À PROPOS DE QUANTIFICATION : QUELQUES ACTIVITÉS DE LOGIQUE DANS NOS CLASSES

Françoise HÉRAULT
ESPE de Paris, IREM de Paris

Catherine HUET
Lycée Jean-Baptiste Say, Paris, IREM de Paris

Géraldine KEL NOTTER
Lycée MELH, Saint Denis, IREM de Paris

Zoé MESNIL
LDAR, Université Paris Est Créteil, IREM de Paris

Résumé. Nous présentons dans cet article des activités élaborées par le groupe logique de l'IREM de Paris et proposées à nos élèves. Nous centrons notre texte plus particulièrement sur les quantificateurs : comme pour d'autres notions de logique (proposition, variable, connecteurs), nous pensons que les quantificateurs sont des éléments importants du langage mathématique, et que la pratique – assez répandue actuellement – qui consiste à les masquer le plus possible n'est pas propice à un apprentissage de ce langage, et de l'activité mathématique qu'il permet. Nous déplorons également que la logique mathématique puisse être absente de la formation initiale des enseignants de mathématiques : en effet, il nous semble essentiel que les enseignants aient les idées claires sur les notions de logique, sur ce qu'elles sont en tant qu'objet, même si en classe elles sont plutôt utilisées comme outils. Dans cette optique, cet article commence par une partie théorique sur les quantificateurs.

Mots clés. Langage, logique, quantificateurs, enseignement.

Abstract. This article presents activities which were devised by the “ groupe Logique” (“logic team”) at the IREM of Paris and which were used in class with our students. The text focuses on quantifiers more particularly. We believe quantifiers (as well as other logical concepts : proposition, variable, logical connectives) to be important elements of mathematical language and that the widespread habit to hide them as much as possible prevents students from learning that particular language and from discovering the mathematical activity it allows. We also regret that mathematical logic should be missing from the maths teachers' initial training. We deem essential for maths teachers to have clear ideas of these notions of logic, even if in class they are generally only used as mathematical tools. It is in this light, that the article starts by focusing on the theoretical aspects of quantifiers.

Key-words. Language, mathematical logic, quantifiers, teaching

Introduction

La présence de la logique dans les programmes de mathématiques au lycée a une histoire mouvementée : la logique était essentielle et explicitement mentionnée au moment des mathématiques modernes (1969-1980), puis a été bannie avec les programmes de la contre-réforme (1981) et est timidement réapparue en 2001 (voir Mesnil, à paraître). Dans les programmes actuels, dont la mise en place a commencé en Seconde en 2009, figurent explicitement des objectifs concernant des notions de logique, précisés notamment dans un paragraphe *Raisonnement et notations*

mathématiques situé au début du programme de Seconde (et repris quasiment à l'identique dans les programmes de Première et Terminale) : « À l'issue de la seconde, l'élève devra avoir acquis une expérience lui permettant de commencer à distinguer les principes de la logique mathématique de ceux de la logique du langage courant », et un tableau situé à la fin du programme fixe des objectifs sur différentes notions, par exemple en ce qui concerne les quantificateurs : « les élèves sont entraînés, sur des exemples, à utiliser à bon escient les quantificateurs universel, existentiel (les symboles $\forall$, $\exists$ ne sont pas exigibles) et à repérer les quantifications implicites dans certaines propositions et, particulièrement, dans les propositions conditionnelles » (voir Fabert et Grenier 2011 ou Mesnil 2014 pour quelques commentaires sur ces objectifs). Le programme précise que « les concepts et méthodes relevant de la logique mathématique ne doivent pas faire l'objet de cours spécifiques mais doivent prendre place naturellement dans tous les chapitres du programme ».
L'expérience d' un cours de logique mathématique présenté de manière formelle a déjà été tentée au moment des mathématiques modernes, mais dès cette époque, des enseignants et des chercheurs ont rappelé qu'il était nécessaire d'articuler ces considérations théoriques avec l'activité mathématique (voir par exemple Adda, 1975 pour des considérations sur le collège, ou plus tard et au niveau universitaire, El Faqih, 1991). Suivant cette ligne, nous proposons de mettre parfois un coup de projecteur sur certains aspects logiques de l'activité mathématique, d'inviter les élèves à adopter une position réflexive par rapport à ce qu'ils écrivent, d'institutionnaliser certaines notions, en posant, pourquoi pas, quelques définitions et quelques propriétés[1]. Une difficulté majeure qui peut faire obstacle à un tel travail est l'absence de formation en logique mathématique de la plupart des professeurs. Même si ceux-ci ont évidemment manipulé ces notions logiques dans leur cursus mathématique, cela n'apporte pas forcément le recul nécessaire pour les enseigner (Durand-Guerrier, 2005).
Au sein du groupe Logique de l'IREM de Paris, qui existe depuis septembre 2010, nous avons choisi de mettre l'accent sur les liens entre logique et langage. Loin de nous l'idée que le langage mathématique n'est qu'un langage formel spécifique dont il suffirait de connaître les règles d'utilisation. Le langage qu'utilisent les mathématiciens – inévitablement présent dans la classe de mathématiques, de par la formation des enseignants, mais aussi parce qu'apprendre les mathématiques c'est en partie apprendre à les dire – associe formalisme et langue naturelle, dans une dialectique féconde qui suppose une bonne maîtrise de ces deux codes et de leurs usages (Hache, 2015). La logique nous donne des outils pour répondre à des questions que l'on se pose dès que l'on veut être particulièrement attentif au langage que nous utilisons, ce qui nous paraît nécessaire vu la complexité de celui-ci.
Cet article rend compte d'un atelier proposé lors des Journées APMEP en 2013. Nous avions choisi d'y présenter des activités en lien avec les quantificateurs. L'article reprend le déroulement de l'atelier : nous proposons d'abord quelques éléments théoriques, que nous utilisons pour analyser quelques extraits de manuels, puis nous présentons trois activités. Les éléments théoriques portent essentiellement sur les quantificateurs, mais ils nécessitent au préalable quelques mots sur les notions de proposition et de variable. Les activités présentées ont été menées dans des classes de lycée : une progression sur

1 Les programmes de Première et de Terminale précisent qu'« il convient de prévoir des temps de synthèse » sur les notions de logique.

l'usage des quantificateurs en Seconde, un exercice proposé en TS reliant logique et algorithmique, avec des Vrai/Faux sur des propositions quantifiées, un autre exercice proposé en TS qui aborde explicitement les questions d'alternance des quantificateurs. Nous ne considérons pas ces activités comme des exercices de logique mathématique, mais simplement comme des exercices de mathématiques, habillés d'une façon un peu spéciale pour pouvoir mettre l'accent sur des notions logiques. Il y a de tels exercices dans les nouveaux manuels, estampillés d'un logo « logique » pour pouvoir être bien identifiés. Même s'ils peuvent être une bonne base, il y a souvent beaucoup à redire sur leur formulation[2], nous verrons quelques exemples. De notre coté, une des principales activités du groupe Logique de l'IREM de Paris est de discuter et reformuler les propositions d'activités amenées par les membres du groupe, suggestions alternatives dont les professeurs pourront s'inspirer.

1. Quelques éléments théoriques

Dans cette première partie nous allons présenter quelques éléments théoriques sur les quantificateurs, afin de préciser ce qui nous semble être des enjeux d'apprentissage importants au lycée. Nous n'avons pas rédigé ces propos à destination d'élèves, mais à destination d'enseignants, de formateurs, de chercheurs, tous habitués des mathématiques.

Nous aborderons d'abord rapidement les notions de proposition et de variable, malheureusement absentes des programmes de mathématiques pour le lycée, qui sont pourtant des éléments de base du langage mathématique. Il est important que ces notions soient clarifiées avant d'aborder les quantificateurs, qui opèrent sur une variable et une proposition et dont un aspect essentiel est d'être des *mutificateurs* (voir ci-après). Nous distinguerons ensuite quantification et quantificateurs, qui ne sont finalement que des marqueurs particuliers de quantification, et nous verrons différentes expressions qui marquent une quantification mais de façon implicite. Nous allons identifier finalement deux avantages à l'explicitation des quantifications : pouvoir disposer de démarches de démonstration des propositions en fonction de leur forme (proposition universelle ou proposition existentielle), pouvoir donner des règles de formation des propositions quantifiées.

1.1 Proposition, variable

Les notions de proposition et de variable, essentielles dans la description du langage mathématique, sont malheureusement absentes des objectifs du programme et en grande partie des manuels. Nous pensons qu'il est important que les enseignants aient les idées claires sur ce qu'est une proposition (et ce qui n'en est pas une), et sur le rôle différent joué par les variables dans une proposition (selon qu'elles sont *muettes* ou *parlantes*, voir paragraphe suivant), afin qu'ils puissent faire comprendre aux élèves certains aspects essentiels de ces notions. Nous proposons à cet effet des définitions « naïves »[3]

2 Le groupe Logique de l'IREM de Paris a produit en 2011 des textes critiques des exercices des manuels de Seconde. Ces textes sont encore sous forme de documents de travail, mais ils sont consultables sur le site du groupe : http://www.irem.univ-paris-diderot.fr/articles/reflexions_sur_les_propositions_des_manuels_et_sur_les_notions_de_logique_a/

3 L'adjectif « naïve » est utilisé par opposition aux définitions formelles que l'on peut trouver dans un cours de logique, voir par exemple Cori et Lascar, 1993.

qui reprennent des caractéristiques importantes de ces notions :

- une proposition énonce des faits concernant un ou des objets mathématiques ; une proposition est susceptible d'être vraie ou fausse;
- une variable est une lettre, éventuellement affectée d'indice(s). C'est un nom d'objet, qui ne désigne pas un objet particulier mais a vocation à désigner des objets pris dans un certain domaine (on dit que la variable est *astreinte* à ce domaine).

a) Ce qu'est, ce que n'est pas une proposition

« 2 est pair » est une proposition, qui est vraie, « 3 est pair » est une proposition, peu importe qu'elle soit fausse. Plus délicat à concevoir : « n est pair » (la variable n pouvant prendre ses valeurs dans $\mathbb{N}$) est une également une proposition. Certains auteurs appellent *proposition* seulement les énoncés du type « 2 est pair » ou « 3 est pair », qui ont une valeur de vérité déterminée. Cette distinction d'ordre sémantique est bien sûr essentielle, nous la soulignons en reprenant la distinction parfois utilisée en logique mathématique entre « proposition close » (pas de variable libre, comme dans « 2 est pair », ou dans « pour tout entier n, si n est pair alors n^2 est pair ») et « proposition ouverte » (avec variable(s) libres(s), comme dans « n est pair »). Mais nous faisons le choix d'appeler proposition aussi bien « 2 est pair » que « n est pair », car nous voulons souligner la similitude syntaxique entre ces deux énoncés (ils sont construits de la même façon : n est le nom d'un objet, au même titre que 2). Quand nous disons « une proposition est susceptible d'être vraie ou fausse », cela signifie que cela a un sens de se poser la question de sa vérité, pas forcément que l'on peut déterminer si elle est vraie ou fausse. Ainsi, cela a un sens de se demander si « n est pair » est vraie ou fausse, mais nous ne pouvons pas répondre à cette question par manque d'information sur n.

Une phrase telle que « je vais montrer que la fonction f est croissante » n'est pas une proposition mathématique, elle n'énonce pas un fait qui concerne seulement un objet mathématique, elle énonce un fait concernant l'activité de quelqu'un qui fait des mathématiques. Nous pouvons dire qu'elle met en jeu un locuteur, qui est facilement repérable ici grâce au sujet « je ». Il est plus délicat de repérer la présence du locuteur dans une phrase telle que « soit x un nombre réel ». Pourtant, elle marque bien encore l'action de quelqu'un en train de faire des mathématiques : il annonce qu'il considère un réel et qu'il le nomme x (il va très probablement ensuite énoncer des phrases sur cet objet qui pour le coup pourront être des propositions). Une telle phrase n'est donc pas une proposition, ce que l'on peut voir aussi en remarquant que cela n'a pas de sens de se demander si elle est vraie ou fausse. Autre exemple à connaître de phrase qui n'est pas une proposition « n est divisible par 4 donc n est pair ». Énoncer une telle phrase c'est affirmer que la proposition « n est divisible par 4 » est vraie, que la proposition « n est pair » est vraie, et que l'on connaît une démonstration de la deuxième proposition à partir de la première[4]. On est bien au-delà de l'énonciation d'un simple fait concernant des objets mathématiques. Par ailleurs, cela n'a pas non plus de sens de se demander si une telle phrase est vraie ou fausse, par contre on peut se demander si la déduction est correcte (ou valide) ou non[5].

