

ÉTAT DES CONNAISSANCES DES ÉLÈVES DE TERMINALE S SUR LE RAISONNEMENT PAR RÉCURRENCE

Denis GARDES
IREM de Dijon

Marie-Line GARDES
L2C2, Université Lyon 1, IREM de Lyon

Denise GRENIER
Institut Fourier, Université Grenoble Alpes

Résumé. Dans cet article, nous donnons notre analyse de l'état des connaissances sur le principe et le raisonnement par récurrence des élèves de Terminale S. Nous partons d'une réflexion épistémologique et didactique du principe de récurrence qui permet de dégager des éléments essentiels pour comprendre ce concept et pour pouvoir mettre en œuvre ce raisonnement. Nous analysons ensuite, à partir de ces critères, quatre manuels scolaires de Terminale S et dix-sept corrigés d'un même exercice de baccalauréat sur la manière dont ils présentent et rédigent un raisonnement par récurrence. Enfin, à partir de réponses à un questionnaire que nous avons élaboré, nous étudions les connaissances d'élèves de Terminale S sur le principe par récurrence et sur la mise en œuvre d'un tel raisonnement.

Mots clés. Principe de récurrence, raisonnement par récurrence, implication, quantification, preuve

Abstract. In this paper, we study the state of knowledge on the principle and reasoning by induction of students' knowledge. We lead an epistemological and didactic reflection of the induction principle to release essential elements to understand the concept and to be able to implement this reasoning. Then we analyze the presentation and the redaction of induction in four school manuals and seventeen corrected the same exercise. Finally, using a questionnaire, we study the students knowlegde on the induction principle and the implementation of such reasoning.

Key-words. Induction, reasoning, proof, implication, quantification.

Introduction

En mathématiques, le raisonnement par récurrence a la double spécificité de permettre la construction d'objets et d'être un outil de preuve fondateur de nombreux résultats en mathématiques discrètes (Grenier et Payan 1998). Dans l'enseignement, le concept de récurrence est peu utilisé, souvent mal compris, en partie parce qu'il nécessite une certaine maîtrise de connaissances de logique mathématique. Or de nombreux travaux didactiques ont montré l'importance d'une prise en charge effective dans l'enseignement des notions de logique. Certains de ces travaux se sont centrés sur la notion d'implication (Deloustal-Jorrand 2001 & 2004, Fabert & Grenier 2011), ou la quantification implicite dans les propositions implicatives (Durand-Guerrier 1999). D'autres travaux ont montré l'importance de la construction par les élèves et les étudiants d'un langage logique précis (Chellougui 2007, Durand-Guerrier 2005 & 2013, Mesnil 2014). Sur le concept de récurrence, Denise Grenier (2001, 2003, 2012 & 2016) a mené plusieurs études auprès d'étudiants scientifiques universitaires et d'enseignants de mathématiques qui révèle que cette double spécificité de la

réurrence est souvent absente de leurs conceptions, le concept étant réduit à une technique de preuve mal comprise et dont la légitimité est parfois questionnée.

Le raisonnement par récurrence et la logique étant actuellement dans les programmes de lycée, nous avons voulu poursuivre cette étude didactique en nous intéressant plus spécifiquement à l'état des connaissances sur le raisonnement par récurrence à la transition Lycée/Université. Nous rapportons ici les résultats de notre étude auprès des élèves de Terminale S. Dans la première partie, nous présentons un point de vue épistémologique et didactique sur le principe de récurrence. A partir de cette étude, nous dégagons des éléments qui nous semblent essentiels, d'une part pour la compréhension du principe de récurrence, et d'autre part, pour la mise en œuvre et rédaction d'un raisonnement par récurrence. Cela nous a conduits ensuite à faire des analyses didactiques de manuels scolaires, de corrigés d'exercices de bac ou de productions d'élèves. Ainsi, dans la seconde partie, nous étudions la présentation du raisonnement par récurrence dans les pages de cours de quatre manuels scolaires usuels en classe de Terminale S ainsi que dans dix-sept corrigés d'un même exercice de Bac S. L'objectif est de dégager les éléments qui pourraient être source de difficultés pour les élèves pour comprendre et mettre en œuvre un raisonnement par récurrence. Enfin, dans la troisième partie, nous faisons l'état des connaissances de 300 élèves de Terminale S sur le principe de récurrence et sur la mise en œuvre et la rédaction d'un raisonnement par récurrence à partir d'un questionnaire que nous avons construit.

1. Le principe de récurrence – un point de vue épistémologique et didactique

Dans les dictionnaires de langue française, les mots « récurrence », « récurrent » et le groupe de termes « raisonnement par récurrence » sont, définis à partir des mots ou idées de *répétition, reproduction, réitération, processus répétitifs*. En voici quelques exemples.

Récurrence : caractère de ce qui est récurrent ; répétition d'un phénomène : La récurrence d'un thème dans un roman. (<http://www.larousse.fr/dictionnaires/francais>)

Récurrence : caractère, état de ce qui réapparaît par intervalles, de ce qui se reproduit ; processus répétitif. (CNRTL¹)

Récurrent : qui revient, qui réapparaît, répétitif, répété (Wikimot.fr)

Raisonnement par récurrence : démonstration qui consiste à étendre à tous les termes d'une série ce qui est valable pour les deux premiers (<http://www.le-dictionnaire.com/>)

Raisonnement par récurrence : démonstration par laquelle on étend à une série de termes homogènes la vérité d'une propriété d'au moins deux de ces termes. (<http://www.larousse.fr/dictionnaires/francais>)

Ces définitions induisent une forte relation épistémique entre les mots « répétition » et « récurrence » dans leurs acceptions courantes. Or le sens et l'utilisation en mathématiques du concept de récurrence et du principe de preuve associé en diffèrent par des aspects fondamentaux. En effet, dans la notion de répétition, il y a l'idée de reproduction à l'identique : on peut imaginer un mot, une phrase, un thème, qui se reproduisent dans le texte d'un poème ou d'un cantique (un refrain). On peut aussi penser à une action qui se répète, un tic. Alors qu'en mathématiques, l'induction complète – autre expression pour le raisonnement par récurrence – permet d'établir des résultats en validant des hypothèses sur les propriétés d'un objet, à partir d'observations répétées sur cet objet. On a donc un nouveau résultat. D'autre part, sous sa forme usuelle, le principe de récurrence se décline sous la forme d'une

¹ Centre National de Ressources Textuelles et Lexicales

implication « Si ... Alors » qui s'applique à une propriété dépendant d'une variable (un entier naturel). Cette fonction de généralisation de la récurrence n'est pas présente dans le sens usuel du mot répétition.

1.1 Le concept mathématique de récurrence

La récurrence est un des axiomes qui définissent l'ensemble \mathbb{N} des entiers naturels. Il s'énonce ainsi : « Si un ensemble d'entiers naturels contient 0 et le successeur de chacun de ses éléments, alors cet ensemble est égal à \mathbb{N} . » Cet axiome participe au fondement de deux propriétés fondamentales de \mathbb{N} : la cardinalité – les entiers permettent de compter, dénombrer – et l'ordinalité – les entiers permettent de numéroter, d'ordonner. Compter et ordonner étant possible car tout entier naturel n a un successeur $s(n)$. L'addition dans \mathbb{N} est définie à partir de l'opérateur « +1 » qui consiste à passer d'un entier n à son successeur $s(n)$: $n+1=s(n)$. Elle est donc construite sur la *répétition d'un processus* d'itération, à partir de l'opérateur « +1 ». Cependant, on ne peut réaliser le processus « +1 » jusqu'à l'infini ! C'est là que l'axiome de récurrence intervient : il permet d'affirmer que si on sait passer de n quelconque à son successeur $n+1$, c'est suffisant pour décrire \mathbb{N} (en partant de 0) ou une partie de \mathbb{N} (en partant d'un autre nombre entier). L'axiome de récurrence permet donc justement de ne pas décrire \mathbb{N} en répétant indéfiniment l'opération. Comprendre qu'il n'y a pas de plus grand nombre dans \mathbb{N} relève du concept de récurrence.

1.2. Formalisations du principe de récurrence (version de base)

Ce principe permet d'étudier une propriété P qui dépend d'un entier naturel n quelconque, on la note usuellement $P(n)$. Il s'agit de savoir pour quelles valeurs de n , $P(n)$ est vraie, sans devoir le vérifier pour chacune des valeurs de n (ce qui est impossible). Le principe de récurrence affirme que SI cette propriété est vraie pour une valeur particulière de n (notons-la n_0) ET qu'elle est héréditaire à partir de cette valeur n_0 , ALORS elle est vraie pour toutes les valeurs de n à partir de n_0 .

Un énoncé classique formalisé est le suivant :

SI [il existe un entier n_0 tel que $P(n_0)$ est vraie ET pour tout $n \geq n_0$, $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ est vraie] ALORS [pour tout $n \geq n_0$, $P(n)$ est vraie].

Dans les définitions des différents dictionnaires données ci-dessus du raisonnement par récurrence, on pouvait lire qu'il faut considérer que la propriété étudiée est « valable pour les deux premiers » termes de la série, ou « au moins pour deux de ses termes ». Nous ne retrouvons pas cette condition dans notre formalisation, qui affirme qu'il suffit que la propriété soit vraie pour UN premier « terme » n_0 – et non pas deux – et qu'elle soit héréditaire.

1.3 Représentations et images de la récurrence en mathématiques

Dans la très grande majorité des ouvrages scolaires de Terminale S, les images associées à la récurrence s'appuient sur l'idée de « répétition d'un processus à l'identique », et sur la notion de successeur dans \mathbb{N} . Les deux types d'images classiques sont les dominos (ou les sucres) et les échelles (ou les escaliers). Leur objectif est d'illustrer la forme la plus répandue de la démonstration par récurrence. En voici deux exemples.

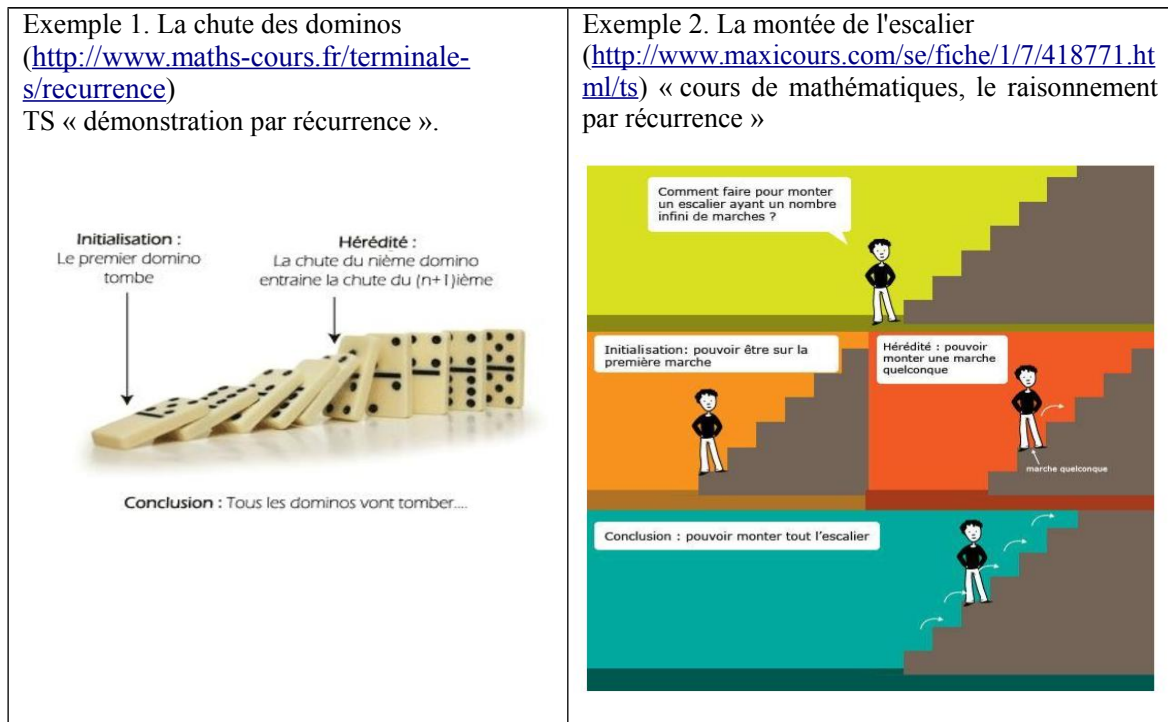


Figure 1 – Deux illustrations usuelles du raisonnement par récurrence en classe de Terminale S

Dans le premier manuel, la chute des dominos est érigée en « principe des dominos » – par analogie au « principe de récurrence ». Le dessin induit que la démonstration par récurrence consiste d'abord à initialiser un processus (la chute du premier domino), qui va automatiquement se reproduire, du premier domino au second, du second au troisième, etc., jusqu'à la chute du dernier de la pile. Cependant, pour exprimer aussi que ce n'est vraiment pas ce que l'on fait dans une preuve par récurrence, le texte sur l'hérédité qui accompagne le dessin concerne un « n ième domino » et son suivant le « $(n+1)$ ième ». L'objectif de ce texte est probablement de faire comprendre que la récurrence consiste, non pas à vérifier la répétition « pas à pas » du processus de chute depuis le premier domino jusqu'au dernier – ce qui ne serait pas possible – mais de vérifier ce processus pour un seul domino, situé n'importe où dans la pile.

On y retrouve la même idée dans le dessin tout aussi classique de l'escalier. L'image illustre qu'on doit d'abord monter sur la première marche, pour accéder à la seconde, puis sur la seconde pour accéder à la troisième, etc., et que cela se fait marche après marche. C'est donc la répétition d'un processus qui est évoquée. Cependant, le texte, comme dans l'exemple précédent des dominos – mais de manière plus implicite – suggère que l'hérédité c'est en fait de « pouvoir monter sur une marche quelconque » à partir de la précédente. De plus, dans l'exemple donné ici, l'escalier a un nombre infini de marches, ce qui laisse penser que l'infini est nécessairement associé à la récurrence (sinon, pourquoi ne pas prendre un escalier fini ?). Or l'infini ne joue aucun rôle dans ce type de preuve.

