
LE RÔLE DU DESSIN DANS LA RÉOLUTION DE PROBLÈMES ARITHMÉTIQUES VERBAUX

Élysée Robert CADET
Université d'Ottawa

Résumé : La résolution de problèmes arithmétiques verbaux est problématique pour l'élève du primaire. Les recherches dans ce domaine privilégient la compréhension de l'énoncé du problème et le contexte de résolution au détriment du comportement de l'élève. Dans cette recherche, Jeanne et cinq autres élèves de sa classe ont résolu trois problèmes arithmétiques verbaux. L'analyse de la réponse de Jeanne à un problème a mis en relief une évolution de la situation présentée dans le problème d'une forme plutôt personnelle, idiosyncrasique, à une forme plutôt conventionnelle, symbolique. La présente étude soutient que cette évolution décrit un rapport inconscient de Jeanne avec un matériel pictural. La prise de conscience de ce rapport permettrait peut-être à des élèves d'accéder à une solution appropriée du problème.

Mots-clés : résolution de problèmes arithmétiques verbaux - matériel, matériel pictural - rapport au matériel.

INTRODUCTION

Le nouveau programme du Ministère de l'Éducation, du Loisir et du Sport du Québec présente la résolution de problèmes comme une compétence à la fois transversale et disciplinaire. Vue sous cet angle, la résolution de problèmes est non seulement un domaine d'apprentissage mais aussi une méthode d'apprentissage (MELS, 2009). L'intérêt pour une meilleure compréhension du processus de résolution de problème chez les élèves du primaire s'est ravivé. Les recherches foisonnent dans ce domaine (Anderson, 2010 ; Bautista *et al.*, 2009 ; Brissiaud & Sander, 2010 ; Jordan *et al.*, 2010 ; Mercier & Sensevy, 2007 ; Richard, 1990 ; Robinson & Dubé, 2009 ; Thévenot *et al.*, 2010 ; Van Galen & Reitsma, 2010 ; Vergnaud, 1981, 1989 ; Verschaffel & de Cortes, 1997). Une lecture approfondie des principales conclusions de ces études mène à une variété de typologies de problèmes arithmétiques mettant en relief diverses stratégies de résolution et de représentations des énoncés. Toutefois, la formulation de la réponse reste inexplicée. La présente étude soutient qu'un mouvement manifeste qualifié de rapport au matériel explique la formulation de la réponse.

Généralement, dans les classes mathématiques du primaire, les élèves résolvent des problèmes arithmétiques. Ces problèmes présentent des situations contextuelles de nature réelle, réaliste ou fantaisiste (Biron *et al.*, 2012). Ces situations se présentent sous forme de texte ou énoncé avec des mots et des nombres mettant en jeu des opérations à effectuer, ce sont des problèmes arithmétiques verbaux (Coquin-Viennot, 2001). Dans ceux-ci, quand les opérations en jeu sont l'addition et/ou la soustraction, ils sont qualifiés de problèmes de type additif (de Cortes & Verschaffel, 1987 ; Vergnaud, 1981, 1989, 1991). Parmi ces problèmes, notons ceux de type

« *changement d'état* » selon la typologie de Vergnaud (1991) qui comprennent un état initial (par exemple : « *Jean a des billes* »), une transformation (par exemple : « *il donne 15 billes à Pierre* »), un état final (par exemple : « *Jean a maintenant 39 billes* ») et une question : « *Combien Jean avait-il de billes ?* » Pour résoudre ces problèmes, des élèves du primaire présentent diverses formes de réponses, comme par exemple des dessins. Quand les élèves dessinent pour résoudre ces problèmes et que les consignes de la tâche ne précisent pas cette forme de réponse, ce dessin semble exprimer un comportement en situation. Le comportement de l'élève qui dessine pour résoudre un problème arithmétique verbal est l'objet de la présente étude.

ÉTAT DE LA LITTÉRATURE

Plusieurs recherches s'intéressent au dessin que produit l'élève du primaire pour résoudre un problème arithmétique verbal. Pour Richard (2004), le dessin est une sélection des éléments pertinents du problème, une formulation picturale de la problématique soulevée par l'énoncé du problème. De Vivié (1999) et Zhang et Normand (1994) attribuent le rôle de preuve d'une représentation du problème au dessin produit. Le Secrétariat ontarien de la numératie et de la littératie (2008) soutient que le dessin est un modèle de solution car sa présence renforce le calcul mental par l'ajout du codage analogique au codage verbal. Le dessin est alors l'expression d'un code qui supporte le sens attribué par l'élève à l'énoncé du problème. Hughes (1986) soutient que les enfants représentent des nombres sous forme de dessin selon un ordre croissant de clarté et d'appropriation qui va de plus ou moins clair et personnel à très clair et conventionnel. Dans ce cadre, Hughes explique que les enfants dessinent quatre formes figuratives numériques progressives :

- formes idiosyncrasiques, par exemple délimitation d'espace et images d'un personnage en trois temps ;
- forme pictographique, par exemple analogie image/unité ;
- formes iconiques, par exemple représentation à la fois personnelle et symbolique d'une quantité ;
- forme symbolique, par exemples les nombres conventionnels (1, 2, 3, 4...).