4 Démonstration qui peut se réduire à l'utilisation d'un théorème, comme dans « ABC est un triangle rectangle en A donc $BC^2=AB^2+AC^2$ », ou d'une définition, comme dans « la fonction f est croissante donc $f(1)\leq f(2)$ ».

5 La distinction entre vérité et validité est notamment développée dans Durand-Guerrier 2005

b) Variables parlantes, variables muettes

Dans une proposition telle que : « Pour tout x de I, $f(x) \leq f(a)$ » (définition de « la fonction f admet un maximum sur I en a »), les variables a et x n'ont pas le même rôle. En effet, cette proposition « parle » de la variable a (et des variables f et I), elle donne une propriété de cet objet, et au contraire, elle ne « parle » pas de la variable x. On dit que la variable a est parlante (ou libre) et que la variable x est muette (ou liée)[6].

Ces notions de variable parlante ou muette sont des outils d'analyse des propositions mathématiques. Sans rentrer dans une analyse très pointue, deux questions devraient, selon nous (ce positionnement reste pour l'instant une hypothèse confortée par quelques observations expérimentales dans nos classes), être plus présentes dans la classe à propos des nombreuses propositions mathématiques que les élèves rencontrent : quelles sont les variables présentes dans la proposition ? Quel est leur statut ? Ces questions techniques permettraient de répondre à une question préalable à la compréhension de ce que dit une proposition : de qui parle t-elle[7] ? Les notions de variables parlantes ou muettes pourraient alors devenir pour les élèves des outils de contrôle de ce qu'ils lisent ou écrivent : s'ils doivent donner la définition de « la fonction f admet un maximum sur I en a », la variable a doit être parlante, par contre, s'ils doivent donner une définition de « la fonction f a un maximum sur I », la variable a doit être muette.

Nous avons vu des exemples où la connaissance du statut (muette ou parlante) des variables pouvait aider à contrôler ce que signifie une proposition. Cependant, il n'est pas nécessaire de comprendre ce que signifie une proposition pour savoir si les variables qui y sont présentes sont muettes ou parlantes. Il s'agit d'une notion purement syntaxique : une variable est muette quand elle est dans le champ d'un *mutificateur* (« signe qui rend muet »). Le signe d'intégrale $\int$, le signe de somme indexée $\sum$, la flèche d'application $\longmapsto$, l'expression « équation d'inconnue » sont des mutificateurs. Mais les plus utilisés sont sans doute les quantificateurs, dont nous allons maintenant parler plus précisément.

1.2 Quantificateurs

a) Quantification et quantificateurs

(1) Un nombre réel a un carré positif
(2) Tous les réels ont un carré positif
(3) Pour tout réel x, x^2 est un réel positif
(4) $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$

sont plusieurs formulations d'une même propriété, mais la quantification universelle y est exprimée de manière très différente. Dans la proposition (1), la quantification est implicite, sous-entendue par la première occurrence du mot *un*. Nous utilisons fréquemment l'article indéfini *un* pour marquer une quantification universelle, dans le langage courant comme en mathématiques. Mais *un* est également parfois utilisé pour

6 Des notes du cours Langage Mathématique proposé notamment par René Cori en L1 à l'université Paris Diderot de 2009 à 2013 présentent ces notions de façons plus détaillée. Vous pouvez y accéder via le site de groupe Logique :
http://www.irem.univ-paris diderot.fr/articles/les_documents_du_cours_langage_mathematique_en_l1_r_cori/

7 L'expression « la proposition parle de… » est sans doute suffisante dans un premier temps pour donner une idée intuitive de la notion de variable muette ou parlante, les termes pouvant venir ultérieurement.

marquer une quantification existentielle, ce qui est évidemment source de confusion ! Parfois même, les deux utilisations cohabitent dans une même proposition, comme par exemple dans « un réel positif possède une racine carrée », ou dans « un triangle rectangle est inscriptible dans un demi-cercle ». Dans la proposition (2), la quantification universelle est explicite, marquée par l'utilisation de *tous*. Les propositions (3) et (4) se démarquent des deux premières par l'utilisation d'une variable. La proposition (3) peut paraître plus proche des propositions (1) et (2) car elle est formulée « avec des mots », contrairement à la proposition (4) qui utilise seulement des symboles mathématiques, et qui peut paraître beaucoup plus formelle. Nous voudrions souligner qu'une telle vision masque la formalisation qui existe déjà dans la proposition (3) et qui est due à l'utilisation d'une variable et d'un quantificateur. En effet, sa structure est identique à celle de la proposition (4) : il y a un quantificateur (exprimé en mots ou en symbole) qui porte sur une variable x et qui opère sur la proposition « x^2 est un réel positif » dans laquelle la variable x est libre. Cette proposition peut être isolée et a un sens en soi. Dans les propositions (1) et (2), on ne peut pas identifier un tel processus de construction. La proposition (3) est donc formalisée au sens d'une mise en forme respectant certaines règles, même si cette formalisation ne s'accompagne pas d'une symbolisation. Ces règles sont spécifiques des mathématiques, puisque le langage courant n'utilise pas de variable, et donc *a fortiori* pas de quantificateur. Aussi, au delà de la question de l'utilisation ou non des symboles, il nous paraît important de dire aux élèves ce que sont les quantificateurs, et d'expliciter leur « mode d'emploi », tant du point de vue syntaxique (relatif à la forme) que sémantique (relatif au sens). C'est ce que nous faisons dans l'encadré ci-après, que nous avons rédigé dans un vocabulaire technique à destination des enseignants. Nous verrons plus loin une proposition de discours à destination des élèves.

> En mathématiques, les quantificateurs sont une façon de marquer la quantification, mais il y en a bien d'autres. La logique des prédicats utilise deux quantificateurs : le quantificateur universel, qui appliqué à une variable x astreinte à un domaine E permet d'obtenir, à partir d'une proposition P, la proposition $\forall x$ P, et le quantificateur existentiel, qui appliqué à une variable x permet d'obtenir, à partir d'une proposition P, la proposition $\exists x$ P (description de l'aspect syntaxique des quantificateurs : ils opèrent sur une variable et une proposition pour construire une nouvelle proposition). La proposition $\forall x\, P[x]$ est vraie lorsque pour chaque élément a de l'ensemble E la proposition $P[a]$ est vraie. La proposition $\exists x\, P[x]$ est vraie lorsqu'il existe au moins un élément a de l'ensemble E tel que $P[a]$ soit vraie (description de l'aspect sémantique des quantificateurs : conditions de vérité d'une proposition quantifiée). Les quantificateurs sont des mutificateurs : une variable qui est dans la portée d'un quantificateur est muette dans la proposition quantifiée.

2. Analyse de ressources pour l'enseignement : document d'accompagnement et manuels

Ces éléments théoriques précisés, nous allons nous appuyer dessus pour analyser le contenu de documents pouvant servir de ressource aux enseignants : le document *Ressources pour la classe de Seconde* intitulé « Notations et raisonnement mathématiques » publié en 2009, les manuels, notamment ceux de Seconde publiés en 2010. Nous serons souvent critiques vis-à-vis des extraits choisis, sans pour autant jeter la pierre aux auteurs qui ont dû produire rapidement des pages sur les notions de logique, à partir d'indications du programmes relativement imprécises.

2.1 Explicitation des quantifications

Nous qualifions une quantification d'implicite lorsqu'elle n'est pas marquée par une expression qui indique clairement qu'il s'agit d'une quantification, et plus précisément s'il s'agit d'une quantification universelle ou existentielle. Nous avons déjà évoqué l'exemple du *un*, nous en verrons d'autres. Expliciter une quantification consiste donc à lever un tel implicite.

Dans le document ressource figure un paragraphe *1.2 Explicitation des quantifications.* Il y est écrit qu'« en classe de seconde, l'explicitation des quantifications doit être faite dans l'optique d'aider les élèves à mieux comprendre les énoncés. Elle ne doit pas être systématique mais doit être faite dès qu'il peut y avoir ambiguïté de la situation proposée. Il est inutile de compliquer les notations lorsque ce n'est pas utile à la compréhension. » Comment savoir s'il y a ou non ambiguïté ? Plusieurs expérimentations ont montré qu'une proposition telle que « si $(x-1)(x-2)=0$ alors $x=1$ », que tout mathématicien déclarera fausse sans hésitation, peut pourtant laisser perplexes certains élèves pour qui cette proposition est parfois vraie, parfois fausse (expérimentation menée par exemple par un groupe de l'IREM de Rennes, relatée dans la brochure *Apprentissage des structures logiques*, Antier et al., 2000, expérimentation reprise par E. Forgeoux, C. Hache et présentée lors d'un atelier aux Journées APMEP en 2011). Cette réponse est tout-à-fait correcte si l'on considère que cette proposition est une simple implication fabriquée à partir des deux propositions « $(x-1)(x-2)=0$ » et « $x=1$ » : en effet, en se référant à la table de vérité du connecteur IMPLIQUE, nous pouvons dire que la proposition « $(x-1)(x-2)=0$ IMPLIQUE $x=1$ » est vraie pour $x=1$ (puisque la prémisse et la conclusion sont vraies), et fausse pour $x=2$ (puisque la prémisse est vraie et la conclusion est fausse). Les réponses de ces élèves sont donc cohérentes du point de vue logique avec la lecture qu'ils font de cette proposition, différente de celle des mathématiciens qui associent systématiquement une quantification universelle à l'expression « si… alors… » entre deux propositions contenant une même variable libre. Il s'agit d'une pratique langagière de la communauté mathématique, qui n'est manifestement pas spontanément partagée par tous les élèves (voir un autre exemple de ce phénomène dans Durand-Guerrier, 1999). Sans donner aux enseignants des directives en décidant que dans telle situation il est utile d'expliciter les quantifications, alors que dans tel autre cela ne l'est pas, il nous semble important de présenter au moins certaines situations où il y a ambiguïté. Ce qu'ont sans doute voulu faire les auteurs du document ressource avec l'exemple d'activité donné ci-après (figure 1).

Une première remarque sur cet exemple : nous l'avons vu, les quantificateurs servent à construire des propositions mathématiques, or ici, aucun des trois énoncés n'est une proposition mathématique. Cela complique l'exercice, et rend sa correction délicate. Regardons par exemple le premier énoncé : celui donné initialement et celui donné en dessous en italique (qui, par contre, est une proposition) ne sont pas synonymes, puisque ce qui est contenu dans le « soit » (qui marque l'introduction d'un objet et d'un nom choisi pour cet objet par une personne en train de faire des mathématiques) n'est pas repris.

Exemple 3

Reformuler les énoncés suivants en faisant apparaître les quantifications.
Soit f la fonction définie sur **R** par $f(x) = 2x + 5$.
(Pour tout nombre réel x, l'image de x par la fonction f est égale à 2 x + 5)
L'équation $f(x) = 2x + 5$ a-t-elle des solutions ?
(Existe-t-il des nombres réels x pour lesquels f (x) et 2 x + 5 sont égaux ?)
Résoudre l'équation $f(x) = 2x + 5$.
(Trouver l'ensemble de tous les réels x pour lesquels f (x) et 2 x + 5 sont égaux)

Dans les deux énoncés, la trace écrite (au tableau ou sur le cahier) est souvent la même :

$$f(x) = 2x + 5.$$

Cependant les deux énoncés n'ont bien sûr pas le même statut : le premier énoncé définit une fonction, le second conduit à résoudre (graphiquement ou par calcul) une équation. Il est important de clarifier par oral ces différents statuts dès que l'occasion se rencontre, et dans certains cas, de faire noter les quantifications par écrit, sans formalisme excessif.

