenu un niveau de détails suffisant pour comprendre les erreurs de l'élève et donc ses difficultés. Si la deuxième étape est visée, il faudra poursuivre l'entretien pour permettre à l'élève de comprendre par lui même que sa démarche n'est pas adéquate ou de prendre conscience des limites de celle-ci. Selon nous, lors des dernières séances d'appui, l'élève devrait pouvoir atteindre la troisième étape, mais l'état actuel de notre recherche ne nous permet pas de l'assurer.

In fine, du côté de la didactique des mathématiques, nous nous référons aux travaux de Robert (1998, 2008 et 2012) en travaillant spécifiquement sur le choix et l'analyse a priori des énoncés et des différentes tâches à proposer aux élèves lors de ces séances d'appui.

> L'analyse *a priori* d'un énoncé consiste donc à se demander, compte tenu du programme, de la place des exercices dans ce qu'a fait le professeur, quelle utilisation de leurs connaissances précises, nouvelles et anciennes, les élèves vont avoir à faire, en travaillant sur cet énoncé. Cette analyse *a priori* ne se réfère donc pas directement au potentiel d'apprentissage d'un exercice. On cherche simplement quelles activités les élèves vont pouvoir développer avec leurs connaissances, sur cet exercice. (…)
>
> On distingue les tâches qui amènent à des applications immédiates des connaissances, c'est-à-dire simples (sans adaptation) et isolées (sans mélange), où seule une connaissance précise est mise en œuvre sans aucune adaptation, mise à part la contextualisation nécessaire: remplacement des données générales par des données particulières notamment.
>
> D'autres tâches nécessitent des adaptations de connaissances qui sont en partie au moins indiquées: on parle de niveau de mise en fonctionnement mobilisable. Le travail des élèves n'est en effet pas analogue selon qu'ils doivent rechercher les connaissances à utiliser (travail du pourquoi ou du quoi) ou mettre en fonctionnement (en l'adaptant) des connaissances indiquées (travail du comment). Si c'est à l'élève de reconnaître les connaissances à utiliser, on parle de niveau de mise en fonctionnement disponible. (Robert, 2008, pp. 48-49)

Par la suite, nous les nommerons, *tâches simples et isolées* pour les distinguer de celles que nous nommerons *tâches complexes* (qui sont avec adaptations ou mélange de cadres). La tentation est grande pour un enseignant qui s'adresse à des élèves en difficulté en mathématiques de simplifier les tâches jusqu'à ne proposer que des tâches simples et isolées.

Nous faisons l'hypothèse que c'est en proposant au contraire des tâches complexes nécessitant un certain nombre « d'adaptations de connaissances » (Robert, 2008, p. 49) et un accompagnement des élèves dans la résolution, que nous leur permettrons de prendre conscience de ce que sont les mathématiques et ainsi d'être en position de mieux pouvoir les apprendre. Dans ses analyses a priori, Robert propose sept types d'adaptations. Par exemple :

> **A3. Les mélanges de plusieurs cadres ou notions, les changements de points de vue, les changements ou jeux de cadres, les mises en relation ou interprétations... :** typiquement en géométrie, utiliser du calcul algébrique pour obtenir le résultat (par exemple résoudre $x^2 = 1$ au milieu d'un problème de géométrie). Les énoncés qui jouent sur graphique / fonction contiennent automatiquement cette adaptation; (Robert, 2008, p. 50)

La résolution de tâches nécessitant de telles adaptations permettra alors à l'enseignant de découvrir certaines difficultés qui pourront ensuite éventuellement être travaillées entre deux séances par l'élève à l'aide de tâches simples et isolées. Comme le dit Giroux (2013) « …les élèves s'engagent facilement lorsqu'ils possèdent déjà les savoirs en jeu, mais peinent à le faire lorsqu'ils savent qu'ils ne peuvent pas contrôler le dispositif dès leurs premières tentatives. » (p. 72). Comme nous l'avons déjà vu plus haut, pendant les séances d'appui, le maître a la possibilité d'accompagner le contrôle du dispositif ce qui n'est pas le cas entre les séances. Si l'on ne veut pas que l'élève se décourage entre les séances, il faut lui proposer des tâches dont il arrivera à assurer le contrôle, ce qui est en particulier le cas des tâches simples et isolées.

1.2 Le dispositif d'appui

Comme le mentionne Bloch à propos du repérage des connaissances et des difficultés des élèves (2013) :

> Il appartient au professeur, averti des phénomènes de contrat […] de faire le nécessaire pour ne pas se laisser piéger par les apparences, et de recueillir de façon soigneuse des indices sur les connaissances des élèves, même de ceux qui paraissent en manquer... Remarquons qu'il est beaucoup plus facile de débusquer des connaissances lorsque l'on a la certitude qu'elles existent, que lorsque l'on se les imagine absentes ! (p.46).

Une séance d'appui se déroule selon plusieurs principes que nous décrivons ici. L'élève doit effectuer les tâches demandées au tableau noir pour deux raisons : cela donne la possibilité d'observer l'élève pendant sa résolution ; et ceci lui permet de se retrouver dans une autre disposition que celle dont il a l'habitude quand il fait des mathématiques. L'objectif poursuivi étant que l'élève accepte ainsi de les faire différemment.

L'enseignant sollicite l'expression orale de l'élève pour accompagner tous ses écrits afin que les deux protagonistes de l'interaction bénéficient d'un langage débarrassé de la plupart de ses implicites. Cette forme de mise en mots sert également le repérage des connaissances et des lacunes de l'élève tant pour lui-même que pour le professeur. Elle permet d'accéder à ce que Vermersch appelle "la pensée privée" (2003, p.25).

À la fin de la séance, l'élève n'a pas la possibilité d'emporter avec lui des traces de son travail puisqu'elles restent inscrites seulement au tableau noir. Le principe est de mettre l'élève en situation de résoudre une nouvelle fois à domicile et en autonomie les tâches travaillées en séance. L'élève aura ensuite pour mission de rapporter les traces écrites de sa résolution personnelle lors de la séance d'appui suivante. Ce processus permet de vérifier si la tâche proposée fait bien partie de la zone prochaine de développement (ZPD) de l'élève (Vygotski, 1934) et donne ainsi à l'enseignant des nouvelles informations sur le potentiel d'apprentissage de l'élève. En cas de difficulté dans la résolution de la tâche par l'élève en autonomie, l'enseignant pourra lui demander de les décrire oralement. On se trouve alors dans une démarche proche de l'entretien d'explicitation développée par Vermersch (2003).

Nous souhaitons préciser ici que dans une situation d'enseignement habituelle, face à une classe et un programme à respecter, il n'est pas toujours possible pour l'enseignant de prendre le temps nécessaire pour combler d'autres lacunes. Ne serait-ce que parce qu'elles risquent de ne pas concerner l'ensemble des élèves de la classe. Selon Giroux (2013) :

> Si chaque situation cible un objet de savoir particulier, elle ne peut par ailleurs l'isoler et faire l'économie de coordinations de connaissances et savoirs que cet objet de savoir commande. Ainsi, une situation comporte en son noyau un enjeu mathématique principal qui exerce une vive force d'attraction, mais sollicite également beaucoup d'autres connaissances. La souplesse est de mise pour éviter de ramener trop brusquement les élèves à l'enjeu principal et ainsi réduire la complexité de l'activité mathématique qu'ils engagent. Il ne s'agit pas de diluer le savoir visé, ni d'encourager une dispersion de l'activité mathématique des élèves, mais d'exploiter et reconnaître, plutôt que contrecarrer, les opportunités que l'activité offre aux élèves de travailler des connaissances de manière fortuite, d'en poursuivre, pourrions-nous dire, l'apprentissage. Ainsi, l'enseignement doit se faire opportuniste pour profiter d'un événement sensible bien qu'inattendu, pour en préserver le potentiel d'apprentissage. (p. 79)

Lors de séances d'appui individuel, il est donc capital que l'enseignant saisisse ces opportunités pour travailler ou retravailler des connaissances qui semblent faire défaut à l'élève dans un contexte le plus adapté possible notamment à son âge. Nous avons en effet remarqué que lorsqu'un élève est en difficulté dans une situation d'apprentissage, le choix qui consiste à lui proposer des tâches adaptées à l'âge où ces connaissances auraient dû être acquises, renforce son sentiment d'incompétence en mathématiques et son découragement. En revanche, si elles sont travaillées différemment, et notamment recontextualisées dans une tâche adaptée à l'âge de l'élève, il peut avoir l'impression de progresser et donc reprendre confiance en ses propres moyens. Cette recontextualisation est donc également l'un des principes qui fondent notre dispositif d'appui.

1.3 Question de recherche et hypothèses

Notre étude poursuit le but de montrer que la mise en œuvre d'un dispositif de type appui individuel permet de mieux repérer les difficultés d'apprentissage, d'appréhender leur cause et *in fine* de proposer un processus d'étayage adapté (Dias, Sermier Dessemontet & Dénervaud, 2016). Comme nous l'avons évoqué dans notre introduction, ce processus d'aide orienté directement sur l'élève et son rapport à l'apprentissage des mathématiques est une aide pour les enseignants afin de distinguer de façon plus précise ce qui relève des difficultés provisoires que rencontrent les élèves à un moment ou un autre de leur scolarité, des véritables troubles représentant des obstacles à l'acquisition des savoirs. Ainsi notre recherche questionne-t-elle à la fois les éléments qui conditionnent la réussite de la mise en place d'un dispositif d'appui individuel, mais également sa pertinence à repérer les causes des difficultés d'apprentissage en mathématique. Dans le cadre de cet article, nous évoquerons essentiellement le deuxième point de ce questionnement. Dans cette étude, nous formulons plusieurs hypothèses associées à cette partie de notre questionnement de recherche.