Les limites de ces représentations

Comme toutes les représentations (image, graphique, tableau, etc.) en mathématiques, ces deux dessins, bien que commentés, ne permettent pas de percevoir des aspects fondamentaux de ce principe de récurrence, en particulier :

- l'hérédité est une implication universelle – Si... Alors – qui concerne une valeur n quelconque, et pour établir que cette implication est vraie, on n'a besoin ni de vérifier qu'elle est vraie pour les valeurs de n précédentes, ni de vérifier l'initialisation ;
- l'initialisation peut avoir lieu pour une valeur de n qui n'est pas nécessairement $n=1$; sur les images, cela reviendrait à se placer n'importe où dans la pile des dominos, sans savoir si les précédents peuvent tomber, ou sur n'importe quelle marche de l'escalier, sans savoir si et comment on peut y arriver ;
- et, enfin, la propriété $P(n)$ peut être héréditaire pour tout n , mais jamais initialisée – et donc toujours fautive ; ceci reviendrait par exemple, pour l'escalier, à dire que si on est sur n'importe quelle marche, on peut monter sur la suivante, ... même si on ne peut pas monter sur la première marche !

Ces deux images révèlent la difficulté soulevée par les liens entre la notion de répétition et l'hérédité de la récurrence : le dessin montre du « pas à pas », alors que le principe affirme qu'un seul pas, générique et n'importe où, suffit. Mais la quantification universelle de l'hérédité n'est pas du tout visible. On retrouve toutes ces confusions et questions dans les conceptions des élèves et des étudiants sur le concept de récurrence. Nous donnons en annexe 1 une autre représentation de ce principe pour tenter d'illustrer ces aspects fondamentaux.

2. Analyse du raisonnement par récurrence à travers l'étude de manuels scolaires et de corrigés d'un même exercice de baccalauréat

Dans cette partie, nous étudions la présentation du raisonnement par récurrence dans les pages de cours de quatre manuels scolaires usuels de Terminale S et dans dix-sept corrigés (trouvés en accès libre sur Internet, voir annexe 3) d'un même exercice de Bac S. L'objectif est de dégager les éléments qui pourraient être sources de difficultés pour les élèves pour comprendre et mettre en œuvre un raisonnement par récurrence. Nous présentons d'abord les cinq critères que nous avons déterminés pour analyser ces documents, puis notre étude des manuels et corrigés de Bac, enfin nous concluons sur cette analyse, notamment en comparant les deux types de documents.

2.1 Critères

A partir de notre étude épistémologique et didactique du principe de récurrence, nous avons déterminé cinq critères pour cette analyse.

Critère 1. Structure du raisonnement

Pour démontrer qu'une propriété $P(n)$ est vraie pour tout entier n à partir d'un certain rang, la formalisation du principe de récurrence présentée en 1.2 met en évidence une structure du raisonnement en trois étapes :

- démontrer qu' [il existe un entier n_0 tel que $P(n_0)$ est vraie],
- démontrer que [pour tout $n \geq n_0$, $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ est vraie],
- et en déduire que [pour tout $n \geq n_0$, $P(n)$ est vraie].

Ces trois étapes correspondent à ce qu'on appelle l'initialisation, l'hérédité et la conclusion. Ce critère permet donc d'identifier la structure de formalisation, en particulier la présence ou non des trois étapes, dans les conceptions des élèves. Nous faisons l'hypothèse que le schéma le plus répandu sera binaire (initialisation, hérédité) ou ternaire (initialisation, hérédité et conclusion).

Critère 2. Explication et notation de la propriété dépendant de l'entier naturel n

Une propriété P qui dépend d'un entier naturel n quelconque est usuellement notée $P(n)$. Cette notation permet de mettre en évidence la nature de la variable et d'expliciter la propriété que l'on veut étudier. Ce critère sera décliné en plusieurs sous-critères : la propriété est-elle énoncée clairement ? Quelle notation est utilisée pour la désigner ? Le domaine de définition et la nature de la variable sont-ils mentionnés ? Ce critère permet donc de repérer si un travail spécifique est mené sur l'écriture de la propriété étudiée.

Critère 3. Initialisation

Le principe de récurrence contient une étape où il s'agit de déterminer s'il existe un entier n_0 tel que $P(n_0)$ est vraie (initialisation). Une étude didactique (Grenier, 2012) a mis en évidence des difficultés potentielles pour trouver d'où vient cette valeur n_0 et comprendre que cette valeur n'est pas nécessairement 0 ou 1.

Critère 4. Hérité : implication et quantification

Établir l'hérité consiste à démontrer que pour tout $n \geq n_0$, $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ est vraie : l'hérité est une implication universelle. La quantification est un élément incontournable de cette étape (Grenier, 2012). Ce critère se décline en plusieurs sous-critères : présence et écriture de la quantification ; présence et écriture de l'implication ; présence et écriture de la conclusion de l'hérité.

Critère 5. Structure de la conclusion

Le principe de récurrence permet de démontrer que pour tout $n \geq n_0$, $P(n)$ est vraie. Pour cela, il faut avoir démontré que la propriété est vraie pour une valeur particulière de n (initialisation) et qu'elle est héréditaire à partir de cette valeur. Il faut donc faire appel aux deux étapes – initialisation et hérédité – et faire le lien entre elles, c'est-à-dire établir l'hérité au-moins à partir de cette valeur particulière de n . Ce critère permet de mettre en évidence la structure de la conclusion : mentions de l'initialisation, de l'hérité, du lien entre initialisation et hérédité et, enfin, mention du principe de récurrence qui permet d'affirmer le résultat.

A partir de ces cinq critères, nous avons construit une grille d'analyse, d'une part pour étudier les quatre manuels choisis et les dix-sept corrigés d'un même exercice de bac, et d'autre part pour effectuer des comparaisons : entre les manuels, entre les corrigés, puis entre les manuels et les corrigés.

2.2 Analyse de quatre manuels scolaires de Terminale S

Nous avons choisi d'analyser, dans les pages de cours, la présence ou l'absence d'éléments essentiels du principe de récurrence tel qu'il est présenté aux élèves, pour identifier ce qui peut être source de difficultés. Les quatre manuels étudiés sont : Maths Repères TS (2012), Math'x TS (2011), Indice TS (2012) et Symbole TS (2012). Dans ces quatre manuels, le raisonnement par récurrence se situe dans le premier chapitre. Dans trois d'entre eux, ce chapitre concerne les suites et dans le manuel Math'x, il s'intitule *Raisonnement par récurrence*. Nous avons étudié, pour chaque manuel, la page *Cours* puis la page présentant des exercices résolus (intitulée, selon les manuels, *application*, *exercices résolus*, *savoir-faire*, *capacités attendues*).

Voici notre analyse comparative reprenant chaque critère.

Critère 1 (Structure du raisonnement)

Trois manuels présentent le raisonnement par récurrence sous une structure ternaire avec initialisation, hérédité et conclusion. Le manuel Indice propose une structure binaire (initialisation et hérédité) avec la conclusion du raisonnement dans la phase de l'hérédité. Notons, comme le montre Grenier (2012) que les deux étapes communes sont l'initialisation et l'hérédité, et qu'elles sont toujours présentées dans cet ordre.

Critère 2 (Explicitation et notation de la propriété dépendant de l'entier naturel n)

Trois manuels notent la propriété qui dépend de n par $P(n)$. Le manuel Symbole l'écrit Pn , notation qui fait référence aux suites. La propriété est toujours écrite comme dépendante de n mais la nature de cette variable n'est pas toujours explicitement mentionnée, comme en témoigne l'extrait suivant : *La propriété dépendant de n est : $u_n=3^n+1$* (Math'x TS, 2012, p.26). Deux manuels précisent le domaine de définition de la propriété $P(n)$:

Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $P(n)$ la propriété « $4n - 1$ est multiple de 3 ». (Maths Repères, 2012, p.10)

Soit $P(n)$ la propriété : « $(1+\alpha)^n \geq 1+n\alpha$ » pour tout entier naturel n . (Indice, 2012, p.12)

Dans ce dernier extrait, les guillemets séparent bien l'énoncé de la propriété de la quantification, mais cela peut être ambigu pour des élèves qui voient le raisonnement par récurrence pour la première fois : le danger est que les élèves intègrent l'expression « *pour tout entier naturel n* » dans l'énoncé de la propriété. La présentation du premier extrait est plus correcte et met bien en évidence le fait que la propriété P dépend d'un entier naturel n quelconque. Enfin, précisons que dans les exercices corrigés, la propriété $P(n)$ n'est pas toujours clairement explicitée comme dans l'extrait suivant :

Énoncé
Démontrer que, pour tout entier $n \geq 4$, on a $2^n \geq 4n$.

Solution
① Initialisation
Montrons que la propriété est vraie quand $n = 4$.
Lorsque $n = 4$, $2^n = 2^4 = 16$ et $4n = 4 \times 4 = 16$.
Donc l'inégalité $2^n \geq 4n$ est vérifiée pour $n = 4$.

Figure 2 – Extrait du manuel Math'x TS, 2012, p.27

Il semble difficile de mettre rigoureusement en œuvre un raisonnement par récurrence lorsque la propriété que l'on veut étudier reste implicite.

Critère 3 (Initialisation)

Dans les quatre manuels, les pages de cours mentionnent, pour l'initialisation, l'existence d'un entier naturel n_0 pour lequel la propriété $P(n)$ est vraie. Deux manuels (Maths Repères et Indice) ne précisent pas comment on détermine n_0 et deux autres (Math'x et Symbole) indiquent que n_0 est un entier naturel donné. En étudiant les exemples des pages de cours ou les exercices corrigés, nous avons remarqué que la valeur de n_0 est toujours donnée et qu'elle vaut soit 0, soit 1. Un seul exercice corrigé (Math'x, 2012, p.27) propose une initialisation à $n=4$ mais sans justification (d'autant plus qu'elle est vraie en $n=0$). Il semble, à la lecture des manuels, que la recherche de l'entier n_0 ne soit pas considérée comme une question en soi.

Critère 4 (Hérédité : implication et et quantification)

À propos de la quantification

Un manuel propose une formulation proche de celle que nous proposons au §1.2 :

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ vraie implique $P(n+1)$ vraie (Maths Repères, 2012, p.10)².

Cependant, dans l'exemple proposé en dessous de la partie cours puis dans les exercices corrigés, cette formulation disparaît et est remplacée par

*Soit $n \in \mathbb{N}$ **quelconque fixé*** (Maths Repères, 2012, p.10)³.

Le terme *fixé* semble être ajouté pour marquer le choix d'un entier naturel n générique dans la quantification universelle. Dans les autres manuels, la quantification est toujours présente mais formulée de diverses manières :

*Si la propriété est supposée vraie pour **un** entier naturel k [...]*. (Math'x, 2012, p.26)⁴

*On suppose qu'**il existe** un entier p tel que $P(p)$ soit vraie, [...]*. (Indice, 2012, p.12)⁴

*On suppose que la propriété P_n est vraie pour **un** rang $n \geq n_0$ **quelconque fixé** [...]*. (Symbole, 2012, p.12)⁴

Ces différentes formulations mettent en évidence la difficulté de prendre en charge la notion de quantificateur et son utilisation. On peut faire l'hypothèse que ces formulations sont un moyen de « masquer » la quantification et de passer outre l'explicitation que la propriété étudiée dépend d'un entier naturel n générique dans une quantification universelle.

À propos de l'implication

Dans trois manuels sur quatre, l'implication à démontrer dans l'étape de l'hérédité est clairement explicitée dans la partie cours du principe de récurrence. Deux formulations sont utilisées : « Si [...] alors [...] » (Indice, 2012, p.12 et Math'x, 2011, p.26) et « $P(n)$ vraie implique $P(n+1)$ vraie » (Maths Repères, 2012, p.10). En revanche, seul un manuel (Maths Repères) conserve ces formulations (l'une ou l'autre) de l'implication dans l'exemple et les exercices corrigés, ainsi que dans la conclusion de l'étape de l'hérédité :

*On a montré que, si $P(n)$ est vraie, alors $P(n+1)$ l'est aussi. On a donc montré, pour $n \in \mathbb{N}$, que : $P(n)$ est vraie **implique** $P(n+1)$ est vraie.* (Maths Repères, 2012, p.10)⁴

Dans les exemples ou les exercices corrigés des autres manuels, les auteurs changent de vocabulaire pour exprimer l'implication. On retrouve très souvent la formulation suivante :

***Supposons que** pour un entier naturel $k \geq 0$, la propriété soit vraie [...]. **Montrons que** la propriété est vraie pour l'entier suivant $k+1$ [...]*. (Math'x, 2011, p.26)⁴

Nous faisons l'hypothèse que cette formulation cache le fait que l'étape d'hérédité est la démonstration d'une implication universelle et la réduit à l'étude de la véracité de $P(n+1)$. Ceci est notamment renforcé par la rédaction de la conclusion de la phase d'hérédité qui se termine par « *la propriété $P(n+1)$ est donc vraie* » (Indice, 2012, p.13) ou « *la propriété est donc héréditaire* » (Math'x, 2011, p.27) et qui ne revient pas sur l'implication en tant que telle (c'est-à-dire, on a démontré que **si** $P(n)$ est vraie **alors** $P(n+1)$ est vraie). Or il est essentiel, pour bien appréhender le principe de récurrence, de comprendre que l'hérédité est une implication universelle. En effet, comme le précise Grenier (2012), de nombreux étudiants

2 C'est nous qui soulignons.

3 Souligné par les auteurs du manuel.

4 Ici, c'est nous qui soulignons.

expriment un doute sur la fiabilité d'une preuve par récurrence et ce doute « provient de la confusion entre « P est héréditaire » et « P est vraie », entretenue par l'expression langagière incorrecte de l'hérédité : « on suppose vraie au rang n et on calcule au rang $n+1$ », où l'implication a disparu et donne à lire que P est supposée vraie pour un n (quelconque) » (Grenier, 2012, p.38). Nos analyses de productions d'élèves et d'étudiants (cf. partie suivante) le confirmeront également.