Figure 1. *Extrait du document ressource « Notations et raisonnement mathématiques », explicitation des quantifications, page 4*

Cherchons alors à formuler des propositions faisant intervenir l'expression « $f(x) = 2x + 5$ », qui est effectivement quantifiée différemment selon le contexte. Pour le premier exemple, il suffit de se contenter de la proposition « la fonction f est définie par $f(x) = 2x + 5$ », dans laquelle l'expression « f est définie par » masque effectivement une quantification universelle. Pour le deuxième, il suffit de ne pas le proposer sous forme interrogative, et de se contenter de la proposition « l'équation $f(x) = 2x + 5$ a au moins une solution », dans laquelle l'expression « l'équation a au moins une solution » masque une quantification existentielle. Cette rigueur nous paraît indispensable dans cet exercice, qui présente alors l'intérêt de montrer aux élèves comment une proposition telle que « $f(x) = 2x + 5$ » peut être insérée dans différentes propositions, et mêlée à des expressions exprimant différentes quantifications. Par contre, dans le dernier énoncé, il n'y a pas de proposition mathématique sous-jacente, mais seulement le nom d'un objet : « l'ensemble des solutions de l'équation $f(x) = 2x + 5$ », qui peut s'écrire « $\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = 2x + 5\}$ », où n'intervient aucune quantification !

Donnons un dernier exemple de quantification implicite en regardant différentes définitions de *fonction affine* présentes dans des manuels de Seconde de 2010 :
– le manuel Repères (Hachette) propose « f est affine si et seulement si il existe deux réels a et b tels que : pour tout $x \in \mathbb{R}, f(x)=ax + b$ »
– le manuel Transmath (Nathan) propose « une fonction affine est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax +b$ où a et b sont deux nombres connus », ce qui est très proche de ce que proposent les manuels Pixel (Bordas), Odyssée (Hatier) et Indice (Bordas) : « une fonction affine est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax + b$ où a et b sont deux nombres réels », ou encore de ce que propose le manuel Déclic (Hachette) : « une fonction affine est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) =ax + b$ où a et b sont des réels fixés ».
Le manuel Repères est le seul a avoir choisi d'expliciter les quantifications dans sa définition. Les définitions des autres manuels sont bien sûr tout autant quantifiées, mais les quantifications y sont exprimées de manière implicite :

- la quantification existentielle est masquée par l'expression « où a et b sont … »
- la quantification universelle est contenue dans la définition de l'expression « la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par … »

Ainsi, de telles expressions masquent la quantification, mais ne la suppriment évidemment pas. Elles ne suppriment donc pas les éventuelles difficultés liées à ces quantifications, et empêchent éventuellement d'y faire référence pour expliquer une démarche, puisqu'elles ne figurent pas. Par exemple, pour démontrer qu'une fonction est affine, lorsqu'elle n'est pas donnée immédiatement sous sa forme $ax + b$, mais sous une forme plus compliquée, nous utilisons des identités algébriques, qui sont des égalités vraies pour tout réel x, et nous trouvons finalement un réel a et un réel b vérifiant que pour tout réel x, $f(x) = ax + b$. La démarche est liée aux quantifications présentes dans l'énoncé : puisque celui-ci commence par « il existe deux réels a et b », une méthode pour le prouver consiste à exhiber de tels réels. Et ayant utilisé des identités algébriques, vraies pour tout réel x, l'expression obtenue est bien une définition de la fonction f. L'explicitation des quantifications permet ainsi de justifier certaines techniques de résolution d'exercices, que l'élève pourra réinvestir dans d'autres situations (par exemple quand il devra montrer qu'une fonction est une fonction polynôme du second degré).

2.2 Quantificateurs et démonstrations

Plus généralement, la structure logique d'un énoncé, et notamment la façon dont il est quantifié, est un guide pour sa démonstration : on ne s'engage pas de la même façon dans la démonstration d'un énoncé de la forme $\forall x \exists y$ P[x, y] et d'un énoncé de la forme $\exists y \forall x$ P[x, y]. A. Selden et J. Selden ont montré que des étudiants qui avaient des difficultés à mettre au jour la structure logique d'une proposition avait également des difficultés à contrôler la validité d'une preuve de cet énoncé (Selden et Selden, 1995).
Le manuel Math'x souligne le lien entre structure d'une proposition et structure de sa preuve en donnant dans un même encadré des indications (que l'on peut apparenter à des techniques) pour prouver, ou infirmer, une proposition universelle ou une proposition existentielle (dans les autres manuels, seule la technique du contre-exemple est institutionnalisée) (figure 2).

Raisonnement par exemple (s) ou par contre-exemple

• Pour démontrer « il existe un ... », il suffit d'en trouver un : produire un exemple suffit !
• Pour démontrer « pour tout ... », il suffit d'envisager tous les cas ; mais s'ils sont en nombre infini, ce n'est plus possible. Des exemples ne suffisent pas.
• Pour démontrer que « pour tout, ... » est faux, il suffit d'exhiber un contre-exemple.

• Démontrer que « il existe un quadrilatère ayant ses diagonales perpendiculaires » : il suffit d'en construire un, comme ci-contre.
• Démontrer que « tout nombre multiple de 6 est aussi multiple de 2 ». Il faudrait tester tous les multiples de 6, mais il y en a une infinité ! Ce n'est donc pas possible. Il faut faire une démonstration dans le cas général.
• Démontrer que « pour tout nombre x, $(x + 1)^2 = x^2 + 1$ » est faux. Il suffit de donner un contre-exemple : pour $x = 2$, $(x + 1)^2 = 9$ et $x^2 + 1 = 5$ donc $(x + 1)^2 \neq x^2 + 1$.

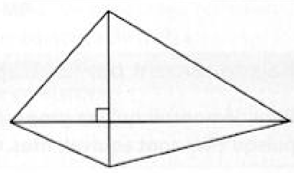


Figure 2. *Extrait du manuel Math'x sur les démonstrations de propositions quantifiées, page 354*

Dans cet extrait, chaque cas est présenté comme une technique isolée et la façon dont ces techniques sont reliées grâce à la négation n'est pas expliquée (nous entendons par là l'explicitation du fait que montrer qu'une proposition universelle est fausse et montrer qu'une proposition existentielle est vraie relèvent de la même technique car la négation d'une proposition universelle est une proposition existentielle, c'est-à-dire l'explicitation du lien entre ce qui est appelé « exemple » et ce qui est appelé « contre-exemple », qui ici semblent n'avoir rien en commun). Le cas de la démonstration de la fausseté d'une proposition existentielle n'est pas mentionné, et ne semble ainsi relever d'aucune de ces techniques, alors que cela revient à montrer la vérité d'une proposition universelle, telle qu'envisagée dans le deuxième point. Au sein du groupe Logique, nous avons élaboré un tableau (tableau 1 ci-après), que nous appelons « le tableau des pour prouver », qui donne la liste exhaustive des quatre cas démontrer/infirmer une proposition universelle/existentielle dans une présentation qui met en évidence des similitudes qui peuvent être expliquées grâce à la négation.

Type de phrase	Pour prouver qu'elle est vraie	Pour prouver qu'elle est fausse
	Une valeur de x pour laquelle $P[x]$ est vraie ne suffit pas. **Garder x !**	Une valeur de x pour laquelle $P[x]$ est fausse suffit.
	Une valeur de x pour laquelle $P[x]$ est vraie suffit.	Une valeur de x pour laquelle $P[x]$ est fausse ne suffit pas. **Garder x !**

Tableau 1. *Tableau des « pour prouver », groupe Logique de l'IREM de Paris*

2.3 Quantificateurs et négation

Nous avons déjà évoqué la négation des propositions quantifiées pour expliquer le lien entre les démarches du tableau des « pour prouver ». Dans la plupart des manuels, la technique du contre-exemple, souvent la seule mentionnée, n'est pas reliée à la négation. Elle l'est seulement dans deux manuels, Transmath, dont nous verrons un extrait ci-après (figure 4), et Indice (figure 3).

IV. Exemples – Contre-exemples

On veut savoir si les deux énoncés suivants sont vrais ou faux.
(1) L'expression $x^2 + 2x - 3$ est égale à $(x - 1)(x + 3)$.
(2) Tout entier impair est premier.

Pour démontrer que l'énoncé (1) est vrai, un élève dit :
« Pour $x = 1$, les deux expressions sont égales à 0. Donc elles sont égales. »
Cet exemple ne prouve pas que l'énoncé (1) est vrai. Pour cela, il faudrait tester l'égalité pour toutes les valeurs de x. En développant, $(x - 1)(x + 3) = x^2 + 3x - x - 3 = x^2 + 2x - 3$.
Ce calcul prouve que l'égalité (1) est vraie pour toute valeur de x.

Pour démontrer que l'énoncé (2) est faux, un élève dit :
« 9 est impair et il n'est pas premier. »
La donnée d'un exemple suffit dans ce cas pour prouver le résultat.
L'énoncé « 9 est impair et il n'est pas premier » est vrai. Il existe donc un entier impair non premier. La phrase dite par l'élève est la négation de l'énoncé (2). Celui-ci est donc faux.

Un ou plusieurs exemples ne suffisent pas pour montrer qu'un énoncé est vrai, mais on peut utiliser un exemple pour montrer qu'un énoncé est faux : on peut alors trouver un cas qui le met en défaut, c'est un **contre-exemple**.

Figure 3. *Extrait du manuel Indice sur exemple et contre-exemple, page 24*

Comme le manuel Math'x, ce manuel veut mettre en garde les élèves contre une erreur courante : démontrer une proposition universelle avec un exemple. Il est regrettable que la quantification universelle soit implicite dans l'exemple 1. Cela peut-être une simple maladresse didactique, montrant une ignorance de la difficulté des quantifications implicites. Mais nous pouvons également relever dans cet extrait une erreur par rapport aux notions de logique : la proposition « 9 est impair et il n'est pas premier » n'est pas la négation de la proposition « tout entier impair est premier » (même si sa vérité prouve la vérité de cette négation). La rigueur généralement de mise quand on parle d'objets mathématiques n'est pas appliquée ici, nous pouvons en voir un autre exemple dans le récapitulatif : la conclusion « un ou plusieurs exemples ne suffisent pas pour montrer qu'un énoncé est vrai » ne s'applique qu'à des énoncés universels, ce qui n'est pas précisé.

Les règles de négation de propositions quantifiées ne sont présentes que dans trois manuels. Pixel les évoque de manière imprécise : « de façon générale, la négation de « pour tout x » est « il existe x », et réciproquement », ce qui est largement incomplet. Odyssée se contente de dire que « les deux quantificateurs « tout » et « il existe » sont souvent liés lorsqu'il s'agit d'énoncer le contraire d'une proposition ». Il y a identification des notions de contraire et de négation, notions pourtant distinctes[8], mais que les élèves ont tendance à confondre, et là encore le vocabulaire manque de précision: que signifie « être liés » pour les quantificateurs ? Transmath propose quant à lui un passage assez long sur ces règles, et relie la notion de contre-exemple à la négation d'une proposition universelle (voir figure 4). Les auteurs de ce manuel ont essayé de donner une définition de « proposition universelle ». Et elle illustre la difficulté à se situer entre une référence formelle (la référence aux quantificateurs) et un ton qui veut rester informel. Dans un article récent, D. Grenier a souligné que « les manuels qui donnent quelques « définitions » [de notions de logique] se sont interdits de les désigner ainsi, et certains d'entre eux proposent des énoncés flous, incomplets, voire incorrects » (Grenier, 2015, p. 71). La définition donnée ici correspond bien à cette description et est loin d'être une propriété caractéristique. Tout d'abord, la proposition « NON($\forall x\ \ x^2 > x$) » contient le seul quantificateur universel, et n'est pourtant évidemment pas une proposition universelle ! Prenons un autre exemple : nous aimerions que la proposition « le carré de tout entier naturel pair est pair »[9] réponde à cette définition. Pourtant, formulée ainsi, elle ne contient pas le quantificateur « pour tout », bien qu'elle contienne une quantification universelle. Par contre, la formulation équivalente « pour tout entier naturel n, si n est pair alors n^2 est pair » répond à la définition. Mais la formulation équivalente « pour tout entier naturel n, si il existe un entier naturel k tel que $n = 2k$, alors il existe un entier naturel k tel que $n^2 = 2k$ » n'y répond plus, puisqu'elle contient également des quantificateurs existentiels ! En fait, une proposition universelle est une proposition qui peut s'écrire sous la forme « Pour tout x, P[x] », où P[x] est une proposition ne comportant pas de quantificateurs, mais cette caractérisation est relative au langage que l'on se donne le droit d'utiliser[10].

8 Pour plus de précision sur cette distinction, on pourra se reporter à l'enquête épistémologique sur la notion de négation dans la thèse de I. Ben Kilani, 2005, ou à Mesnil, 2014.