Nous pensons que le recours à l'alternance de tâches complexes avec des tâches simples et isolées (Robert, 2008) permet une communication étayante pour l'élève qui bénéficie du dispositif d'aide. Nous faisons également l'hypothèse qu'il existe des conditions spécifiques relatives à l'environnement didactique quant à la conduite des entretiens par un enseignant dès lors qu'il interagit avec un élève repéré en difficulté en rejoignant ici Dias et Tièche-Christinat (2012) :

> Les transactions didactiques et les contrats didactiques noués avec l'élève prennent des colorations différentes, voire contrastées et nécessitent des négociations contractuelles complexes. Ces dernières vont avoir des répercussions sur la situation didactique et par conséquent sur le milieu didactique proposé à l'élève. Même si, dans certains cas de figure, les tâches proposées à l'élève par l'un ou l'autre des enseignants présentent des analogies, les milieux didactiques proposés ne peuvent être considérés comme semblables. (p.2)

Nous faisons également l'hypothèse que c'est par le recours à la résolution de tâches complexes qu'il est possible pour l'enseignant d'identifier l'origine des difficultés, même si ces dernières se situent à des moments relativement éloignés dans le cursus scolaire d'un élève.

Pour terminer, nous souhaitons montrer que la relation d'aide et d'empathie au sein des moments d'appui est une occasion offerte à l'élève de prendre des risques dans ses réponses et de mettre ainsi en mots ses connaissances et parfois ses lacunes dans un climat sécurisé.

2. La recherche

2.1 Le contexte institutionnel

Comme nous l'avons vu dans l'introduction, les maîtres de mathématiques de l'école secondaire se trouvent parfois bien démunis face à des élèves ayant reçu un diagnostic de dyscalculie. C'est en avril 2012 que le Gymnase de Nyon dans le canton de Vaud, a été confronté pour la première fois à deux diagnostics de dyscalculie pour des élèves de dernière année de scolarité[7]. Démunie face à ce type de diagnostics et aux mesures à prendre, la direction de l'établissement s'est alors tournée vers les enseignants en mathématiques. Ces derniers étaient eux-mêmes démunis face à une situation nouvelle et au mot "dyscalculie" qu'ils découvraient alors. Ils ont alors proposé d'organiser quelques séances d'appui individuel dans le but d'identifier le type d'aide dont ces élèves pouvaient avoir besoin.

Dans un second temps, pour répondre à la difficulté de mise en œuvre de tels dispositifs spécifiques si tard dans le parcours scolaire des élèves, une réflexion a alors été menée par la direction du Gymnase et quelques enseignants de mathématiques, en collaboration avec un formateur de la Haute Ecole Pédagogique du canton de Vaud (HEP VD), lui même enseignant dans le gymnase. Comme nous l'avons déjà dit plus haut, il semble peu probable que ces élèves soient réellement dyscalculiques, mais la présence des certificats médicaux oblige l'institution à mettre en place un dispositif adapté ! Par ailleurs, qu'ils soient dyscalculiques ou non, un certain nombre d'élèves se trouvent en grande difficulté en mathématiques à ce stade de leur scolarité.

Une première étape a été consacrée à la tentative de repérage des élèves susceptibles de se retrouver dans cette catégorie dans les premiers mois de leur parcours gymnasial pour leur proposer une aide. Ce repérage a été fait à l'aide des résultats des élèves à la fin du premier semestre en listant les élèves qui se trouvaient en difficulté essentiellement en

7 18 et 20 ans.

mathématiques ou dans les disciplines voisines (physique, chimie, économie), mais qui étaient proches du seuil de réussite en tenant compte de l'ensemble des disciplines.

Un appui en mathématiques leur a alors été proposé dans le cadre d'une semaine spéciale. Lors de cette semaine, on propose aux élèves des activités culturelles et sportives à la place des cours prévus. En 2013, une douzaine d'élèves ont participé au dispositif intitulé appui en mathématiques conduit par deux enseignants (dont le formateur de la HEP VD). Pendant cette semaine, chaque élève s'est vu proposer quatre séances d'appui individuel d'une heure environ. Une partie de ces séances d'appui ont été filmées. A la suite de cette première expérience et à l'aide des films, le dispositif a fait l'objet d'une étude plus fine, en particulier dans le cadre de mémoires professionnels d'étudiants de la HEP. Le cadre théorique proposé dans cet article a ainsi été affiné et le dispositif complet a été présenté aux enseignants de mathématiques du Gymnase de Nyon dans le cadre d'une formation continue en 2014. L'ensemble du dispositif a alors été remis en oeuvre en 2015 avec la participation de quatre enseignants et d'une vingtaine d'élèves. A ce jour, nous disposons des films de quatre séances d'appui pour 16 élèves différents, séances menées par quatre enseignants.

2.2 Analyse des séances d'appui

Le cas ci-dessous est décrit à l'aide des enregistrements vidéo des quatre séances d'appui[8] d'environ une heure chacune proposée à Isabelle en février 2013. Il s'agit donc d'observations indirectes effectuées une année après en collaboration avec l'enseignant qui a donné ces séances d'appui, co-auteur de cet article.

Isabelle, 17 ans, est une élève de première année de l'école de culture générale (équivalente à la seconde en France) qui a effectué ses études primaires et secondaires dans un autre établissement. Au début de l'année scolaire, ses résultats en mathématiques étaient très nettement insuffisants, elle avait en effet obtenu des notes de 2,5 et 3 aux deux premières interrogations écrites[9]. Dans toutes les autres disciplines, Isabelle avait des résultats supérieurs au seuil de suffisance. Nous faisons l'hypothèse que les causes des difficultés d'Isabelle en mathématiques sont plurielles. Elles peuvent être des conséquences de lacunes ou d'incompréhensions accumulées tout au long de sa scolarité, provenir de méthodes de travail inadaptées, ou d'un manque de confiance en elle en mathématiques. Enfin, il nous semble également envisageable d'incriminer une trop lente adaptation à son nouvel environnement scolaire en mathématiques. C'est en effet une discipline ou elle obtenait en général des notes suffisantes auparavant sauf lorsqu'il s'agissait de résolution de problèmes ou lors des examens de fin de scolarité obligatoire.

A ce stade, on peut déjà signaler que ces séances d'appui lui auront permis de reprendre confiance en ses compétences en mathématiques. En effet, on observe au cours de la semaine une attitude de moins en moins passive et une prise de risque de plus en plus

8 Ces séances ont été analysées pour partie par des étudiants de la HEP VD dans le cadre de leur mémoire professionnel. Notre article prend appui sur ce travail de mémoire (Menet et Engelberger, 2014).

9 Dans le canton de Vaud, les notes vont de 1 à 6 (au demi-point) et le seuil de suffisance est à 4. Des notes de 2,5 et 3 sont donc difficilement compensables, et peuvent être considérées comme de mauvaises notes.

grande au fur et à mesure des séances. Ces changements ont d'ailleurs aussi été constatés pendant de la seconde partie de l'année scolaire par l'enseignant habituel d'Isabelle.

2.2.1 Séance 1

Au début de cette première séance, l'enseignant explique à Isabelle comment vont se dérouler ces séances d'appui. Il précise ses attentes, et l'informe en particulier de la contrainte peu habituelle qu'elle doit exprimer sa pensée à voix haute.

> L'objectif étant que j'arrive en quelque sorte à accéder à votre brouillon intérieur pour voir où sont les problèmes que vous avez, ce que vous faites faux, soit dans la démarche, soit en termes de connaissances. Donc il faudra, mais je sais que c'est très difficile, essayer de réfléchir à haute voix.

Lors de cette première séance, Isabelle n'est pas très à l'aise avec cette consigne et l'enseignant devra la rappeler à plusieurs reprises. Elle écrit d'abord des choses au tableau noir sans explication ni commentaire, puis elle prend progressivement confiance en elle, et commence alors à parler à voix haute.

Comme cela lui avait été demandé au préalable, Isabelle a amené avec elle un certain nombre de tâches effectuées depuis le début de l'année dans le cadre du cours de mathématiques et qui lui posent encore des problèmes. Après cette introduction, l'enseignant lui propose la tâche suivante[10], extraite de celles amenées par Isabelle :

On considère la parabole d'équation $y = x^2 – 5x+7$ et la droite d'équation $y = m\,x+3$. Pour quelle valeur de m la droite est-elle tangente à la parabole ?

Lors des semaines qui ont précédé ces séances d'appui, les élèves de la classe d'Isabelle ont résolu des équations du second degré (factorisation et formule de Viète[11]) et étudié des fonctions quadratiques. Comme nous l'avons mentionné dans la partie précédente, nous faisons l'hypothèse qu'il est important de proposer dans ces séances, des tâches qui privilégient les changements de cadres ou de registres (Douady, 1986) ou les changements de point de vue (Robert, 2008, p. 55). On considère donc que cette tâche faisant intervenir un paramètre et plusieurs cadres est adéquate pour commencer cette séance. Pour chaque étape de la résolution suivante, nous proposons d'analyser ce qui est attendu en terme d'adaptations à la charge de l'élève (Robert, 2008, p. 50) puis de distinguer ce qui a été effectivement à la charge de l'élève et ce qui a été introduit par l'enseignant. Cela nous permet de mettre en évidence ce qu'Isabelle sait et ce qu'elle n'arrive pas à mettre en œuvre.
Notons que le découpage en étapes qui suit dans notre présentation n'est prescrit ni par la consigne ni par l'enseignant, mais qu'il suit le déroulement de la résolution conduite par l'élève.