Nous pouvons aussi remarquer qu'aucun de ces manuels ne se réfère aux pages consacrées à la démonstration d'une implication. Il est dommage que nous ne trouvions aucun commentaire du type : pour démontrer une implication « si A alors B », on ne s'intéresse qu'au cas où A est vrai. Ceci est d'autant plus étonnant que l'implication est un objet d'étude du programme de Terminale S.

Critère 5 (Structure de la conclusion)

Un seul manuel (Indice, 2012, p.12) mentionne le principe de récurrence dans la conclusion du raisonnement par récurrence.

Conclusion : La propriété est vraie pour $n=0$ et est héréditaire. Donc d'après le principe de récurrence $P(n)$ est vraie pour tout naturel n , c'est-à-dire que $(1+\alpha)^n \geq 1+n\alpha$.

On notera que dans cette formulation, l'initialisation et l'hérédité sont mentionnées mais le lien entre les deux ne l'est pas. En effet, les auteurs n'écrivent pas à partir de quel rang la propriété est héréditaire. Seul le manuel Math'x mentionne ce lien, dans la partie cours puis dans les exercices corrigés, comme le montre cet extrait :

La propriété est vraie pour $n=4$ et est héréditaire à partir du rang 4 donc, pour tout entier naturel $n \geq 4$, $2^n \geq 4n$. (Math'x, 2011, p.27)

Le manuel Maths Repères ne fait référence, dans sa conclusion, ni au principe de récurrence, ni aux étapes d'initialisation et d'hérédité, ni au lien entre les deux. Il écrit simplement que la propriété $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n .

Conclusion pour tout entier naturel n , $4^n - 1$ est un multiple de 3. (Repères, 2012, p.10)

Sur les quatre manuels étudiés, aucun n'écrit la conclusion en faisant référence à la fois au principe de récurrence, aux étapes de l'initialisation et de l'hérédité et au lien entre ces deux étapes, c'est-à-dire aux raisons qui permettent de conclure.

II.3 Analyse de dix-sept corrigés d'un même exercice de baccalauréat

Nous avons choisi d'étudier des corrigés d'un exercice de bac afin d'analyser la manière dont les enseignants rédigent un raisonnement par récurrence pour leurs élèves. L'exercice est le suivant, tiré du sujet de mathématiques du Bac S du Liban, 28 mai 2013 :

On considère la suite numérique (v_n) définie pour tout entier naturel n par

$$\begin{cases} v_0 &= 1 \\ v_{n+1} &= \frac{9}{6-v_n} \end{cases}$$

3. a. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $0 < v_n < 3$.

Figure 3 – Extrait d'un exercice de bac S, épreuve de mathématiques, Liban 2013

Nous avons recueilli sur Internet dix-sept corrigés de cet exercice (voir annexe 3). Ils sont en accès libre et proviennent de diverses sources (pages personnelles, associations, site d'aide en ligne, etc.). Nous les avons analysés avec la même grille que les manuels scolaires. Nous donnons ci-après notre analyse comparative de ces dix-sept corrigés.

Critère 1 (Structure du raisonnement)

Cinq de ces corrigés proposent une structure du raisonnement par récurrence en deux étapes – initialisation et hérédité. Pour quatre d'entre eux (corrigés 3, 5, 8, 12), la conclusion du raisonnement est écrite à la fin de l'étape de l'hérédité et dans le corrigé 9, il n'y a pas de conclusion. Les douze autres corrigés structurent le raisonnement en trois étapes et la majorité les nomment « initialisation, hérédité et conclusion » (sauf les corrigés 11, 14, 15 et 16). On remarque donc, comme pour les manuels scolaires, que les étapes d'initialisation et d'hérédité sont communes aux différentes rédactions et qu'elles sont aussi présentées dans cet ordre.

Critère 2 (Explicitation et notation de la propriété dépendant de l'entier naturel n)

Le premier élément marquant est que même si la majorité des corrigés nomme la propriété dépendant de l'entier n par le terme « propriété », d'autres formulations sont employées telles que « proposition » (corrigés 8, 13 et 15), « affirmation » (corrigé 14), « hypothèse de récurrence » (corrigé 10), avec parfois l'utilisation de deux mots dans le même corrigé (par exemple « propriété » et « proposition » dans les corrigés 13 et 15). La notation utilisée pour nommer la propriété est souvent P_n (7 sur 17), deux corrigés utilisent $P(n)$ (corrigés 8 et 9), quatre corrigés ne proposent pas de notation et écrivent directement « *démontrons par récurrence que, pour tout entier naturel n , $0 < v_n < 3$* » (corrigés 2, 7, 12 et 14) et enfin quatre corrigés n'explicitent pas la propriété à étudier (corrigé 3, 6, 11 et 13), ce qui entraîne des démonstrations peu claires et surtout peu rigoureuses, comme le corrigé suivant (corrigé 3) :

Initialisation : $v_0 = 1$ donc $0 < v_0 < 3$.
 Hérédité : Montrons que pour tout n de \mathbb{N} , si $0 < v_n < 3$ alors $0 < v_{n+1} < 3$
 $0 < v_n < 3$ donc $3 < 6 - v_n < 6$ donc $\frac{9}{6} < \frac{9}{6 - v_n} < \frac{9}{3}$ soit $0 < v_{n+1} < 3$
 La propriété est héréditaire donc pour tout entier naturel n , $0 < v_n < 3$

Figure 4 – Corrigé 3 de l'exercice de Bac

Concernant la spécification du domaine de définition de la propriété dépendant de l'entier naturel n , elle est absente dans 8 corrigés sur 17 (par exemple corrigé 9). Dans les autres corrigés, on la trouve sous trois formes différentes :

La propriété à montrer pour tout entier $n > 0$ est : P_n : « $0 < v_n < 3$ » (extrait du corrigé 5)

La propriété P_n : « $0 < v_n < 3$ » pour tout entier naturel n (extrait du corrigé 8)

La propriété P_n : $0 < v_n < 3$ pour tout entier naturel n (extraits des corrigés 1, 4, 17)

La première formulation précise le domaine de définition de la propriété avant son énoncé alors que les deux dernières l'écrivent après. Dans la seconde formulation, on peut supposer que les guillemets marquent une différenciation entre l'énoncé de la propriété et la spécification de son domaine de définition. Dans la troisième formulation, cette distinction ne semble pas être faite et on peut comprendre que l'énoncé de la propriété comprend « pour tout entier naturel n ». On sait que cette ambiguïté est source de confusions. En effet, que doit-on démontrer dans l'hérédité si « $P(n)$ vraie » signifie « la propriété est vraie pour tout entier naturel n » ? Enfin, notons que dans 10 corrigés sur 17, la nature de la variable est clairement écrite alors que dans les sept autres corrigés, aucune référence à n entier naturel n'est faite.

Critère 3 (Initialisation)

Dans cet exercice, la valeur n_0 de l'initialisation est donnée dans l'énoncé et vaut 0. Il n'est donc pas attendu que cette valeur initiale soit évoquée ou discutée.

Critère 4 (Hérédité : implication et quantification)

A propos de la quantification

Seulement deux corrigés (corrigés 3 et 12) écrivent une quantification correcte :

Soit $n \geq 0$. Supposons que $0 < v_n < 3$ et montrons que $0 < v_{n+1} < 3$. (extrait du corrigé 12)

Dans cinq corrigés, la quantification est absente (corrigés 1, 4, 5, 6, 17) et l'hérédité commence directement par « *supposons P_n vraie, montrons que P_{n+1} est vraie* » (extrait du corrigé 1). Dans les dix autres corrigés, on retrouve, comme dans les manuels scolaires, plusieurs types de formulations :

*Supposons que pour **un certain** entier n , on ait $0 < v_n < 3$.* (extrait du corrigé 2)⁵

*Supposons que pour **n fixé**, $0 < v_n < 3$.* (extrait du corrigé 7)⁵

*Supposons qu'**il existe** $n \geq 0$ tel que $0 < v_n < 3$.* (extrait du corrigé 13)⁵

*Si elle est vraie à **un rang n quelconque** [...]* (extrait du corrigé 14)⁵

Ces différentes formulations mettent en évidence la difficulté, dans ce raisonnement, de nommer un élément générique dans une quantification universelle. Cela étaye également notre hypothèse selon laquelle ces formulations sont un moyen, délibéré ou non, de « masquer » cette difficulté.

A propos de l'implication

Sur l'ensemble des dix-sept corrigés, seuls deux (corrigés 3 et 14) rédigent l'implication avec un « Si [...] alors [...] » :

*Montrons que pour tout n de N , **si** $0 < v_n < 3$ **alors** $0 < v_{n+1} < 3$.* (extrait du corrigé 3)⁵

Dans les autres corrigés, la rédaction est écrite sous la forme « supposons que [...] et montrons que [...] » comme en témoigne l'extrait suivant (corrigé 1) :

Supposons P_n vraie, montrons alors que P_{n+1} est vraie.

Si le lecteur expert comprend bien qu'on cherche à démontrer l'implication « *Pour tout n de N , si $P(n)$ alors $P(n+1)$ » et que pour cela on postule que $P(n)$ est vraie, cela nous semble être implicite et ambiguë pour un lecteur novice. Ce résultat confirme notre hypothèse selon laquelle cette formulation cache le fait que l'étape d'hérédité est la démonstration d'une implication et la réduit à l'étude de la véracité de $P(n+1)$. De plus, comme dans les manuels scolaires, la rédaction de la conclusion de l'étape de d'hérédité, quand elle est présente (dans 9 corrigés sur 17), s'arrête souvent à « $P(n+1)$ est vraie » et ne revient pas sur l'implication en tant que telle (c'est-à-dire, on a démontré que **si** $P(n)$ est vraie **alors** $P(n+1)$ est vraie). L'implication est cachée sous les termes « *la propriété est **donc encore** vraie au rang $n+1$ » (extrait corrigé 2) ou « **ainsi** [...], **on a bien** P_{n+1} vraie » (extrait corrigé 4) ou encore « $P(n+1)$ est **encore** vraie » (extrait corrigé 9).**

Critère 5 (Structure de la conclusion)

Le premier élément marquant est que sept corrigés (7, 8, 10, 11, 12, 14, 15) donnent comme conclusion « *pour tout entier naturel n : $0 < v_n < 3$ » sans évoquer le principe de récurrence ou*

⁵ C'est nous qui soulignons.

une étape précédente du raisonnement. Le second élément à pointer est que, comme pour les manuels scolaires étudiés, aucun corrigé ne propose une conclusion mentionnant le principe de récurrence, les deux étapes (initialisation et hérédité) et le lien entre les deux étapes. D'ailleurs, aucun corrigé ne fait ce lien et ne précise, dans la conclusion, que « la propriété est héréditaire à partir du rang n_0 ». Six corrigés évoquent le principe de récurrence sous cette forme : « *par le principe de récurrence, $P_n : 0 < v_n < 3$ est vraie pour tout entier naturel n* » (extrait du corrigé 1) et quatre corrigés font référence aux étapes de l'initialisation et de l'hérédité, comme dans cet extrait (corrigé 16) : « *Nous avons montré que la propriété (P_n) est vraie au rang 0 et est héréditaire, elle est donc vraie pour tout entier naturel n* ». Enfin, le corrigé 9 ne propose pas du tout de conclusion.

2.4 Bilan

Le raisonnement par récurrence fait partie des premiers apprentissages de Terminale S. Il est présenté, dans les manuels scolaires, dans le chapitre sur les suites⁶. Les auteurs des manuels étudiés le présentent sous une structure binaire ou ternaire avec comme étapes communes l'initialisation et l'hérédité. La conclusion (troisième étape) est parfois incluse dans l'hérédité. Il n'y a pas toujours de cohérence entre la présentation du principe de récurrence dans la partie cours, et la mise en œuvre d'un raisonnement par récurrence dans un exemple ou dans un exercice corrigé.

En ce qui concerne les dix-sept corrigés d'un exercice de bac, nous notons d'abord une grande variabilité dans la rédaction du raisonnement par récurrence. Si la structure reste toujours binaire ou ternaire avec les étapes de l'initialisation et de l'hérédité communes, nous avons observé de nombreuses formulations différentes, notamment dans l'explicitation de la propriété à étudier, dans la formalisation de l'hérédité et dans la structure de la conclusion.

La comparaison entre les manuels scolaires étudiés et les corrigés de bac révèle quelques différences. Les corrigés de bac montrent une plus grande diversité dans l'écriture de la propriété dépendant de n , une absence plus importante de quantification ou de la nature de la variable, une absence majeure de conclusion et – quand elle est présente – une structure souvent floue de cette conclusion.

Cependant, les analyses mettent en évidence plusieurs écueils - communs aux manuels scolaires et aux corrigés - de la présentation du principe de récurrence et de la rédaction d'un raisonnement par récurrence par les enseignants, qui peuvent être source de difficultés pour les élèves. Nous relevons en particulier les points suivants, déjà mis en évidence par les autres études citées dans l'introduction :

- Une explicitation de la propriété dépendant de n insuffisamment précise quant à sa notation, son domaine de définition ou la nature de la variable (critère 2). En particulier, dans les corrigés, la propriété à étudier est souvent notée P_n , notation qui fait référence aux suites et le domaine de définition est souvent absent.
- Une initialisation, toujours proposée en première étape du raisonnement et souvent réduite à deux valeurs de n ($n=0$ ou $n=1$), valeur donnée par l'énoncé (critère 3).
- Des imprécisions, voire des erreurs dans la formalisation de l'hérédité, notamment sur la quantification et l'implication (critère 4). Dans les corrigés, cela se traduit par l'absence de quantification ainsi qu'un manque de clarté dans le vocabulaire employé pour expliciter ou évoquer l'implication universelle qu'est l'hérédité.
- Une conclusion du raisonnement par récurrence qui ne fait pas appel au principe de récurrence ni aux étapes d'initialisation et d'hérédité et surtout au lien entre ces deux étapes

⁶ Ceci est conforme à la présentation du programme puisque le raisonnement par récurrence est le premier contenu du paragraphe consacré aux suites (MEN, 2011).