9 Nous reconnaissons que le premier exemple n'est pas une formulation courante dans la classe de mathématiques, par contre celui-là l'est.

10 La proposition donnée en exemple est universelle dans un langage contenant le prédicat « être pair », mais ne l'est plus si ce prédicat ne fait pas partie du langage.

Étudions l'extrait suivant.

6.4 Négation d'une proposition universelle. Démonstration par contre-exemple

Une proposition universelle est une proposition qui contient le seul quantificateur « pour tout » ou « quel que soit » (ou « pour tous » ou « quels que soient »).

Exemples. 1. Considérons la proposition proverbiale (P) : « la nuit, **tous** les chats **sont** gris ». Sa **négation, (non P), s'énonce : « la nuit, il existe au moins** un chat qui n'est pas gris ».
2. La négation de la proposition (P) : « pour tout nombre x, $x^2 > x$ » est « **il existe au moins** un **nombre x tel que $x^2 \leqslant x$ ».**
Notez que, dans ce cas, la proposition (P) est fausse car $x^2 > x$ n'est vraie que pour $x > 1$. Donc la **proposition (non P) est vraie.**

Cas général. Notons (P) la proposition : « pour tout élément x d'un ensemble E, x satisfait à une **condition C ». Alors la négation de P est :**

« **il existe au moins un élément x de E** qui ne satisfait pas la condition C ».

Conséquence : démonstration par recours à un contre-exemple

À l'aide d'un contre-exemple, démontrons que la proposition (P) : « pour tout nombre $x > -1$, $x^2 > 1$ » **est fausse.**
Démontrer que (P) est fausse revient à démontrer que sa négation (non P) est vraie. Or (non P) est :

« **il existe** au moins un nombre x tel que $x > -1$, et tel que $x^2 \leqslant 1$ ».

Il s'agit donc de trouver un tel nombre x. On cherche au plus simple : on voit que zéro convient, car **$0 > -1$ et $0^2 \leqslant 1$. Donc (P) est fausse.**

6.5 Négation d'une proposition existentielle

Exemples

1. La négation de la proposition P : « il existe un nombre x tel que $x^2 + 1 = 0$ » **est : « pour tout** nombre x, $x^2 + 1 \neq 0$ ». À noter que (non P) est vraie car pour **tout x, $x^2 + 1 \geqslant 1$, donc $x^2 + 1$ est non nul (et donc (P) est fausse).**
2. La négation de la proposition (P) : « il existe au moins un triangle dont l'orthocentre **est à l'extérieur du triangle » est : « pour tout** triangle, l'orthocentre **est à l'intérieur du triangle ».**
Ici, (P) est vraie (voir la figure), et donc (non P) est fausse.

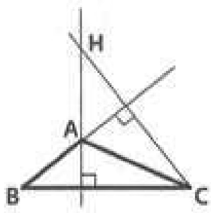


Figure 4. *Extrait du manuel Transmath sur la négation des propositions quantifiées, page 261*

On voit dans cet extrait que la négation d'une proposition universelle est d'abord illustrée par un énoncé de la vie courante : « la nuit tous les chats sont gris ». Mais dans cet énoncé, il y a deux quantifications universelles : celle mise en évidence sur les chats, mais aussi une quantification universelle implicite sur les nuits. La négation devrait donc comporter deux quantifications existentielles : « il existe une nuit pendant laquelle il existe au moins un chat qui n'est pas gris. » Le recours à un énoncé de la vie courante, sans doute vu comme plus facilement compréhensible pour une première approche, est ici utilisé de façon incorrecte du point de vue de la logique mathématique. Par ailleurs, une règle est énoncée pour la négation d'une proposition universelle (et avant elle deux règles pour les connecteurs ET et OU), mais pas pour la négation d'une proposition existentielle. Cette distinction entre les deux formes de propositions montre que le but n'est pas de proposer une étude organisée du langage mathématique, comme cela a pu être le cas au moment des mathématiques modernes[11], mais de donner des techniques pour l'activité mathématique, les propositions universelles étant prédominantes dans celle des élèves du lycée.

Les règles de négation des propositions quantifiées sont ainsi évoquées dans ces trois manuels, mais ne sont pas données d'une façon formelle permettant un traitement syntaxique (c'est-à-dire une application qui ne se réfère plus au sens des propositions). Or, de la même façon que la maîtrise des règles du calcul algébrique permet dans la résolution de certains problèmes de libérer le raisonnement de la difficulté du calcul, la maîtrise des règles de formation de la négation des propositions peut aider dans la démarche de preuve : par exemple, on pensera d'autant plus facilement à un raisonnement par l'absurde qu'on saura facilement formuler la négation de la proposition à démontrer. Nous ne suggérons pas qu'une telle maîtrise soit un objectif de la classe de Seconde, mais les règles peuvent être énoncées dès cette classe, et utilisées le plus souvent possible. C'est en tout cas le choix qu'a fait Géraldine Kel Notter dans sa classe, au travers d'une progression que nous allons maintenant présenter.

3. Une progression sur les quantificateurs proposée en classe de Seconde

En Seconde, les quantificateurs sont surtout explicitement présents dans certaines définitions concernant les fonctions, par exemple les définitions de fonction croissante et décroissante. Le programme indique que « les définitions formelles d'une fonction croissante, d'une fonction décroissante sont progressivement dégagées. Leur maîtrise est un objectif de fin d'année ». G. Kel Notter a fait le choix de proposer dans sa classe une succession d'activités pour ne pas découvrir les quantificateurs au moment de la définition de fonction croissante et décroissante, effectivement difficile pour les élèves.

3.1 Une première rencontre

Lors de la toute première semaine de l'année, dans le premier chapitre où il est question d'ensembles de nombres, l'exercice ci-dessous a été proposé, permettant de faire comprendre que les énoncés mathématiques sont quantifiés et montrant l'intérêt d'expliciter les quantifications (nous retrouvons le mot *un* évoqué dans le paragraphe *Quantification et quantificateur*s de la première partie de l'article) :

Vrai-Faux. Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse.
Dans le cas où elle est fausse, donner un contre-exemple (mise à part la dernière question).

1. L'inverse d'un nombre décimal est un nombre décimal.
2. L'opposé d'un nombre rationnel est un nombre rationnel.
3. L'inverse d'un nombre rationnel est un nombre rationnel.
4. L'opposé d'un nombre entier naturel est un nombre entier naturel.
5. La somme de deux nombres rationnels est un nombre rationnel.
6. La carré d'un nombre irrationnel est irrationnel.
7. On peut trouver un nombre entier n tel que $\pi + n$ soit rationnel.

11 Voir Mesnil, 2014 pour la comparaison entre ces deux périodes pour ce qui concerne l'enseignement de notions de logique

3.2 S'accoutumer à la quantification universelle

Lors de la troisième semaine de l'année, l'enseignante a fait travailler ses élèves sur l'inclusion entre des intervalles exprimée par une implication explicitement universellement quantifiée, par exemple avec l'exercice suivant :

> Dans chacun des cas suivants, indiquer si l'affirmation est vraie ou non, écrire sa réciproque et indiquer si elle est vraie ou non :
>
> (a) Pour tout réel x, si $2^3 < x$ alors $8 < x$?
>
> (b) Pour tout réel x, si $x <$ alors $x < 1{,}4$?
>
> (c) Pour tout réel x, si $x \in [-2 ; 1]$ alors $x \in [-3 ; 2]$?
>
> (d) Pour tout réel x, si $x \in [-1 ; 2]$ alors $x \in [-2 ; 1]$?

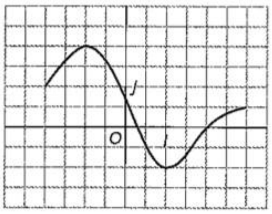
Une synthèse est ensuite faite sur propositions et quantificateurs : avant les vacances de la Toussaint, les élèves on eu une fiche à compléter, extraite d'un ensemble de fiches intitulées « Notations et raisonnement mathématiques » (fiche donnée en annexe 1). Dans cette institutionnalisation, l'enseignante propose une progression entre la proposition « x est positif » et des propositions quantifiées construites à partir de cette proposition, ce qui permet de souligner l'aspect mutificateur des quantificateurs (voir le paragraphe *Variables parlantes, variables muettes* de la première partie de l'article) : la première proposition parle de x, on ne peut pas dire si elle est vraie ou fausse car nous n'avons pas suffisamment d'information sur x, les propositions quantifiées ne parlent plus de x, mais disent des faits sur des ensembles de nombres.

Dans les exemples de propositions quantifiées, il y a un jeu sur le domaine de quantification qui permet de souligner l'importance de celui-ci. L'exercice sur les quantificateurs proposé dans cette fiche est inspirée d'un exercice du manuel Repères qui est estampillé d'un logo *Logique* (figure 5). Il y a dans ces exercices des idées intéressantes, mais leur rédaction pose souvent problème. Par exemple, pour l'exercice cité ici (voir ci-après le texte original et le texte modifié) :

- le domaine de quantification n'est pas précisé,
- le manuel demande de compléter sans préciser qu'il faut le faire de façon à obtenir une proposition vraie,
- le manuel demande de compléter soit avec une quantification universelle, soit avec une quantification existentielle, sous-entendant qu'il n'y a qu'un seul choix possible. Pourtant, quand la proposition « pour tout x de E, P[x] » est vraie, alors *a fortiori*, la proposition « il existe x de E tel que P[x] » est vraie aussi ! De telles propriétés peuvent apparaître pour justifier des stratégies pour remplir le tableau de l'exercice proposé par G. Kel Notter (figure 6) (si on coche la première ligne par exemple, on coche forcément la deuxième, mais ni la troisième, ni la quatrième).

29 Quantificateurs Logique

À partir de la représentation graphique de la fonction f ci-dessous, recopier et compléter les phrases en utilisant soit « pour tout …… on a … », soit « il existe un …… tel que … ».



a. …… réel x …… $f(x) > 0$.

b. …… réel x …… $f(x) \leqslant 3$.

c. …… réel x …… $f(x) = 1$.

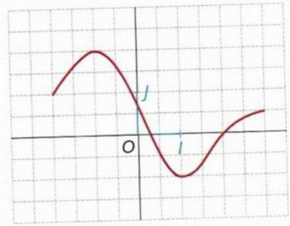
d. …… $x \in [1 ; 2]$ …… $f(x) \leqslant 0$.

e. …… réel x …… $f(x) \neq 0$.

Figure 5. *Exercice sur quantificateurs et fonctions, manuel Repères, page 29*

Exercice : (d'après l'exercice 29 p29, manuel Repères)

f est une fonction définie sur [-2 ;3] dont on donne la représentation graphique.



Dans le tableau suivant, les énoncés de la première ligne ne sont pas quantifiés. Quatre quantificateurs sont proposés dans la première colonne des lignes suivantes. Cocher les quantificateurs permettant d'obtenir un énoncé vrai.

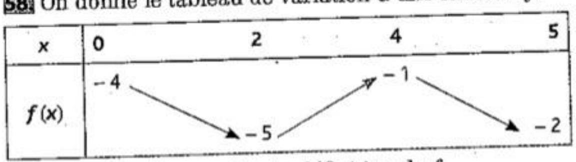
	$f(x)=0$	$f(x)<0$	$f(x)=2$	$f(x)\neq 2$	$f(x)=-3$	$f(x)\geq -3$
Pour tout $x\in[-2 ;3]$						
Il existe au moins un $x\in[-2 ;3]$ tel que						
Il existe un unique $x\in[-2 ;3]$ tel que						
Il n'existe aucun $x\in[-2 ;3]$ tel que						

Figure 6. *Exercice sur quantificateurs et fonctions, G. Kel Notter*

3.3 Les définitions de fonction croissante, décroissante

Finalement, après les vacances de la Toussaint, dans le chapitre sur l'étude qualitative d'une fonction, après l'aspect graphique, une définition « formelle » de fonction croissante/décroissante avec les quantificateurs est donnée. Cette définition est exploitée pour la résolution d'un exercice du manuel Repères (figure 7).

58 On donne le tableau de variation d'une fonction f.



1. Déterminer l'ensemble de définition de f.

2. En justifiant ces réponses, indiquer, dans chaque cas, si l'affirmation est vraie ou fausse ou si le tableau ne permet pas de conclure.

a. $f(1) < f(3)$; **b.** $f(1) = -4,5$;

c. $f(1) < f(0)$; **d.** $f(1) < f(5)$;

e. $f(3) < 0$; **f.** le minimum de f sur $[0 ; 5]$ est -2.

g. $f(3) = -3$; **h.** $f(2) < f(5)$.