Première étape de la résolution : passage du problème à sa mise en équation

La résolution de cette tâche nécessite des allers et retours entre les registres algébrique et graphique d'une fonction. Nous suivons ici Robert :

10 Cette tâche fait l'objet d'une résolution proposée en annexe.
11 La formule de Viète est ainsi nommée dans le plan d'étude romand.

Suivant le vocabulaire introduit par Duval (1995), nous appelons registre ce qui se rapporte à l'écriture d'une notion du point de vue sémiotique. (Robert, 2008, p. 55).

Cependant, il est possible que l'élève n'ait pas encore complètement construit le concept de fonction, et que pour lui, les allers et retours se fassent entre les cadres algébrique et graphique. L'élève voyant ces représentations graphiques et ces expressions algébriques comme des objets différents, et non pas comme des représentations sémiotiques d'un même concept : la fonction.

Il faut probablement aussi introduire un intermédiaire en effectuant une figure d'étude (croquis) plus ou moins précise. La signification du mot tangente doit également être sous surveillance dans ce contexte, car elle était auparavant limitée à une propriété géométrique associée à des droites et des cercles. Pour bien comprendre la tâche, l'élève doit donc reconnaître que tangent signifie dans ce cas : avoir un seul point d'intersection[12]. Il faut ensuite changer et utiliser le cadre algébrique pour résoudre l'équation $x^2–5x+7 = m\,x+3$. Il reste encore à reconnaître qu'il s'agit d'une équation du second degré en x (et non pas en m).

En lisant la consigne, Isabelle écrit immédiatement au tableau les équations. Elle lit également la seconde partie de la consigne, mais n'en fait manifestement rien. Elle décide alors d'écrire l'équation $y = x^2–5x+7 = m\,x+3$. Elle hésite beaucoup et semble peu sûr d'elle. Sur demande de l'enseignant elle tente une explication « Euh parce que x enfin y c'est les deux, et pour pouvoir résoudre pour savoir quel y. Enfin après je résous. ». Isabelle sait que pour résoudre ce type de problème, il faut travailler dans le cadre algébrique et poser une équation. Elle fabrique donc une équation avec les données qu'elle a à disposition, mais ne sait pas comment gérer les diverses lettres en jeu dans cette tâche ce qui correspond à l'une des difficultés que nous avions anticipées.

Nous notons qu'elle ne se réfère pas à la question posée pour justifier son calcul. Elle ne mentionne pas les mots droite, parabole ou tangente et n'éprouve pas le besoin de représenter cette situation dans le cadre graphique. Il semble qu'elle souhaite travailler seulement dans le cadre algébrique.

> P: Pourquoi voulez-vous résoudre une équation ?
> I: Pour trouver la valeur qu'on ne sait pas.
> P: D'accord, vous effacez juste le y
> (il reste alors l'équation x^2-$5x$+7=mx+3)
> P: Cette équation c'est une équation avec quelle inconnue ?
> I: (elle hésite), Ben… euh… x.
> P: x, mais ce qu'on vous demande c'est pas qu'elle est la valeur de x. Relisez la donnée.
> Isabelle relit en silence.
> I: Ah il faut trouver la valeur de m.

Jusqu'à ce moment de la résolution, Isabelle ne s'est toujours pas référée au cadre graphique. L'enseignant poursuit sa tentative de l'y amener en l'interrogeant alors sur les rôles respectifs des différentes lettres présentes dans l'équation.

> P: Il faut trouver la valeur de m. Cette équation là, si vous trouviez une solution, elle correspondrait à quoi cette solution ?

12 Les élèves ne connaissent pas la notion de dérivée et on évite le cas où la droite serait verticale qui n'est pas possible dans cet exemple.

Isabelle ne répond pas à cette question, et finalement l'enseignant lui demande à quoi pourrait ressembler le graphe correspondant à l'équation $y = x^2–5x+7$. Isabelle esquisse alors la parabole attendue, mais lorsque l'enseignant lui pose la même question pour l'équation $y = m\,x+3$, Isabelle répond qu'il s'agit de la même parabole. L'enseignant lui demande alors de dessiner une droite non horizontale qui coupe en deux endroits la parabole. Isabelle s'exécute, mais ne comprend manifestement pas où son enseignant veut en venir. Elle semble en effet très empruntée pour tracer cette droite, car elle fait d'abord un geste horizontal, puis trace une droite verticale alors que l'enseignant vient de lui préciser qu'elle devait être oblique.

Pensant alors que la présence de *m* est un obstacle pour Isabelle, l'enseignant lui demande de remplacer *m* par –2 dans son équation (qui devient ainsi $x^2–5x+7 = –2x+3$). L'enseignant a choisi cette valeur particulière pour deux raisons. La première est technique, la droite $y = –2x+3$ est facile à esquisser. La seconde raison est de confronter Isabelle à une équation du second degré sans solution. En effet, l'objectif de l'enseignant est de lui permettre de faire des liens entre les cadres graphique et algébrique ; entre les solutions de l'équation et les intersections des courbes. En choisissant une valeur de *m* pour laquelle le Δ de la formule de Viète est négatif, il pense favoriser la prise de conscience par Isabelle de l'importance de ce discriminant dans ce problème.

D'ailleurs, lorsqu'il repose la question sur la signification des solutions de l'équation, Isabelle répond que cela correspond aux points d'intersection sur son schéma. À la demande de l'enseignant, elle les distingue correctement sur le graphique. Elle semble alors redevenue dans une zone de confiance et se lance dans la résolution de l'équation relativement facilement en utilisant la formule de Viète jusqu'à ce qu'elle s'aperçoive que le discriminant $\Delta = b^2– 4ac$ va être négatif : elle n'effectue pas la dernière soustraction 9–16.

> E: Ben après c'est impossible vu que ça va être négatif.
> P: Ça va être négatif, donc qu'est-ce qui est impossible ?
> E: Ben de faire le delta.
> P: Faire delta ça été possible, vous avez trouvé –7.
> E: Enfin de trouver les valeurs de *x*.
> P: Donc c'est impossible de trouver ?
> E: Les points d'intersection.
> P: C'est impossible de les trouver, ou il n'y a pas de point d'intersection ?
> E: Il n'y a pas de point.

On peut se demander comment Isabelle aurait réagi si l'enseignant n'avait pas posé sa question sous la forme d'une alternative, car ce mode de questionnement a permis à Isabelle de deviner la bonne réponse sans nécessairement la comprendre. Le lien avec le problème posé n'est pas fait, Isabelle ne comprend pas que la valeur –2 affectée à m est la cause de ce qui pour elle est une impasse à ce moment de sa résolution.

Pour terminer, l'enseignant demande à Isabelle de dessiner une situation avec une parabole et une droite sans point d'intersection. Isabelle dessine alors très rapidement une situation où la droite est tangente à la parabole. Lorsque l'enseignant lui signale que dans ce cas il y a un point d'intersection, elle corrige facilement son erreur. Le maître demande alors à Isabelle de relire la consigne et de représenter la situation décrite ce qu'Isabelle fait en reconnaissant le cas qu'elle vient d'esquisser à tort précédemment. Elle identifie alors que dans ce cas, il y a exactement un point d'intersection.

En reprenant cette première partie de résolution, on constate que toutes les adaptations qui concernent le cadre graphique ou un changement de cadre ont été effectuées par l'enseignant. Isabelle a systématiquement cherché à travailler dans le cadre algébrique dans lequel elle sait résoudre une équation. Elle a aussi su esquisser une parabole, mais elle ne l'a pas fait spontanément alors que la question posée l'était pourtant dans le cadre graphique. Par contre l'équation $x^2–5x+7 = m\,x+3$ nécessaire à la poursuite de la résolution est apparue rapidement, mais probablement plus par habitude ou par faute d'alternative que pour les raisons attendues par l'enseignant.

La deuxième étape de la résolution : le travail avec le paramètre

La phase suivante de la résolution de cette tâche consiste à :

- Reconnaître que l'on ne doit pas chercher les solutions de cette équation, mais la valeur de m pour laquelle cette équation n'admet qu'une seule solution pour x ,
- Se souvenir qu'une équation du second degré n'admet qu'une seule solution si et seulement si le discriminant $\Delta = b^2– 4ac$ de la formule de Viète est nul.
- Reconnaître que la valeur de Δ va dépendre de la valeur de m, ce qui n'est encore une fois pas habituel. En effet, le discriminant est plutôt assimilé à un nombre dans les expériences des élèves, voire même à un nombre entier.
- Il faut encore éventuellement reconnaître que cette équation ne peut pas être du premier degré puisque le paramètre m n'intervient pas dans le coefficient du second degré.

Lors de la résolution de l'équation précédente, Isabelle avait reconnu que lorsque le discriminant Δ était négatif, l'équation n'admettait pas de solution. L'enseignant se réfère à cette résolution pour voir si Isabelle peut faire le lien entre le nombre de solutions d'une équation du second degré et le signe du discriminant. Malgré plusieurs tentatives pour essayer de faire trouver ou retrouver ce résultat à Isabelle, l'enseignant doit finalement se résoudre à lui dire : « Zéro. Donc ce que vous voulez vous, puisque vous voulez une seule intersection, c'est delta égal zéro. Ça vous pouvez l'écrire juste à côté de votre schéma.»

Pour poursuivre la résolution de cette tâche, il faut alors appliquer la démarche propre, pour l'instant, à la résolution des équations du second degré qui est d'égaler le membre de droite à 0 et obtenir $x^2–5x– m\,x+4 = 0$. Il faut ensuite appliquer la formule de Viète, mais il y a une difficulté potentielle puisque le membre de gauche de l'équation compte quatre termes au lieu de trois dans la configuration habituelle. Il faut donc reconnaître la possibilité de ne pas l'appliquer au terme du second degré. Il y a alors un choix, non forcé, de gestion des signes entre $x^2– (5+m)\,x+4 = 0$ et $x^2+ (–5–m)\,x+4 = 0$.