(critères 1 et 5). Dans les corrigés, on observe aussi une absence majeure de conclusion. Or la prise en compte de tous ces points est indispensable à une bonne compréhension de ce principe (cf. partie 1 et Grenier, 2012). Sans mettre en doute le fait que ces éléments sont clairs pour les auteurs des manuels scolaires et des corrigés, nous pensons qu'ils ne le sont pas pour les élèves et que ces ambiguïtés et imprécisions sont à l'origine de nombreuses difficultés éprouvées par les élèves et les étudiants, comme nous le montrons dans la suite. Enfin, le fait que chaque manuel scolaire et chaque corrigé présentent plusieurs de ces écueils atteste de la difficulté ressentie par les enseignants de transmettre le principe de récurrence en classe de Terminale S.

3. Analyse du raisonnement par récurrence à partir d'un questionnaire élève/étudiant

Dans cette partie, nous présentons tout d'abord le questionnaire que nous avons construit. Puis nous analysons chaque partie de ce questionnaire en nous appuyant sur des productions.

3.1 Présentation du questionnaire

Le questionnaire proposé aux élèves de Terminale S⁷ comporte quatre parties (cf. annexe 2). Nous allons, pour chaque partie, préciser leur objectif en énonçant les hypothèses sous-jacentes concernant les difficultés des élèves à propos du raisonnement par récurrence.

La première partie consiste à bâtir et à rédiger une preuve par récurrence d'une question classique d'un exercice du baccalauréat⁸. Nous voulons voir comment les élèves rédigent ce type de raisonnement et si nous allons y retrouver les mêmes caractéristiques que dans les manuels ou les corrigés écrits par des enseignants.

La deuxième partie s'intéresse à quatre propriétés mathématiques (calcul de dérivée, inégalités, existence de solutions). Pour chaque propriété, nous posons à l'élève trois questions :

- 1- Est-ce qu'une preuve par récurrence est envisageable ? Oui - Non, pourquoi ?
- 2- Est-ce qu'un autre type de preuve est envisageable ? Oui - Non, pourquoi ?
- 3- Proposer ci-dessous une preuve (même incomplète).

L'objectif principal de cette partie est de repérer les critères que les élèves mettent en œuvre pour se lancer dans une preuve par récurrence. Nous faisons l'hypothèse que la nature de la variable n entier naturel de la propriété à démontrer n'est pas le critère premier. Ceci explique pourquoi nous proposons d'abord un calcul de dérivée.

La deuxième propriété est l'inégalité de Bernoulli. La démonstration de cette inégalité fait partie des démonstrations exigibles du programme de Terminale S (MEN, 2011). Il est important de noter que les lycéens n'ont guère d'autre méthode que le raisonnement par récurrence pour la prouver dans la mesure où la formule du binôme de Newton a disparu des programmes de Terminale S. D'autre part, cette inégalité fait apparaître deux variables, une entière et une réelle et nous supposons que ce couple de variables va perturber les lycéens, ceux-ci ne sachant pas sur quelle variable mettre en œuvre le raisonnement.

La troisième propriété consiste en la résolution d'une inégalité où la preuve par récurrence n'est pas appropriée. Nous voulons voir si les lycéens repèrent des questions classiques et les techniques qui s'y rapportent (ici une inéquation du second degré).

Enfin la dernière propriété demande à prouver qu'une certaine équation, dépendant d'un

⁷ Il a aussi été proposé à trois groupes d'étudiants de L1, l'analyse de leurs réponses est en cours.

⁸ Il s'agit d'une question de l'exercice 3 du Bac S Liban 2013 (cf. figure 3).

entier n , admet toujours des solutions. C'est une propriété qui dépend d'un entier n mais qui n'est pas classique pour un lycéen. Ce caractère non usuel sera-t-il déterminant pour un lycéen pour affirmer qu'une preuve par récurrence n'est pas envisageable ? Ou va-t-il repérer qu'il est impossible⁹ de lier l'existence des solutions pour n à celle pour $n+1$? Nous avons écrit deux versions des questions. Dans l'une, la variable entière des trois dernières propriétés est notée n alors que dans l'autre elle est notée t . Nous voulons observer si le nom de la variable a une influence sur les lycéens pour repérer si une preuve par récurrence est envisageable ou non.

La troisième partie propose la rédaction d'un raisonnement par récurrence écrite par un élève de Terminale S. Cette preuve, rédigée sous la forme d'un raisonnement par récurrence, est correcte mathématiquement mais lors de la démonstration de l'hérédité, la propriété au rang $n+1$ est démontrée directement sans utiliser l'hypothèse de récurrence. Par un jeu d'affirmations entre deux élèves, nous demandons si cette preuve est correcte. Nous voulons ainsi observer si l'élève repère ce point dans l'hérédité ou s'il se fie plutôt à la structure (initialisation, hérédité, conclusion) de la preuve ou à d'autres éléments peu en rapport avec la question.

Enfin dans la quatrième partie nous abordons le problème du lien entre initialisation et hérédité. Nous sommes ici en présence d'une propriété vraie pour $n = 0$, fautive de $n = 1$ à $n = 5$, héréditaire à partir de $n = 2$. A l'aide de deux questions, nous voulons voir si les élèves repèrent une valeur de n à partir de laquelle la propriété est héréditaire et que cette valeur a un rôle important pour l'initialisation. Nous faisons l'hypothèse que ce lien est problématique, d'autant plus qu'il n'est presque jamais énoncé lors des différentes rédactions que nous avons pu déjà analyser jusque-là.

Ce questionnaire a été passé dans dix classes de Terminale S de huit lycées de cinq académies différentes. Nous analysons les réponses de ces élèves question par question, en les illustrant avec quelques productions.

3.2 Analyse de la partie 1 du questionnaire

L'exercice proposé dans cette partie 1 du questionnaire étant celui du corrigé de Bac S étudié au §2.3. Rappelons l'énoncé :

On considère la suite numérique (v_n) définie pour tout entier naturel n par

$$v_0=1 \quad v_{n+1}=9/(6-v_n)$$

Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $0 < v_n < 3$.

Nous avons analysé les productions des élèves avec les mêmes critères : structure du raisonnement, explicitation et notation de la propriété dépend de l'entier naturel n , hérédité et structure de la conclusion. Nous présentons ci-dessous une synthèse des résultats, illustrée de quelques réponses d'élèves de Terminale S. Sur l'ensemble des productions d'élèves que nous avons, cette partie a toujours été traitée.

L'extrait de copie ci-dessous est un exemple emblématique de la rédaction du raisonnement par récurrence mis en œuvre par les élèves de Terminale S dans cet exercice.

⁹ À nos yeux. Nous n'avons pas trouvé de preuve par récurrence de cette propriété.

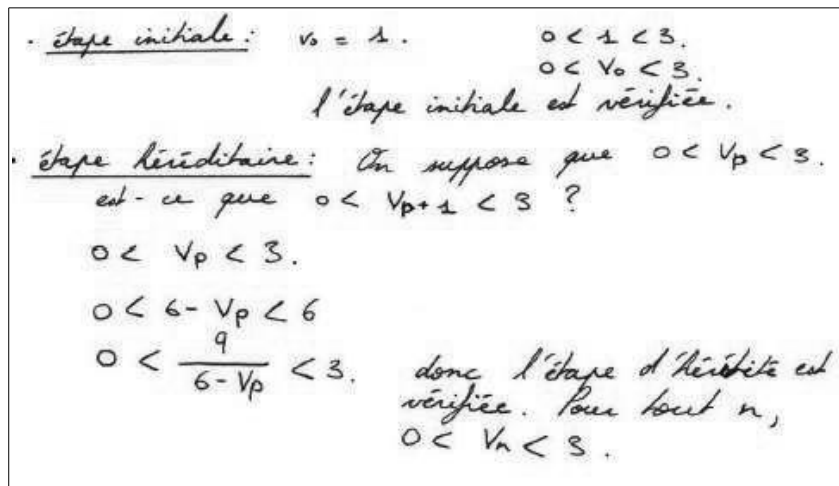


Figure 5 – Extrait d'une copie d'élève de Terminale S, partie 1 du questionnaire

La structure du raisonnement est très souvent binaire, composée des étapes de l'initialisation et de l'hérédité. L'étape de conclusion du raisonnement est souvent absente, elle est réduite à une phrase dans l'étape de l'hérédité sous la forme « pour tout n , $0 < v_n < 3$ ». La propriété à étudier dépend de l'entier naturel n est rarement explicitée et énoncée clairement. Le domaine de définition de cette propriété ainsi que la nature de la variable ne sont pas non plus mentionnés et, lorsqu'ils le sont, nous retrouvons les ambiguïtés soulevées dans les corrigés ou manuels, comme en témoigne cet extrait :

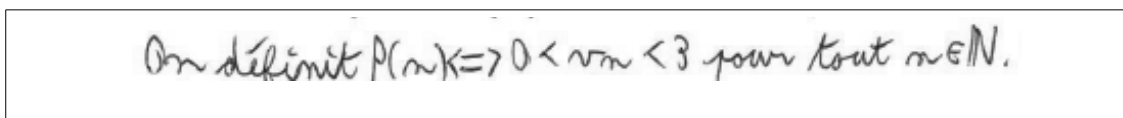


Figure 6 – Extrait d'une copie d'élève de Terminale S, partie 1 du questionnaire

En ce qui concerne l'étape de l'hérédité, les productions des élèves montrent très rarement la présence d'une quantification et l'implication est souvent « cachée » sous la formulation « on suppose que...est-ce que... ? » ou « on suppose que...montrons que... ». La conclusion de cette phase n'est jamais centrée et formulée sur l'implication (c'est-à-dire on a montré que $P(n)$ implique $P(n+1)$) mais toujours autour de « $P(n+1)$ est vraie » et « l'étape de l'hérédité est vérifiée ». Enfin, la conclusion du raisonnement par récurrence est très souvent absente et lorsqu'elle est présente, l'initialisation n'est pas rappelée, le lien entre hérédité et initialisation n'est jamais mentionné et aucune référence n'est faite au principe de récurrence.

Pour résumer, les élèves structurent le raisonnement par récurrence en deux étapes (initialisation et hérédité) et n'écrivent pas de conclusion. Nous pouvons faire l'hypothèse qu'ils ne comprennent pas la fonction de cette étape et ce qu'elle permet d'obtenir « en plus » des deux autres. Les élèves énoncent rarement de manière explicite la propriété à étudier, son domaine de définition et la nature de la variable ne sont donc pas mentionnés. Enfin, dans la phase de l'hérédité, la quantification et l'implication universelle ne sont pas écrites et sont « cachées » sous différents vocables, réduisant ainsi cette étape à une succession de calculs (ici sur des inégalités). Nous pouvons faire l'hypothèse que les difficultés que rencontrent les élèves pour mettre en œuvre et rédiger un raisonnement par récurrence sont liées aux ambiguïtés de rédaction repérées dans les manuels scolaires et dans les corrigés écrits par les

enseignants. Et les analyses de la suite du questionnaire montrent que ces difficultés ne se réduisent pas à des problèmes de rédaction du raisonnement. Elles sont en effet révélatrices d'un manque de compréhension du principe de récurrence.

3.3 Analyse de la partie 2 du questionnaire

Nous rappelons que dans cette partie les élèves doivent se prononcer si une preuve par récurrence est envisageable ou non dans quatre situations différentes (calcul d'une dérivée, deux inégalités et existence de solutions d'une équation) puis si un autre type de preuve est envisageable et enfin proposer une preuve.

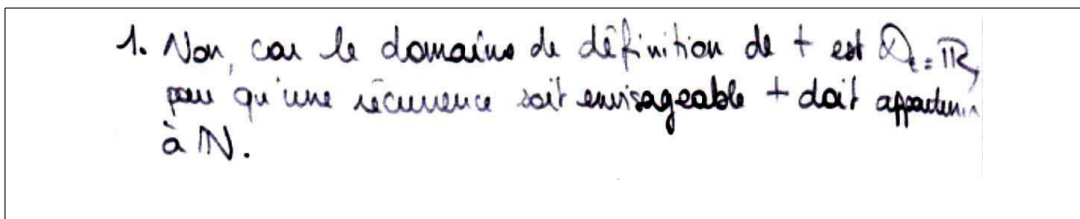
Nous allons dans un premier temps examiner les réponses à la question 1 concernant le calcul de la dérivée d'une fonction.

Question 1

On veut démontrer que pour tout réel t , si $f(t) = 4t^3 + 8t - 5$ alors $f'(t) = 12t^2 + 8$.

1. Est-ce qu'une preuve par récurrence est envisageable ? Oui – Non, pourquoi ?
2. Est-ce qu'un autre type de preuve est envisageable ? Oui – Non, pourquoi ?
3. Proposer ci-dessous une preuve (même incomplète).

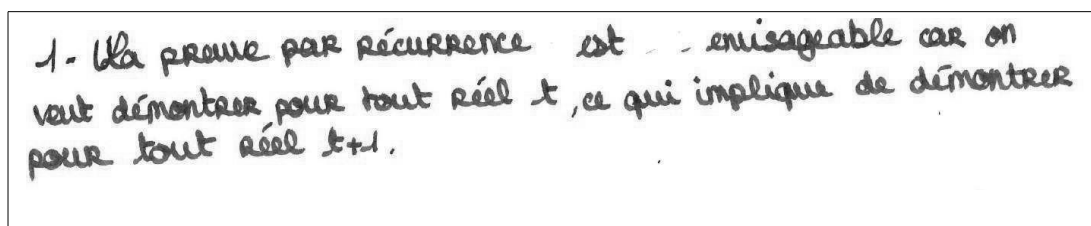
Très peu d'élèves (5 sur 300 !) répondent que ce n'est pas possible de calculer une dérivée avec un raisonnement par récurrence en invoquant la nature non entière de la variable t .



1. Non, car le domaine de définition de t est $D_t = \mathbb{R}$, pour qu'une récurrence soit envisageable t doit appartenir à \mathbb{N} .