3. Construire une courbe pouvant représenter f dans un repère.

Figure 7. *Exercice sur quantificateurs et fonctions, manuel Repères, page 34*

Quelques remarques sur cet exercice :

– Dans la question 2, il y a une quantification universelle implicite sur la variable f : en effet, on demande en fait si les propositions sont vraies ou fausses quelle que soit la fonction f dont le tableau de variation est celui donné. Cet implicite risque de ne pas être perçu par certains élèves qui pourront alors répondre « vraie » au sens de parfois « parfois vraie », c'est-à-dire donner une réponse qui n'est pas celle attendue en menant un raisonnement pourtant correct (difficulté mentionnée dans le paragraphe *Explicitation des quantifications* de la première partie de l'article).

– Quantifier sur une variable de type fonction est difficile pour des élèves de Seconde, mais il est intéressant de le faire lors de la correction de cet exercice (par exemple, dire pour la 2.a qu'il existe une fonction f ayant ce tableau de variation telle que $f(1) < f(3)$, et qu'il existe une fonction f ayant ce tableau de variation telle que $f(1) \geq f(3)$) car cela amène l'idée qu'on peut quantifier autre chose que des nombres, et que l'on peut s'intéresser à des classes de fonctions et pas seulement à des fonctions particulières.

– Dans une correction détaillée de la question 2.c, nous pourrions dire « f est strictement décroisante sur [0, 2], c'est-à-dire que pour tout $x \in [0, 2]$ et pour tout $y \in [0, 2]$, si $x < y$ alors $f(x) > f(y)$, or $0 < 1$ donc $f(0) > f(1)$ ». Nous voudrions simplement souligner que dans ce « or… donc… » nous pouvons distinguer deux déductions que nous rassemblons le plus souvent en une seule : de l'implication universellement quantifiée « pour tout $x \in [0, 2]$ et pour tout $y \in [0, 2]$, si $x < y$ alors $f(x) > f(y)$ » je peux déduire l'implication entre propositions « si $0 < 1$ alors $f(0) > f(1)$ », et ensuite de cette implication et de $0 < 1$, je peux déduire $f(0) > f(1)$ (application du *modus ponens* : Si A alors B, or A, donc B).

3.4 Des habitudes dans la rédaction de démonstrations de propositions universellement quantifiées

Dans les chapitres qui suivent sur les fonctions, l'enseignante propose à ses élèves un rituel de rédaction dans des exercices où il faut exploiter ces définitions pour montrer que certaines fonctions sont croissantes/décroissantes :

Soient x et y deux réels, supposons que $x < y$ ………………………………………… On a donc montré que pour tous les réels x et y, si $x < y$, alors ………… et donc la fonction f est …………………

L'utilisation de « Soient x et y deux réels » au début d'une telle démonstration est très fréquente, le fait de rappeler la quantification universelle dans la conclusion l'est moins (on s'arrête le plus souvent à « $f(x) \leq f(y)$, donc la fonction f est croissante »). Cela permet pourtant d'expliquer le rôle de ce « soit » : il introduit des variables sur lesquelles on ne fait aucune hypothèse particulière, et l'on peut ainsi dire que ce que l'on conclut sur ces variables est vrai pour tous les éléments du domaine auquel elles sont astreintes (voir le paragraphe *Proposition, variable pour une définition de ce terme*).

3.5 Quantificateurs et négation

Finalement, en avril, un retour est fait avec les élèves sur ces définitions de fonction croissante/décroissante à partir d'un exercice (figure 8) proposé dans une fiche sur la négation (fiche donnée en annexe 2).

On donne le tableau de variation d'une fonction f définie sur [-8 ;1] :

x	-8		-1		1
f(x)	2	$\nearrow$	5	$\searrow$	-3

1) Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?
   a. « f est croissante sur [-8 ;1] ».
   b. « f est décroissante sur [-8 ;1] ».
2) Quelle est la négation de « f est croissante sur [-8 ;1] » ?
3) Donner la définition quantifiée de « f est croissante sur [-8 ;1] ».
4) Donner la définition quantifiée de la négation de « f est croissante sur [-8 ;1] ».

Figure 8. *Exercice sur quantificateurs et négation, G. Kel Notter*

Contrairement à ce qui est proposé dans des exercices de plusieurs manuels de Seconde, qui demandent de rappeler la définition de fonction croissante, puis d'en donner la négation, l'obtention d'une formulation quantifiée de la négation de « *f* est croissante » est ici la dernière question de l'exercice (à la question 2, on attend seulement « *f* n'est pas croissante sur l'intervalle [- 8, 1] ». Celle-ci n'est effectivement demandée qu'après avoir constaté, à partir des réponses aux deux premières questions (qui sont corrigées collectivement avant de passer aux deux dernières questions), que « *f* est croissante sur l'intervalle [- 8, 1] » et « *f* est décroissante sur l'intervalle [- 8, 1] » ne sont pas la négation l'une de l'autre, puisqu'elle sont toutes les deux fausses. Les règles sur la négation d'une proposition quantifiée n'ayant pas été données avant, l'enseignante s'appuie pour répondre à la question 4 sur la question « quel argument donneriez-vous pour montrer qu'une fonction n'est pas croissante sur l'intervalle [- 8, 1] ? ».
Ces règles sont finalement explicitement données dans la fiche. Elles sont ensuite ré-investies dans des exercices (donnés en annexe 3) puis sont l'objet de l'exercice suivant donné en contrôle (figure 9). La question 1, qui consistait à identifier des propositions équivalentes, a été réussie par deux tiers des élèves environ, et une moitié des élèves a réussi les deux dernières questions portant sur la négation (pour les réponses incorrectes, 5 élèves savent donner la définition de la négation d'une proposition, mais pas donner la négation demandée d'une proposition universelle, 3 élèves savent donner la négation demandée mais pas donner la définition, 9 élèves donnent une négation avec « tous les réels ont une image strictement négative » ou avec « aucun réel n'a une image positive ou nulle »).
L'ensemble des documents proposés dans la classe de G. Kel Notter montrent que les quantificateurs sont souvent explicitement présents dans les énoncés qu'elle présente aux élèves, et sont même l'objet d'une institutionnalisation (définition intuitive et propriétés liées à la négation). Cela ne suffit bien sûr pas pour que tous les élèves maîtrisent leur utilisation, mais la réussite au premier exercice du contrôle montre que la plupart de ses élèves sont capables de comprendre des propositions quantifiées. Il faudrait bien sûr d'autres activités pour conforter ce constat, et également regarder dans quelle mesure les élèves utilisent les quantificateurs. Quoiqu'il en soit, nous restons persuadés que ce travail initié en Seconde permet un début de compréhension, une familiarisation avec les quantificateurs, qui devra être poursuivie en Première et en

Terminale. Nous allons justement maintenant voir deux exemples d'activités proposées en Terminale S, où l'exigence sur l'utilisation des quantificateurs peut être plus importante.

Exercice 1 : *(2 points)* Dans cet exercice, aucune justification n'est attendue.

f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et c est un nombre réel.

1) Associer à chacune des propositions A_1 et A_2 une proposition équivalente choisie parmi les propositions B_1 à B_6. Il peut y avoir plusieurs réponses possibles.

   A_1 : Aucun réel n'a pour image c par f.
   A_2 : L'équation $f(x)=c$ d'inconnue réelle x a au moins une solution.

   B_1 : Pour tout réel x, $f(x)=c$.
   B_2 : Il existe au moins un réel x tel que $f(x)=c$.
   B_3 : Il n'existe pas de réel x tel que $f(x)=c$.
   B_4 : Pour tout réel x, $f(x)\neq c$.
   B_5 : Il existe au moins un réel x tel que $f(x)\neq c$.
   B_6 : Il n'existe pas de réel x tel que $f(x)\neq c$.

2) Recopier et compléter la définition suivante :
   « La négation d'une proposition P est ….. On la note.... »

3) Écrire la négation de la proposition C suivante :
   C : Tous les réels ont une image par f positive ou nulle.

Figure 9. *Exercice donné en contrôle dur quantificateurs et négation, G. Kel Notter*

4. Logique et algorithmique en Terminale S

En 2012, Françoise Hérault a proposé à ses élèves de Terminale S lors de séances en demi-groupe une première version de l'activité que nous allons maintenant présenter. Cette activité est notamment destinée à revenir sur la définition de suite qui tend vers une limite infinie. Elle est fortement inspirée d'une activité du manuel Math'x de TS (page 98). Tous les élèves de la classe ont déjà fait de l'algorithmique en Première S. Le programme de TS demande que les élèves sachent écrire un programme donnant « un rang à partir duquel u_n dépasse A », pour une suite u croissante divergente vers l'infini et A un réel donné. Il nous a paru intéressant de voir également un exemple de suite divergente vers l'infini non croissante, car dans ce cas, le premier rang tel que u_n dépasse A n'est pas obligatoirement celui à partir duquel tous les u_n dépassent A et ceci peut leur permettre de comprendre pourquoi l'algorithme fonctionne pour ce fameux rang lorsque la suite est croissante.

Nous avons repris cette activité dans le groupe Logique et nous avons apporté quelques modifications au texte. Nous allons expliquer comment certaines de ces modifications permettent un travail plus pertinent sur les variables et les quantificateurs.

4.1 Premières questions pour découvrir la suite

Voici successivement les deux versions des premières questions[12]. L'enseignante n'avait pas spécialement parlé de la notion de proposition dans sa classe, aussi avons-nous choisi d'utiliser le terme *affirmation* à sa place (utilisé ici comme exact synonyme de

12 Il faudrait préciser que la calculatrice doit être réglée en radian.

proposition, ce qui n'est pas toujours le cas : *affirmation* est parfois utilisé pour désigner à la fois la proposition et l'acte qui consiste à dire qu'elle est vraie). Pour la question 4, nous avons choisi une forme Vrai/Faux pour que les élèves puissent lire et comprendre facilement les propositions écrites avec les quantificateurs en premier. La question 4.a a simplement été simplifiée. Nous avons rajouté la question 4.c pour donner aux élèves une première idée d'une minoration possible pour un rang donné, sans pour autant donner le plus grand minorant. Enfin, la question 4.d permet de montrer qu'une proposition existentielle est fausse à l'aide d'un raisonnement par exhaustivité des cas, ce qui est assez rare (nous avons vu dans la première partie de l'article, dans le paragraphe *Quantificateurs et démonstrations*, que le cas des propositions existentielles fausses était peu traité).

On considère la suite u définie par : pour tout entier naturel n, $u_n = n + 4\sin(n)$. 1. A l'aide de la calculatrice, obtenir les 20 premiers termes de la suite. 2. La suite u est-elle croissante ? Décroissante ? 3. Conjecturer le comportement de la suite u à l'infini. 4.a. A-t-on $u_n > 9$ pour $n = 7$? b. A-t-on $u_n > 9$ pour tout entier $n \geq 7$? c. A-t-on $u_n > 9$ pour $n = 100$?	On considère la suite u définie par : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = n + 4\sin(n)$. 1. A l'aide de la calculatrice ou du tableur donner une valeur approchée des 20 premiers termes de la suite. 2. La suite u est-elle croissante ? Décroissante ? 3. Que pouvez-vous dire du comportement de la suite u à l'infini ? 4. Dire, pour chacune des affirmations suivantes si elle est vraie ou fausse et justifier. a. $u_n > 9$. b. pour tout entier $n > 7$, $u_n > 9$. c. pour tout entier $n > 15$, $u_n > 9$. d. il existe un entier n < 7 tel que $u_n > 9$
Version initiale	*Version modifiée*

4.2 Questions sur l'algorithme

Les questions suivantes portent sur un algorithme de recherche d'un plus petit rang pour lequel la suite dépasse une valeur donnée. Nous présentons également les deux versions de ces questions.