L'enseignant propose alors à Isabelle de reprendre l'équation $x^2–5x+7 = m\,x+3$ et lui demande ce qu'il faut faire pour calculer le delta. Isabelle écrit en deux étapes et sans aide l'équation $x^2–5x–m\,x+4 = 0$. Lorsque l'enseignant lui demande de justifier, sa réponse est confuse, mais elle reconnaît que $a = 1$, $c = 4$ et surtout que $b = –5–m$ sans passer par la mise en évidence du x. Elle écrit alors spontanément $\Delta = (–5–m)^2–16$.

Lors de ces deux dernières étapes, on constate encore une fois qu'Isabelle n'arrive pas à faire le lien entre le cadre graphique dans lequel la question est posée et le cadre algébrique dans lequel elle doit travailler pour trouver la réponse. Par contre elle est relativement à l'aise algébriquement et montre qu'elle est capable de calculer le discriminant dans une situation pourtant peu habituelle pour elle.

La troisième étape de la résolution : l'exploitation du discriminant

L'étape suivante consiste à égaler le discriminant à 0 et reconnaître une nouvelle équation du second degré, cette fois en *m*. Pour la mettre dans une configuration habituelle, choisir une identité remarquable, soit $A^2–B^2 = (A–B)\,(A+B)$, soit $(A±B)^2 = A^2±2AB+B^2$. Le choix n'est pas forcé, mais il induira peut-être des méthodes différentes pour la suite de la résolution du problème. Par ailleurs, le $(–5–m)^2$ rend la reconnaissance de l'identité remarquable difficile, car la présence de deux signes *moins* n'est pas habituelle. De plus, ils n'ont pas la même signification puisque le premier indique un nombre négatif alors que le second indique une soustraction.

Isabelle n'égale pas immédiatement le discriminant à zéro, elle poursuit son développement sans utiliser une identité remarquable, mais en distribuant le $(–5–m)$ avec lui-même. Elle obtient alors $25–10m+m^2$. Lorsque l'enseignant lui demande de refaire son développement à haute voix, il s'aperçoit que quand elle écrit $–5–m$, elle dit systématiquement « $–5m$ ». Lorsqu'il lui demande de lire ce qu'elle a écrit, Isabelle prend conscience du fait qu'elle ne dit pas ce qu'elle écrit, ce qui lui permet de corriger les signes erronés sans autre intervention de l'enseignant. Isabelle arrive alors à écrire sans faire d'erreur $\Delta = 9+10m+m^2$. Par contre, c'est l'enseignant qui lui demande d'écrire $9+10m+m^2 = 0$ et qui lui rappelle qu'elle cherche la valeur de m qui soit solution de cette équation. Là encore si Isabelle réalise correctement la plupart des calculs dans le cadre algébrique, c'est l'enseignant qui situe ces calculs dans la résolution de la tâche.

Une fois que l'on a obtenu l'équation $m^2 +10m+9 = 0$, il faut choisir une méthode de résolution, choix non forcé, entre la factorisation et la formule de Viète. L'utilisation de la formule de Viète peut engendrer une confusion avec la recherche précédente du discriminant de la première équation.

Lorsque l'enseignant lui demande de quel degré est cette équation, elle répond que c'est une équation du premier degré, car elle ne contient qu'une seule inconnue. Elle remarque ensuite qu'il s'agit d'une équation du second degré en *m*. De notre point de vue, ce simple changement de lettre (*m* au lieu de *x*) est probablement à l'origine de son erreur. Lorsque l'enseignant lui demande quels sont les outils à disposition pour résoudre une telle équation, Isabelle mentionne la mise en évidence et les identités remarquables. Elle élimine rapidement le premier, mais ne sait manifestement pas reconnaître une identité remarquable dans cette situation. Elle propose alors d'utiliser la formule de Viète, mais l'enseignant lui suggère de factoriser le trinôme en cherchant deux nombres dont la somme est 10 et le produit 9. Isabelle essaye avec 3 et 3 qu'elle élimine, mais n'arrive pas à trouver d'autres candidats. Par contre lorsque l'enseignant lui propose 9 et 1 elle les valide immédiatement et transforme spontanément son équation en $(m+1)\,(m+9) = 0$ et en déduit les deux solutions $m = –1$ et $m = –9$.

La dernière étape de la résolution : le contrôle de la validité des solutions

Il faut alors gérer l'apparition de deux solutions –1 et –9 pour cette équation puisque la recherche consiste à trouver une seule valeur de m. Il faut revenir dans le cadre des courbes ou des fonctions pour valider l'existence possible de deux fonctions dans le cadre graphique. Il peut, par ailleurs y avoir une confusion puisque l'on trouve deux solutions à une équation alors que le problème était de trouver la valeur de m pour que l'équation initiale admette une seule solution. Pour s'assurer de la pertinence des deux solutions, l'élève peut décider de chercher les coordonnées des points d'intersection des deux courbes (des deux couples de courbes) en remplaçant respectivement m par –1 puis par –9. Il faudra alors travailler dans le cadre fonctionnel pour savoir comment trouver les secondes coordonnées des points d'intersection.
Alors qu'Isabelle vient d'écrire $m = -1$ et $m = -9$, l'enseignant engage l'échange sur la validité de ces solutions :

> P: ouais, on vérifie que c'est juste ?
> Isabelle ne répond pas
> P: ça voudrait dire faire quoi ?
> I: que je remplace m par –1 et par –9 (elle montre l'équation $9+10m+m^2 = 0$)
> P: où ?
> I: ben dans l'équation ici
> P: ouais, mais si vous remplacez ici vous vérifierez que vous avez bien résolu l'équation
> I:…
> P: sans avoir la certitude que c'est la bonne équation…

L'enseignant lui signale le problème du mauvais choix de l'équation, ce qui conduit Isabelle à remplacer m par –1 dans l'équation $x^2–5x+7 = mx+3$. Ce faisant, elle obtient l'équation $x^2–4x+4 = 0$ qu'elle transforme spontanément en $(x–2)$ $(x–2)=0$.

> P: Donc combien de solutions il y a à cette équation ?
> I: Il y a qu'une seule.
> P: Il y en a qu'une seule, c'est $x = 2$. Ça veut dire que il y a combien d'intersections entre la droite et la parabole ?
> I: Il y en a qu'une seule.

Avec un fort étayage de l'enseignant, elle finit par dire que ce 2 correspond à la première coordonnée du point d'intersection, mais elle ne sait vraiment pas comment calculer la seconde. Elle reste donc enfermée dans le cadre algébrique dans lequel elle est relativement à l'aise, mais oublie la question à laquelle elle doit répondre dans cette tâche qui se situe pour elle dans le cadre graphique. Lorsque l'enseignant lui demande de retourner dans le cadre graphique, elle sait plus ou moins répondre à ses questions, mais elle n'y revient pas spontanément. Nous faisons l'hypothèse qu'elle n'a pas totalement construit le concept de fonction, et qu'elle ne peut donc pas s'y référer pour passer d'un registre à un autre. Expression algébrique et représentation graphique sont traitées comme deux objets différents et non pas comme des registres sémiotiques se rapportant à un même concept.

Le travail métacognitif

Par la suite, l'enseignant demande à Isabelle d'identifier les étapes clés de la résolution. Isabelle entoure alors rapidement l'équation $x^2–5x+7 = mx+3$, le $\Delta = 0$ et le schéma qui représente une droite tangente à une parabole. L'enseignant demande ensuite à Isabelle d'identifier les passages délicats de la résolution. Elle entoure alors $(-5-m)^2$ qui lui a en effet posé quelques problèmes. L'enseignant lui propose d'entourer aussi le $b = -5-m$ malgré le fait que sa réponse soit directement correcte lors de la résolution.

Pour terminer cette première séance, l'enseignant demande à Isabelle de refaire cet exercice avant la séance du lendemain pour qu'elle puisse voir ce qu'elle arrive à refaire seule et ce qui lui pose encore problème. Il lui propose aussi d'autres exercices similaires à celui-ci. On peut rappeler qu'Isabelle a résolu l'exercice au tableau noir et qu'elle n'a donc pas pu prendre de note. Elle se retrouvera donc face à une page blanche lorsqu'elle devra refaire l'exercice chez elle.

2.2.2 Séance 2

La séance 2 est consacrée à la résolution de deux tâches complexes[13] conduisant *in fine* à l'utilisation de la formule de Viète dans le cas spécifique d'une équation du second degré comportant une inconnue x (tâche 1) et un paramètre m (tâche 2). Contrairement à ce que nous avons fait pour la première séance, nous centrons notre analyse sur quelques évènements qui surviennent dans la résolution des tâches, évènements qui nous semblent emblématiques des difficultés qu'Isabelle rencontre dans de telles situations.

L'énoncé de la première tâche qui est proposée à Isabelle est le suivant :

> On veut faire une boîte ouverte de base carrée à partir d'une feuille de carton carrée en coupant à chaque coin de la feuille un carré de 3 cm de côté et en pliant les côtés. De quelle taille doit être la feuille de carton pour que la boîte ait un volume de 48 cm^3 ?

L'énoncé de la deuxième tâche est :

> Pour quelles valeurs de m les graphes des fonctions $f(x) = -x^2+m$ et $g(x) = x^2+mx+2$ sont-ils tangents ?