Figure 7 – Extrait d'une copie d'élève de Terminale S, partie 2 du questionnaire

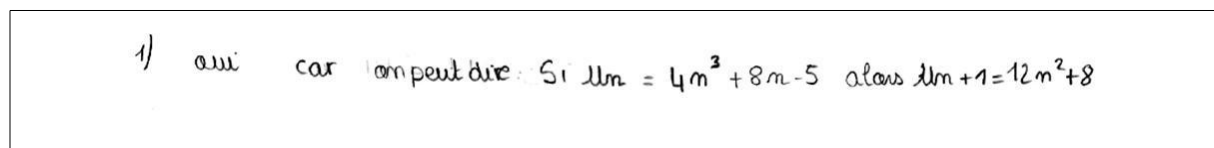
Toutes les autres réponses ne sont pas satisfaisantes. Parmi celles-ci, examinons **les réponses positives** (très peu nombreuses). La majorité d'entre elles avancent l'idée que l'on peut exprimer $f(t+1)$.



1. Une preuve par récurrence est envisageable car on veut démontrer pour tout réel t , ce qui implique de démontrer pour tout réel $t+1$.

Figure 8 – Extrait d'une copie d'élève de Terminale S, partie 2 du questionnaire

D'autres vont jusqu'à se ramener à des suites en posant u_n et u_{n+1} de manière très originale :



1) oui car on peut dire: Si $u_n = 4n^3 + 8n - 5$ alors $u_{n+1} = 12n^2 + 8$

Figure 9 – Extrait d'une copie d'élève de Terminale S, partie 2 du questionnaire

Les réponses négatives se partagent principalement en trois types d'arguments.

Argument n°1 : il suffit de dériver (environ 2/5 des réponses)

Nous pouvons noter qu'en écrivant, comme cet élève, « non, la récurrence n'est pas utile ici, il suffit de dériver », ceux-ci ne répondent pas exactement à la question posée.

Argument n°2 : absence de suite, notamment de suites définies par récurrence (environ 2/5 des réponses)

1) Non une preuve par récurrence n'est pas envisageable, car nous n'avons pas de suite.

1. On ne peut pas utiliser une preuve par récurrence car cela nécessite une définition par récurrence de la forme $f(t+1) = \dots$ que nous n'avons pas.

Figure 10 – Extraits de copies d'élèves de Terminale S, partie 2 du questionnaire

Argument n°3 : on ne peut pas initialiser (environ 1/10 des réponses)

Ces élèves expliquent qu'ils ne peuvent pas déterminer une valeur de t initiale et certains vont jusqu'à préciser que s'ils avaient un intervalle ils pourraient initialiser. Ici encore la nature entière de la variable n n'est pas mentionnée.

Une preuve par récurrence n'est pas envisageable car il n'y a pas de rang initial.

Figure 11 – Extrait d'une copie d'élève de Terminale S, partie 2 du questionnaire

La deuxième question concerne l'inégalité de Bernoulli.

Question 2

On veut démontrer que pour tout réel $a > 0$ et pour tout entier naturel t : $(1+a)^t \geq 1+ta$.

1. Est-ce qu'une preuve par récurrence est envisageable ? Oui – Non, pourquoi ?
2. Est-ce qu'un autre type de preuve est envisageable ? Oui – Non, pourquoi ?
3. Proposer ci-dessous une preuve (même incomplète).

Nous repérons presque autant de réponses positives que négatives et les arguments énoncés par les élèves sont très divers. **Pour les réponses positives**, nous repérons les arguments suivants :

Argument n°1 : c'est l'inégalité de Bernoulli.

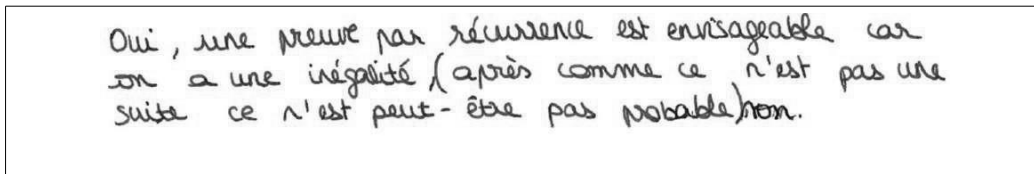
Plusieurs élèves répondent : « oui une preuve par récurrence est envisageable parce que c'est l'inégalité de Bernoulli ». Ils ont donc reconnu l'inégalité qu'ils avaient préalablement démontrée en cours. Ces réponses proviennent presque toutes d'une même classe. On peut faire l'hypothèse que l'enseignant de cette classe venait de faire cette démonstration.

Argument n°2 : c'est une suite

Environ la moitié des réponses positives argumentées sont de la forme : « oui, elle [la démonstration par récurrence] est envisageable car c'est une suite ».

Argument n°3 : c'est une inégalité ou une inéquation

Environ un cinquième des réponses positives argumentées sont de la forme : « car on démontre une inéquation ». Dans l'extrait suivant, l'élève repère tout de suite l'inégalité à prouver mais ne reconnaît pas une suite. Il est donc dans le doute.



Oui, une preuve par récurrence est envisageable car on a une inégalité (après comme ce n'est pas une suite ce n'est peut-être pas probable) non.

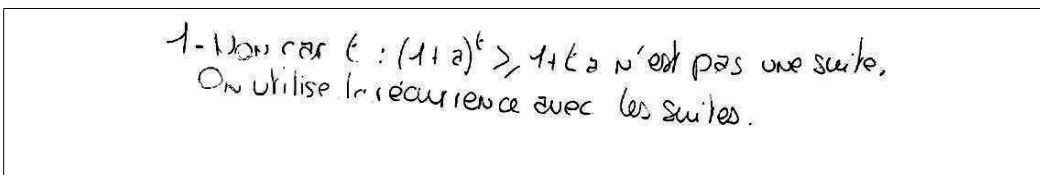
Figure 12 – Extrait d'une copie d'élève de Terminale S, partie 2 du questionnaire

Argument n°4 : car la propriété dépend d'un entier (n ou t)

Six élèves (sur 300) expriment qu' « il est possible d'utiliser un raisonnement par récurrence, car t est un entier naturel et correspond au rang auquel on se place ».

Pour les réponses négatives, plusieurs arguments sont avancés :

Argument n°1 : ce n'est pas une suite (environ 145 des réponses positives argumentées)

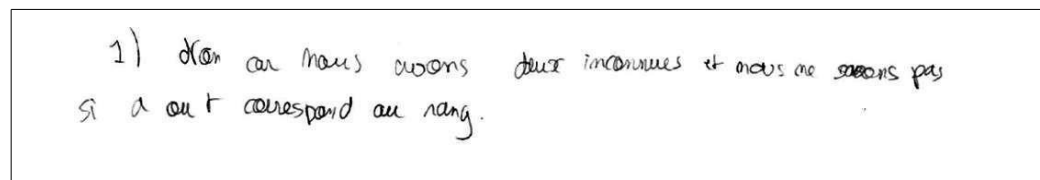


1- Non car $(: (1+a)^t >$, $1+a$ n'est pas une suite,
On utilise la récurrence avec les suites.

Figure 13 – Extrait d'une copie d'élève de Terminale S, partie 2 du questionnaire

Argument n°2 : il y a deux variables

Plusieurs élèves répondent « non car il y a 2 inconnues ». La présence des deux variables a et n (ou t selon le questionnaire) a perturbé les élèves comme l'explique très bien l'élève dans son extrait ci-dessous :



1) Non car nous avons deux inconnues et nous ne savons pas si a ou t correspond au rang.

Figure 14 – Extrait d'une copie d'élève de Terminale S, partie 2 du questionnaire

Certains vont même à envisager une double récurrence « pour a et t ». Ceci montre une fois de plus que la nature entière de la variable n n'est pas un critère premier pour les élèves. Pour cette question, quand les élèves ont voulu écrire une preuve par récurrence, beaucoup n'ont pas su écrire l'initialisation. N'ayant pas repéré la variable entière, ils initialisent les deux variables a et n en même temps.

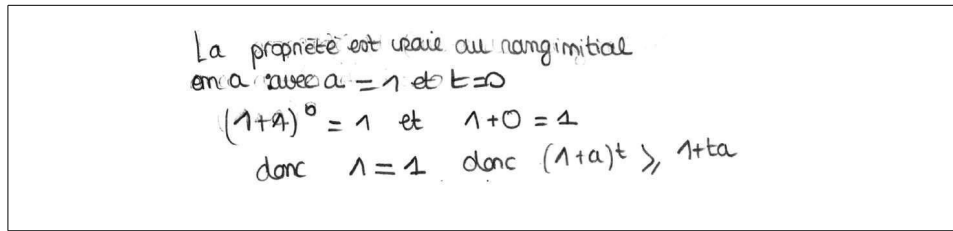


Figure 15 – Extrait d'une copie d'élève de Terminale S, partie 2 du questionnaire

La troisième question concernait une inégalité du second degré

Question 3

On veut démontrer que pour tout entier naturel $t > 2$: $(t+1)^2 \geq 2t+6$.

1. Est-ce qu'une preuve par récurrence est envisageable ? Oui – Non, pourquoi ?
2. Est-ce qu'un autre type de preuve est envisageable ? Oui – Non, pourquoi ?
3. Proposer ci-dessous une preuve (même incomplète).

Nous retrouvons à peu près les mêmes arguments que pour l'inégalité de Bernoulli sauf évidemment l'argument lié à la présence des deux variables. Il est étonnant de constater qu'un tiers environ des élèves n'a pas repéré qu'il s'agissait d'une inégalité du second degré et qu'ils possédaient alors des techniques bien plus performantes pour la prouver.

Enfin la dernière question, une équation du second degré

Question 4

On veut démontrer que pour tout entier naturel t non nul l'équation d'inconnue réelle x , $x^{2t} - 3x^t + 2 = 0$ admet au moins 2 solutions.

1. Est-ce qu'une preuve par récurrence est envisageable ? Oui – Non, pourquoi ?
2. Est-ce qu'un autre type de preuve est envisageable ? Oui – Non, pourquoi ?
3. Proposer ci-dessous une preuve (même incomplète).

Cette question a été peu traitée. Les élèves n'ont pas compris ce qui était demandé de prouver : « montrer l'existence de solutions d'une équation dépendant de n entier naturel ». La majorité des élèves ont fait comme si l'équation était du second degré et ont donc affirmé qu'un raisonnement par récurrence était inutile, comme en témoigne l'extrait suivant :

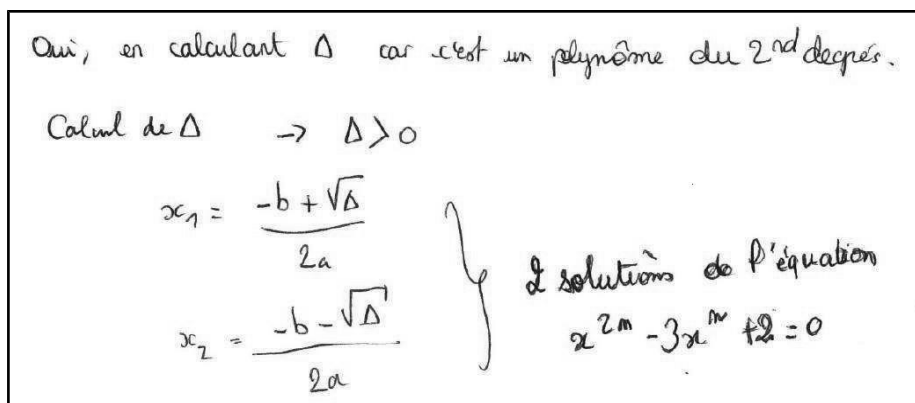


Figure 16 – Extrait d'une copie d'élève de Terminale S, partie 2 du questionnaire

D'autres ne reconnaissant ni une égalité, ni une inégalité affirment alors qu'une preuve par récurrence n'est pas envisageable.

Non car on ne demande pas de démontrer une inéquation mais de trouver deux solutions.

Figure 17 – Extrait d'une copie d'élève de Terminale S, partie 2 du questionnaire

L'analyse de cette partie 2 nous permet de faire les constats suivants :

- la nature entière de la variable n n'est presque jamais mentionnée et n'est pas un critère pour envisager un raisonnement par récurrence ;
- le raisonnement par récurrence est lié exclusivement, pour beaucoup d'élèves, aux suites. Donc si les élèves ne reconnaissent pas une suite, ils affirment qu'une preuve par récurrence n'est pas envisageable ;
- le raisonnement par récurrence est lié à la preuve d'inégalités.

3.4 Analyse de la partie 3 du questionnaire

L'objectif principal de cette partie est de faire expliciter aux élèves leurs critères de reconnaissance d'une preuve par récurrence. La démonstration proposée démontre la véracité de $P(n+1)$ directement sans utiliser celle de $P(n)$ contrairement à ce qui est annoncé. Voici l'énoncé.

Un élève a proposé la démonstration ci-dessous en affirmant qu'il a effectué un raisonnement par récurrence.

Un camarade lui dit : la preuve est correcte mais ce n'est pas un raisonnement par récurrence.

D'après-vous, lequel a raison ? Justifiez votre réponse.

Démontrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N} : u_n \leq \frac{1}{2}$ où $u_n = \frac{n}{n^2+1}$.

– Pour $n = 0$, $u_0 = \frac{0}{0+1} = 0 \leq \frac{1}{2}$.

Donc la propriété est vraie au rang $n = 0$.

- Supposons que la propriété soit vraie au rang n , c'est-à-dire que $u_n \leq \frac{1}{2}$ et montrons que la propriété est vraie au rang $n + 1$ est vraie.

$$u_{n+1} - \frac{1}{2} = \frac{n+1}{(n+1)^2+1} - \frac{1}{2} = \frac{2(n+1) - (n+1)^2 - 1}{2(n+1)^2+2} = \frac{-n^2}{2(n+1)^2+2}.$$

Le dénominateur est positif (somme de deux termes positifs) et le numérateur est négatif (opposé d'un carré).

Donc $u_{n+1} - \frac{1}{2} \leq 0$ et ainsi $u_{n+1} \leq \frac{1}{2}$.

On a donc prouvé que la propriété est vraie au rang $n + 1$.