Comme dans la question 4, nous avons voulu dans les questions 5.b faire apparaître clairement des propositions. Dans la version initiale, la réponse correcte à la question « l'algorithme renvoie-t-il le rang n à partir duquel les termes de la suite dépassent A » est « ça dépend de A » (le lecteur pourra vérifier que c'est faux pour A=9, mais vrai pour A=13). Dans la version modifiée, on introduit la variable A, et l'utilisation de « toujours » dans la question sur la vérité des affirmations est une façon de marquer la quantification universelle qui porte sur A : on ne peut plus répondre « ça dépend de A » comme dans la première version. Pour les questions dont la réponse est « l'affirmation n'est pas toujours vraie », il faut que les élèves produisent un contre-exemple, c'est-à-dire une valeur de A , et la valeur de n associée, pour laquelle la proposition est fausse.

5. On donne l'algorithme suivant : *Variables : n nombre entier naturel, A nombre réel.* *Entrée : un nombre réel A.* *Initialisation :* *On affecte à n la valeur 0.* *Traitement : Tantque n + 4sin(n) < A* *On affecte à n la valeur n + 1.* *Fintantque* *Sortie : l'entier n.* a. Que renvoie l'algorithme si on entre A = 9 ? b. L'algorithme renvoie-t-il : • Le rang *n* à partir duquel les termes de la suite dépassent A ? • Le plus petit entier *n* tel que $u_n \geq$ A ? • Le plus grand entier *n* tel que $u_n <$ A ? • Autre ?	5. On donne l'algorithme suivant : *Variables : n nombre entier naturel, A nombre réel.* *Entrée : un nombre réel A* *Initialisation : on affecte à n la valeur 0.* *Traitement : Tant que n + 4 sin(n) < A* *On affecte à n la valeur n + 1.* *Fin Tantque* *Sortie : l'entier n.* a. On fait tourner l'algorithme avec A =9 : que se passe-t-il ? Décrire son exécution pas à pas (On pourra utiliser un tableau) b. On fait tourner l'algorithme avec un nombre A strictement positif quelconque. On admet qu'il renvoie un nombre *n* strictement positif. Dire, pour chacune des affirmations suivantes si elle est toujours vraie ou non. Justifier vos réponses. i) *n* est le rang à partir duquel tous les termes de la suite sont supérieurs à A. ii) *n* est le plus petit des entiers *k* tels que $u_k \geq$ A. iii) *n* est le plus grand des entiers *k* tels que $u_k <$ A. iv) Pour tout $k > n$, $u_k \geq$ A. v) $u_{n-1} <$ A. vi) $u_n > u_{n-1}$.
Version initiale	*Version modifiée*

Expliquons l'utilisation de deux variables dans les questions 5.b.ii et 5.b.iii : l'expression « le plus petit des entiers *k* tel que $u_k \geq$ A » désigne un objet mathématique, c'est un nom. Dans cette expression, la variable *k* est muette : ce nom ne dépend pas de *k*, l'expression « le plus petit des entiers *p* tel que $u_p \geq$ A » désigne le même objet. *n* par contre est le nom d'un autre objet, dont on se demande s'il est le même. La formulation choisie explicite donc ce statut différent des variables *n* et *k*, et est pour cela préférable à une formulation du type « *n* est le plus petit entier tel que $u_n \geq$ A » que l'on trouve parfois. La dernière question permet de revenir sur la quantification universelle sur *n* dans la définition d'une suite croissante : bien que cette affirmation soit vraie, elle ne dit pas que la suite est croissante, puisqu'elle n'est vraie que pour les rangs qui correspondent à des valeurs renvoyées par l'algorithme.
Suite à des discussions lors de la présentation de cette activité, nous avons convenu qu'il aurait été plus judicieux de changer le nom de la variable *n* dans ces questions, afin de ne pas reprendre le nom utilisé dans l'algorithme. En effet, si l'on veut par exemple justifier que $u_n \geq$ A dans la question 5.b.ii, nous pourrions supposer que $u_n <$ A, dire qu'alors la boucle ne serait pas finie, mais nous ne pourrions pas écrire que « *n* prend

alors la valeur n+1 », puisqu'il s'agit d'une variable « mathématique » et non « algorithmique ». Au contraire, nous pourrions dire :

> Soit A > 0, et $p > 0$ la valeur renvoyée par l'algorithme quand on le fait tourner avec A.
> Montrons d'abord que pour tout $k < p$, $u_k <$ A *(nous ne le faisons pas ici)*.
> Supposons ensuite que $u_p <$ A. D'après le résultat précédent, dans le déroulement de l'algorithme, la boucle Tant que… tourne jusqu'à ce que la variable n prenne la valeur p. À ce stade, la condition initiale du Tant que… est encore remplie, et donc la variable n prend la valeur n+1, c'est-à-dire p+1, ce qui est en contradiction avec le fait que l'algorithme renvoie la valeur p.

On voit à travers cet exemple comme la gestion des variables est délicate dans la démonstration de résultats d'algorithme.

4.3 Questions sur la limite de la suite

Les dernières questions mettent en relation la justification de l'arrêt de l'algorithme et la limite infinie de la suite.

6. Comment choisir n pour être sûr que u_n est dans l'intervalle]100 ; +∞[? Dans l'intervalle]1 000 000 ; +∞[? 7. Est-on sûr que l'algorithme de la question 5 s'arrête pour n'importe quelle valeur de A ? (Vous justifierez votre réponse). 8. Votre étude confirme-t-elle votre conjecture de la question 3 ?	6. Comment choisir n pour être sûr que u_n est dans l'intervalle]85 ; +∞[? Dans l'intervalle] 100 ; +∞ [? Dans l'intervalle] M ; +∞ [, M étant un entier naturel ? 7. Est-on sûr que l'algorithme de la question 4 s'arrête pour n'importe quelle valeur de A ? (justifier votre réponse) 8. Votre étude confirme-t-elle ce que vous avez pressenti en question 3 ?
Version initiale	*Version modifiée*

Les dernières questions n'ont pas été beaucoup modifiées entre les deux versions, nous avons seulement rajouté la recherche d'un rang pour un entier M quelconque dans la question 6 pour amener plus explicitement les élèves à utiliser cette question pour répondre à la suivante. Finalement, pour un entier M donné, on peut montrer que pour tout entier $n \geq M+5$, $u_n > M$, argument qui permet à la fois de justifier que l'algorithme s'arrête et que la suite tend vers +∞. Cependant, et c'est ce qui est intéressant à souligner, cette valeur M+5 n'est pas forcément la valeur renvoyée par l'algorithme lorsqu'on le fait tourner pour la valeur M, et si l'on peut justifier que l'algorithme s'arrête en utilisant le fait que la suite tend vers +∞, on ne peut à l'inverse justifier que la suite tend vers +∞ en utilisant le fait que l'algorithme s'arrête (on pourra d'ailleurs essayer de trouver une suite pour laquelle l'algorithme s'arrête quelle que soit la valeur d'entrée, mais qui ne tend pas vers +∞).

Cette activité nous a paru intéressante de plusieurs points de vue : tout d'abord du point de vue du travail mathématique sur les suites, mais également du point de vue du travail algorithmique en lien avec la preuve, qui oblige à une gestion précise des variables, et du point de vue logique puisque nous l'avons modifié pour y rajouter un travail sur des propositions quantifiées. Nous allons maintenant présenter une dernière activité, également proposée en TS, plus directement centrée sur les quantificateurs.

5. Alternance des deux quantificateurs en Terminale S

Catherine Huet a proposé dans sa classe de Terminale S deux exercices dans le but de travailler explicitement sur les quantificateurs, et notamment sur les propositions comportant une alternance de quantificateurs (dans sa classe, C. Huet a fait le choix de donner certaines définitions dans des formulations explicitement quantifiée, en utilisant les symboles ∀ et ∃, cette activité lui permet d'y revenir).

> Activité 1 :
> Dans les assertions suivantes, les lettre a, b, c désignent des entiers naturels.
> Traduire les assertions en langage « naturel » et préciser pour chacune des assertions si elle est vraie ou fausse :
> Première assertion : $\forall a, \exists b, \exists c, \ a = bc$
> Deuxième assertion : $\forall b, \forall c, \exists a, \ a = bc$
> Troisième assertion : $\exists a, \exists b, \exists c, \ a = bc$
> Quatrième assertion : $\exists b, \forall a, \exists c, \ a = bc$
>
> Activité 2 :
> Après avoir traduit en langage « naturel » chacune des deux phrases, dire, pour chacune, si elle est vraie ou fausse en justifiant son choix. Ces deux phrases sont-elles « synonymes » ?
> Phrase 1 : $\forall a \in \mathbb{R}, \exists b \in \mathbb{R}, \ a \geq b$
> Phrase 2 : $\exists b \in \mathbb{R}, \forall a \in \mathbb{R}, \ a \geq b$

Plusieurs études ont montré des difficultés d'élèves à interpréter de telles propositions : ils interprètent plus facilement les propositions de la forme $\forall x \ \exists y$ P $[x,y]$, et ont alors tendance à interpréter les propositions de la forme $\exists y \ \forall x$ P $[x,y]$ comme les premières (Dubinsky et Yiparaki, 2000, Chellougui, 2007). Dans les exercices proposés ici, il est également demandé aux élèves de reformuler des propositions[13] données dans un langage mathématique formel et symbolique en des propositions exprimées en langage naturel. Une telle reformulation ne consiste pas seulement à dire en mots ce qui est écrit en symbole, mais également, si cela est possible, à faire disparaître les variables muettes.

5.1 Première activité

Elle est proposée en demi-groupe, afin que chacun s’exprime plus fréquemment. Pour chaque question les élèves réfléchissent d'abord individuellement (pendant un temps court d'environ trois à quatre minutes), rédigent une réponse puis un élève passe au tableau pour proposer sa réponse qui est commentée, voire corrigée par l'ensemble de la classe.

Pour la première proposition, un élève propose d'abord une simple « mise en mots » : « Pour tout entier naturel a, il existe au moins un entier naturel b et il existe au moins un entier naturel c, tels que a est égal à b fois c ». L'enseignante explique que ce n'est pas ce qu'elle attend. Un élève propose « Tout entier est le produit de deux entiers ». Globalement, les élèves qui font la spécialité mathématiques et qui ont travaillé sur l'arithmétique avaient plus d'aisance pour trouver des formulations fluides, et utilisent le

13 Plusieurs termes sont utilisés ici à la place du mot *proposition*, qui n'était pas couramment utilisé dans cette classe : assertion, phrase. Cependant, comme nous l'avons déjà dit, il nous semble pertinent que le mot *proposition* soit utilisé au lycée, et notamment dans ces exercices.

terme *diviseur*. Cependant, les reformulations utilisant ce terme sont délicates : un élève propose « tout entier possède deux diviseurs », qui est ambigüe car elle peut signifier « tout entier possède au moins deux diviseurs », « tout entier possède exactement deux diviseurs », et dans ces deux interprétations, les propositions ne sont vraies que si on peut trouver des diviseurs distincts. Or, dans la proposition donnée dans l'exercice, b et c ne sont pas forcément distincts. Pour formuler une proposition correcte utilisant le terme *diviseur*, partons de la fin de la proposition : $\exists\, c\ a = bc$. Ceci est synonyme de « b est un diviseur de a ». Alors, $\exists\, b\ \exists c\ \ a = bc$ est synonyme de « a possède au moins un diviseur » et finalement la proposition entière peut être reformulée en « tout entier naturel possède au moins un diviseur ».
Pour la deuxième et la troisième assertion, les élèves proposent respectivement « Le produit de deux entiers naturels quelconques est un entier naturel » (on peut noter l'utilisation du mot *quelconque* qui souligne la quantification universelle), et « Il existe un entier naturel qui est le produit de deux entiers ». Pour ces trois premières assertions, les formulations en langage naturel permettent aux élèves de déterminer de façon assez immédiate qu'elles sont vraies. Mais les formulations initiales ne sont pas trop compliquées et permettent aussi de le déterminer assez facilement : en inversant les questions et en demandant d'abord de déterminer si les assertions sont vraies ou fausses, le travail porterait alors plus sur les techniques de preuves d'une proposition quantifiée (voir par exemple le *tableau des « Pour prouver »*) la reformulation en langage naturel servant surtout à valider la réponse.
La quatrième assertion est plus complexe parce qu'elle contient deux alternances de quantificateurs. Au bout de plusieurs essais infructueux, un élève propose « Il existe au moins un nombre diviseur de tout nombre » (le mot *nombre* est bien sûr trop imprécis). Comme nous l'avons fait pour la première assertion, une lecture de la proposition en partant de la fin permet d'arriver naturellement à cette formulation.