Il s'agit d'une progression d'un ordre décroissant de concrétude qui part des formes figuratives personnelles et/ou habituelles pour aboutir aux formes figuratives symboliques, donc conventionnelles. Quand des problèmes arithmétiques sont proposés aux élèves du primaire et que les réponses produites sont sous forme de dessin, la sélection des éléments pertinents du problème, la preuve d'une représentation du problème et le modèle de solution peuvent expliquer le sens du dessin-produit mais non le rôle du dessin dans le processus de production.

CADRE THÉORIQUE

Pendant la mise en scène d'un objet de savoir comme par exemple la résolution d'un problème arithmétique, le comportement de l'élève, le sujet — en lien avec un outil utilisé et/ou produit, le matériel, sont évocateurs. En effet, le sujet connaissant est un élève qui pense pour résoudre des problèmes arithmétiques qui lui sont proposés. L'objet de savoir se modélise par un triplet : le contenu mathématique, les objets qui le représentent et la réponse. Le matériel peut être physique et fabriqué (ex : les jetons), pictural (ex : les dessins) ou de représentation symbolique ou abstraite (ex : les chiffres, les mots). Dans tous les cas, peu importe l'outil utilisé et/ou produit, nous le qualifions de matériel et l'élève l'utilise pour saisir le sens du problème

arithmétique à résoudre et produire une réponse. Par contre, quelle que soit la graphie utilisée pour présenter une réponse à un problème arithmétique, Hughes (1986) qualifie ces graphies de formes symboliques. Alors, dans cette recherche, nous soutenons que les symboles sont : l'écriture conventionnelle arabe — le nombre 34, par exemple, l'écriture conventionnelle mathématique = , + et - , les groupements (formes iconiques) et les mots. Les autres graphies comme par exemple la forme idiosyncrasique (Figure 2) sont des dessins en raison d'une référence directe aux images usuelles. En général, au-delà d'une forme de représentation donnée, les symboles iconiques partagent un aspect commun : le groupement (des billes dans ce contexte) qui relie la forme pictographique personnelle (le dessin) à la forme conventionnelle institutionnalisée (les symboles). La théorie des champs conceptuels (Vergnaud, 1991, 2008) soutient que ce sont les concepts qui sont porteurs du sens des problèmes arithmétiques. Vergnaud (1991) a échafaudé sa théorie sur le concept de « *théorème en acte* » et l'explique comme l'influence des différents usages d'un mot qui contribuent à la construction du sens du problème qui le porte. C'est la centration sur les concepts. Les concepts sont considérés sans saisir la manière dont l'élève objective ces problèmes. La théorie de l'objectivation (Radford, 2002, 2003, 2010, 2011) éclaire cette situation. L'objectivation est une conception d'après laquelle la pensée est *sensible et historique*. Elle est *sensible* dans le sens qu'elle invoque de manière fondamentale nos sens dans la saisie de ses objets. De ce point de vue, les gestes, la perception, le corps, les signes et les artefacts sont considérés comme des parties constitutives de la pensée (Radford, 2011, p. 2). Apprendre les mathématiques n'est plus apprendre à savoir les mathématiques mais apprendre à « *être en mathématiques* ». Inspiré des travaux de l'anthropologue Geertz (1979), Radford (2011) explique l'« *être en mathématiques* » par une conception médiatisée de la pensée, non exclusivement intracérébrale. Par exemple, quand l'élève du primaire résout un problème arithmétique verbal sans indication de la forme de réponse à produire, si sa réponse est un dessin, qu'il s'agisse d'un élève en difficulté ou non, un mouvement manifeste précède la solution produite : le rapport au matériel. Dans ce mouvement, quel que soit l'objet utilisé (objet déjà disponible — comme par exemple des jetons — ou objet produit — comme par exemple le dessin) pour construire un sens du problème et formuler une réponse, nous le qualifions de matériel parce qu'il sert de base à la réponse. Nous soutenons que, pour un élève donné, l'usage d'un matériel à partir duquel la réponse à un problème arithmétique verbal est produite est motivé par le rapport au matériel. Quand ce matériel est un dessin, il s'agit d'un rapport pictural au matériel. La question de recherche émergente est alors la suivante : « Quel est le rôle du dessin dans la résolution de problèmes arithmétiques verbaux ? ».