Il s'agit de deux tâches complexes, car de nombreuses étapes organisées sont attendues pour conduire chaque problème à sa résolution. Au final, ces tâches doivent permettre à Isabelle de faire un inventaire assez large de ses compétences et de ses connaissances, ce qui nous paraît conforme aux attentes du dispositif d'appui individuel tel que nous l'avons présenté plus haut.

Changements de cadres et de registres

L'énoncé de la première tâche est formulé en langage naturel et engage l'élève qui doit la résoudre à se positionner d'emblée dans un contexte relativement réel : il s'agit de constituer le patron d'une boîte en carton parallélépipédique (voir annexe). Isabelle convoque donc à juste titre un cadre géométrique en proposant d'emblée de "faire un croquis". Elle maîtrise relativement bien cette étape en produisant un tracé conforme à ce qui est attendu. En revanche, dès qu'il est question pour elle de traduire les données numériques dans son croquis, les choses se compliquent un peu. On peut en particulier noter qu'Isabelle ne cherche pas une résolution géométrique, mais qu'elle convoque d'emblée le cadre algébrique. Alors que l'une des valeurs est une inconnue (x) et l'autre est une constante (3), Isabelle est en difficulté pour rapporter ces données dans son croquis et finit par attribuer la valeur $x+6$ à la longueur du fond de la boîte alors que

13 Les résolutions de ces deux tâches sont proposées en annexe.

c'est x–6 qui est attendu. Il faut un fort étayage de l'enseignant qui lui propose finalement de prendre le recul physique nécessaire pour qu'elle prenne conscience de son erreur : "vous êtes trop près du tableau". Dans son croquis le segment mesurant x est en effet plus grand que celui qui mesure x+6. Tout se passe comme si Isabelle passait d'un cadre à l'autre sans faire de lien constructif entre les deux. Son raisonnement numérique semble se faire sans lien avec le contexte réel du patron de la boîte.

Après plusieurs hésitations sur la formule du volume d'une boîte, Isabelle change à nouveau de cadre pour traduire cette formule ($L\times l\times h$) énoncée à l'oral en utilisant les données numériques. Alors que nous pourrions attendre à ce stade l'écriture $3(x–6)\ (x–6)$ Isabelle s'en tient à développer le produit $(x–6)\ (x–6)$ pour exhiber avec dextérité dans le maniement des calculs algébriques une expression du second degré : $x^2–12x+36$. Il faut une intervention du professeur pour lui signifier que cette écriture est certes juste, mais qu'elle ne correspond pas à la question posée. Une fois encore on constate que sans étayage de l'enseignant, Isabelle semble se réfugier dans le cadre algébrique qu'elle maîtrise relativement bien en se coupant en quelque sorte du cadre graphique qui apparaît alors sans importance pour elle.

Le troisième événement qui concerne les changements de cadres se situe à la fin de la résolution de la phase algébrique. Après avoir effectué le calcul du discriminant, Isabelle finalise son travail en écrivant les deux solutions de l'équation. Elle manque seulement une étape de factorisation possible lors de la résolution, mais cela est sans conséquence sur le travail algébrique puisque les solutions finales sont correctes. Toutes les formules sont connues et appliquées correctement dans cette phase, mais il faut une fois encore un étayage très incitatif du professeur pour obliger Isabelle à changer à nouveau de cadre. Alors que les solutions viennent d'être écrites, l'enseignant laisse un temps mort pour savoir si Isabelle va tenter une vérification graphique. Après un petit silence, elle propose de vérifier algébriquement ses deux solutions. Pour elle, il n'y a pas vraiment de nécessité d'utiliser le croquis pour cela. C'est donc le professeur qui insiste pour qu'elle fasse cette vérification dans le cadre géométrique et éliminer ainsi une des deux solutions obtenues algébriquement.

De notre point de vue, les événements ci-dessus que l'on a aussi pu observer à d'autres moments dans les séances d'appui d'Isabelle mettent en évidence le fait qu'elle cherche par tous les moyens à travailler dans le cadre algébrique, même lorsque cela n'est pas vraiment nécessaire. Elle arrive plus ou moins bien à passer du cadre initial géométrique au cadre algébrique, mais elle ne revient pas dans le cadre initial lorsqu'elle a obtenu des solutions dans le cadre algébrique. Tout laisse à penser que pour elle, faire des mathématiques consiste essentiellement à résoudre des équations, quel que soit le contexte dans lequel la question est posée. On peut faire l'hypothèse que l'enseignement qu'elle a suivi auparavant a privilégié la maîtrise des outils algébriques au détriment de la résolution des problèmes ceci favorisant progressivement l'attraction exercée par l'algèbre à la manière d'un effet de contrat. On retrouve ici, dans un contexte différent, des éléments déjà observés par Bloch (2013) au collège français avec des élèves en difficulté.

Le dernier événement que nous rapportons concernant cette difficulté intervient lors de la résolution de la deuxième tâche qui consiste à résoudre une équation paramétrique. Il s'agit de rechercher la possibilité d'un point tangent entre deux paraboles, problème qui nécessite donc un appui sur le registre graphique à la fois pour comprendre la signification des recherches algébriques, mais également pour vérifier les résultats obtenus par calcul. Une fois encore, nous constatons dans l'observation en fin de résolution que l'étayage du professeur est nécessaire pour qu'Isabelle profite de ces allers et retours entre les registres algébrique et graphique de la fonction. Elle n'a pas recours spontanément à la vérification dans le cadre graphique des solutions qu'elle a produit. Le dessin réalisé en début de travail a sa propre validité, mais n'est pas convoqué comme appui à la compréhension du problème. Pour Isabelle, la finalité semble atteinte quand la production des deux solutions d'une équation du second degré est faite.

Comme nous le relevions plus en avant dans cet article (2.2.1), le concept de fonction est difficile et met du temps à être construit par les élèves qui y sont confrontés progressivement. Dans le passage ci-dessus, Isabelle utilise comme précédemment de l'algèbre pour résoudre un problème posé dans le cadre graphique. Comme le précise Duval (1996) :

> Un registre se détermine par rapport à un système sémiotique permettant de remplir les trois fonctions cognitives fondamentales. Un cadre se détermine par rapport à des objets théoriques, en l'occurrence des objets mathématiques. Il peut y avoir changement de cadre sans changement de registre et changement de registre sans changement de cadre, car un cadre peut exiger la mobilisation de plusieurs registres. (p.357)

Même si elle en utilise un vocabulaire spécifique, elle ne donne pas l'impression de se référer au concept de fonction. Pour elle, la représentation graphique et l'expression algébrique ne sont pas des registres différents pour exprimer une même fonction, mais des objets mathématiques qui se trouvent dans des cadres différents. Comme auparavant, elle cherche donc à traduire un problème posé dans le cadre graphique ou géométrique en utilisant des outils algébriques et comme auparavant elle ne voit pas l'intérêt de traduire ses solutions algébriques dans le cadre initial.

Calculs et contrôles

Alors qu'Isabelle montre beaucoup de dextérité et de fluidité dans le calcul algébrique que ce soit pour les développements ou les factorisations, un événement surprenant survient lors de la finalisation du calcul du discriminant. La dernière étape de ce calcul consiste à effectuer la soustraction 144-80 pour laquelle Isabelle hésite un peu avant d'écrire finalement 136. Le professeur manifeste sa surprise en la questionnant sur cette soustraction. Isabelle, manifestement mal à l'aise par cette relance inattendue, change son résultat d'une manière une nouvelle fois assez étonnante et propose 156, puis 36 en supprimant une centaine.

> I : Hum ça fait 144 – 80, est égal à 136
> E : 144 – 80 ?
> I : Euh 136, je veux dire 156.
> E : Vous avez fait quoi ? Comment vous faites pour trouver 156 ?
> I : Bah 144 – 80
> E : Vous avez 144 billes vous en enlevez 80 et vous en obtenez plus ?
> I : Euh 56, voilà *(elle barre le 1 de la centaine)*

Cette difficulté de calcul est inattendue par le professeur, et il faut en effet du recul et un temps d'analyse plus conséquent pour la comprendre. Après réflexion, nous faisons l'hypothèse qu'Isabelle tente d'utiliser des procédures de compensation pour effectuer mentalement la soustraction. Ainsi pour soustraire 80 à 144, elle effectue d'abord 44–80 qui donne effectivement –36. La centaine n'étant pas concernée elle l'utilise ensuite pour compléter son écriture : 136. Cette procédure relativement intuitive fonctionne assez bien, mais est peu connue ni utilisée à l'école[14].

Mais Isabelle commet ici une erreur de signe : il aurait fallu faire 100–36 pour terminer. Quant à la proposition 156, on peut faire l'hypothèse qu'elle provient une nouvelle fois de cette procédure de compensation que tente systématiquement Isabelle puisque 56 est le complément de 44 pour aller à 100.

Le professeur relance alors en cherchant à la fois à comprendre et à aider l'élève :

> E : 56 ? Regardez 144, ça finit par quoi ?
> I : Un 4
> E : 80 ça finit par quoi ?
> I : Un 0
> E : Le résultat de la soustraction il va finir par quoi ?
> I : Ah par 6
> E : 4–0 ?
> I : Euh 4 je veux dire
> E : Par 4.