5.2 Deuxième activité

Elle a été donnée en devoir à la maison. Nous allons commenter la gestion des variables et des quantifications dans quelques extraits de copies d'élèves.

<u>Phrase 1, extrait 1</u>

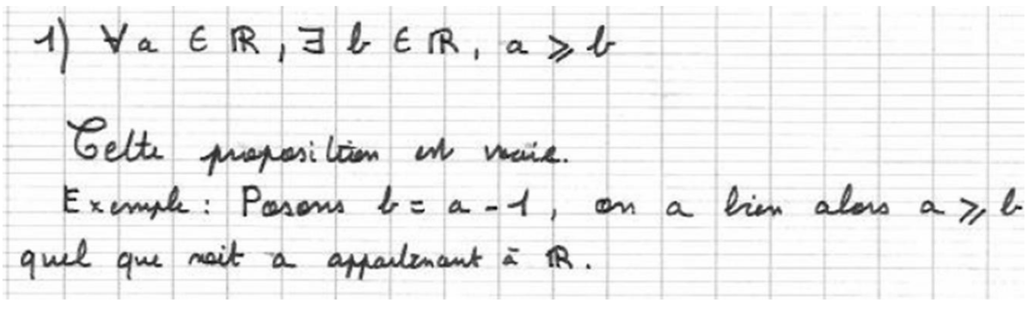
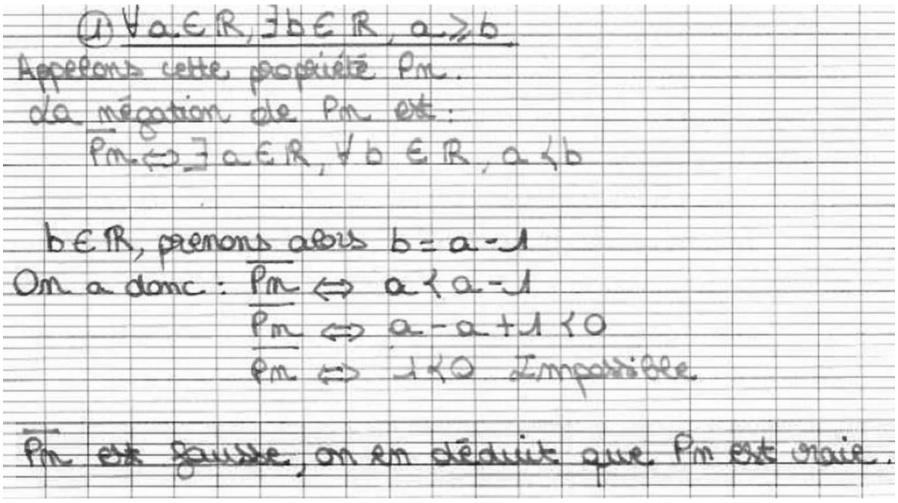


Figure 10. *Extrait 1 de copie, phrase 1*

Dans cette copie, l'élève exhibe explicitement une valeur de b vérifiant $a \geq b$, valeur qui dépend de a et qui est introduite par « posons b =… ». La variable a par contre n'est pas introduite, et le rappel de la quantification universelle portant sur a à la fin de la démonstration est maladroite : « on a bien alors $a \geq b$ quel que soit a appartenant à $\mathbb{R}$ » ne signifie sans doute pas pour cet élève « on a bien : $\forall a \in \mathbb{R} \;\; a \geq b$ », mais pourrait être lu comme tel. Nous faisons l'hypothèse qu'avec ce rappel, l'élève veut plutôt souligner que la démarche qui lui a permis, pour un a donné, de trouver b tel que $a \geq b$ peut être reproduite quel que soit a appartenant à $\mathbb{R}$.

Phrase 1, extrait 2



① $\forall a \in \mathbb{R}, \exists b \in \mathbb{R}, a \geq b$
Appelons cette propriété Pn.
La négation de Pn est :
$\overline{\mathrm{P}n} \Leftrightarrow \exists a \in \mathbb{R}, \forall b \in \mathbb{R}, a < b$

$b \in \mathbb{R}$, prenons alors $b = a - 1$
On a donc : $\overline{\mathrm{P}n} \Leftrightarrow a < a - 1$
$\overline{\mathrm{P}n} \Leftrightarrow a - a + 1 < 0$
$\overline{\mathrm{P}n} \Leftrightarrow 1 < 0$ Impossible

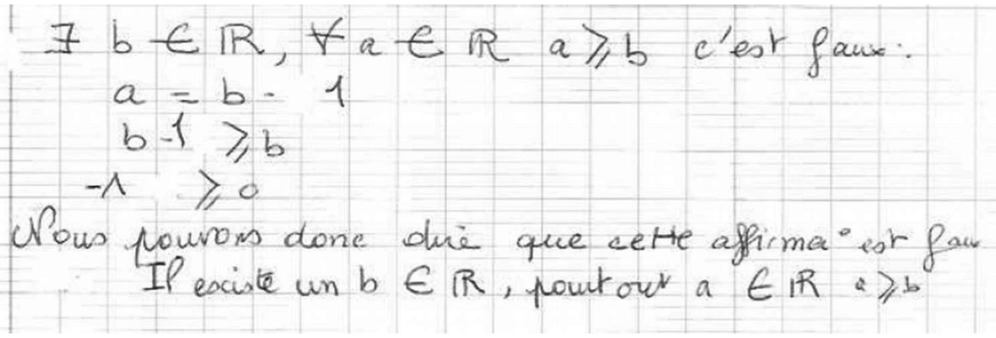
$\overline{\mathrm{P}n}$ est fausse, on en déduit que Pn est vraie.

Figure 11. *Extrait 2 de copie, phrase 1*

Ici aussi, l'élève exhibe explicitement une valeur de b vérifiant $a \geq b$. L'indication « $b \in \mathbb{R}$ » donnée en premier lieu semble introduire un élément b quelconque, mais cet élément b est introduit une deuxième fois, avec « prenons alors $b = a\text{–}1$ », et il n'est alors plus un réel quelconque. La variable a n'a pas été introduite. Nous faisons l'hypothèse que l'élève fait un raisonnement par l'absurde : il suppose la négation $\overline{\mathrm{P}n}$ vraie, et considère donc un a (rien ne marque cet acte) vérifiant $\forall b \in \mathbb{R} \;\; a < b$ (d'où peut-être le « $b \in \mathbb{R}$ »), puis une valeur de b, soit $a\text{–}1$, qui va amener une contradiction. L'utilisation d'équivalences est maladroite ici et ne correspond pas à l'utilisation que l'on en a habituellement en mathématiques, par exemple dans la résolution d'équation ou d'inéquation : la proposition $\overline{\mathrm{P}n}$ n'est pas une inégalité équivalente à la proposition « $a < a - 1$ ». Notons cependant que d'un point de vue strictement logique, les propositions $\overline{\mathrm{P}n}$ et « $a < a - 1$ » sont effectivement équivalentes puisque fausses toutes le deux. Ce n'est certainement pas à cela que pensait cet élève en les écrivant.

Phrase 2, extrait 3

De la même façon que dans l'extrait précédent, l'élève semble ici faire un raisonnement par l'absurde pour infirmer la phrase 2. Les variables ne sont pas introduites, et le raisonnement n'est pas explicité : il y a un enchaînement de propositions ($\exists\, b \in \mathbb{R}$ $\forall\, a \in \mathbb{R} \;\; a \geq b,\;\; a = b - 1,\;\; b - 1 \geq b,\;\; -1 \geq 0$) mais rien n'indique ce qui relie ces propositions.



$\exists\, b \in \mathbb{R}, \forall a \in \mathbb{R}\ a \geqslant b$ c'est faux :

$a = b - 1$

$b - 1 \geqslant b$

$-1 \geqslant 0$

Nous pouvons donc dire que cette affirma° est fau

Il existe un $b \in \mathbb{R}$, pourtout $a \in \mathbb{R}$ $a \geqslant b$

Figure 12. *Extrait 3 de copie, phrase 2*

Nous ne considérons pas comme des démonstrations incorrectes celles proposées dans ces extraits : à chaque fois, un argument mathématique valide est donné, nos commentaires portent uniquement sur la rédaction de ces arguments, et notamment sur la gestion des variables. L'apprentissage des expressions qu'utilisent les mathématiciens pour gérer les variables dans les démonstrations est long et difficile, et peut se faire par exemple en reprenant collectivement de tels extraits, en les commentant, en en faisant avec les élèves une analyse critique ligne par ligne (en se demandant si l'on sait qui sont les éléments dont il est question, c'est-à-dire si les variables ont été introduites, si l'on sait ce qui justifie telle ligne, le passage à la ligne suivante…).

5.3 Bilan global de cette activité

Après qu'aient été corrigés les raisonnements mal ou insuffisamment rédigés (certaines quantifications occultées par exemple), ces activités ont présenté de multiples intérêts pédagogiques (l'ordre exposé ci-dessous n'est pas un ordre hiérarchique d'importance) :

- être capable d'avoir une « traduction » (d'un langage symbolique vers le langage naturel) précise et fluide (c'est-à-dire pas le « mot à mot ») montre que l'on a compris globalement le sens mathématique d'une proposition. Par exemple, la phrase 2, $\exists\, b \in \mathbb{R}, \forall\, a \in \mathbb{R}, a \geq b$ peut être reformulée en « $\mathbb{R}$ possède un plus petit élément » et on comprend ainsi d'une part qu'elle exprime une propriété de $\mathbb{R}$, d'autre part qu'elle est fausse.
- faire travailler les élèves sur des propositions de cette sorte est un moyen d'insister sur la « non-commutativité » des quantificateurs de natures différentes.
- rendre les élèves plus à même de rédiger proprement des négations de propositions « complexes » dans le but par exemple de faire un raisonnement par l'absurde (dans l'extrait figure 20, l'élève écrit explicitement la négation d'une proposition pour montrer que cette négation est fausse et prouver ainsi que cette proposition est vraie), par contraposée.

Conclusion

Cet article est signé à quatre voix, mais il rend compte du travail du groupe Logique de l'IREM de Paris. Au sein de ce groupe, nous défendons l'importance du travail sur les notions de logique en lien avec le langage, autant qu'avec le raisonnement. Propositions, variables, connecteurs, quantificateurs sont des éléments constitutifs de ce langage, dont l'utilisation nécessite un apprentissage. Nous ne défendons pas le recours à un langage formalisé, mais voulons plutôt attirer l'attention sur la présence souvent implicite de ces éléments dans nos pratiques langagières. Nous importons ces pratiques dans la classe de mathématiques du fait de notre formation lors de laquelle nous les avons intégrées, mais la signification de certaines expressions n'est pas toujours claire pour les élèves. Le recours à la logique mathématique peut être une façon de les aider à comprendre ces significations.

Les activités élaborées par les membres du groupe sont sans cesse discutées et rediscutées : nous sommes attachés à la rigueur et la clarté dans la formulation des énoncés de ces activités, qualités que ne possèdent pas toujours les formulations qui nous viennent spontanément et dans lesquelles nous ne décelons pas forcément les implicites et les ambiguïtés. Dans cet article, nous avons présenté des activités dans lesquelles les questions de quantification étaient l'objet d'une attention particulière, et dans lesquelles étaient tout autant présentes des quantifications marquées par des expressions du langage courant, que des quantifications marquées par des expressions usuelles du langage des mathématiciens, ou des quantifications marquée plus formellement par les quantificateurs. Il ne s'agit donc pas d'un travail sur des notions de logique mathématique pour elles-mêmes, mais bien d'un travail en articulation avec l'activité mathématique, plus particulièrement avec le langage utilisé en situation. En cela, nous nous situons bien dans la lignée des recherches en didactique qui défendent une telle articulation.

Mais cette articulation est aussi à penser en lien avec des travaux plus récents sur le rôle du langage dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques, notamment dans la recherche francophone. Signalons par exemple un récent numéro de la revue *Spirale* qui « vise à éclairer le rôle du langage dans le processus d'enseignement et d'apprentissage en mathématiques, tant dans la construction des connaissances par les élèves que dans l'organisation de l'enseignement » (Barrier et Mathé, 2014, p.3). Dans cette optique, les activités présentées ici peuvent aussi être vue comme des occasions de réfléchir avec les élèves sur la façon de dire les mathématiques, non pas pour imposer des structures rigides qui seraient vide de sens pour eux, mais bien pour éclairer le sens à partir de ce qui est porté par le langage.