Le rôle du dessin dans la démarche de résolution de problème arithmétique mérite une analyse fine puisque celui-ci amorce et formule la réponse sans la finaliser. La fin de la réponse est sous forme de symboles. Nous soutenons à cet effet que la microanalyse est une méthodologie pertinente pour expliquer ce rôle. La section suivante décrira cette méthodologie.

MÉTHODOLOGIE

Cette section sur la méthodologie définira d'abord le concept de microanalyse et dressera un portrait de Jeanne. Ensuite, elle décrira le contexte de réalisation de l'étude. Elle présentera enfin les instruments de recueil de données et les étapes de la microanalyse.

La microanalyse est d'une part un emprunt de la micro-étude de Radford (2002, 2010) qui met en relief les gestes caractéristiques d'une activité en mathématiques. D'autre part, elle doit aux techniques de verbalisation consécutive sur les traces de l'exécution (Karbach & Kray, 2007) la description des gestes en cours d'exécution. La complémentarité de ces deux techniques

d'analyse confère les qualités requises pour une analyse fine des gestes en cours d'exécution et des traces subséquentes. Dans notre recherche doctorale, nous avons proposé à nos six participants, dont Jeanne, le sujet de cet article, les trois problèmes arithmétiques suivants inspirés de trois types distincts selon la typologie de Vergnaud (1991) :

1. « Jean a 34 billes. Marie a 71 billes. Combien ont-ils de billes en tout ? »
2. « Jean a 37 billes. Il a 15 billes de plus que Marie. Combien Marie a-t-elle de billes ? »
3. « Louise joue deux parties de billes. Elle joue une partie. À la seconde partie, elle perd 13 billes. Après les deux parties, elle a gagné 28 billes. Que s'est-il passé à la première partie ? »

Jeanne a produit ses réponses aux trois problèmes sous forme de dessin. Elle a dessiné des billes pour répondre aux deux premiers problèmes, faciles pour des élèves de troisième année du primaire. Par contre, le troisième problème de type « *changement d'état* » selon la typologie de Vergnaud (1991) présente un plus haut niveau de difficulté pour ces élèves. La richesse du dessin de Jeanne pour résoudre ce problème est saillante (figure 5). J'examinerai les gestes de Jeanne pendant la résolution de ce problème arithmétique.

Jeanne, âgée de 9 ans et 3 mois, fait partie des six élèves d'une classe régulière de 20 élèves de troisième année du primaire qui ont volontairement accepté de participer à l'expérience. Elle dit aimer les mathématiques et obtient des notes excellentes. L'environnement physique de classe comprend notamment de nombreuses affiches de rappels en mathématiques et des armoires remplies de matériaux dont des jetons et des blocs multibase. C'est dans cet environnement usuel que Jeanne, en compagnie de cinq autres élèves de sa classe, a participé à l'expérience pendant une journée pédagogique. De plus, contrairement au fonctionnement de la classe de mathématiques habituelle, l'expérience était filmée par une caméra de haute définition qui enregistre seule les visages, les mains et les copies. En général, cette expérience a été réalisée dans un lieu familier et un décor habituel qui favorisaient la microanalyse des activités.

Pour recueillir les données, j'ai utilisé l'observation directe et les traces. De façon pratique, une microanalyse se réalise en deux étapes récurrentes :

1. visionnement au ralenti de l'enregistrement des activités (traces, réponse de l'élève) ;
2. analyse des traces en lien avec les gestes posés en cours d'exécution.

Un entretien semi-structuré individuel a également été réalisé approximativement deux heures après la réalisation de l'expérience. Il éclairera nos conclusions. La section suivante : « *les résultats* » présentera l'introduction de l'expérience, nos observations de Jeanne au cours de la résolution du troisième problème et l'analyse fine des traces subséquentes.

RÉSULTATS

Dans cette section, nous présenterons d'abord une chronique de l'expérience. nous dresserons ensuite un portrait de nos observations de l'évolution de la pensée de Jeanne en situation de résolution de problèmes arithmétiques verbaux grâce à ses traces et à la catégorisation des symboles de Hughes (1986). Une analyse fine des résultats complétera la section.

Chronique de l'expérience

Le jour venu, nous avons débuté l'expérience en précisant les consignes suivantes :

- Je vais te donner trois problèmes à résoudre. Tu peux les résoudre comme tu veux ; ce

n'est pas un examen. Tout ce que tu vas écrire ne va pas être considéré comme bon ou pas bon.