- Conclusion : la propriété étant vraie au rang 0 et héréditaire, elle est vraie pour tout

$n \in \mathbb{N}$. Donc pour tout $n \in \mathbb{N} : u_n \leq \frac{1}{2}$.

Il est évident que beaucoup d'élèves n'ont pas suffisamment assimilé le principe de récurrence pour repérer ce point. Plus de la moitié des élèves qui ont répondu à cette partie ont affirmé que la démonstration était bien une démonstration par récurrence car cette dernière respectait la forme (initialisation – hérédité – conclusion).

L'élève ayant proposé la démonstration ci-jointe en effet, il a utilisé *l* raisonnement par récurrence puisque il fait *l* initialisation, il prouve que la propriété est héréditaire et il conclut.

Figure 18 – Extrait d'une copie d'élève de Terminale S, partie 3 du questionnaire

En revanche, les arguments énoncés pour une réponse négative (c'est-à-dire que la démonstration proposée ne relève pas du raisonnement par récurrence) sont très variés :

Argument n°1 : ce n'est pas un raisonnement par récurrence car la suite n'est pas définie par récurrence

Le camarade a raison car l'expression u_n donnée permet de calculer un certain terme u_n grâce à $n \in \mathbb{N}$. Or pour effectuer un raisonnement par récurrence il faut avoir une suite u_{n+1} avec laquelle on doit utiliser le terme u_n précédent pour calculer u_{n+1} .
Donc ce n'est pas un raisonnement par récurrence.

Figure 19 – Extrait d'une copie d'élève de Terminale S, partie 3 du questionnaire

Argument n°2 : le schéma « classique » $P(n)$ implique $P(n+1)$ n'est pas respecté.

Un camarade a raison car n n'est pas parti de u_n pour arriver à u_{n+1} mais n est parti directement de u_{n+1} , donc ce n'ai pas un raisonnement par récurrence.

Figure 20 – Extrait d'une copie d'élève de Terminale S, partie 3 du questionnaire

C'est un argument qui a été très souvent évoqué. Il s'explique aussi par le fait que certains élèves ne voient pas le rapport entre montrer $u_{n+1} \leq 1/2$ et l'étude du signe de $u_{n+1} - 1/2$.

Argument n°3 : l'élève n'a pas changé de nom de variable lors de l'hérédité

Cet argument n'a été énoncé que dans les classes où l'enseignant change de lettre pour prouver l'hérédité (figure 21).

Le raisonnement n'est pas par récurrence car l'élève est parti directement de ce qu'il veut montrer (M_{n+1}) et a utilisé le nombre n au lieu de K .

Figure 21 – Extrait d'une copie d'élève de Terminale S, partie 3 du questionnaire

Argument n°4 : l'hypothèse de récurrence n'a pas été utilisée (4 copies sur 300)

L'élève qui a proposé une démonstration à l'écrit, ce n'est pas un raisonnement par récurrence car quand il prouve que la propriété est vraie pour $n+1$, il n'utilise pas le fait qu'elle soit vraie pour n .

Figure 22 – Extrait d'une copie d'élève de Terminale S, partie 3 du questionnaire

D'autres arguments ont été évoqués pour affirmer que ce n'était pas un raisonnement par récurrence : des erreurs de calcul ont été repérées, on n'a pas le droit de dire que le dénominateur est positif ... Ne trouvant pas d'erreur manifeste, ces élèves ont été capables de tout remettre en doute.

Il est donc clair que la forme binaire ou ternaire (initialisation, hérédité et éventuellement conclusion) est un indicateur très fort pour les élèves de la présence d'un raisonnement par récurrence. Ce qui est plus étonnant, c'est de constater qu'il faut utiliser l'hypothèse de récurrence dès le début de la phase d'hérédité comme l'explique ci-dessous un élève :

En effet, la première étape est juste, mais l'opération suivante $U_{n+1} - \frac{1}{2}$ n'est pas une opération utilisée dans la récurrence. On devrait utiliser une technique telle que :

$$\text{si } U_n \leq \frac{1}{2}$$

$$\text{alors } U_{n+1} \leq \frac{1}{2}$$

Figure 23 – Extrait d'une copie d'élève de Terminale S, partie 3 du questionnaire

Une dernière remarque concernant le changement de nom de la variable dans l'expression de l'hérédité : les enseignants qui le pratiquent pensent aider les élèves à bien distinguer la variable générique de la variable quantifiée universellement, et sont probablement loin d'imaginer qu'ils créent ainsi un indicateur non pertinent de validité du raisonnement par récurrence.

3.5 Analyse de la partie 4 du questionnaire

L'objectif ici est de repérer les réactions des élèves face une situation où la propriété est héréditaire à partir d'un entier autre que celui de l'initialisation. Nous mettons en exergue le lien, très rarement explicité, entre l'initialisation et l'hérédité. Voici l'énoncé.

Un élève a proposé la démonstration ci-dessous de : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2^n \geq (n+1)^2$.

Voilà ce qu'il écrit :

Soit $Q(n)$ la propriété définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par : $2^n \geq (n+1)^2$.

- La propriété est vraie au rang 0 car $2^0 = 1$ et $(0+1)^2 = 1$.
- Supposons qu'elle soit vraie au rang k et montrons qu'elle est vraie au rang $k+1$.

$$2^{k+1} = 2 \times 2^k \geq 2(k+1)^2 \text{ car par hypothèse de récurrence } 2^k \geq (k+1)^2.$$

$$\text{Or } 2(k+1)^2 = 2k^2 + 4k + 2 \geq k^2 + 4k + 4 = (k+2)^2 \text{ dès que } k \geq 2.$$

Donc la propriété est alors vraie au rang $k+1$.

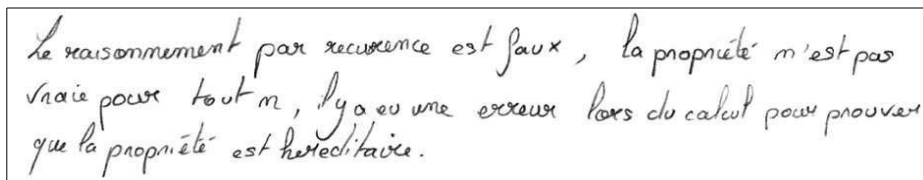
La propriété est héréditaire.

Comme la propriété est vraie pour $n=0$ et héréditaire, elle est vraie pour tout n .

Un de ses camarades lui fait remarquer que $Q(2)$ est fausse. Comment expliquez-vous cette contradiction ?

Un deuxième camarade lui fait aussi remarquer que $Q(7)$ est vraie. Que peut-on en déduire ?

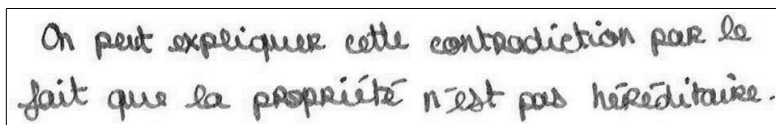
Il est difficile de classer les réponses car elles sont très variées. Elles montrent presque toutes que ce lien est problématique pour les élèves. Très rares sont ceux (moins de 5%) qui affirment à la deuxième question que l'on peut en déduire que la propriété est vraie à partir de $n=7$. Ne trouvant pas d'explication à la contradiction, les élèves ont souvent « repéré » une erreur de calcul.



Le raisonnement par récurrence est faux, la propriété n'est pas vraie pour tout n , il y a eu une erreur lors du calcul pour prouver que la propriété est héréditaire.

Figure 24 – Extrait d'une copie d'élève de Terminale S, partie 4 du questionnaire

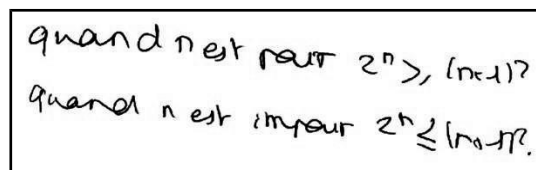
D'autres élèves annoncent que la propriété n'est pas héréditaire.



On peut expliquer cette contradiction par le fait que la propriété n'est pas héréditaire.

Figure 25 – Extrait d'une copie d'élève de Terminale S, partie 4 du questionnaire

Certains concluent que la propriété est vraie ou fausse selon la parité de n , en généralisant les cas $n=2$ et $n=7$.



quand n est pair $2^n > (n+1)^2$, ($n=2$) ?
quand n est impair $2^n < (n+1)^2$.

Figure 26 – Extrait d'une copie d'élève de Terminale S, partie 4 du questionnaire

Pour d'autres, la propriété est « vraie pour tout n sauf 2 ». Nous constatons donc que la majorité des élèves n'explique pas la contradiction apparente. Examiner la valeur de l'entier à partir duquel la propriété est héréditaire et le comparer à celui de l'initialisation est un geste qu'ils n'ont jamais effectué. Le lien entre l'initialisation et l'hérédité ne va pas de soi alors qu'il est ignoré dans toutes les rédactions des manuels et des corrigés analysés précédemment.

Pour terminer cette analyse des productions d'élèves, nous citons encore cet extrait qui met en avant l'incompréhension de l'implication lors de la phase d'hérédité.

1. oui. la récurrence est tout à fait envisageable. si on arrive à démontrer que au rang $n+1$ est vraie dans la propriété est vraie. la propriété

Figure 27 – Extrait d'une copie d'élève de Terminale S, partie 2 du questionnaire

L'élève, bien qu'il ait écrit une démonstration à peu près correcte dans la partie 1 du questionnaire montre ici qu'il n'a pas conscience de la présence d'une implication dans l'hérédité. De même pour l'élève qui répond à la question « une démonstration par récurrence est-elle envisageable » par « oui car on peut prouver la propriété au rang $n+1$ ».

Nous pouvons remarquer que les difficultés repérées chez les élèves sont fortement corrélées avec les formes de rédaction des manuels scolaires ou des corrigés sur la nature de la variable, la présence explicite de l'implication et le lien entre l'initialisation et l'hérédité.

Conclusion

Notre étude a montré les nombreuses et profondes incompréhensions des élèves du concept de récurrence et du principe de démonstration associé. Les erreurs répétées dans son utilisation attestent de la nécessité d'étudier le principe de récurrence pour lui-même avec toute sa complexité, en particulier les notions de logique telles que proposition, quantification, implication – qui sont justement au programme des trois années de Lycée. Nous les récapitulons ci-après tout en faisant quelques propositions pour les travailler spécifiquement avec les élèves, au sein de l'apprentissage du raisonnement par récurrence.

Tout d'abord, comme le montre notre étude, il y a une nécessité à conduire un travail spécifique sur la propriété à étudier. Nous préconisons de :

- Expliciter ou faire expliciter $P(n)$ comme propriété dépendant de n .
- Noter cette propriété $P(n)$ et non Pn (notation réservée aux suites).
- Préciser son domaine de définition avant son énoncé et non après.
- Différencier la propriété $P(n)$ de l'« hypothèse de récurrence », si ce vocabulaire est employé.

Ensuite, les élèves semblant ne faire aucun lien entre l'initialisation et l'hérédité, un travail en ce sens pourrait prendre en compte les éléments suivants :

- Ne pas donner systématiquement le rang initial n_0 du principe de récurrence mais le faire déterminer par les élèves.
- Faire chercher l'hérédité **avant** de déterminer cette valeur n_0 , par une question telle que « À partir de quelle(s) valeur(s) de n peut-on établir que $P(n)$ implique $P(n+1)$? ».
- Choisir des exemples de propriétés pour lesquels n_0 n'est ni 0, ni 1, ni même le rang à partir

duquel l'hérédité peut être établie : par exemple $P(n) : n^2 \geq (n+1)^2$ est vraie à partir de $n = 2$, mais $P(2)$ est faux (même si $P(0)$ est vraie!).

En ce qui concerne l'étape de l'hérédité, nous avons relevé des manques et des erreurs dans l'écriture aussi bien de la quantification que de l'implication. Voici différentes pistes qui permettraient de lever certaines ambiguïtés quant à ces notions de logique au sein du raisonnement par récurrence.

- Expliciter le quantificateur « quel que soit » ou « pour tout » devant l'implication.
- Expliciter l'implication : l'hérédité consiste à démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ implique $P(n+1)$.
- Distinguer l'écriture de l'hérédité (qui est « pour tout n , $P(n) \Rightarrow P(n+1)$) de ce que l'on va faire pour l'établir : prendre un « élément générique » n . Pour cela, nous proposons la rédaction suivante : *soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(n)$ est vraie et démontrons que $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ est vraie.* Nous pensons qu'il ne faut pas remplacer (systématiquement) la variable quantifiée universellement n par une autre lettre (p , ou k , ou m) car ceci n'aide pas à comprendre l'écriture de l'hérédité avec « quel que soit n », et ne la remplace pas non plus !
- Varier les schémas pour établir l'implication en un n générique : partir de l'écriture de $P(n)$ et l'introduire dans l'écriture de $P(n+1)$ en la supposant vraie, ou alors écrire d'abord $P(n+1)$ et modifier cette écriture en utilisant l'hypothèse de récurrence « $P(n)$ vraie ».
- Écrire toutes les implications dans le travail pour établir l'hérédité : par exemple, si la propriété est une inégalité, on va raisonner par « conditions suffisantes », ce qui correspond à des implications de type « pour A , il suffit que B », qui s'écrivent « $A \Leftarrow B$ » ; dans ces cas-là, il vaut mieux écrire en toutes lettres qu'avec le symbole \Leftarrow ; et ne pas remplacer les implications par des équivalences, même si celles-ci sont vraies – pour garder le sens de ce que l'on fait.
- Formuler complètement la conclusion de l'étape « hérédité », pas seulement la deuxième partie de l'implication « donc $P(n+1)$ est vraie » ; autrement dit écrire « Donc, pour tout n supérieur ou égale à n_0 , $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ est vraie ».
- Enfin, pour la rédaction de la conclusion, il nous semble nécessaire de faire référence au principe de récurrence et d'en reprendre les deux « étapes », à savoir « On a démontré que $P(n_0)$ est vrai et que pour tout $n \geq n_0$, $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ est vraie, donc d'après le principe de récurrence, on peut donc affirmer que pour tout $n \geq n_0$, $P(n)$ est vraie ».