Références

ADDA J. (1975), Une manière d'intégrer des éléments de logique dans l'enseignement des mathématiques en 6ème. *Bulletin de l'APMEP n°301*, 755-759.

ANTIER G., CHEVALLIER G., DAGMAN M., ESCOFIER J.-P., GORIN E. et LAZAR Y. (2000) *Apprentissage des structures logiques,* IREM de Rennes
https://irem-rennes.univ-rennes1.fr/brochures/pdf/IRN02004.pdf

BARRIER T. et MATHÉ A-C. (2014) Langage, apprentissage et enseignement des mathématiques. *Spirale* 54.

BEN KILANI I. (2005). *Les effets didactiques des différences de fonctionnement de la négation dans la langue arabe, la langue française et le langage mathématique.* Thèse de doctorat. Université Claude Bernard Lyon 1.

CHELLOUGUI F. (2007) L'utilisation des quantificateurs universel et existentiel en première année d'université, entre l'explicite et l'implicite. *Actes du séminaire national de didactiques des mathématiques 2006,* 101-121

CORI R., LASCAR D. (1993). *Logique mathématique tome 1. Calcul propositionnel ; algèbre de boole ; calcul des prédicats.* Paris : Masson.

DUBINSKY E., YIPARAKI O. (2000). On student understanding of AE and EA quantification. *Research in Collegiate Mathematics IV*, 239–289.

DURAND-GUERRIER V. (1999) L'élève, le professeur et le labyrinthe. *Petit x, 50,* 57-79.

DURAND-GUERRIER V. (2005), *Recherches sur l'articulation entre la logique et le raisonnement mathématique dans une perspective didactique.* Note de synthèse, Université Claude Bernard Lyon 1.

EL FAQIH E.M. (1991), *Place de la logique dans l'activité mathématique des étudiants du premier cycle scientifique.* Thèse de doctorat. Université Louis Pasteur, Strasbourg.

FABERT C., GRENIER D. (2011) Une étude didactique de quelques éléments de raisonnement mathématique et de logique. *Petit x, 87,* 31-52.

GRENIER D. (2015) De la nécessité de définir les notions de logique au lycée. *Repères IREM 100*, 65-83

HACHE C. (2015) Pratiques langagières des mathématiciens, une étude de cas avec « avec », *Petit x, 97*, 27-43.

MESNIL Z. (à paraître) *Logique et langage dans la classe de mathématiques et dans la formation,* Actes du XXI[e] colloque de la CORFEM, Grenoble juin 2014.

MESNIL Z. (2014) *La logique : d'un outil pour le langage et le raisonnement mathématiques vers un objet d'enseignement.* Thèse de doctorat. Université Paris Diderot.

SELDEN A., SELDEN, J. (1995). Unpacking the logic of mathematical statements. *Educational Studies in Mathematics, 29(2)*, 123-151.

Programmes et documents d'accompagnement

2009. BO du 12 juillet 2009. Mathématiques. Classe de Seconde.
2009. Ressources pour la classe de Seconde. Notations et raisonnement mathématiques.

Manuels

Maths 2nd, collection Indice, BORDAS, 2009
2nd, collection Math'x, DIDER, 2010
Maths 2nd Repères, HACHETTE EDUCATION, 2010
Odyssée mathématiques 2nd, HATIER, 2010
Transmath 2nd, NATHAN, 2010
Déclic, Mathématiques 2nd, HACHETTE EDUCATION, 2010
Maths 2nd , collection Pixel, BORDAS, 2010

Annexe 1. Fiche sur proposition et quantificateurs, G. Kel Notter

Ce qui est souligné et en gras n'apparaît pas sur la fiche distribuée aux élèves, destinée à être complétée lors d'une synthèse collective.

NOTATIONS ET RAISONNEMENT MATHEMATIQUES

Avertissement : Sauf indication contraire, les mots utilisés ici le sont dans leur sens mathématique. En effet certains mots peuvent avoir un sens particulier en mathématiques, différent de celui qu'ils ont dans langage courant (un, et, ou, contraire, supérieur, …).

I) A propos des ensembles

II) Vocabulaire des propositions

1) Valeur de vérité d'une proposition

Une proposition est une phrase pouvant être soit vraie soit fausse.

Exemples :

- « 4 est un nombre pair » est une proposition ***vraie***
- « 5 est un nombre pair » est une proposition ***fausse***
- Soit un réel x. « x est positif » est ***bien une proposition mais sans information supplémentaire sur le nombre x on ne peut pas dire si elle est vraie ou fausse. Par exemple, elle est vraie quand x=2 et fausse quand x=-9.***

Remarque : En mathématiques, l'objectif est d'écrire des propositions vraies.

2) Les quantificateurs universel et existentiel

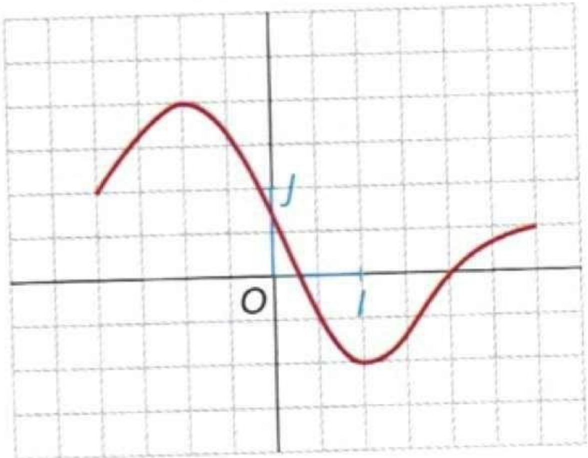
Les quantificateurs servent à quantifier les énoncés mathématiques, c'est-à-dire à préciser la quantité d'éléments ayant une propriété donnée (toutes, aucune, une seule, au moins une, exactement deux, etc.).

On a vu dans le paragraphe précédent que sans information supplémentaire sur le réel x, on ne peut dire si l'énoncé « x est positif » est vrai ou faux.
Par contre, on peut répondre pour les énoncés quantifiés suivants :

- « Pour tout entier naturel x, x est positif » ***est vrai (définition des entiers naturels).***
- « Pour tout réel x, x est positif » est ***faux (de nombreux réels ne sont pas positifs, par exemple -9).***
- « Il existe au moins un réel x tel que x est positif » ***est vrai (il suffit d'en trouver un par exemple 2).***
- « Il existe au moins un entier naturel x tel que x est positif » ***est vrai (il suffit d'en trouver un par exemple 2 mais tous les entiers naturels conviennent).***

Annexe 2. Fiche sur négation et quantificateurs, G. Kel Notter

Exercice : (d'après l'exercice 29 p29, manuel Repères)
f est une fonction définie sur [-2 ;3] dont on donne la représentation graphique.



Dans le tableau suivant, les énoncés de la première ligne ne sont pas quantifiés. Quatre quantificateurs sont proposés dans la première colonne des lignes suivantes. Cocher les quantificateurs permettant d'obtenir un énoncé vrai.

	$f(x)=0$	$f(x)<0$	$f(x)=2$	$f(x)\neq 2$	$f(x)=-3$	$f(x)\geq -3$
Pour tout $x\in[-2\,;3]$						
Il existe au moins un $x\in[-2\,;3]$ tel que						
Il existe un unique $x\in[-2\,;3]$ tel que						
Il n'existe aucun $x\in[-2\,;3]$ tel que						

Deux quantificateurs sont couramment utilisés :
- le quantificateur universel (symbole $\forall$), « $\forall x$… » se lit ***« pour tout x… » ou « quel que soit x… »***,
- le quantificateur existentiel (symbole $\exists$), «$\exists\, x$… » se lit ***« il existe un x tel que… » ce qui signifie « il existe au moins un x tel que… » ou « pour au moins un x… ».***

3) Négation d'une proposition

La négation d'une proposition P est une proposition qui est vraie quand P est fausse et fausse quand P est vraie.
La négation d'une proposition P est notée non P.

a) Cas des propositions non quantifiées

Exemples :

- La négation de « ABCD est un rectangle » est « ABCD n'est pas un rectangle »
- La négation de « $x \in]-\infty, 5[$ » est ***« $x \notin]-\infty, 5[$ ».***
- La négation de « x est positif » est ***« x n'est pas positif » ou « x est strictement négatif ».***

Attention : ***« x est négatif » n'est pas la négation de « x est positif ». En effet 0 étant par convention à la fois positif et négatif, pour x=0 ces deux propositions sont vraies. Par définition, l'une ne peut être la négation de l'autre.***

- La négation de « $x < 5$ » est ***« $x \geq 5$ ».***

Remarques :

- Autrement dit : la négation de « x est strictement inférieur à 5 » est ***« x n'est pas strictement inférieur à 5 ».***

La négation d'une proposition exprimée par une phrase en français à la forme affirmative peut être cette même phrase à la forme négative mais en général on vous demande de la reformuler.

- En terme d'intervalles : la négation de « $x \in]-\infty; 5[$ » est ***« $x \in [5; +\infty[$ »***.

On remarque que : $[5; +\infty[$ est le complémentaire de $]-\infty; 5[$ dans $\mathbb{R}$.

Du point de vue des ensembles, la négation est à associer au complémentaire.
Si I est un ensemble, « $x \notin I$ » signifie « $x \in \overline{I}$ »

b) Cas des propositions quantifiées

Introduction:
On donne le tableau de variation d'une fonction f définie sur [-8 ;1] :

x	-8	-1	1
f(x)	2 ↗	5 ↘	-3

1) Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?
   a. « f est croissante sur [-8 ;1] . » ***Faux***
   b. « f est décroissante sur [-8 ;1] . » ***Faux***
   Remarque : ***« f est décroissante sur [-8 ;1] » n'est pas la négation de « f est croissante sur [-8 ;1] ».***
2) Quelle est la négation de « f est croissante sur [-8 ;1] » ?
   « f n'est pas croissante sur [-8 ;1] »

3) Donner la définition quantifiée de « f est croissante sur [-8 ;1] ».
   Pour tous réels a et b de [-8 ;1] tels que a<b, on a f(a)≤ f(b).
4) Donner la définition quantifiée de la négation de « f est croissante sur [-8 ;1] ».
   Il existe deux réels a et b de [-8 ;1] tels que a<b et f(a)>f(b).

E désigne un ensemble et C une condition pouvant être satisfaite ou non par les éléments de E.

Notons P la proposition « Tous les éléments de E satisfont la condition C ».
La négation de P est ***« Au moins un élément de E ne satisfait pas la condition C ».***
Autrement dit : la négation de « $\forall x \in E, C$ » est ***« $\exists x \in E, non\ C$ ».***

Notons Q la proposition « Au moins un élément de E satisfait la condition C ».
La négation de Q est ***«Tous les éléments de E ne satisfont pas la condition C ».***
Autrement dit : la négation de « $\exists x \in E, C$ » est ***« $\forall x \in E, non\ C$ ».***

Annexe 3. Exercices sur négation et quantificateurs, G. Kel Notter

EXERCICE 1.

Dans cet exercice, f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$, c est un nombre réel.
Chacune des propositions A_1 à A_6 est équivalente à une des propositions B_1 à B_6 données ensuite.
Dire laquelle.

- A_1 : 3 a pour antécédent 2 par f.
- A_2 : Aucun réel n'a pour image c par f.
- A_3 : 3 a au moins un antécédent positif par f.
- A_4 : L'équation $f(x) = c$ d'inconnue réelle x a au moins une solution.
- A_5 : Tous les réels ont une image par f positive ou nulle.
- A_6 : 3 n'a pas d'antécédent par f.

- B_1 : Il existe au moins un réel x tel que $x \geqslant 0$ et $f(x) = 3$.
- B_2 : Pour tout réel x, $f(x) \geqslant 0$.
- B_3 : Pour tout réel x, $f(x) \neq c$.
- B_4 : $f(2) = 3$.
- B_5 : Il n'existe pas de réel x tel que $f(x) = 3$.
- B_6 : Il existe au moins un réel x tel que $f(x) = c$.

EXERCICE 2.

(1) Écrire la négation des propositions A_1 à A_6.
(2) Écrire la négation des propositions B_1 à B_6.
(3) Parmi les 12 propositions que vous venez d'écrire, lesquelles sont équivalentes ?