- Le matériel que tu vois sur le pupitre, tu peux l'utiliser si tu veux. Il n'y a aucun problème à l'utiliser ou à ne pas l'utiliser.
- Tu peux résoudre tous les problèmes si tu veux, tu peux arrêter à n'importe quel moment sans problème.
- Après que tu auras fini, je vais visionner avec toi l'enregistrement de l'activité, soit vers 10 h. Tu pourras me demander d'arrêter ou d'avancer l'enregistrement comme tu veux sans aucun problème.
- Tout le monde va déjeuner aux environs de 12 h. Je vais avoir un entretien avec chaque élève individuellement pendant environ 30 min à partir de 13 h. Tu peux arrêter l'entretien à tout moment sans aucun problème.
- Pendant que je m'entretiens avec un élève, les autres peuvent jouer dehors (le psychoéducateur assurait la surveillance des élèves dans la cour de l'école).

Jeanne a d'abord dessiné les billes que présente le problème soit 13 billes et 28 billes dans deux sous-ensembles juxtaposés. Un sous-ensemble compte 15 billes (2 ont été effacées) et un autre compte 28 billes. Elle a englobé les deux sous-ensembles dans un même ensemble qui totalise 41 billes (figure 1).

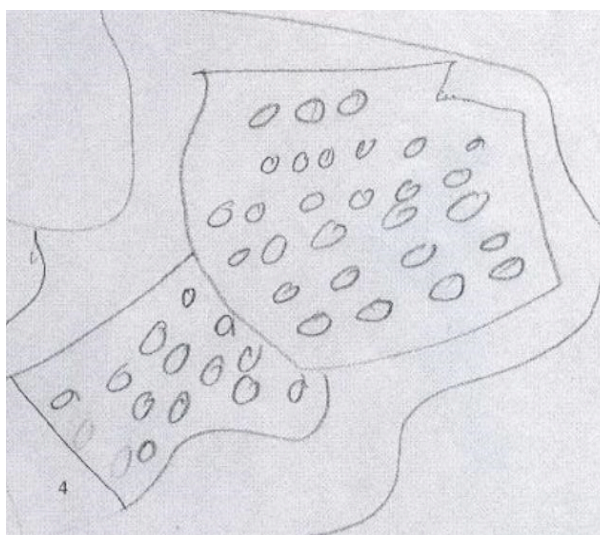


Figure 1 : Extrait de la copie 3 de Jeanne, Formes pictographiques.

Ensuite, elle a délimité des espaces (1 et 2) et a dessiné un personnage à trois moments différents. À chaque moment, un cercle et un cadre se rattachent au personnage. Leur contenu diffère d'un moment à l'autre. Au moment 1 (espace 1), soit la première partie du jeu (voir l'énoncé du troisième problème), elle y écrit la lettre « b », pour « bille », dans le cercle et dessine dans le cadre une bille semblable à celles dessinées dans l'ensemble précédent. Au moment suivant (suite de l'espace 1), soit la deuxième partie du jeu, elle y écrit respectivement 13 et 28. Au dernier moment (espace 2) soit après les deux parties, elle y écrit respectivement 13 et 41. Le nombre 41 représente le total des billes ($13+28=41$) illustrées ci-dessus. Si le nombre 41 est bien lisible, le 13 ressemble à un « B » (en majuscule). C'est le nombre 13 et non la lettre « B » parce que, d'une part, « b » pour bille est déjà écrit en minuscule ; l'écriture de la même lettre en majuscule n'a pas de sens puisqu'il ne s'agit pas de diverses catégories de billes.

D'autre part, 13 et 28 sont respectivement les cardinaux des deux sous-ensembles. Le nombre 41, qui résulte de l'addition de 13 et 28, prend tout son sens. La personnalisation des dessins est une caractéristique propre aux formes idiosyncrasiques. Si les formes pictographiques illustrent les nombres du problème, les formes idiosyncrasiques présentent une image personnelle du contexte du problème (l'organisation et/ou la distribution des nombres) amorçant ainsi la fin de la résolution proprement dite et le début de l'expression et de la vérification de la réponse (voir figures 2 et 4).

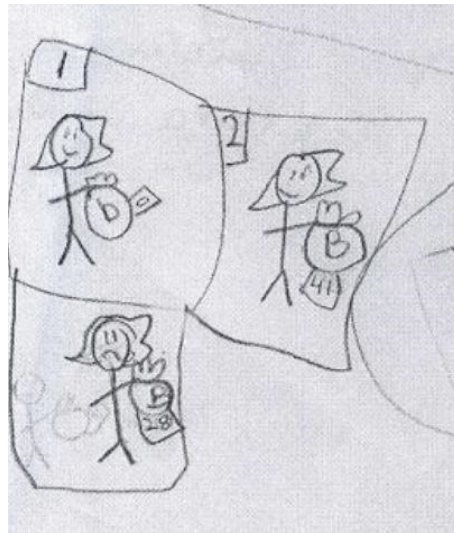


Figure 2 : Extrait de la copie 3 de Jeanne, forme idiosyncrasique.