Ce passage, que l'on peut qualifier de maïeutique, permet au professeur d'investiguer sur la procédure utilisée par Isabelle, et conduit progressivement à la prise de conscience par l'élève que ce n'est pas l'erreur de calcul qui importe, mais la recherche de sa cause. En continuant son fort étayage, le professeur conduit finalement Isabelle vers une démarche produisant le résultat attendu :

> E : Comment vous faites pour faire 144 – 80 ? Vous pourriez euh, le dire ?
> I : Enfin… je sais pas. Je fais déjà 144 – 80, je fais déjà pour aller jusqu'à 100.
> E : Ça fait combien ?
> I : Ça me fait, ça me fait… euh moins 80, euh… ah 36
> E : C'est quoi qui fait 36 ? De… vous allez jusqu'à 100, vous partez de 144 ou vous partez de 80 ?
> I : Euh je pars de 80
> E : Alors de 80 jusqu'à 100 ça fait combien ?
> I : De 80 jusqu'à 100 bah je fais 44 – 80, ça me fait euh 36 ?
> E : Ah ça c'est une mauvaise idée. C'est une mauvaise idée ça. Je vois ce que vous faite. De 144 à 100 il y a combien ?
> I : Il y a 44 ?
> E : Il y a 44. Et de 100 à 80 ?
> I : De 100 à 80 ? Bah il y en a 80
> E : De 100 jusqu'à 80 il y a combien ?
> I : Ah il y en a 20
> E : Donc de 144 à 80 il y en a ?
> I : Ah euh… il y en a 64

14 Pour effectuer 24-8, on peut passer par l'étape 4-8, trouver -4, puis faire 20-4=16

Isabelle manifeste des compétences assez étonnantes en matière de calcul mental. Elle paraît en difficulté dans la procédure élémentaire de la soustraction comme nous pourrons le vérifier lors de l'analyse de la quatrième séance[15]. En revanche, elle semble avoir assez confiance dans les procédures qu'elle connaît puisqu'elle n'utilise quasiment pas de contrôle ni de vérification spontanément. Du reste elle se trompe finalement peu. Elle paraît très à l'aise dans le cadre algébrique dans lequel elle privilégie l'application de règles en poursuivant finalement une finalité : conclure. Nous faisons l'hypothèse que certains évènements lui sont relativement indifférents, et qu'elle série finalement les faits numériques qu'elle rencontre. Certains sont intéressants et d'autres pas. Elle a de plus très souvent recours à ses capacités mnésiques qui nous apparaissent plutôt élevées dans nos observations. Ceci pousse d'ailleurs Isabelle à privilégier un raisonnement de type analogique (vs par inférence) qui lui permet d'être rapide et assez efficace dans de nombreuses situations.

Inconnue / variable (paramètre)

Il s'agit d'une difficulté assez connue et récurrente dans l'apprentissage du calcul algébrique, les élèves rencontrant un obstacle dans la non transparence des significations des symboles utilisés. Ainsi, alors que les lettres x et y renvoient aux inconnues les plus usuelles, la rencontre du m (ou du k) peut être considérée comme un déséquilibre important dans les connaissances des élèves.

Isabelle montre dans ce domaine des hésitations qui sont connues en didactique, cependant il nous paraît opportun de les signaler, car elles relèvent d'une posture caractéristique chez cette élève.

La deuxième tâche de la séance d'appui individuel consiste à résoudre un système d'équations paramétriques qui conduit finalement à égaler $-x^2+m$ et x^2+mx+2.

Une fois encore, tant qu'il s'agit de calcul algébrique Isabelle montre beaucoup d'efficacité dans les développements et les factorisations nécessaires, mais semble imperméable à la compréhension et donc au sens de sa résolution. Elle arrive donc assez rapidement au calcul du discriminant, et montre alors beaucoup d'incertitude quant à l'attribution des valeurs a, b et c que valent les composantes de celui-ci ? Les présences simultanées de x et m sont perturbantes, et Isabelle ne sait plus si cette équation est "en x" ou "en m". Il faut un étayage conséquent du professeur pour dénouer le problème rencontré :

Après réduction et simplification, l'équation trouvée est la suivante : $2\times2+mx-m+2=0$

Isabelle hésite beaucoup sur la valeur qu'il faut attribuer à la lettre b. Elle propose d'abord $m\times m$ puis $m-m$ c'est à dire 0. Il faut un étayage important du professeur pour qu'elle prenne conscience des erreurs qu'elle commet. Il semble qu'elle s'en accommode en les traitant comme des évènements mineurs dans son travail. Lors de la première séance, l'enseignant avait anticipé cette difficulté malgré la réponse correcte proposée par Isabelle, mais le contexte était légèrement différent puisque les deux termes centraux de l'équation $x^2-5x-mx+4=0$ étaient alors du premier degré en x. La mise en évidence de cette difficulté par l'enseignant lors du travail de type méta cognitif en fin de première séance, n'a pas suffi pour qu'Isabelle passe seule par-dessus cette difficulté.

15 Isabelle sera en échec pour le calcul de 25-16

En revanche, elle a su gérer les autres difficultés qu'elle avait mises en évidence.

2.2.3 Séance 3

Dans cette troisième séance (deux jours après), Isabelle doit débuter par la résolution de deux équations du premier degré contenant plusieurs niveaux de parenthèses.

$2[3x–5(2–x)] – 3 = 2x–9$
$(2x+1)^2– (2x–3)^2 = 8$

Elle gère correctement l'utilisation des parenthèses, et ne rencontre aucune difficulté avec les opérations sur les polynômes. Nous remarquons tout de même de petits évènements inattendus. La procédure habituellement utilisée pour résoudre des équations du premier degré consiste à isoler les termes du premier degré d'un côté du signe égal et les nombres de l'autre côté. Isabelle, quant à elle, met tous les monômes du même côté et égale le tout à zéro pour trouver $14x–14 = 0$. Au lieu d'écrire $14x = 14$ (puis $x = 1$), elle factorise le polynôme ainsi obtenu :

$$14x–14 = 0$$
$$14(x–1) = 0$$
$$x = 1$$

Cette façon de faire est analogue à celle qui a été travaillée dans le cadre de la résolution des équations du second degré. Nous faisons l'hypothèse qu'elle utilise cette méthode, car d'une part, elle est plus récente dans sa mémoire et d'autre part, parce qu'elle ne se souvient plus de la procédure utilisée pour la résolution des équations du premier degré. Plus tard, avec une autre équation, elle tente d'appliquer la même stratégie, mais elle se retrouve en difficulté, car elle obtient $–18x+1 = 0$ écriture qu'elle ne sait pas factoriser. Le blocage semble provenir du fait qu'elle ne sait résoudre que des équations unitaires en « changeant le signe du terme constant ».

Notre deuxième remarque concerne la question de la signification du symbole « – » pour Isabelle. Dans la première équation qu'elle doit résoudre apparaît le nombre relatif –3 juste après une parenthèse.

$$2[3x–5(2–x)]–3 = 2x–9$$

Au terme de sa résolution, lorsque l'enseignant lui demande s'il y a quelque chose dans l'exercice qui lui a posé problème, elle mentionne ce nombre –3. Elle précise qu'elle a hésité entre multiplier par –3 ou soustraire 3 et elle a décidé de soustraire 3. Ce type de difficulté nous semble cependant fréquent et correspond à un obstacle didactique relativement connu. En effet, comme ce même signe est utilisé à la fois pour exprimer un nombre négatif ou comme signe opérateur de la soustraction, certains élèves ne savent pas comment l'interpréter ni l'utiliser, d'autant que la référence comme opérateur est antérieure dans un cursus scolaire. Cela provoque alors le doute entre soustraction et multiplication. On peut d'ailleurs ajouter ici que le signe indiquant l'opérateur de la multiplication ne se note plus lorsque l'on fait de l'algèbre. Les élèves qui n'ont pas encore assimilé entièrement l'utilisation *a minima* des parenthèses en utilisant la priorité des opérations se trouvent alors en grande difficulté. Nous notons ici qu'Isabelle est une nouvelle fois mal à l'aise avec le symbole « – » et ses représentations possibles.

Un troisième point nous semble relever d'un moment d'analyse. Lors de la deuxième partie de la séance, l'enseignant propose à Isabelle de résoudre une équation du premier degré contenant des fractions.

$$\frac{x-3}{2}-\frac{3x-4}{3}=x-\frac{13}{12}$$

Sans même se donner un temps de réflexion suffisant quant à la manière d'aborder ce type d'équation, elle ajoute 1 en dénominateur de x et écrit :

$$\frac{x-3}{2}-\frac{3x-4}{3}=\frac{x}{1}-\frac{13}{12}$$

Elle marque alors un temps d'arrêt et semble attendre le questionnement de l'enseignant. Elle propose sur un ton hésitant de « faire des soustractions » sans tenir compte des dénominateurs : « on fait x–3 – 3x–4 », mais elle n'écrit rien. C'est grâce à la question de l'enseignant qu'elle arrive alors à dire : « Parce que c'est tout en fractions ».

Isabelle a retenu que pour résoudre des équations contenant des expressions fractionnaires, il faut commencer par « tout mettre en fractions ». En revanche, elle ne semble pas maîtriser la suite de la procédure. Elle donne l'impression de ne pas savoir additionner et soustraire avec des fractions. Même avec l'étayage du professeur qui lui propose d'effectuer un calcul plus simple : 1/2+1/3, Isabelle reste en difficulté puisqu'elle propose 3/2+2/3 comme écriture équivalente. L'enseignant doit aller plus loin et expliciter davantage la procédure : « 1/2 n'est pas équivalent à 3/2, mais à 3/6 ». Isabelle peut alors finir la résolution de l'équation en transférant pas à pas la procédure évoquée dans la tâche simple.

A ce stade, il est assez délicat d'interpréter cette difficulté de calcul. Isabelle ne sait-elle vraiment pas calculer avec des fractions, ou s'agit-il plutôt d'une technique qu'elle a oubliée ? Nous pourrions faire ici l'hypothèse qu'il s'agit bien d'une lacune dans ses connaissances, car elle semble vraiment découvrir les étapes du calcul fractionnaire. En effet, même après un fort étayage de l'enseignant, sa résolution reste hésitante et laborieuse. Elle éprouve également le besoin de justifier oralement chaque pas de calcul même s'il est parfois identique au précédent. Ce recours à l'utilisation spontanée du langage oral laisse à penser qu'elle est en train de construire une nouvelle connaissance.