Nos expérimentations, questionnaires et études de manuels ont montré la nécessité de ce travail – on ne peut pas en faire l'économie –, sinon il n'est pas du tout sûr qu'une conception correcte de la récurrence se construise chez les élèves. L'analyse des réponses au questionnaire des étudiants de L1 nous permettra d'approfondir ce dernier point et de poursuivre ces recherches.

Références

- CHELLOUGUI F. (2007) L'utilisation des quantificateurs universel et existentiel en première année d'université, entre l'explicite et l'implicite. *Actes du séminaire national de didactiques des mathématiques 2006*. 101-121
- DELOUSTAL-JORRAND V. (2000-2001) L'implication. Quelques aspects dans les manuels et points de vue d'élèves-professeurs, *Petit x*, 55, 35-70.

- DELOUSTAL-JORRAND V. (2004) *L'implication mathématique : étude épistémologique et didactique. Étude sous trois points de vue : raisonnement déductif, logique formelle et théorie des ensembles. Construction d'une situation didactique qui problématise l'implication*, thèse de l'université Grenoble I.
- DURAND-GUERRIER V. (2013) Quelques apports de l'analyse logique du langage pour les recherches en didactique des mathématiques, in *A. Bronner et al. (2013) Questions vives en didactique des mathématiques : problèmes de la profession d'enseignant, rôle du langage*, La pensée Sauvage, Grenoble.
- DURAND-GUERRIER V. (2005) *Recherches sur l'articulation entre la logique et le raisonnement mathématique dans une perspective didactique : un cas exemplaire de l'interaction entre analyses épistémologique et didactique : apports de la théorie élémentaire des modèles pour une analyse didactique du raisonnement mathématique*, note de synthèse pour l' Habilitation à Diriger des Recherches en didactique des mathématiques, Université Claude Bernard Lyon..
- DURAND-GUERRIER V. (1999) L'élève, le professeur et le labyrinthe, *Petit x*, **50**, 57-79
- FABERT C. & GRENIER D. (2011) Une étude didactique de quelques éléments de raisonnement mathématique et de logique. *Petit x*, n°87, pp. 31-52, Irem de Grenoble.
- GRENIER D. (en cours, 2016) La notion de répétition, obstacle épistémologique à la construction du concept mathématique de récurrence ? *Actes du colloque « Du mot au concept : répétition »*, Presses Universitaires de Grenoble.
- GRENIER D. (2012) Une étude didactique du concept de récurrence, *Petit x* n°88, 27-47, IREM de Grenoble.
- GRENIER D. (2003) The concept of « induction » in mathematics, *Mediterranean Journal For Research in Mathematics Education*, vol. 3. ed. Gagatsis Nicosia Cyprus.
- GRENIER D. (2001) Learning proof and modeling. Inventory of fixtures and new problems. *Proceedings of the 9th International Congress for Mathematics Education*, Tokyo, Août 2000.
- GRENIER D. & Payan C. (1998) Spécificités de la preuve et de la modélisation en mathématiques discrètes. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 18.1, pp. 59-100, La Pensée Sauvage, Grenoble.
- MESNIL Z. (2014) *La logique : d'un outil pour le langage et le raisonnement mathématiques vers un objet d'enseignement*. Thèse de doctorat. Université Paris Diderot.

Ouvrages scolaires et documents officiels

Maths Repères TS (2012). Hachette Education : Paris

Math`x TS (2011). Didier : Paris.

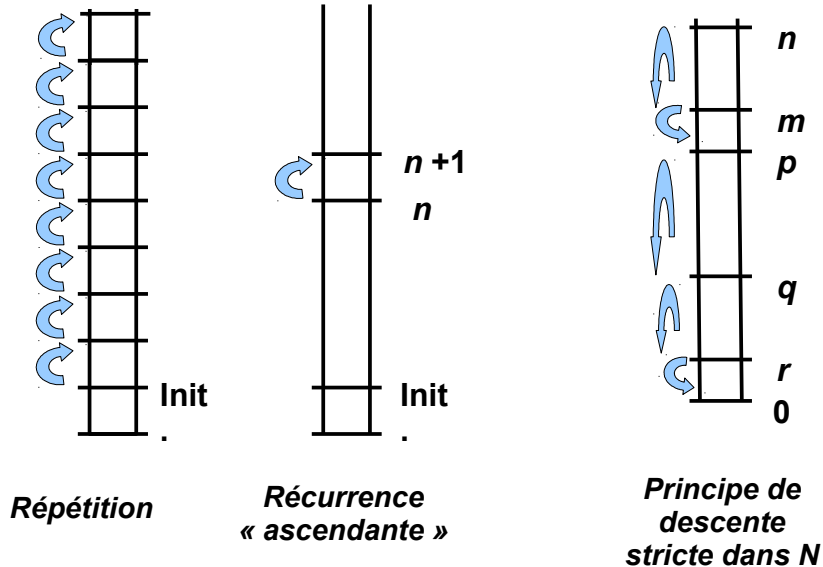
Indice TS (2012). Bordas : Paris.

Symbole TS (2012). Belin : Paris

MEN (2011). Programme de l'enseignement spécifique et de spécialité de mathématiques. Classe de terminale de la série scientifique. *Bulletin officiel spécial n° 8 du 13 octobre 2011*.

Annexe 1. D'autres représentations du principe de récurrence.

Les trois schémas ci-après illustrent la différence fondamentale entre répétition et récurrence.



Le schéma de gauche montre un processus qui part d'une valeur initiale, disons $n=1$, et la répétition « pas à pas » de ce processus : $1 \rightarrow 2$, $2 \rightarrow 3$, $3 \rightarrow 4$, etc... ; c'est cette image qui est en jeu dans les dessins des dominos ou de l'escalier.

Le schéma central est conforme au principe de récurrence dans sa forme dite « ascendante », et qui consiste à étudier l'hérédité d'une propriété $P(n)$ et son initialisation : on commence par étudier pour quelles valeurs de n , on peut établir que l'implication « Si $P(n)$, Alors $P(n+1)$ » est vraie. On se place en une valeur de n quelconque, sans avoir si $P(n)$ est vraie ou non. Et si, finalement, on trouve que l'implication est vraie à partir d'un certain n_0 , alors on étudiera son initialisation à partir de ce rang – c'est-à-dire si $P(n_0)$ est vraie. Dans ce schéma, pour l'hérédité, il n'y a aucune répétition : on se place en une valeur quelconque de n et on étudie la transmission de la propriété P de n à $n+1$, et c'est tout.

Le troisième schéma illustre la récurrence sous un autre de ses aspects fondamentaux, basé sur l'axiome de récurrence ou le principe de Fermat : « On ne peut descendre strictement dans \mathbb{N} ». On peut illustrer ce principe par l'image de la chute d'une bille lâchée d'une marche quelconque d'un escalier, et qui dévale celui-ci sans frottements : la chute sur les marches n'est pas forcément régulière et la bille s'arrête forcément au bas de l'escalier. Les principes illustrés par ces deux derniers schémas – le principe de récurrence par hérédité et initialisation, et le principe de Fermat de la descente infinie – sont équivalents du point de vue mathématique, et ce sont eux qui représentent au mieux le concept de récurrence et le principe de preuve associés.

Annexe 2. Le texte complet du questionnaire (deux pages)

Partie 1

On considère la suite numérique (v_n) définie pour tout entier naturel n par

$$\begin{cases} v_0 = 1 \\ v_{n+1} = \frac{9}{6 - v_n} \end{cases}$$

Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $0 < v_n < 3$.

Partie 2

Cette partie comporte 4 questions indépendantes.

Merci de justifier soigneusement les réponses.

Question 1

On veut démontrer que pour tout réel t , si $f(t) = 4t^3 + 8t - 5$ alors $f'(t) = 12t^2 + 8$.

1. Est-ce qu'une preuve par récurrence est envisageable ? Oui – Non, pourquoi ?
2. Est-ce qu'un autre type de preuve est envisageable ? Oui – Non, pourquoi ?
3. Proposer ci-dessous une preuve (même incomplète).

Question 2

On veut démontrer que pour tout réel $a > 0$ et pour tout entier naturel t : $(1 + a)^t \geq 1 + ta$.

1. Est-ce qu'une preuve par récurrence est envisageable ? Oui – Non, pourquoi ?
2. Est-ce qu'un autre type de preuve est envisageable ? Oui – Non, pourquoi ?
3. Proposer ci-dessous une preuve (même incomplète).

Question 3

On veut démontrer que pour tout entier naturel $t > 2$: $(t+1)^2 \geq 2t+6$.

1. Est-ce qu'une preuve par récurrence est envisageable ? Oui – Non, pourquoi ?
2. Est-ce qu'un autre type de preuve est envisageable ? Oui – Non, pourquoi ?
3. Proposer ci-dessous une preuve (même incomplète).

Question 4

On veut démontrer que pour tout entier naturel t non nul l'équation d'inconnue réelle x , $x^{2t} - 3x^t + 2 = 0$ admet au moins 2 solutions.

1. Est-ce qu'une preuve par récurrence est envisageable ? Oui – Non, pourquoi ?
2. Est-ce qu'un autre type de preuve est envisageable ? Oui – Non, pourquoi ?
3. Proposer ci-dessous une preuve (même incomplète).

Partie 3

Un élève a proposé la démonstration ci-dessous en affirmant qu'il a effectué un raisonnement par récurrence.

Un camarade lui dit : la preuve est correcte mais ce n'est pas un raisonnement par récurrence.

D'après-vous, lequel a raison ? Justifiez votre réponse.

Démontrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N} : u_n \leq \frac{1}{2}$ où $u_n = \frac{n}{n^2+1}$.

$$- \text{ Pour } n = 0, \quad u_0 = \frac{0}{0+1} = 0 \leq \frac{1}{2}.$$

Donc la propriété est vraie au rang $n = 0$.

Supposons que la propriété soit vraie au rang n , c'est-à-dire que $u_n \leq \frac{1}{2}$ et montrons que la propriété est vraie au rang $n + 1$ est vraie.

$$u_{n+1} - \frac{1}{2} = \frac{n+1}{(n+1)^2+1} - \frac{1}{2} = \frac{2(n+1) - (n+1)^2 - 1}{2(n+1)^2+2} = \frac{-n^2}{2(n+1)^2+2}.$$

Le dénominateur est positif (somme de deux termes positifs) et le numérateur est négatif (opposé d'un carré).

$$\text{Donc } u_{n+1} - \frac{1}{2} \leq 0 \text{ et ainsi } u_{n+1} \leq \frac{1}{2}.$$

On a donc prouvé que la propriété est vraie au rang $n + 1$.

- Conclusion : la propriété étant vraie au rang 0 et héréditaire, elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$$\text{Donc pour tout } n \in \mathbb{N} : u_n \leq \frac{1}{2}.$$

Partie 4

Un élève a proposé la démonstration ci-dessous de : pour tout $n \in \mathbb{N}, 2^n \geq (n+1)^2$. Voilà ce qu'il écrit :

Soit $Q(n)$ la propriété définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par : $2^n \geq (n+1)^2$.

- La propriété est vraie au rang 0 car $2^0 = 1$ et $(0+1)^2 = 1$.

- Supposons qu'elle soit vraie au rang k et montrons qu'elle est vraie au rang $k + 1$.

$$2^{k+1} = 2 \times 2^k \geq 2(k+1)^2 \text{ car par hypothèse de récurrence } 2^k \geq (k+1)^2.$$

$$\text{Or } 2(k+1)^2 = 2k^2 + 4k + 2 \geq k^2 + 4k + 4 = (k+2)^2 \text{ dès que } k \geq 2.$$

Donc la propriété est alors vraie au rang $k + 1$.

La propriété est héréditaire.

Comme la propriété est vraie pour $n = 0$ et héréditaire, elle est vraie pour tout n .

Un de ses camarades lui fait remarquer que $Q(2)$ est fausse. Comment expliquez-vous cette contradiction ?

Un deuxième camarade lui fait aussi remarquer que $Q(7)$ est vraie. Que peut-on en déduire ?

Annexe 3. Les 17 corrigés de l'exercice de Bac (trois pages)

Corrigé n°4

Montrons par récurrence que : $P_n : 0 < v_n < 3$ pour tout entier naturel n .

Initialisation : $n = 0$, on a bien $0 < v_0 < 3$ vraie, ainsi P_0 est vraie.

Hérédité : Supposons P_n vraie, montrons alors que P_{n+1} est vraie.

On suppose que $0 < v_n < 3$.

Donc $6 = 6 - 0 > 6 - v_n > 6 - 3 = 3$, puis

$$\frac{1}{6} < \frac{1}{6 - v_n} < \frac{1}{3}, \text{ car la fonction inverse est décroissante sur }]0; +\infty[.$$

$$\frac{3}{6} < \frac{9}{6 - v_n} < \frac{9}{3} = 3.$$

Ainsi $1 < \frac{3}{6 - v_n} < 3$, on a bien P_{n+1} vraie.

Conclusion : Par le principe de récurrence, $P_n : 0 < v_n < 3$ est vraie pour tout entier naturel n .

Corrigé n°5

La propriété à montrer pour tout entier $n > 0$ est : $\mathcal{P}_n : \langle 0 < v_n < 3 \rangle$;

Initialisation au rang 0

$v_0 = 1$ et on a bien $0 < 1 < 3$, donc \mathcal{P}_0 est vraie.

Hérédité

On suppose que \mathcal{P}_q est vraie au rang q ce qui donne l'hypothèse de récurrence $0 < v_q < 3$.

On veut montrer qu'alors \mathcal{P}_{q+1} est vraie.

On sait par définition de la suite que $v_{q+1} = \frac{9}{6 - v_q}$, en partant de l'hypothèse de récurrence, on « construit » ce v_{q+1} .

$$0 < v_q < 3 \iff 0 > -v_q > -3$$

$$\iff 6 > 6 - v_q > 3$$

$$\iff \frac{9}{6} < \frac{9}{6 - v_q} < \frac{9}{3}$$

$$\iff 0 < \frac{3}{6 - v_q} < 3$$

Donc \mathcal{P}_{q+1} est vraie et la propriété est héréditaire, comme elle est initialisée au rang 0, on en déduit qu'elle est vraie pour tout entier naturel n .