Ensuite, Jeanne a inscrit des nombres en points et en symboles dans cinq cercles :

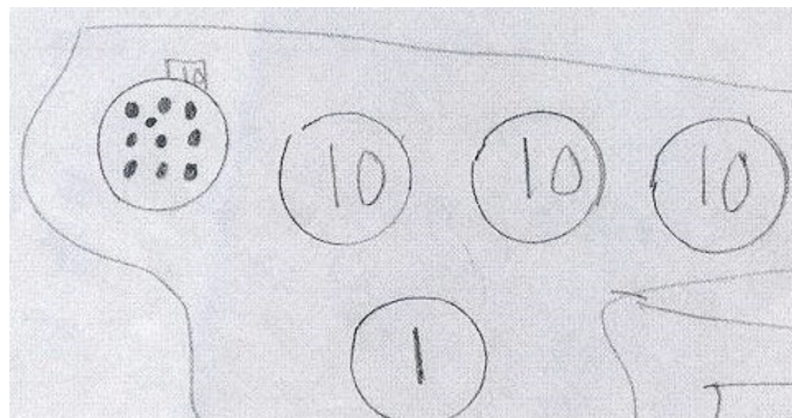


Figure 3 : Extrait de la copie 3 de Jeanne, formes iconiques.

Elle a posé l'addition des nombres en symboles et l'a effectuée ($28+13=41$) comme dans la figure 4).

$$\begin{array}{r} 28 \\ + 13 \\ \hline 41 \end{array}$$

Figure 4 : Extrait de la copie 3 de Jeanne, formes symboliques conventionnelles.

Elle a complété la tâche avec sa proposition mathématique « elle a gagné 41 bille(s) » comme indiquée dans la copie suivante :

JEANNE

Louise joue deux parties de billes. Elle joue une partie. À la seconde partie, elle perd 13 billes. Après les deux parties, elle a gagné 28 billes. Que s'est-il passé à la première partie?

Solution

elle a gagné 41 bille

$$\begin{array}{r} 28 \\ + 13 \\ \hline 41 \end{array}$$

Figure 5 : Copie 3 de Jeanne, formes figuratives.

Observations et analyse du troisième problème de Jeanne

Jeanne a tourné la deuxième feuille et a entamé la résolution de ce problème. Un problème est écrit sur une feuille avec un espace réservé à la réponse. Tourner la feuille signifie alors un passage total ou partiel au problème suivant et, dans ce cas, le passage au troisième problème.

Sur la copie, Jeanne a commencé la résolution par le coin inférieur droit de la copie et a terminé par le coin supérieur gauche. Elle a utilisé tout l'espace exploitable de la copie. Elle a d'abord dessiné 13 billes et 28 billes dans deux sous-ensembles juxtaposés. Un sous-ensemble compte 15 billes (2 ont été effacées) et un autre compte 28 billes. Elle a englobé les deux sous-ensembles dans un grand ensemble qui totalisent 41 billes (figure 1). Le tout illustre les nombres du problème. Ensuite, elle a dessiné l'image d'un personnage à trois moments différents correspondant aux trois moments du jeu : première partie (« b » pour « bille » et dessin de bille), deuxième partie (13 et 28), après les deux parties (13 et 41). L'ensemble des parties présente la compréhension de Jeanne du contexte du problème. Puis, elle a encerclé 10 points puis 3 fois le nombre 10 et enfin le nombre 1. Elle a terminé la résolution en posant l'addition ($28+13=41$) et en écrivant une réponse : « *elle a gagné 41 bille(s)* ».

Dans les traces de Jeanne du troisième problème, j'ai distingué trois formes de dessins : l'ensemble de billes, un personnage en trois temps et les cercles de nombres. Jeanne a posé l'addition et a écrit une réponse après avoir dessiné. Jeanne se représente la situation du problème à l'aide de dessin dont les formes s'apparentent aux billes. La présence du mot « *bille* » dans le problème renvoie à un matériel manipulable de même taille que des jetons mais de forme et de couleur différente. Je soutiens que cette présence peut favoriser une simulation de la situation décrite dans le problème. Pourtant, Jeanne n'a fait aucun usage manifeste des jetons disponibles, mêmes si ceux-ci lui étaient proches et familiers et que le chercheur lui a expliqué qu'elle pouvait les utiliser à son gré. Sa réponse à chacun des trois problèmes a quand même transité par une suite de dessins. Toutefois, pour ce problème (le troisième), la division de la copie selon l'ordre des parties (première partie, deuxième partie et après les deux parties) démontre une compréhension de la chronologie de la situation que présente le problème (figure 2). Les quantités de billes sont au centre de la résolution, elles sont représentées sous trois formes : dessins de billes, chronologie (l'ordre du déroulement des parties) et nombres encerclés. De plus, les 13 billes du premier sous-ensemble n'apparaissent pas dans les nombres encerclés (figure 3). L'ensemble des cercles avec les nombres qui y sont inclus représentent 41 billes et le total de l'addition ($28+13=41$). Après l'illustration du contexte du problème (voir figure 2), un processus d'expression et/ou de vérification de la résolution semble être amorcé. Comme pour les problèmes précédents, durant la résolution de ce problème, Jeanne a dessiné des billes (figure 1) qui démontrent un dynamisme de construction d'un sens du problème basé sur le dessin, matériel pictural. Nous soutenons que Jeanne a établi un rapport pictural au matériel qui est à la base de sa représentation du problème. Ce rapport se manifeste progressivement d'une forme de représentation distincte (pictographique) et personnelle (idiosyncrasique) jusqu'à une forme de représentation conventionnelle (symbolique), expression de la réponse au problème.