2.2.4 Séance 4

Au début de cette dernière séance, Isabelle affirme qu'elle a résolu en autonomie et sans grande difficulté toutes les équations que l'enseignant lui a proposées lors de la séance précédente (la veille). Il faut préciser ici que ces équations étaient du même type que celle proposée en fin de séance 3 : elles comportaient toutes des écritures fractionnaires. Au vu des difficultés rencontrées par Isabelle dans la séance précédente, le professeur est très surpris et lui demande alors d'en résoudre une pour commencer la séance. Il constate qu'au lendemain du bref rappel à propos des procédures de calcul sur les fractions, Isabelle ne commet plus aucune erreur et effectue même la résolution avec aisance et assurance. Elle fait ainsi preuve d'acquisitions solides sur ce type d'opérations ce qui ne confirme pas notre hypothèse concernant une lacune dans ses connaissances. Il est en effet peu probable qu'Isabelle ait pu acquérir cette compétence en seulement 24 heures. Nous pensons que l'aisance acquise dans le dispositif d'appui et l'assurance gagnée par la résolution de tâches en autonomie contribue à remettre Isabelle dans une dynamique de réussite. En ayant pu exprimer ses doutes et ses difficultés dans un climat adapté, elle a certainement pu mieux se rendre compte de l'aspect relativement isolé de ses difficultés par rapport à l'étendue de ses connaissances.

Dans un deuxième temps de la séance, le professeur lui propose de résoudre un problème présenté lors de la première séance[16]. L'observation et l'analyse de cette nouvelle confrontation à une tâche complexe déjà résolue nous permettent de confirmer plusieurs de nos hypothèses. Isabelle montre à nouveau beaucoup de dextérité et d'aisance dans le cadre algébrique de cette étude de fonction. Elle enchaîne toutes les étapes de la résolution d'une équation du deuxième degré y compris quand celle-ci comporte une dimension paramétrique supplémentaire. Cette maîtrise algorithmique se fait cependant un peu au détriment du sens, Isabelle quittant très rapidement la question formulée dans un cadre graphique : rechercher le point d'intersection entre une droite et une parabole. Malgré son croquis élaboré en début de travail, elle se concentre sur la recherche des solutions de ses équations successives en perdant par exemple la finalité de la solution unique. Ainsi, à la question de l'enseignant sur le sens de la recherche du discriminant, elle ne répond pas qu'il doit être égal à 0 dans ce cas. Comme nous l'avons donc mentionné à plusieurs reprises dans cet article, Isabelle privilégie les automatismes de type algorithmiques dans les tâches mathématiques.

La résolution de cette tâche complexe permet également de mettre en évidence l'une des difficultés persistantes d'Isabelle concernant la soustraction dans un calcul élémentaire. En effet, alors qu'elle est en train de finir son calcul de discriminant, il lui reste à effectuer 25-16. Après un temps d'hésitation, elle propose le résultat –1 qui surprend bien entendu le professeur. Elle marque alors un long temps mort de plusieurs secondes et finit par proposer très timidement la bonne réponse. Toutes ses attitudes non verbales montrent cependant qu'elle n'est vraiment pas sure de cette proposition. Comme le climat du dispositif d'appui est sécurisant, elle reste cependant souriante, et répond à la question du professeur concernant les causes de cette erreur par « j'ai mal calculé ». Selon nous, la confrontation à une tâche complexe permet donc bien de repérer les lacunes persistantes des élèves. Pour Isabelle par exemple, la rencontre avec des procédures de calcul non maîtrisées et qui relèvent de déficits d'apprentissage vraisemblablement anciens, est bien mis en évidence. Son émergence est également favorisée par le climat relationnel propre au dispositif d'appui qui accueille sans jugement de valeur toutes les réponses, les bonnes comme les mauvaises.

Conclusion

L'étude de ces quatre séances d'appui nous permet de mettre en évidence que malgré les notes insuffisantes qu'elle a obtenues dans la première partie de l'année scolaire, Isabelle maîtrise un nombre non négligeable d'outils mathématiques, mais qu'elle ne sait pas forcément à quel moment les utiliser. Les connaissances sont donc mobilisables, mais pas encore disponibles (Robert, 2008, p. 49). Même si Isabelle n'arrive pas à résoudre seule les tâches complexes qui lui sont présentées lors de ces séances,

16 On considère la parabole d'équation $y=x^2-5x+7$ et la droite d'équation $y=mx+3$. Pour quelle valeur de m la droite est-elle tangente à la parabole ?

l'étayage de l'enseignant permet de mettre en évidence des connaissances mobilisables. Cette modalité de travail a vraisemblablement contribué à les rendre progressivement disponibles.

Si le choix des tâches est important, le dispositif d'appui individuel l'est aussi puisqu'il permet à l'enseignant de proposer un étayage adapté aux blocages ou aux erreurs d'Isabelle. Ce dispositif donne à l'enseignant la possibilité de laisser vivre les silences et ainsi de permettre à l'élève de réfléchir et de proposer parfois des pistes de solutions à leur issue, ce qui est beaucoup plus difficile dans un groupe. Il est important que l'enseignant accompagne l'élève dans sa résolution, qu'il lui laisse du temps, mais aussi qu'il prenne en charge un certain nombre d'adaptations pour éviter le découragement de l'élève. Il peut ainsi se concentrer sur les adaptations qui se trouvent dans sa ZPD et l'enseignant assumer celles qui sont encore trop éloignées.

On peut aussi remarquer que lorsqu'un type de tâches est proposé plusieurs fois à Isabelle, l'étayage nécessaire de l'enseignant est de moins en moins nécessaire, ce qui permet de penser que l'on se trouve bien dans la ZPD d'Isabelle. Lorsqu'Isabelle oublie de parler à voix haute, elle écrit souvent des choses erronées. Elle peut cependant se corriger dès que l'enseignant lui rappelle la consigne de l'expression à voix haute.

Si l'on s'intéresse aux difficultés d'Isabelle, on observe qu'elles sont essentiellement de deux types :

Celles liées aux changements de cadres qu'Isabelle ne convoque spontanément que lorsqu'il s'agit d'aller d'un cadre vers le cadre algébrique. Elle ne cherche pas à exploiter ses connaissances dans les autres cadres.

Celles que l'on pourrait qualifier d'élémentaires comme la soustraction 144-80 dans la première séance ou le calcul du volume d'une boîte dans la seconde séance.

Nous faisons l'hypothèse que ces deux types de difficulté sont les causes d'un même phénomène. En effet, Isabelle semble avoir compris que les enjeux de l'enseignement des mathématiques en première année du Gymnase sont essentiellement algébriques et qu'elle met toute son attention sur ces enjeux. Elle essaye donc systématiquement de travailler dans le cadre algébrique en essayant de poser des équations à résoudre. Elle vérifie d'ailleurs systématiquement ses résultats au niveau de l'équation et ne retourne pas au cadre initial. Si elle convoque des outils de vérifications lorsqu'elle est dans le cadre algébrique, elle ne le fait pas dans le cadre arithmétique, peut-être pour ne pas perdre de temps avec des calculs censés être simples et surtout secondaires. Comme elle calcule relativement bien, cette absence de contrôle ne porte pas trop à conséquence lorsqu'il s'agit de tâches simples et isolées, mais peut se révéler problématique lors d'une étape d'une tâche complexe. En reprenant l'épisode de la soustraction 144-80, on a surtout l'impression qu'Isabelle veut aller vite et qu'elle ne prend pas le temps de contrôler ce qu'elle obtient. Le fait que 156 soit plus élevé que 144 ne l'interpelle pas. Il nous semble que la confusion entre $x+6$ et $x-6$ dans la modélisation de la boîte est du même ordre, ce qui lui importe c'est d'effectuer le produit $(x-6)(x-6)$ qui lui semble plus conforme aux attentes du Gymnase telles qu'elle les perçoit.

Pour en terminer avec cette étude de cas, nous pouvons affirmer qu'Isabelle n'est très probablement pas dyscalculique, mais qu'une partie non négligeable des connaissances qu’elle doit mettre en œuvre pour résoudre les tâches qui lui sont proposées ne sont pour elle que mobilisables et pas encore disponibles. Ceci n’était peut-être pas apparu lorsqu’elles étaient testées à l’intérieur de leurs chapitres respectifs. Cette hypothèse est corroborée par le fait qu'Isabelle avait déjà rencontré des difficultés avant son entrée au Gymnase. Ces difficultés concernaient seulement la résolution de problèmes, tâches qui nécessitent justement la disponibilité des connaissances. Elle avait également rencontré des difficultés lors de l’examen de la fin de la scolarité obligatoire moment auquel les connaissances à utiliser ne sont probablement pas aussi évidentes qu’à la fin du chapitre où elles ont été travaillées. Le dispositif mis en place a peut-être aussi permis à Isabelle de prendre conscience qu’elle savait beaucoup de choses, mais qu’il lui fallait apprendre à articuler ses connaissances entre elles. Cette prise de conscience lui aura alors permis de reprendre confiance en ses compétences en mathématiques, ce que l’on observe pendant cette semaine d’appui par une attitude de moins en moins passive et par une prise de risque de plus en plus grande au fur et à mesure des séances. Il est à noter qu’à l’issue de ces séances d’appui, les résultats d’Isabelle en mathématiques ont été supérieurs au seuil de suffisance jusqu’à la fin de sa scolarité gymnasiale et lors des examens finaux.