Corrigé n°6

Initialisation : $v_0 = 1$ donc $0 < v_0 < 3$

La propriété est vraie au rang 0

Hérédité : On suppose la propriété vraie au rang $n : 0 < v_n < 3$

$$\iff -3 < -v_n < 0 \iff 3 < 6 - v_n < 6 \iff \frac{1}{6} < \frac{1}{6 - v_n} < \frac{1}{3} \iff \frac{9}{6} < v_{n+1} < \frac{9}{3}$$

Donc $0 < v_{n+1} < 3$.

La propriété est donc vraie au rang $n + 1$.

Conclusion : la propriété est vraie au rang 0.

En la supposant vraie au rang n , elle est encore vraie au rang $n + 1$.

Par conséquent, pour tout entier n , $0 < v_n < 3$.

Différents corrigés d'un raisonnement par récurrence**Corrigé n°1**

Montrons par récurrence la propriété $P_n : 0 < v_n < 3$ pour tout entier naturel n .

Initialisation : $n = 0$, on a bien $0 < v_0 < 3$ vraie, puisque $v_0 = 1$; ainsi P_0 est vraie.

Hérédité : Supposons P_n vraie, montrons alors que P_{n+1} est vraie.

On suppose donc que $0 < v_n < 3$.

Donc $6 = 6 - 0 > 6 - v_n > 6 - 3 = 3$, puis

$$\frac{1}{6} < \frac{1}{6 - v_n} < \frac{1}{3}, \text{ car la fonction inverse est décroissante sur }]0; +\infty[.$$

$$\frac{3}{6} < \frac{9}{6 - v_n} < \frac{9}{3} = 3.$$

Ainsi $1 < \frac{3}{6 - v_n} < 3$. L'hérédité est établie, puisque P_{n+1} est vraie.

Conclusion

Par le principe de récurrence, $P_n : 0 < v_n < 3$ est vraie pour tout entier naturel n .

Corrigé n°2

Montrons par récurrence que, pour tout entier n , $0 < v_n < 3$.

Initialisation : Pour $n = 0$, on a bien $0 < v_0 < 3$ car $v_0 = 1$; ainsi la propriété est vraie au rang

$n = 0$.

Hérédité : Supposons que pour un certain entier n , on ait $0 < v_n < 3$.

On a alors $6 = 6 - 0 > 6 - v_n = 3$, puis $\frac{1}{6} < \frac{1}{6 - v_n} < \frac{1}{3}$, car la fonction inverse est décroissante

sur $]0; +\infty[$.

$$\text{Ainsi, en multipliant par } 9 > 0, 0 < \frac{3}{6} < \frac{9}{6 - v_n} < \frac{9}{3} = 3.$$

On a donc alors $0 < \frac{3}{6} < v_{n+1} < 3$, et la propriété est donc encore vraie au rang $n + 1$.

Conclusion D'après le principe de récurrence, la propriété $0 < v_n < 3$ est vraie pour tout entier naturel n .

Corrigé n°3

Initialisation : $v_0 = 1$ donc $0 < v_0 < 3$.

Hérédité : Montrons que pour tout n de \mathbb{N} , si $0 < v_n < 3$ alors $0 < v_{n+1} < 3$

$0 < v_n < 3$ donc $3 < 6 - v_n < 6$ donc $\frac{9}{6} < \frac{9}{6 - v_n} < \frac{9}{3}$ soit $0 < v_{n+1} < 3$

La propriété est héréditaire donc pour tout entier naturel n , $0 < v_n < 3$

Corrigé n°7

Démontrons par récurrence que, pour tout entier naturel n , $0 < v_n < 3$.

- **Initialisation**
On a $v_0 = 1$ et donc $0 < v_0 < 3$
- **Hérédité**
Supposons que pour n fixé, $0 < v_n < 3$ alors :

$$\begin{aligned} \text{Si } & 0 < v_n < 3 \\ \text{Alors } & -3 < -v_n < 0 \text{ car la fonction } x \mapsto -x \text{ est décroissante sur } \mathbb{R}; \\ \text{Puis } & 3 < 6 - v_n < 6 \\ \text{D'où } & \frac{9}{6} < \frac{9}{6 - v_n} < \frac{9}{3} \text{ car la fonction } x \mapsto \frac{9}{x} \text{ est décroissante sur }]0; +\infty[; \\ \text{Soit } & \frac{3}{2} < v_{n+1} < 3 \end{aligned}$$

- **Conclusion** Pour tout entier n , $0 < v_n < 3$

Corrigé n°8

Soit $P(n)$ la proposition « $0 < v_n < 3$ » pour $n \in \mathbb{N}$.

- $0 < 1 < 3$ donc $P(0)$ est vraie.
- Supposons $P(n)$ vraie pour un certain rang n c-à-d $0 < v_n < 3$. Alors $-3 < -v_n < 0$ et donc $3 < 6 - v_n < 6$. Or la fonction inverse décroît sur $]3; 6[$ donc on obtient $\frac{9}{6} < \frac{9}{6 - v_n} < \frac{9}{3}$.
Comme $\lfloor \frac{9}{6} \rfloor = \lfloor \frac{9}{3} \rfloor = 1$, on a bien $0 < v_{n+1} < 3$: $P(n+1)$ est vérifiée.
Ainsi, pour tout entier naturel n on a $0 < v_n < 3$.

Corrigé n°9

On note $P(n)$ la propriété " $0 < v_n < 3$ ".

Initialisation : pour $n = 0$, $v_0 = 1$ donc $P(0)$ est vraie.

Hérédité : Supposons $P(n)$ vraie pour un certain entier naturel n , alors on a :

$$\begin{aligned} & 0 < v_n < 3 \\ \implies & -3 < -v_n < 0 \\ \implies & 3 < 6 - v_n < 6 \\ \implies & \frac{1}{6} < \frac{1}{6 - v_n} < \frac{1}{3} \\ \implies & \frac{9}{6} < \frac{9}{6 - v_n} < 3 \\ \implies & 0 < v_{n+1} < 3 \end{aligned}$$

$P(n+1)$ est encore vraie.

Corrigé n°10

Posons H_n l'hypothèse de récurrence

$$H_n : "0 < v_n < 3"$$

Initialisation :

$$v_0 = 1 \in]0; 3[$$

Donc H_0 est vraie.

Hérédité :

Supposons qu'il existe un rang n pour lequel H_n soit vraie, c'est-à-dire :

$$0 < v_n < 3$$

Montrons que H_{n+1} est vraie, c'est-à-dire :

$$0 < v_{n+1} < 3$$

On sait que :

$$\begin{aligned} & 0 < v_n < 3 \\ \Leftrightarrow & -3 < -v_n < 0 \\ \Leftrightarrow & 3 < 6 - v_n < 6 \\ \Leftrightarrow & \frac{1}{6} < \frac{1}{6 - v_n} < \frac{1}{3} \\ \Leftrightarrow & 0 < \frac{9}{6} < v_{n+1} < \frac{9}{3} \text{ donc } H_{n+1} \text{ est vraie.} \end{aligned}$$

Conclusion : Pour tout entier naturel n , on a H_n vraie.

Corrigé n°11

- pour $n = 0$, on a $v_0 = 1$ et par conséquent $0 < v_0 < 3$.
- supposons avoir vérifié pour un certain entier n : $0 < v_n < 3$, on multiplie chacun des trois membres par -1 : $-3 < -v_n < 0$ on ajoute 6 à chacun des trois membres : $3 < 6 - v_n < 6$ sachant que la fonction inverse est strictement décroissante sur $]0; +\infty[$, on écrit :

$$\frac{1}{6} < \frac{1}{6 - v_n} < \frac{1}{3}$$

- on multiplie chacun des trois membres par 9 : $\frac{9}{6} < \frac{9}{6 - v_n} < 3$ on en déduit $0 < v_{n+1} < 3$, ce qui prouve que la propriété est héréditaire.
- conclusion : pour tout entier naturel n , $0 < v_n < 3$.

Corrigé n°15

Soit P_k la propriété : « $0 < v_k < 3$ »

- Montrons que P_0 : « $0 < v_0 < 3$ » est vraie.
On a $v_0 = 1$ par définition, donc $0 < v_0 < 3$. La proposition P_0 est vraie.
- On suppose que P_k : « $0 < v_k < 3$ » est vraie pour un certain k .
Montrons alors que P_{k+1} : « $0 < v_{k+1} < 3$ » est vraie.
On a : $0 < v_k < 3$ par hypothèse de récurrence

$0 > -v_k > -3$ (On multiplie par -1). On inverse l'ordre.

$1 < \frac{1}{6} < \frac{1}{6-v_k} < \frac{1}{3}$ (On ajoute 6)

$\frac{9}{6} < \frac{9}{6-v_k} < \frac{9}{3}$ car la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est décroissante sur $]3; 6[$

$\frac{9}{6} < \frac{9}{6-v_k} < 3$ (On multiplie par 9 > 0).

$0 < \frac{9}{6} < v_{k+1} < 3$. On reconnaît la proposition P_{k+1} qui est vraie.

- **Conclusion :** pour tout entier naturel n : $0 < v_n < 3$.

Corrigé n°16

Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n , $0 < v_n < 3$.

Notons cette propriété (P_n) .

$v_0 = 1$ donc la propriété est vraie au rang 0.

On suppose que la propriété est vraie à un rang n donné, montrons qu'elle est vraie au rang $n+1$.

$$0 < v_n < 3 \Leftrightarrow 3 < 6 - v_n < 6$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3} > \frac{1}{6-v_n} > \frac{1}{6}$$

$$\Leftrightarrow \frac{9}{6} < \frac{9}{6-v_n} < 3$$

$$\Leftrightarrow \frac{9}{2} < v_{n+1} < 3$$

$\Rightarrow 0 < v_{n+1} < 3$ donc la propriété (P_{n+1}) est héréditaire.

Nous avons montré que la propriété (P_n) est vraie au rang 0 et est héréditaire, elle est donc vraie pour tout entier naturel n .

Corrigé n°17

Montrons par récurrence la propriété P_n : $0 < v_n < 3$ pour tout entier naturel n

Initialisation : $n = 0$, on a bien $0 < v_0 < 3$ vraie, puisque $v_0 = 1$; ainsi P_0 est vraie.

Hérédité : Supposons P_n vraie, montrons alors que P_{n+1} est vraie.

On suppose donc que $0 < v_n < 3$.

Alors $-3 < -v_n < 0$, puis $6-3 < 6-v_n < 6$, soit $3 < 6-v_n < 6$, puis par inverse

$$\frac{1}{6} < \frac{1}{6-v_n} < \frac{1}{3}$$

$$\frac{9}{6} < \frac{9}{6-v_n} < \frac{9}{3}$$

$$\text{Alors } \frac{9}{6} < \frac{9}{6-v_n} < \frac{9}{3} \text{ soit } \frac{9}{2} < v_{n+1} < 3.$$

Ainsi $0 < \frac{9}{2} < v_{n+1} < 3$ et P_{n+1} est vraie; l'hérédité est donc établie.

Conclusion

Par le principe de récurrence, P_n : $0 < v_n < 3$ est vraie pour tout entier naturel n .

Corrigé n°12

Montrons par récurrence que, pour tout entier naturel n , $0 < v_n < 3$.

- $v_0 = 1$ et $0 < 1 < 3$. Donc $0 < v_0 < 3$. L'encadrement à démontrer est vrai quand $n = 0$.
- Soit $n \geq 0$. Supposons que $0 < v_n < 3$ et montrons que $0 < v_{n+1} < 3$.

$$0 < v_n < 3 \Rightarrow -3 < -v_n < 0 \Rightarrow 3 < 6 - v_n < 6$$

$$\Rightarrow \frac{1}{6} < \frac{1}{6-v_n} < \frac{1}{3} \text{ (par stricte décroissance de la fonction inverse sur }]0; +\infty[)$$

$$\Rightarrow \frac{9}{6} < \frac{9}{6-v_n} < \frac{9}{3}$$

$$\Rightarrow 0 < v_{n+1} < 3.$$

On a montré par récurrence que

$$\boxed{\text{pour tout entier naturel } n, 0 < v_n < 3}$$

Corrigé n°13

- **Initialisation :** pour $n = 0$, on a bien $0 < v_0 < 3$ vraie puisque $v_0 = 1$. La propriété est vraie pour $n = 0$.

- **Hérédité :** supposons qu'il existe $n \geq 0$ tel que $0 < v_n < 3$ je suppose la proposition vraie au rang n

Alors

$$6 - 0 > 6 - v_n > 6 - 3$$

$$\frac{1}{6} < \frac{1}{6-v_n} < \frac{1}{3} \text{ la fonction inverse est décroissante sur }]0; +\infty[$$

$$\frac{9}{6} < \frac{9}{6-v_n} < \frac{9}{3}$$

$$\frac{9}{6} < \frac{9}{6-v_n} < 3$$

$$0 < v_{n+1} < 3$$

alors la proposition est vraie au rang $n + 1$

- **Conclusion :** la proposition est vraie pour $n = 0$, elle est héréditaire

donc par récurrence on a, quel que soit $n \geq 0$ $\boxed{0 < v_n < 3}$

Corrigé n°14

On montre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$: $0 < v_n < 3$.

$0 < v_0 = 1 < 3$ est vraie, donc l'affirmation est vraie pour $n = 0$.

Si elle est vraie à un rang n quelconque, alors successivement par opérations sur les

inégalités on a :

$$-3 < -v_n < 0 ; 6 - 3 < 6 - v_n < 6 ; \frac{1}{6} < \frac{1}{6-v_n} < \frac{1}{3} \text{ (en utilisant la décroissance de la fonction inverse); } \frac{9}{6} < \frac{9}{6-v_n} < \frac{9}{3} ; \text{ d'où } 0 < \frac{9}{2} < v_{n+1} < 3 \text{ et alors l'affirmation est vraie au rang } (n + 1).$$

On en déduit $0 < v_n < 3$ pour tout entier naturel n positif.