Premièrement, la forme pictographique établit une correspondance analogique image/unité qui explicite les matériaux du problème (voir Figure 1).

Dans cette figure, chaque image représente une bille comme c'est indiqué dans le problème : un ensemble de 13 billes (deux sont effacées) et un autre ensemble de 28 billes. Les deux ensembles totalisent les 41 billes qui ont été gagnées à la première partie.

Deuxièmement, la forme idiosyncrasique est un dessin qui démontre une démarche d'appropriation personnelle du contexte du problème et la résolution subséquente. Pour Hughes qui a réalisé une étude avec des enfants de 3 à 7 ans, la forme idiosyncrasique est un gribouillis qui ne permet pas de déduire une régularité. Pour des enfants plus âgés comme par exemple Jeanne dans cette étude, en situation de résolution de problèmes arithmétiques verbaux, la représentation personnelle de ce problème revêt une certaine régularité : l'image distincte de

billes d'une part et d'autre part, les trois moments du jeu : première partie, deuxième partie et après les deux parties. Cette régularité peut aussi s'exprimer sous forme de maisons et/ou de bateaux et/ou d'espaces et/ou de personnages qui peuplent leur imagination. Ces enfants plus âgées ne vont pas avoir tendance à produire des gribouillis dans cette situation mais des formes individualisées, distinctes, régulières et structurées. Ces images du personnage en trois temps dans la section suivante de la réponse au troisième problème illustrent nos propos (figure 2).

Pour Jeanne, cette forme présente, en espaces délimités, le déroulement temporel de la situation décrite dans l'énoncé. Au centre de chaque espace, il y a le personnage. Celui-ci situe les trois moments du jeu : première partie, deuxième partie, après les deux parties. Les espaces et le personnage décrivent l'ensemble du contexte que présente le problème. Cependant, pour ce problème de type « *changement d'état* » selon la typologie de Vergnaud (1981, 1989, 1991), le contexte comprend une situation initiale inconnue (par exemple, « *elle joue une partie* »), une transformation (par exemple, « *à la seconde partie, elle perd 13 billes* ») et un état final connu (par exemple, « *après les deux parties, elle a gagné 28 billes* ») exprimés dans un jeu de gain/perte. Le renvoi de la question à l'état initial inconnu (par exemple, « *que s'est-il passé à la première partie ?* ») implique une réversibilité du raisonnement au cours de la résolution. Cependant, Jeanne a traité le problème de façon linéaire (13 billes et 28 billes, ensuite $13+28=41$). Un problème du même type : « *Louise joue deux parties de billes. Elle joue une partie. À la seconde partie, elle gagne 13 billes. Après les deux parties, elle a gagné 28 billes. Que s'est-il passé à la première partie ?* » implique une soustraction au lieu d'une addition. Au-delà de la juxtaposition des sous-ensembles dessinés, le jeu de gain et/ou perte exprime le sens du problème. Nous rejoignons la théorie des champs conceptuels de Vergnaud (1991, 2008) selon laquelle les concepts portent le sens du problème. La réponse juste de Jeanne à ce problème « *elle a gagné 41 bille(s)* » peut s'expliquer à la faveur des variables didactiques présentes qui s'opérationnalisent dans la linéarité de l'addition (juxtaposition des deux sous-ensembles dessinés). Toutefois, que le raisonnement à la base de la réponse soit juste ou non, quand un dessin amorce la résolution, l'expression de la réponse est symbolique.

Troisièmement, la forme iconique utilisée dans certaines cultures pour représenter la cardinalité, présente une régularité basée sur la forme, la position ou la couleur (bloc base 10). Chaque collection est représentée par une correspondance directe forme/groupement d'unités qui représente un début de symbolisation des objets dessinés et constitue une économie de graphies et de temps. La section suivante des traces de Jeanne représente le passage des formes iconiques à des formes symboliques (figure 3).