Nos hypothèses de recherche sont donc partiellement validées au travers de cette étude de cas, mais nous sommes conscients de la nécessité d'un projet de recherche plus conséquent pour aller plus loin quant aux résultats. Nous pouvons cependant d'ores et déjà dire à l'issue de cette partie exploratoire de nos travaux que le recours à l'alternance des types de tâches (simple et complexe), à la maîtrise explicite des changements de cadres ainsi qu'un nécessaire changement de posture de l'enseignant semble déterminants dans la volonté de réussite d'un processus d'étayage.

Au terme de cette expérimentation, nous pensons que le processus de mise en œuvre de séances d'appui tel que nous venons de le décrire est donc susceptible de répondre pour partie au repérage et au traitement des difficultés spécifiques en mathématiques des élèves du gymnase. Cette forme d'étayage nécessite des conditions certes particulières, mais nous paraît néanmoins réalisable et reproductible dans plusieurs environnements scolaires. Il illustre une des possibilités de réponse aux besoins spécifiques des élèves en grande difficulté en mathématiques dans un cadre restreint à l'institution scolaire et donc « aux mains des enseignants » (Dias & Deruaz, 2012).

Nous sommes d’ores et déjà engagés dans d'autres expérimentations de ce type ainsi que dans le développement de modules de formations continues qui devront permettre à terme de faciliter la mise en place de séances d'appui individuel selon la méthodologie que nous avons présentée ici. Ces formations auront pour objectifs principaux d'outiller les enseignants pour le développement d'une relation de confiance avec l'élève malgré ses difficultés en mathématiques et pour le repérage de ces difficultés. Il s'agira également d'insister sur l'intérêt de l'utilisation de tâches relativement complexes adaptées aux spécificités des connaissances et des lacunes des élèves. Enfin, à travers la mise en place de ces dispositifs d'appui, il nous semble primordial de faire comprendre aux enseignants que c'est bien le changement de vision sur les mathématiques et leur enseignement qui est susceptible de faire retomber un peu la pression sur la montée persistante des étiquettes de dyscalculie.

Références

BLOCH I. (2013) Elèves en difficulté à l'entrée au collège : quelques repères pour penser l'enseignement des mathématiques. *Petit x,* **93**, 29-51.

DIAS T., SERMIER DESSEMONTET R., et DENERVAUD S. (2016) Étayer les élèves à besoin éducatifs particulier : un modèle d'analyse. *Math-Ecole*, **225**, 4-9.

DIAS T. et DERUAZ M. (2012) Dyscalculie : et si les enseignants reprenaient la main ? *A.N.A. E.*, **120-121**, 529-534.

DIAS T. et TIECHE CHRISTINAT C. (2012) Spécificités des situations didactiques dans l'enseignement spécialisé. *Actes de l'Espace Mathématique Francophone, Enseignement des mathématiques et contrat social*, Genève.

DOUADY R. (1986) Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en didactique des mathématiques*, **7**, 5-31.

DUVAL R. (1996) *Sémiosis et pensée humaine : registres sémiotiques et apprentissages intellectuels.* Berne, Peter Lang.

FISCHER J.P. (2009) Six questions ou propositions pour cerner la notion de dyscalculie développementale. *A.N.A. E.*, **102**, 117-133.

GIROUX J. (2013) Etude des rapports enseignement/apprentissage des mathématiques dans le contexte de l'adaptation scolaire : Problématique et repères didactiques. *Education et didactique*, **7 (1)**, 59-86.

MELJAC C. (2005) Le diagnostic, et après ? Remédiation et prise en charge. In A. V. Hout, C. Meljac & J.-P. Fischer (Eds) *Troubles du calcul et dyscalculies chez l'enfant*. 371-382, Paris : Masson.

MENET S. et ENGELBERGER C. (2014) *Elèves en difficulté : Dyscalculiques ?* Mémoire professionnel de master Haute Ecole de Pédagogie du canton de Vaud, Lausanne.

ROBERT A. (1998) Outils d'analyse des contenus mathématiques à enseigner au lycée et à l'université. *Recherches en didactique des mathématiques*, **18**, 139-189.

ROBERT A. (2008) Une méthodologie pour analyser les activités (possibles) des élèves en classe. In Vandebrouck F. *La classe de mathématique : activités des élèves et pratiques des enseignants.* 45-57, Toulouse : Octares.

ROBERT A., PENNINCKX J. & LATTUATI M. (2012) *Une caméra au fond de la classe de mathématiques*, Besançon : Presses universitaires de Franche-Comté.

ROGERS C.R. (1970) *Le développement de la personne*. Paris : Dunod

VANNETZEL L. (2012) Dyscalculiques ou laissés pour compte ? *A.N.A. E.*, **120-121**, 497-502.

VERMERSCH P. (2003) *L'entretien d'explicitation*. Issy-les-Moulineaux : ESF Editeur.

VYGOTSKI L. (1934/2013) *Pensée & langage*. Paris : La Dispute.

Annexe. Résolution des tâches utilisées pendant les séances d'appui

Séance 1

> On considère la parabole d'équation $y = x^2–5x+7$ et la droite d'équation $y = mx+3$. Pour quelle valeur de m la droite est-elle tangente à la parabole ?

Si la droite d'équation $y = mx+3$ est tangente à la parabole d'équation $y = x^2–5x+7$, l'équation

$$mx+3 = x^2–5x+7$$

admet une seule solution.

Le nombre de solution d'une équation de la forme $ax^2+bx+c = 0$ est donné par le signe du discriminant $\Delta = b^2–4ac$ et le cas d'une solution unique correspond à la valeur 0 pour Δ.
Pour calculer le discriminant de l'équation, il faut l'écrire sous sa forme canonique :

$$x^2–(m+5)x+4 = 0 \quad [\text{équation } 1]$$

L'équation Δ=0, devient alors : $(m+5)^2–16 = 0$
Ou encore : $m^2+10m+9 = 0$ qui admet les deux solutions $m = –1$ et $m = –9$.

Si $m = –1$, la droite d'équation $y = –x+3$ est tangente à la parabole d'équation $y = x^2–5x+7$ en (2 ;1), car l'équation 1 devient $x^2–4x+4 = 0$ qui admet uniquement $x = 2$ comme solution.

Si $m = –9$, la droite d'équation $y = –9x+3$ est tangente à la parabole d'équation $y = x^2–5x+7$ en (-2 ;21), car l'équation 1 devient $x^2+4x+4 = 0$ qui admet uniquement $x = –2$ comme solution.

Séance 2 : seconde tâche

> Pour quelles valeurs de m les graphes des fonctions $f(x) = –x^2+m$ et $g(x) = x^2+mx+2$ sont-ils tangents ?

Cette tâche est similaire à celle de la séance 1, seuls quelques aspects techniques diffèrent. On doit donc trouver les valeurs de m pour lesquelles, l'équation

$$–x^2+m = x^2+mx+2$$

admet une seule solution. Si on prend la forme canonique on obtient :

$$2x^2+mx – m+2 = 0.$$

Lorsque l'on cherche les valeurs de m pour lesquelles le discriminant est nul, on obtient l'équation :

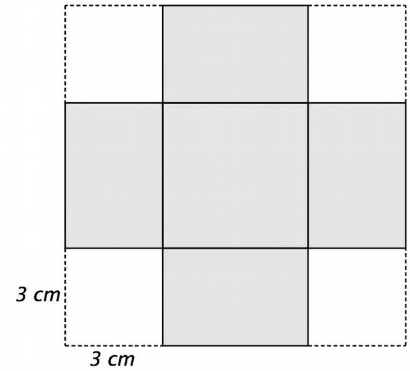
$$m^2 – 8 (– m+2)=0$$

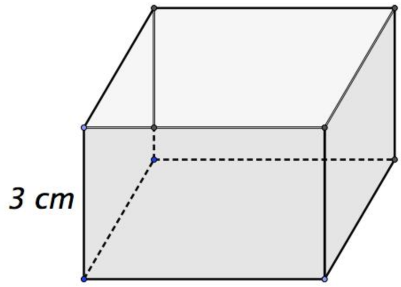
La suite de la résolution est identique à celle de la tâche de la première partie si ce n'est que les solutions sont irrationnelles, ce qui rend le calcul plus difficile.

Séance 2 : première tâche

> On veut faire une boîte ouverte de base carrée à partir d'une feuille de carton carrée en coupant à chaque coin de la feuille un carré de 3 *cm* de côté et en pliant les côtés. De quelle taille doit être la feuille de carton pour que la boîte ait un volume de 48 cm^3 ?

A l'aide des deux illustrations ci-dessous :





On constate que la longueur des carrés que l'on découpe aux quatre coins de la feuille correspond à la hauteur de la boîte que l'on obtient en repliant les quatre côtés.

Comme le volume d'un parallélépipède s'obtient en multipliant l'aire de sa base par sa hauteur et que le volume de la boîte vaut 48 cm^3, on en déduit que l'aire de la base vaut 16 cm^2.

Comme on sait que la base est carrée, on en déduit que la longueur du coté du carré mesure 4 cm. Pour trouver les dimensions de la feuille initiale, il suffit alors d'ajouter à ces 4 *cm* les deux fois 3 *cm* des carrés découpés, ce qui donne 10 *cm*.

Une autre stratégie consiste à passer par le cadre algébrique et à nommer x la largeur de la feuille initiale que l'on cherche. On obtient alors l'équation ci-dessous :

$$3(x-6)^2 = 48$$

que l'on transforme en :

$$3x^2-36\,x-60 = 0$$

ou encore en

$$x^2-12\,x-20 = 0$$

On obtient alors les solutions x=2 et x=10. La solution x=2 doit être écartée, car elle est incompatible avec la consigne.