Quatre cercles présentent dix billes et un dernier présente une bille. Les billes ne sont pas comptées une à une, sauf dans le premier cercle. Dans les trois cercles suivants, le symbole 10 présente l'espace qu'occuperaient 10 billes dessinées. Le symbole 1 dans le dernier cercle représente l'unicité de correspondance symbole/dessin ouvrant la voie à un groupement, donc à une économie d'espace et de graphies.

Quatrièmement, la forme symbolique conventionnelle présente une suite ordonnée de graphies juxtaposées, la valeur d'une graphie représentant, d'une part, une collection donnée. D'autre part, selon le système décimal de numération, cette valeur peut être plus grande ou plus petite selon sa position dans cette suite ordonnée de graphies. Cette forme complète le processus de symbolisation et d'économie de graphies. Elle présente en même temps l'avantage d'une collection plus universelle. En cela, elle est conventionnelle, comme dans la figure 4.

L'addition avec retenue de 28 et de 13 est posée à la verticale et totalise 41. Ce résultat

correspond aux 41 billes qui ont été gagnées à la première partie (ou après les deux parties en suivant la chronologie de la résolution). La proposition mathématique « *elle a gagné 41 bille(s)* » dans la figure 5, qui clôt la réponse de Jeanne à ce problème, devient compréhensible.

En résumé, une construction de sens est présente dans les traces de Jeanne au cours de cette activité (figure 5). L'analyse du déroulement chronologique de la résolution de ce problème rend cette construction perceptible. Le dessin que nous qualifions de matériel pictural sert d'arrière-plan à cette construction. Même si l'expression de la réponse est symbolique, que le raisonnement d'où émerge la réponse soit juste ou non, la résolution s'opérationnalise en dessinant. Le rôle du dessin dans la résolution de problèmes arithmétiques verbaux est de rendre sensible une réponse appropriée du problème. Toutefois, d'autres questions surgissent quand on soulève celle du rôle du dessin comme outil de production d'une réponse à un problème arithmétique verbal : quelles informations l'élève code-t-il dans son dessin ? S'agit-il d'une forme régressive ou progressive d'appréhension du sens des symboles ? S'agit-il d'une compréhension purement numérique et non sémantique du problème ? S'agit-il de la création d'un espace ludique et d'un monde factice dans lequel il s'inscrit ?

CONCLUSION

Sommairement, l'environnement perceptif de l'élève du primaire est meublé de matériels de natures diverses. Dans cet environnement, des rapports s'établissent avec ces matériaux. Ces rapports sont à la base d'une représentation du problème arithmétique verbal proposé. Le passage d'une représentation personnelle, idiosyncrasique, à un symbolisme conventionnel est le résultat d'une démarche propre : le rapport au matériel. Pour ce faire, il faut quelque chose à saisir et un outil approprié pour saisir. Nous soutenons dans cette étude que le rapport au matériel sert d'abord de prisme pour saisir la manière dont l'élève s'approprie le problème arithmétique verbal pendant la résolution (voir figure 2). Il semble s'agir toutefois d'une compréhension numérique et non sémantique du problème. À la question « *Explique-moi : pourquoi préfères-tu dessiner des billes que d'utiliser des jetons ?* », Jeanne a précisé « *Eh non, c'est parce que des fois je fais des erreurs de calcul mais, quand je dessine je ne fais pas d'erreurs* ». Jeanne s'est approprié une forme picturale de l'énoncé du problème arithmétique en mots et autres symboles mathématiques. Le dessin est la forme saisissable de la réalité de Jeanne. L'expression symbolique « *elle a gagné 41 bille(s)* » qui clôt la solution à ce problème émerge de la manifestation du rapport pictural de Jeanne avec le matériel. Le rôle du dessin est d'être en même temps une représentation personnelle du problème et un mode de validation approprié de la réponse. À la question : « *OK ! Qu'est-ce que ça te fait de dessiner la chose ?* », Jeanne a répondu : « *C'est comme si c'est vrai pour moi* ». Toutefois, d'autres recherches sont nécessaires pour mieux saisir l'influence des pairs, des adultes ou de l'environnement de vie en général dans l'établissement du rapport au matériel.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- Anderson, U. (2010). Skill development in different components of arithmetic and basic cognitive functions: Findings from a 3-year longitudinal study of children with different types of learning difficulties. *Journal of Educational Psychology*, 102, 115-134.
- Bautista, D., Mitchelmore, M. & Mulligan, J. (2009). Factors influencing Filipino children's solutions to addition and subtraction word problems. *Educational Psychology*, 29, 729-

- Biron, D., Caron, É. & Coté, L. (2012). *Développement de la pensée mathématique chez l'enfant. Du préscolaire au premier cycle du primaire*. Montréal, Québec : Les éditions CEC.
- Brissiaud, R. & Sander, E. (2010). Arithmetic world problem solving: A situation strategy first framework. *Developmental Science*, 13, 92-107.
- De Cortes, E. & Verschaffel, L. (1987). The effect of some non semantic factors on solving addition and subtraction word problems. *American Educational Research*. Washington D.C.
- De Vivié, X. (1999). Points de vue et type de représentation des règles. Deux niveaux de difficulté pour la résolution de problèmes. *L'année Psychologique*, 99, 271-293.
- Coquin-Viennot, D. (2001). Problèmes arithmétiques verbaux à l'école : Pourquoi les élèves ne répondent-ils pas à la question posée ? *Enfance*, 53, 181-196.
- Hughes, M. (1986). Children's invention of written arithmetic. (Dir.) Children and Numbers Difficulties. In *Learning Mathematics*, 52-78. Cambridge, MA: Blackwell.
- Geertz, G. (1979). *The interpretation of culture*. New-York, NY : Basic Books.
- Jordan, N.-C., Glutting, J. & Ramineni, C. (2010). The importance of number sense to mathematics achievement in first and third grades. *Learning and Individual Differences*, 20, 82-88.
- Karnach, J. & Kray, J. (2007). Developmental changes in switching between mental task sets. *Journal of Cognition and Development*, 8, 205-236.
- Kintsch, W. & Greeno, J.-G. (1985). Understanding and solving word arithmetic problems. *Psychological Review*, 85, 363-394.
- Mercier, A. & Sensevy, G. (2007). *Agir ensemble. L'action didactique conjointe du professeur et des élèves*. Rennes, France : Presses universitaires.
- Radford, L. (2002). The seen, the spoken and the written. A semiotic approach to the problem of objectification of mathematical knowledge. For the *Learning of Mathematics*, 22, 14-23.
- Radford, L. (2003). Gestures, speech, and the sprouting of signs: A semiotic-cultural approach to students' types of generalization. *Mathematical Thinking and Learning*, 5(1), 37-70.
- Radford, L. (2010). The eye as a theoretician: seeing structures in generalizing activities. For the *Learning of Mathematics*, 30(2), 2-7.
- Radford, L. (2011). Vers une théorie socio-culturelle de l'enseignement-apprentissage: la théorie de l'objectivation. *Elements 1(1)*, 1-27.
- Richard, J.-F. (1990). *Les activités mentales : Comprendre, raisonner, trouver des solutions*. Paris, France : Armand Colin.

- Richard, J.-F. (2004). *Les activités mentales*. Paris, France : Armand Colin.
- Robinson, K.-M. & Dubé, A.-K. (2009). Children's Understanding of Addition and Subtraction concepts. *Journal of Experimental Child Psychology*, 103(4), 532-545.
- Thévenot, C., Castel, C., Fanget, M. & Fayol, M. (2010). Mental subtraction and high and lower skilled arithmetic problem solvers: Verbal report versus operand - recognition paradigms. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory and Cognition*, 36, 1242-1255.
- Van Galen, M.-S. & Reitsma, P. (2010). Learning basic addition facts from choosing between alternative answers. *Learning Instruction*, 20(1), 47- 60.
- Vergnaud, G. (1981). *L'enfant, les mathématiques et la réalité*. Berne : Peter lang.
- Vergnaud, G. (1989). Psychologie et développement cognitif et didactique des maths : un exemple : les structures additives. *Petit x*, 22, 51-69.
- Vergnaud, G. (1991). La théorie des champs conceptuels. *Recherche en didactique des mathématiques*, 10(2-3), 133-170.
- Vergnaud, G. (2008). Culture et conceptualisation : l'une ne va pas sans l'autre. *Carrefours de l'éducation*, 26(2), 83-98.
- Vershaffel, L. & De Cortes, E. (1997). Word problems: A vehicle for promoting authentic mathematical understanding and problem solving in the primary school. *Educational Studies in Mathematics*, 8, 251-263.
- Vygotsky, L.-S. (1934/1978). *Mind and Society: the Development of Higher Psychological Processes*. Cambridge, MA : Harvard University Press. (Original publié en 1934)
- Zhang, J. & Normand, D.-A. (1994). Representation In Distributed Cognitive Tasks. *Cognitive Science*, 18, 87-122.
- Ministère de l'Éducation, du loisir et du sport du Québec (2009). *Plan stratégique 2009-2013*. Québec, Québec : Gouvernement du Québec.
- Secrétariat de la numératie et de la littératie (2008). Accroître la capacité. Série d'apprentissage professionnel. *Édition spéciale du secrétariat*, 16.